B. CALVO, J. DOYEN
A. CALVO, F. BOSCHET

exercices d'analyse

1er cycle scientifique, 1re année
préparation aux grandes écoles

Armand Colin _ collection U

Série « Mathématiques » dirigée par André REVUZ

Bernard CALVO, Jacques DOYEN
Maîtres-Assistants à l'Université Paris VII

Adina CALVO, Françoise BOSCHET
Assistantes à l'Université Paris VII

EXERCICES D'ANALYSE

1^er^ cycle, 1^re^ année et Mathématiques Supérieures

LIBRAIRIE ARMAND COLIN
103, boulevard Saint-Michel, Paris 5^e^

AVANT-PROPOS

Le présent volume fait partie d'une série de recueils d'exercices à l'usage des étudiants en Mathématiques et Physique du premier cycle et aussi des élèves des classes préparatoires aux Grandes Ecoles. Il s'adresse plus particulièrement aux étudiants de première année et traite des questions d'Analyse généralement étudiées en M. P. 1. Les exercices ont été regroupés en chapitres dont le sujet est indiqué en tête et ils sont, dans la mesure du possible, classés par ordre de difficulté croissante. On trouvera ci-après une table qui fournit une classification des exercices autour des thèmes principaux de chaque chapitre. Le dernier chapitre se compose de problèmes de synthèse dont certains ont été proposés à l'examen de M. P. 1 à Paris. Nous avons donné explicitement la solution de tous les exercices proposés afin, en particulier, de faciliter le travail de l'étudiant isolé qui utilise cet ouvrage.

Nous espérons que la pratique de ce livre aidera les étudiants à assimiler plus rapidement les notions et méthodes nouvelles introduites au début des études supérieures en Analyse.

L'ordre des chapitres est le même que celui du Cours d'Analyse de MM. Raymond Couty et Jacques Ezra (tome I) paru dans la même série, auquel nous nous référons (par exemple *cf.* C. E., Ch. 9, § I, n° 129, renvoie au numéro 129 du paragraphe I du chapitre 9). Nous avons extrait de cet ouvrage de nombreux énoncés ; certains autres proviennent de devoirs donnés ces dernières années en M. P. à la Faculté des Sciences de Paris ; nous tenons donc à remercier ici MM. Raymond Couty et Jacques Ezra, et tous nos collègues, pour l'aide qu'ils nous ont ainsi apportée.

Nos remerciements vont aussi à MM. André Revuz et Michel Queysanne qui nous ont proposé la rédaction de ce livre et à la librairie Armand Colin pour le soin qu'elle a apporté à la présentation matérielle de l'ouvrage.

A. Calvo, B. Calvo, F. Boschet, J. Doyen

TABLE DES MATIÈRES

1

NOMBRES RÉELS
SUITES DE NOMBRES RÉELS

1.1 Soient a et b deux nombres réels tels que pour tout nombre réel x vérifiant $x > b$, on ait $a \leqslant x$. Démontrer que $a \leqslant b$.

Solution Supposons $a > b$, alors il existe un nombre réel x tel que $b < x < a$ (*cf.* C. E., Ch. 1, § I, n° 6, b). Cet élément x vérifie l'inégalité $x > b$ et ne vérifie pas l'inégalité $a \leqslant x$ ce qui est impossible. Par suite nous ne pouvons avoir $b < a$ et comme $\mathbf{R}$ est un corps totalement ordonné nous avons $a \leqslant b$.

1.2 On dit qu'une partie non vide A, de $\mathbf{R}$, est une partie ouverte si pour tout élément x de A il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle ouvert

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

soit contenu dans A. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

1° Démontrer que l'intervalle ouvert $]a, b[$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}$.

2° Démontrer que le complémentaire, dans $\mathbf{R}$, de l'intervalle fermé $[a, b]$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}$.

Solution 1° Soit t un élément de $]a, b[$. Nous avons alors $a < t < b$; posons

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} \operatorname{Inf}(t - a, b - t),$$

il est clair que ε est un nombre réel strictement positif. D'autre part nous avons $a = t - (t - a)$ donc $a < t - (t - a)/2$ or $\varepsilon \leqslant (t - a)/2$ d'où $a < t - \varepsilon$. Nous démontrerions de manière analogue que $t + \varepsilon < b$; par suite l'intervalle ouvert $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$ est contenu dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

2° Soit x un nombre réel n'appartenant pas à $[a, b]$. Nous avons donc $x > b$ ou $x < a$. Supposons $x < a$, alors x appartient à l'intervalle ouvert $]x - 1, a[$. Nous avons vu au 1° qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ soit contenu dans l'intervalle $]x - 1, a[$. Ce dernier étant inclus dans le complémentaire de $[a, b]$, l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ est contenu dans $\complement_{\mathbf{R}}[a, b]$. Si nous avions $x > b$, la démonstration serait analogue.

1.3 Soit K un corps totalement ordonné (*cf.* C. E., Ch. 1, § I, 1 et 2). On suppose que toute partie non vide et majorée de K admet une borne supérieure (*cf.* C. E., Ch. I, § II, 13). Soient a et b deux éléments de K tels que $a > 0$. Soit A l'ensemble des éléments de K de la forme $na = a + a + \cdots + a$ (n fois) où n décrit l'ensemble des entiers naturels non nuls.

1° Démontrer que si A n'est pas majoré il existe un entier p tel que $pa \geqslant b$.

2° On suppose que A est majoré et on désigne par m la borne supérieure de A. Démontrer qu'il existe un entier q tel que $m - a/2 < qa \leqslant m$. En déduire qu'il est impossible que A soit majoré. Démontrer que K est un corps archimédien (*cf.* C. E. Ch. I, § 1, 3).

Solution 1° Si A n'est pas majoré il existe un élément u de A tel que $u > b$. Par suite il existe un entier p tel que $pa = u$, donc $pa \geqslant b$.

2° La borne supérieure m de A étant le plus petit majorant de A, comme $a > 0$, $m - a/2$ n'est plus un majorant de A donc il existe un élément qa (q élément de $\mathbf{N}$) de A tel que $m - a/2 < qa$. Puisque m est un majorant de A nous avons $qa \leqslant m$ soit $m - a/2 < qa \leqslant m$.

Ajoutons a aux deux membres de la première inégalité, nous obtenons $m + a/2 < (q + 1)\, a$. Or $(q + 1)\, a$ est un élément de A donc nous avons $(q + 1)\, a \leqslant m$, d'où $m + a/2 < m$, ce qui est impossible. A n'est donc pas majoré.

Soient a et b deux éléments de K tels que $a > 0$. Puisque l'ensemble A n'est pas majoré, d'après 1° il existe un entier p tel que $pa \geqslant b$. K est donc un corps archimédien.

1.4 Soit I une partie non vide de $\mathbf{R}$ telle que pour tout couple (x, y) d'éléments de I, vérifiant $x < y$, l'intervalle ouvert $]x, y[$ soit contenu dans I.

1° Démontrer que si I n'est ni majoré ni minoré alors $I = \mathbf{R}$.

2° On suppose I bornée. Démontrer que I est soit un intervalle fermé, soit un intervalle ouvert, soit un semi-segment (*cf.* C. E., Ch. 1, § I, 5).

Solution 1° Nous avons par hypothèse $I \subset \mathbf{R}$. Soit t un nombre réel, puisque I n'est pas minoré (resp. majoré), il existe un élément x (resp. y) de I tel que $x < t$ (resp. $y > t$). Par suite l'intervalle ouvert $]x, y[$ est contenu dans I. Comme t appartient à $]x, y[$, t est un élément de I. Ceci démontre que $\mathbf{R} \subset I$, d'où $I = \mathbf{R}$.

2° Puisque I est bornée et non vide, I admet une borne inférieure a et une borne supérieure b.

Si $a = b$, comme I est non vide, a appartient à I donc $I = [a, a]$, par suite I est un intervalle fermé.

Supposons $a < b$ et étudions le cas où a et b sont éléments de I. Nous avons alors $]a, b[\subset I$ donc $[a, b] \subset I$. Réciproquement soit t un élément de I, comme a (resp. b) est un minorant (resp. un majorant) de I, nous avons $a \leqslant t \leqslant b$ donc t appartient à l'intervalle fermé $[a, b]$, d'où $I \subset [a, b]$ et par suite

$$I = [a, b]\,.$$

Etudions maintenant le cas où ni a ni b n'appartiennent à I, nous allons démontrer que $I =]a, b[$. Soit t un élément de I, alors comme précédemment nous avons $a \leqslant t \leqslant b$ et comme $t \neq a$ et $t \neq b$, t appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$, donc $I \subset]a, b[$. Réciproquement soit t un élément de $]a, b[$. Nous avons $a < t < b$, donc d'après les propriétés des bornes supérieures et inférieures, il existe des éléments x et y de I tels que $a \leqslant x < t$ et $t < y \leqslant b$. Or a et b n'appartiennent pas à I donc nous avons $a < x < t$ et $t < y < b$. D'après l'hypothèse, l'intervalle ouvert $]x, y[$ est contenu dans I dont t appartient à I ce qui prouve que $]a, b[\subset I$ par suite $I =]a, b[$.

Etudions le cas où a appartient à I et où b n'appartient pas à I. Nous allons démontrer que I est le semi-segment $[a, b[$. Soit t un élément de I, alors nous avons $a \leqslant t \leqslant b$. Comme b n'appartient pas à I, $t \neq b$ donc $a \leqslant t < b$, par suite t appartient à $[a, b[$. Réciproquement soit t un élément du semi-segment $[a, b[$. Si $t = a$ alors t appartient à I, sinon nous avons $a < t < b$. Puisque b est la borne supérieure de I il existe un élément y de I tel que $t < y \leqslant b$ et comme b n'appartient pas à I nous avons $t < y < b$. D'après l'hypothèse, l'intervalle $]a, y[$ est contenu dans I donc t appartient à I. Ceci démontre que $[a, b[$ est contenu dans I, et comme nous avons vu que $I \subset [a, b[$ on a $I = [a, b[$.

Nous démontrerions de manière analogue que si a n'appartient pas à I et si b appartient à I, alors I est égal au semi-segment $]a, b]$.

1.5 Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$ telle que A et $\complement_{\mathbf{R}} A$ soient des parties ouvertes de $\mathbf{R}$ (*cf.* exercice 1.2).

1° Démontrer que A n'est pas majorée (on pourra raisonner par l'absurde).

2° Supposons que $\complement_{\mathbf{R}} A$ soit non vide et soit x un élément de cet ensemble. Désignons par B l'ensemble des éléments t de A tels que $x \leqslant t$. Démontrer que B est non vide et admet une borne inférieure m, telle que $m > x$.

3° Démontrer que m ne peut appartenir ni à $\complement_{\mathbf{R}} A$ ni à A. En déduire que $A = \mathbf{R}$.

Solution 1° Supposons A majorée ; puisque A est une partie non vide de $\mathbf{R}$, A admet une borne supérieure M.

Supposons que M appartienne à A, alors par hypothèse il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]M - \varepsilon, M + \varepsilon[$ soit contenu dans A. Or le nombre réel $M + \varepsilon/2$ appartient à cet intervalle donc à A, ce qui est impossible puisque M est un majorant de A.

Supposons que M appartienne à $\complement_{\mathbf{R}} A$, alors il existe nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]M - \varepsilon, M + \varepsilon[$ soit contenu dans $\complement_{\mathbf{R}} A$. D'autre part, puisque M est la borne supérieure de A il existe un élément t de A tel que $M - \varepsilon < t \leqslant M$, ce qui est impossible car cette inégalité prouve que t appartient à $]M - \varepsilon, M + \varepsilon[$ donc à $\complement_{\mathbf{R}} A$. Ces deux cas étant impossibles, A n'est pas majorée.

2° Puisque A n'est pas majorée, il existe un élément t de A tel que $x \leqslant t$ donc B est non vide. Il est clair que B est minoré par x donc B admet une borne inférieure m telle que $m \geqslant x$. Puisque $\complement_{\mathbf{R}} A$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ soit contenu dans $\complement_{\mathbf{R}} A$. Si $m = x$, il existe un élément t de B tel que $m \leqslant t < m + \varepsilon$, par suite t appartient à $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ donc à $\complement_{\mathbf{R}} A$. Ceci est impossible puisque t appartient à B donc à A, par suite $m \neq x$ donc $m > x$.

3° Supposons que m appartienne à $\complement_{\mathbf{R}} A$, alors il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[$ soit contenu dans $\complement_{\mathbf{R}} A$. Nous savons qu'il existe alors un élément t de B tel que $m \leqslant t < m + \varepsilon$. Par suite t devrait appartenir à $\complement_{\mathbf{R}} A$ ce qui est impossible.

Supposons que m appartienne à A, alors il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[$ soit contenu dans A. Posons

$$\varepsilon' = \operatorname{Inf}(\varepsilon, m - x)\,,$$

alors $]m - \varepsilon', m + \varepsilon'[\subset A$ et $x \leqslant m - \varepsilon'$. Le nombre $m - \varepsilon'/2$ appartient à l'intervalle $]m - \varepsilon', m + \varepsilon'[$ donc à A.

D'autre part $x \leqslant m - \varepsilon' < m - \varepsilon'/2$ donc $m - \varepsilon'/2$ appartient à B ce qui est impossible puisque m est la borne inférieure de B.

Nous avons démontré que A n'était pas majorée et qu'il était impossible de trouver un nombre réel n'appartenant pas à A, ceci démontre que $A = \mathbf{R}$.

1.6 On considère la suite de nombres réels (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$ pour tout entier positif n.

1° Démontrer que cette suite est croissante et majorée.

2° Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{2}.$$

Solution 1° La fonction homographique de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \mapsto \frac{3x-1}{2x+3}$$

est croissante pour $x \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est croissante. Démontrons que la suite (u_n) est majorée par $\frac{3}{2}$. Nous avons pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_n - \frac{3}{2} = \frac{3n-1}{2n+3} - \frac{3}{2} = \frac{-11}{2(2n+3)}.$$

Cette différence est négative pour tout entier positif n donc la suite (u_n) est majorée par $\frac{3}{2}$.

2° Soit ε un nombre réel strictement positif. Nous avons

$$u_n - \frac{3}{2} = \frac{-11}{2(2n+3)} \qquad \text{d'où} \qquad \left| u_n - \frac{3}{2} \right| = \frac{11}{2(2n+3)}.$$

Nous avons

$$\frac{11}{2(2n+3)} < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad n > \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2\varepsilon} - 3\right).$$

$\mathbf{R}$ étant un corps archimédien, nous savons qu'il existe un entier p tel que

$$p.1 \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2\varepsilon} - 3\right)$$

donc si $n \geqslant p$ nous aurons $| u_n - \frac{3}{2} | < \varepsilon$. Par suite pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons $| u_n - \frac{3}{2} | < \varepsilon$. Ceci démontre que la suite (u_n) admet la limite $\frac{3}{2}$.

1.7 Etude de la suite $(u_n) = (x^n)$ où x est un nombre réel.

1° On suppose $x > 1$ et on pose $x = 1 + a$. Démontrer par récurrence que pour $n \geqslant 2$ on a $(1 + a)^n > 1 + na$. En déduire que la suite (u_n) a la limite $+ \infty$ lorsque n tend vers $+ \infty$.

2° On suppose $0 < x < 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

3° Etudier les cas $x = 1$ et $x \leqslant 0$.

Solution 1° La formule est vraie pour $n = 2$. Supposons la vraie pour un entier n ; nous avons alors $(1 + a)^n > 1 + na$ d'où

$$(1 + a)^{n+1} > (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)\,a + na^2 .$$

Par suite $(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)\,a$, la formule est donc vraie pour l'entier $n + 1$. Ceci démontre que pour tout entier $n \geqslant 2$ nous avons

$$(1 + a)^n > 1 + na .$$

Soit A un nombre réel positif. Puisque $\mathbf{R}$ est archimédien, il existe un entier p tel que $pa \geqslant A - 1$. Par suite pour tout entier $n \geqslant p$ nous aurons $na + 1 \geqslant A$ d'où $u_n > A$. Ainsi pour tout nombre réel positif A, il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons $u_n > A$. Ceci démontre que la suite (u_n) a la limite $+ \infty$ lorsque n tend vers $+ \infty$.

2° Puisque $0 < x < 1$, en posant $t = 1/x$ nous avons $t > 1$ et

$$u_n = \left(\frac{1}{t}\right)^n = \frac{1}{t^n} .$$

Soit ε un nombre réel strictement positif, nous aurons $1/t^n < \varepsilon$ si $t^n > 1/\varepsilon$. La suite (t^n) ayant la limite $+ \infty$ lorsque n tend vers $+ \infty$, il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons $t^n \geqslant t^p > 1/\varepsilon$, soit $1/t^n < \varepsilon$, d'où $u_n < \varepsilon$. Ceci démontre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

3° Supposons $x = 1$, alors $u_n = 1$ pour tout entier n et la suite (u_n) est convergente et admet la limite 1.

Supposons $x = 0$, alors nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Supposons $- 1 < x < 0$. Posons $t = - 1/x$, alors $t > 1$ et $|\,u_n\,| = t^n$. Nous sommes ramenés au cas étudié au 2°, par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} |\,u_n\,| = 0$ d'où

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 .$$

Supposons $x = - 1$ alors $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = - 1$ pour tout entier n. La suite (u_n) n'est pas convergente.

Supposons $x < -1$. Nous avons $|u_n| = |x^n| = |x|^n$ donc la suite $(|u_n|)$ a la limite $+\infty$ (voir 1°). Mais $u_{2n} \geqslant 1$ et $u_{2n+1} \leqslant -1$ pour tout entier n. La suite (u_n) est donc divergente.

CONCLUSION

Pour $x > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty$.

Pour $x = 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 1$

Pour $-1 < x < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$

Pour $x \leqslant -1$ la suite (u_n) n'a pas de limite.

1.8 Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Etudier la suite

$$(u_n) = \left(\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}\right)$$

(cet exercice utilise les résultats de l'exercice précédent).

Solution Puisque b est un nombre réel non nul posons $k = a/b$, alors

$$u_n = \frac{k^n - 1}{k^n + 1}$$

et k est un nombre réel strictement positif.

Supposons $k = 1$, alors $u_n = 0$ pour tout entier n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Supposons $k < 1$. L'exercice 1.7 nous a permis de démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} k^n = 0\,.$$

Nous allons démontrer que la suite (u_n) a la limite -1. Nous avons :

$$|u_n - (-1)| = \left|\frac{k^n - 1}{k^n + 1} + 1\right| = \left|\frac{2\,k^n}{k^n + 1}\right|.$$

Puisque $k > 0$

$$\left|\frac{2\,k^n}{k^n + 1}\right| = \frac{2\,k^n}{k^n + 1} \leqslant 2\,k^n\,.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif, nous savons (*cf.* exercice 1.7, 1°) qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons $k^n < \varepsilon/2$; alors pour de tels entiers n, $|u_n - (-1)| \leqslant 2k^n < \varepsilon$. La suite (u_n) admet donc la limite -1. Donnons une autre démonstration de ce résultat. Puisque $\lim k^n = 0$ nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} (k^n - 1) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} (k^n + 1) = 1 .$$

Par suite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k^n - 1}{k^n + 1} = \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} (k^n - 1)}{\lim\limits_{n \to +\infty} k^n + 1} = \frac{-1}{1} = -1 .$$

Supposons $k > 1$. Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. Nous avons

$$| u_n - 1 | = \left| \frac{k^n - 1}{k^n + 1} - 1 \right| = \frac{2}{k^n + 1} \leqslant \frac{2}{k^n} .$$

Soit ε un nombre réel strictement positif, l'inégalité $2/k^n < \varepsilon$ est équivalente à $k^n > 2/\varepsilon$. Nous savons (*cf.* exercice 1.7, 1°) qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons $k^n > 2/\varepsilon$, alors pour de tels entiers n on a

$$| u_n - 1 | \leqslant \frac{2}{k^n} < \varepsilon .$$

La suite (u_n) admet donc la limite 1.

CONCLUSION

Pour $a < b$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.

Pour $a = b$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Pour $a > b$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

1.9 ? Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit x un élément de l'intervalle fermé $[a, b]$.

1° Démontrer que pour tout entier n il existe un entier k_n unique vérifiant $0 \leqslant k_n \leqslant 2^n$ et

$$a + k_n \frac{b - a}{2^n} \leqslant x < a + (k_n + 1) \frac{b - a}{2^n} .$$

2° En déduire que tout élément x de l'intervalle $[a, b]$ est limite d'une suite (u_n) où les u_n sont de la forme

$$u_n = a + k_n \frac{b - a}{2^n} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant k_n \leqslant 2^n .$$

Solution 1° Soient n un entier positif ou nul et A l'ensemble des entiers $p \geqslant 0$ vérifiant

$$a + (p+1)\frac{b-a}{2^n} > x\,.$$

Cet ensemble est non vide puisque

$$a + (2^n + 1)\frac{b-a}{2^n} = b + \frac{b-a}{2^n} > b \geqslant x\,.$$

Comme A est une partie non vide de $\mathbf{N}$, A admet un plus petit élément k_n, mais $k_n - 1$ n'appartenant pas à A, nous avons

$$a + (k_n - 1 + 1)\frac{b-a}{2^n} \leqslant x < a + (k_n + 1)\frac{b-a}{2^n}$$

d'où

$$a + k_n \frac{b-a}{2^n} \leqslant x < a + (k_n + 1)\frac{b-a}{2^n}\,.$$

Mais nous avons vu que 2^n est un élément de A donc $k_n \leqslant 2^n$ et comme k appartient à A nous avons $k_n \geqslant 0$. Supposons qu'il existe un autre entier $k'_n \neq k_n$ tel que $0 \leqslant k'_n \leqslant 2^n$ et vérifiant

$$a + k'_n \frac{b-a}{2^n} \leqslant x < a + (k'_n + 1)\frac{b-a}{2^n}$$

alors nous avons $k_n < k'_n$ ou $k'_n < k_n$. Supposons que $k_n < k'_n$ alors k_n et k'_n étant des entiers nous avons $k_n + 1 \leqslant k'_n$ d'où

$$x < a + (k_n + 1)\frac{b-a}{2^n} \leqslant a + k'_n \frac{b-a}{2^n} \leqslant x$$

d'où $x < x$ ce qui est impossible donc k_n est unique. Nous venons ainsi de trouver pour tout entier $n \geqslant 0$, un entier unique k_n vérifiant

$$0 \leqslant k_n \leqslant 2^n \qquad \text{et} \qquad a + k_n \frac{b-a}{2^n} \leqslant x < a + (k_n + 1)\frac{b-a}{2^n}\,.$$

2° Soit x un élément de l'intervalle $[a, b]$. Nous définissons u_n, pour chaque entier $n \geqslant 0$, par

$$u_n = a + k_n \frac{b-a}{2^n}$$

où k_n est l'unique entier vérifiant

$$0 \leqslant k_n \leqslant 2^n \qquad \text{et} \qquad a + k_n \frac{b-a}{2^n} \leqslant x < a + (k_n + 1)\frac{b-a}{2^n}\,.$$

Il est clair que

$$0 \leqslant x - u_n < \frac{b-a}{2^n}.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif nous savons (*cf.* exercice 1.7, 2°) qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{d'où} \qquad 0 \leqslant x - u_n < \varepsilon \qquad \text{soit} \qquad |u_n - x| < \varepsilon$$

ceci démontre que la suite (u_n) admet x pour limite. Par suite, tout point x de l'intervalle $[a, b]$ est limite d'une suite (u_n) où les u_n sont de la forme

$$u_n = a + k_n \frac{b-a}{2^n} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant k_n \leqslant 2^n.$$

1.10 1° Soit (u_n) une suite de nombres réels. On suppose qu'il existe un nombre réel $k > 1$ et un entier n_0 tels que $u_{n_0} > 0$ et $u_{n+1} \geqslant ku_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

2° Soit (v_n) une suite de nombres réels. On suppose qu'il existe un nombre réel k et un entier n_0 tels que $0 < k < 1$ et $|v_{n+1}| \leqslant k |v_n|$ si $n \geqslant n_0$. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0.$$

Solution 1° Nous avons

$$u_{n_0+1} \geqslant ku_{n_0}.$$

Supposons que

$$u_{n_0+q} \geqslant k^q u_{n_0};$$

alors

$$u_{n_0+q+1} \geqslant ku_{n_0+q},$$

donc

$$u_{n_0+q+1} \geqslant k^{q+1} u_{n_0}.$$

Nous venons de démontrer par récurrence que pour tout entier positif q, nous avons $u_{n_0+q} \geqslant k^q u_{n_0}$. Soit A un nombre réel strictement positif, nous savons (*cf.* exercice 1.7, 1°) qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $q \geqslant p$ nous ayons

$$k^q > \frac{A}{u_{n_0}}.$$

Alors pour de tels entiers q,

$$u_{n_0+q} \geqslant k^q u_{n_0} > A.$$

Ainsi pour tout nombre réel $A > 0$ l'entier $p + n_0$ est tel que pour tout entier $n \geqslant p + n_0$ nous ayons $u_n > A$, ce qui démontre que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

2° Nous avons

$$|v_{n_0+1}| \leqslant k |v_{n_0}|$$

Un raisonnement analogue au précédent montre que pour tout entier $q \geqslant 0$ nous avons

$$|v_{n_0+q}| \leqslant k^q |v_{n_0}|.$$

Supposons $v_{n_0} = 0$ alors pour tout entier q nous avons

$$v_{n_0+q} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n \to +\infty} v_n = 0.$$

Supposons $|v_{n_0}| > 0$ et soit ε un nombre réel strictement positif. Nous savons (*cf.* exercice 1.7, 2°) qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $q \geqslant p$ nous ayons

$$k^q < \frac{\varepsilon}{|v_{n_0}|} \qquad \text{d'où} \qquad |v_{n_0+q}| \leqslant k^q |v_{n_0}| < \varepsilon.$$

Ainsi pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, l'entier $p + n_0$ est, tel que pour tout entier $n \geqslant p + n_0$ nous ayons $|v_n| < \varepsilon$. Par suite $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

1.11 Soient l un nombre réel et (u_n) une suite de nombres réels non nuls tels que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs de l. (On pourra utiliser les résultats de l'exercice 1.10).

1° On suppose que $0 \leqslant l < 1$. Démontrer qu'il existe un nombre réel k et un entier n_0 tels que

$$l < k < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k$$

pour tout entier $n \geqslant n_0$. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque $-1 < l \leqslant 0$.

2° On suppose que $|l| > 1$, étudier la limite de la suite (u_n).

3° Donner des exemples de suites convergentes et de suites divergentes telles que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 .$$

4° Soient k un entier relatif et x un nombre réel non nul. Etudier la suite

$$(u_n) = \left(\frac{n^k}{x^n}\right).$$

Solution 1° Puisque $l < 1$, il existe un nombre réel k tel que $l < k < 1$. Par hypothèse la suite $(v_n) = (u_{n+1}/u_n)$ admet l pour limite, donc il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ nous ayons $|v_n - l| < k - l$ d'où

$$-(k - l) < \frac{u_{n+1}}{u_n} - l < k - l$$

soit

$$2l - k < \frac{u_{n+1}}{u_n} < k, \quad \text{or} \quad 2l - k > -k$$

donc

$$-k < \frac{u_{n+1}}{u_n} < k \qquad \text{soit} \qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k .$$

Nous allons démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 .$$

1re *méthode*. Pour tout entier $n \geqslant n_0$ nous avons $|u_{n+1}| < k|u_n|$ alors la démonstration donnée à l'exercice 1.10, 2° nous montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2e *méthode*. Pour tout entier $n \geqslant n_0$ nous avons $|u_{n+1}| < k|u_n|$ or $k < 1$ donc $|u_{n+1}| < |u_n|$. Par suite à partir de l'entier n_0 la suite $|u_n|$ est décroissante et comme $|u_n| \geqslant 0$ la suite $|u_n|$ admet une limite. Les inégalités se conservent par passage à la limite donc

$$0 \leqslant \lim_{n \to +\infty} |u_{n+1}| \leqslant \lim_{n \to +\infty} k|u_n| .$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} k\,|u_n| = k \lim_{n\to+\infty} |u_n| \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} |u_{n+1}| = \lim_{n\to+\infty} |u_n|\,.$$

Nous avons donc les inégalités

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} |u_n| \leqslant k \lim_{n\to+\infty} |u_n|\,, \qquad \text{mais si} \qquad \lim_{n\to+\infty} |u_n| \neq 0$$

nous obtenons

$$k \lim_{n\to+\infty} |u_n| < \lim_{n\to+\infty} |u_n| \qquad \text{puisque} \qquad k < 1$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| < \lim_{n\to+\infty} |u_n|$$

ce qui est impossible donc

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \qquad \text{soit} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\,.$$

Supposons maintenant que $-1 < l \leqslant 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = -l\,,$$

donc la suite $(|u_n|)$ vérifie les hypothèses précédentes, par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\,.$$

2° Supposons $l > 1$, alors il existe un nombre réel k et un entier n_0 tels que $1 < k < l$ et pour tout entier $n \geqslant n_0$, nous avons

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < l - k\,.$$

Nous avons donc

$$-(l-k) < \frac{u_{n+1}}{u_n} - l < l - k \qquad \text{d'où} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} > k\,,$$

par suite $|u_{n+1}| > k\,|u_n|$ et $|u_{n_0}| > 0$; la suite $(|u_n|)$ vérifie les hypothèses de l'exercice 1.10, 1° donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. D'autre part l'inégalité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k$$

nous montre qu'à partir du rang n_0, tous les termes de la suite conservent le même signe, par suite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{si} \quad u_{n_0} > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{si} \quad u_{n_0} < 0\,.$$

Supposons maintenant $l < -1$, alors la suite $(|u_n|)$ vérifie les hypothèses précédentes donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. D'autre part il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < -l \qquad \text{d'où} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 0\,,$$

ce qui prouve que les termes de la suite changent alternativement de signe. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ la suite u_n est divergente.

3° La suite $(u_n) = (1/n)$ a la limite 0 et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1\,,$$

de même la suite $(u'_n) = (n)$ vérifie l'hypothèse

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = 1$$

et nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} u'_n = +\infty\,.$$

4° Etudions la suite $(u_n) = (n^k/x^n)$. Nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^k}{x^{n+1}}\,\frac{x^n}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{x}\,.$$

Il est clair que pour tout entier relatif k,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = 1 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{x}\,.$$

Si $|1/x| \neq 1$ la discussion précédente nous donne la nature de la suite (u_n).
Supposons que $x = 1$, alors $u_n = n^k$. Si $k > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; si $k = 0$ $u_n = 1$ pour tout entier n, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$; enfin si $k < 0$

$$u_n = \frac{1}{n^{-k}}\,, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\,.$$

Supposons que $x = -1$, alors $u_n = (-1)^n n^k$, par suite $|u_n| = n^k$ donc si $k > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$$

et comme les termes de la suite changent alternativement de signe, la suite (u_n)

est divergente. Si $k = 0$, $u_n = (-1)^n$ et la suite (u_n) est divergente, enfin si $k < 0$

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0\,.$$

CONCLUSION

$$\begin{array}{lll}
\text{Si} \quad x > 1 & & \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \\
\text{Si} \quad x = 1 & \begin{cases} k > 0 \\ k = 0 \\ k < 0 \end{cases} & \begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{array} \\
\text{Si} \quad 0 < x < 1 & & \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\
\text{Si} \quad -1 < x < 0 & & \text{la suite } (u_n) \text{ est divergente} \\
\text{Si} \quad x = -1 & \begin{cases} k \geqslant 0 \\ k < 0 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{la suite } (u_n) \text{ est divergente} \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{array} \\
\text{Si} \quad x < -1 & & \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\,.
\end{array}$$

1.12 Soit (u_n) une suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel l. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite (v_n), définie par

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$, est convergente et admet la limite l.

1° Soit ε un nombre réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ on ait

$$|u_p - l| + |u_{p+1} - l| + \cdots + |u_n - l| < n\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

2° L'entier p étant celui trouvé précédemment, démontrer qu'il existe un entier q tel que pour tout entier $n \geqslant q$ on ait

$$\left|(u_1 - l) + (u_2 - l) + \cdots + (u_{p-1} - l)\right| < n\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

3° Déduire de ce qui précède que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

Solution 1° La suite (u_n) étant convergente il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons $|u_n - l| < \varepsilon/2$, alors comme la somme

$$|u_p - l| + |u_{p+1} - l| + \cdots + |u_n - l|$$

comporte $n - p + 1$ termes nous avons

$$|u_p - l| + |u_{p+1} - l| + \cdots + |u_n - l| < (n - p + 1)\frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2}.$$

2° Puisque **R** est un corps archimédien il existe un entier positif q tel que

$$q.1 \geqslant 4\frac{|(u_1 - l) + (u_2 - l) + \cdots + (u_{p-1} - l)|}{\varepsilon}$$

soit

$$q > 2\frac{|(u_1 - l) + (u_2 - l) + \cdots + (u_{p-1} - l)|}{\varepsilon}$$

d'où l'inégalité

$$|(u_1 - l) + (u_2 - l) + \cdots + (u_{p-1} - l)| < n\frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout entier $n \geqslant q$.

3° Nous avons

$$v_n - l = \frac{(u_1 - l) + (u_2 - l) + \cdots + (u_n - l)}{n}.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif, nous avons vu au 1° qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons

$$|u_p - l| + |u_{p+1} - l| + \cdots + |u_n - l| < n\frac{\varepsilon}{2}.$$

De même nous avons vu au 2° qu'il existe un entier q tel que pour tout entier $n \geqslant q$ nous ayons

$$|(u_1 - l) + (u_2 - l) + \cdots + (u_{p-1} - l)| < n\frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $v = \operatorname{Sup}(p, q)$; alors pour tout entier $n \geqslant v$ nous avons

$$|v_n - l| \leqslant \frac{|(u_1 - l) + (u_2 - l) + \cdots + (u_{p-1} - l)|}{n} + \frac{|u_p - l| + |u_{p+1} - l| + \cdots + |u_n - l|}{n},$$

d'où $|v_n - l| < \varepsilon$. Ceci démontre que la suite (v_n) est convergente et admet la limite l.

1.13 1° Soit g une application *strictement* croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $g(n) \geqslant n$.

2° Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \quad \text{et} \quad u_n \geqslant v_n$$

pour tout entier positif n. Démontrer que toute suite extraite de la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$.

Solution 1° Nous allons démontrer la relation par récurrence. Il est clair que $g(0) \geqslant 0$. Supposons que $g(n) \geqslant n$ alors puisque l'application g est strictement croissante, $g(n+1) > g(n) \geqslant n$; donc nous avons $g(n+1) > n$. Mais $g(n+1)$ est un entier d'où $g(n+1) \geqslant n+1$. L'inégalité est donc vraie pour tout entier n.

2° Soit $(u_{g(n)})$ une suite extraite de la suite (u_n). La fonction g est donc une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$. Soit A un nombre réel strictement positif, puisque $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons $v_n \geqslant A$. Mais d'après ce que nous avons vu au 1°, $g(n) \geqslant n$ donc $v_{g(n)} \geqslant A$ d'où $u_{g(n)} \geqslant v_{g(n)} \geqslant A$. Ainsi pour tout nombre réel $A > 0$, il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons $u_{g(n)} \geqslant A$, ceci démontre que la suite $(u_{g(n)})$ admet la limite $+\infty$.

1.14 Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Solution Nous savons que si une suite (v_n) de nombres réels est convergente et admet pour limite un nombre réel v, alors toute suite extraite de la suite (v_n) est convergente et admet v comme limite.

La suite (u_{6n}) est extraite des suites (u_{2n}) et (u_{3n}), donc cette suite est convergente et admet une limite qui est la même que celle des suites (u_{2n}) et (u_{3n}) d'où

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim_{n \to +\infty} u_{3n} .$$

La suite (u_{6n+3}) est extraite des suites (u_{2n+1}) et (u_{3n}) donc comme précédemment nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_{3n} .$$

Par suite

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} .$$

Notons l la limite commune aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Soit ε un nombre réel strictement positif alors il existe un entier n_1 (resp. n_2) tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$ (resp. $n \geqslant n_2$) nous ayons $| u_{2n} - l | < \varepsilon$ (resp. $| u_{2n+1} - l | < \varepsilon$). Posons $n_0 = \text{Sup}\,(2\,n_1, 2\,n_2 + 1)$ alors pour tout entier $n \geqslant n_0$ nous avons $| u_n - l | < \varepsilon$ ce qui démontre que la suite (u_n) admet la limite l. La suite (u_n) est donc une suite convergente.

1.15 Soit (u_n) la suite de nombres réels, définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} .$$

En considérant la différence $u_{2n} - u_n$ démontrer que la suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.

Solution Nous savons qu'une suite (u_n) est une suite de Cauchy si et seulement si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n tel que, pour tout couple (p, q) d'entiers vérifiant $p \geqslant q \geqslant n$ nous ayons $| u_p - u_q | < \varepsilon$. Par conséquent pour démontrer que la suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy il faut et il suffit de trouver un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier n, il existe un couple (p, q) d'entiers vérifiant $p \geqslant q \geqslant n$ et $| u_p - u_q | \geqslant \varepsilon$. Nous avons

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2\,n} ;$$

cette somme comprend n termes qui sont minorés par $\dfrac{1}{2\,n}$ donc

$$u_{2n} - u_n \geqslant n \frac{1}{2\,n} = \frac{1}{2} .$$

Ainsi pour le nombre réel $\frac{1}{2}$, quel que soit l'entier $n \geqslant 0$ le couple d'entiers $(2\,n, n)$ vérifie $2\,n \geqslant n$ et $n \geqslant n$ et, $| u_{2n} - u_n | \geqslant \frac{1}{2}$ ce qui démontre que la suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.

1.16 Soit k un nombre réel tel que $0 < k < 1$. Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ on ait $| u_{n+2} - u_{n+1} | \leqslant k \, | u_{n+1} - u_n |$.

1° Démontrer que $| u_{n+1} - u_n | \leqslant k^n \, | u_1 - u_0 |$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

2° Démontrer que si p et q sont deux entiers tels que $p \geqslant q \geqslant 0$ alors

$$|u_p - u_q| \leqslant k^q \frac{|u_1 - u_0|}{1-k}.$$

3° Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est une suite de Cauchy.

Solution 1° Démontrons l'inégalité par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$ il est clair que l'inégalité est vraie. Supposons que

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0| \quad \text{alors} \quad |u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant k\,|u_{n+1} - u_n|$$

donc $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant k^{n+1} |u_1 - u_0|$. L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

2° Nous avons

$$u_p - u_q = (u_p - u_{p-1}) + (u_{p-1} - u_{p-2}) + \cdots + (u_{q+1} - u_q),$$

d'où

$$|u_p - u_q| \leqslant |u_p - u_{p-1}| + |u_{p-1} - u_{p-2}| + \cdots + |u_{q+1} - u_q|,$$

par suite

$$|u_p - u_q| \leqslant (k^{p-1} + k^{p-2} + \cdots + k^q)\,|u_1 - u_0|.$$

Or nous savons que

$$k^{p-1} + k^{p-2} + \cdots + k^q = k^q\left(\frac{1 - k^{p-q}}{1-k}\right) \qquad \text{et} \qquad 0 < k < 1$$

donc

$$|u_p - u_q| \leqslant k^q \frac{|u_1 - u_0|}{1-k}.$$

3° Si $u_1 = u_0$ alors $u_n = u_0$ pour tout entier $n \geqslant 0$, par conséquent la suite (u_n) admet la limite u_0 donc la suite (u_n) est une suite de Cauchy. Supposons $u_1 \neq u_0$ et soit ε un nombre réel strictement positif. Nous savons (*cf.* exercice 1.7, 2°) qu'il existe un entier n tel que pour tout entier $q \geqslant n$ nous ayons

$$k^q < \varepsilon \frac{1-k}{|u_1 - u_0|}.$$

Par suite, pour tout couple d'entiers (p, q) vérifiant $p \geqslant q \geqslant n$ nous avons $|u_p - u_q| < \varepsilon$. Ceci achève de démontrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy.

1.17 Soit (u_n) une suite *décroissante* telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ on ait $u_n \geqslant 0$; on suppose de plus que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. On pose

$$v_n = u_0 - u_1 + u_2 + \cdots + (-1)^n u_n .$$

1° Soient q et k deux entiers positifs. Démontrer que

$$u_q - u_{q+1} + u_{q+2} + \cdots + (-1)^k u_{q+k} \geqslant 0 .$$

2° Démontrer que la suite (v_n) est une suite de Cauchy.

Solution 1° Nous allons démontrer l'inégalité par récurrence sur l'entier k. Si $k = 0$ il est clair que l'inégalité est vraie. Supposons la relation vraie jusqu'à l'entier $k - 1$; alors, ou bien k est pair et puisque $u_{q+k} \geqslant 0$ nous avons

$$u_q - u_{q+1} + \cdots + (-1)^k u_{q+k} = \left(u_q - u_{q+1} + \cdots + (-1)^{k-1} u_{q+k-1}\right) + u_{q+k}$$

donc

$$u_q - u_{q+1} + \cdots + (-1)^k u_{q+k} \geqslant 0 ;$$

ou bien k est impair et puisque $u_{q+k-1} - u_{q+k} \geqslant 0$ nous avons

$$u_q - u_{q+1} + \cdots + (-1)^k u_{q+k} = \left(u_q - u_{q+1} + \cdots + (-1)^{k-2} u_{q+k-2}\right) + \\ + (u_{q+k-1} - u_{q+k})$$

donc

$$u_q - u_{q+1} + \cdots + (-1)^k u_{q+k} \geqslant 0 .$$

2° Calculons $v_{q+k} - v_q$. Si $k \geqslant 2$ nous avons

$$v_{q+k} - v_q = (-1)^{q+1} u_{q+1} + (-1)^{q+2} u_{q+2} + \cdots + (-1)^{q+k} u_{q+k}, \quad \text{d'où}$$

$$v_{q+k} - v_q = (-1)^{q+1} \left[u_{q+1} - u_{q+2} + \cdots + (-1)^{k-1} u_{q+k}\right].$$

Or nous avons vu que $\left[u_{q+1} - u_{q+2} + \cdots + (-1)^{k-1} u_{q+k}\right] \geqslant 0$ donc

$$| v_{q+k} - v_q | = \left[u_{q+1} - u_{q+2} + \cdots + (-1)^{k-1} u_{q+k}\right]$$

donc

$$| v_{q+k} - v_q | = \left[u_{q+1} - (u_{q+2} - u_{q+3} + \cdots + (-1)^{k-2} u_{q+k})\right].$$

Nous avons vu que $u_{q+2} - u_{q+3} + \cdots + (-1)^{k-2} u_{q+k} \geqslant 0$ donc

$$| v_{q+k} - v_q | \leqslant u_{q+1} .$$

Il est clair que cette dernière inégalité est vraie pour $k = 1$ et $k = 0$ donc pour tout entier $k \geqslant 0$ nous avons $| v_{q+k} - v_q | \leqslant u_{q+1}$. Soit ε un nombre réel strictement positif, puisque la suite (u_n) admet la limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$, il existe un entier n tel que pour tout entier $m \geqslant n$ nous ayons $|u_m| < \varepsilon$ soit $u_m < \varepsilon$. Par suite pour tout couple d'entiers (p, q), vérifiant $p \geqslant q \geqslant n-1$ nous avons $|v_p - v_q| \leqslant u_{q+1} < \varepsilon$. Nous venons ainsi de démontrer que la suite (v_n) est une suite de Cauchy.

1.18 Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = a, v_0 = b$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{pour tout entier} \qquad n \geqslant 0 .$$

1° Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$u_0 \leqslant u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leqslant v_0 .$$

2° Démontrer que

$$v_n - u_n \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n} \qquad \text{pour tout entier} \qquad n \geqslant 0 .$$

En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.

Solution 1° Il est clair que tous les termes des deux suites sont des nombres réels strictement positifs. Nous allons démontrer les inégalités proposées par récurrence sur l'entier n.

Pour $n = 0$, il est clair que

$$u_0 < \sqrt{u_0 v_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{u_0 + v_0}{2} < v_0 .$$

Démontrons que

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} .$$

En élevant au carré les deux membres de cette inégalité, nous obtenons

$$4\,ab < (a+b)^2$$

soit $0 < a^2 - 2\,ab + b^2$ ce qui est vérifié, par suite

$$u_0 \leqslant u_0 < u_1 < v_1 < v_0 \leqslant v_0 .$$

Supposons les inégalités vraies jusqu'à l'ordre $n-1$. Nous avons

$$u_0 \leqslant u_{n-1} < u_n < v_n < v_{n-1} \leqslant v_0 .$$

Mais comme précédemment nous avons

$$u_n < \sqrt{u_n v_n}, \quad \frac{u_n + v_n}{2} < v_n \quad \text{ainsi que} \quad \sqrt{u_n v_n} < \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Par suite nous avons

$$u_0 \leqslant u_{n-1} < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n < v_{n-1} \leqslant v_0$$

soit $u_0 \leqslant u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leqslant v_0$, l'inégalité est donc vraie pour l'entier n d'où la relation $u_0 \leqslant u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leqslant v_0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

2° Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence. Il est clair que

$$v_0 - u_0 \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^0}.$$

Supposons que nous ayons

$$v_n - u_n \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n}.$$

Nous avons

$$\frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$$

car après simplification nous obtenons $-\sqrt{u_n v_n} \leqslant -u_n$ ce qui est vérifié. Par suite

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^{n+1}}$$

ce qui démontre que

$$v_n - u_n \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n} \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant 0.$$

Nous savons (*cf.* exercice 1.7, 2°) que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Or

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n}$$

d'où par passage à la limite

$$0 \leqslant \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{v_0 - u_0}{2^n}\right) \quad \text{soit} \quad \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

D'autre part la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et ces deux suites vérifient $u_n < v_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Ces suites sont donc des suites adjacentes, par suite elles sont convergentes et admettent la même limite (*cf.* C.E., Ch. 1, § II, 15).

1.19 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels telles que pour tout entier $n \geqslant 0$ on ait $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

1° Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes. Soit a (resp. b) la limite de la suite (a_n) (resp. (b_n)) ; démontrer que $a \leqslant b$.

2° Démontrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] = [a, b] .$$

3° On suppose que $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$. Démontrer que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$ est réduite à un seul nombre réel. (Il ne s'agit pas dans cette dernière question d'utiliser le théorème sur les suites adjacentes.)

Solution 1° Il est clair que pour tout entier $n \geqslant 0$ nous avons

$$a_0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_0 .$$

La suite (a_n) est croissante et majorée par b_0 donc elle est convergente. La suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0 donc elle est convergente.

Soit p un entier, alors pour tout entier $n \geqslant p$ nous avons $a_p \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_p$ donc $a_p \leqslant b_n$, il est d'autre part bien clair que $a_p \leqslant b_n$ pour $n \leqslant p$ donc a_p est un minorant de la suite (b_n) d'où

$$a_p \leqslant \lim_{n \to +\infty} b_n .$$

Ce raisonnement étant vrai pour tout entier p, nous avons $a_p \leqslant b$ pour tout entier p d'où par passage à la limite, $\lim_{p \to +\infty} a_p \leqslant b$ soit $a \leqslant b$.

2° Nous savons que $a = \operatorname{Sup}_{n \in \mathbf{N}} \{ a_n \}$ et $b = \operatorname{Inf}_{n \in \mathbf{N}} \{ b_n \}$ (*cf.* C.E., Ch.1, § II, 14). Par suite pour tout entier $n \geqslant 0$ nous avons $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$ d'où

$$[a, b] \subset [a_n, b_n]$$

ce qui prouve que

$$[a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] .$$

Réciproquement nous allons démontrer que si x n'appartient pas à l'intervalle $[a, b]$ alors x n'appartient pas à $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$. Supposons $x < a$ (le raisonnement est analogue si $x > b$), puisque a est la borne supérieure de l'ensemble des a_n pour tous les entiers $n \geqslant 0$, il existe un entier p tel que $x < a_p \leqslant a$. Par suite x n'appartient pas à l'intervalle fermé $[a_p, b_p]$ donc x n'appartient pas à l'intersection de tous les intervalles $[a_n, b_n]$. Ceci démontre que

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] \subset [a, b]$$

donc nous avons

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] = [a, b] .$$

3° Nous allons démontrer que $a = b$. Nous savons que $a \leqslant b$, supposons que $a < b$ et posons $\varepsilon = b - a$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$, il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ nous ayons $|b_n - a_n| < \varepsilon$ soit $b_n - a_n < \varepsilon$ puisque $b_n \geqslant a_n$. Or nous avons vu au début de la 2e question que pour tout entier n nous avons $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$, par suite $b_n - a_n \geqslant b - a$. Alors pour tout entier $n \geqslant p$ nous avons $b_n - a_n < \varepsilon$ et $b_n - a_n \geqslant \varepsilon$ ce qui est impossible. Ceci démontre que $a = b$, donc $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$ est réduite à un seul nombre réel.

1.20

On se propose de démontrer le théorème suivant : « De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une suite convergente ».

Soit (u_n) une suite de nombres réels ; on suppose que cette suite est bornée. On note E l'ensemble des éléments de la suite (*i. e.* l'ensemble des nombres réels u_n pour tous les entiers $n \geqslant 0$).

1° Démontrer le théorème si E est un ensemble fini.

2° On suppose E infini. Soit u un point d'accumulation de E (*cf.* C.E., Ch. 3, 27).

a) Soient n et p deux entiers positifs tels que $n \neq 0$. Démontrer qu'il existe un entier $m \geqslant p$ tel que $|u_m - u| < 1/n$.

b) Construire par récurrence une suite $(u_{g(n)})$, extraite de la suite (u_n), et convergeant vers le nombre réel u.

Solution

1° Puisque E est un ensemble fini, il existe un élément u de E tel que $u_n = u$ pour une infinité d'entiers n. Nous allons construire la suite extraite $(u_{g(n)})$ par récurrence.

Désignons par $g(0)$ le plus petit entier k tel que $u_k = u$.

Supposons défini $g(n-1)$ alors $g(n)$ sera le plus petit entier l, strictement plus grand que $g(n-1)$, tel que $u_l = u$. Il est clair sur cette construction que l'application g est une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$. Par conséquent la suite $(u_{g(n)})$ est extraite de la suite (u_n) et converge vers le nombre réel u.

2° *a*) Puisque u est un point d'accumulation de E, il existe une infinité d'éléments de la suite, tous disctints de u et appartenant à l'intervalle ouvert

$$\left]u - \frac{1}{n},\quad u + \frac{1}{n}\right[.$$

Par suite il existe un entier $m \geqslant p$ tel que $|u_m - u| < 1/n$.

b) Posons $g(0) = 0$. Supposons défini $g(n-1)$. Nous choisirons pour $g(n)$ le plus petit entier q, strictement plus grand que $g(n-1)$, tel que

$$|u_q - u| < \frac{1}{n}.$$

Nous avons ainsi défini une suite $(u_{g(n)})$ extraite de la suite (u_n). Soit ε un nombre réel strictement positif, alors il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, nous ayons $1/n < \varepsilon$; par suite pour de tels entiers n, $|u_{g(n)} - u| < \varepsilon$. La suite $(u_{g(n)})$ admet donc la limite u.

1.21 Soit (u_n) une suite de Cauchy de nombres réels. On se propose de démontrer que cette suite est convergente en utilisant le théorème démontré à l'exercice 1.20.

1° Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

2° Soit $(u_{g(n)})$ une suite extraite de la suite (u_n) et convergeant vers un nombre réel u. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ (on pourra utiliser l'exercice 1.13, 1°).

Solution 1° Puisque la suite (u_n) est une suite de Cauchy, il existe un entier n_0 tel que pour tout couple d'entiers (p, q) vérifiant $p \geqslant q \geqslant n_0$ nous ayons $|u_p - u_q| < 1$ Soit en prenant $q = n_0$, $|u_p - u_{n_0}| < 1$ ou encore $u_{n_0} - 1 < u_p < u_{n_0} + 1$. Soit a' (resp. b') la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble des nombres réels u_k pour $k \leqslant n_0 - 1$. Posons $a = \operatorname{Inf}(a', u_{n_0} - 1)$ et $b = \operatorname{Sup}(b', u_{n_0} + 1)$, il est alors clair que pour tout entier $n \geqslant 0$ nous avons $a \leqslant u_n \leqslant b$; la suite (u_n) est donc bornée.

2° Soit ε un nombre réel strictement positif. D'une part il existe un entier n_0 tel que pour tout couple d'entiers (p, q) vérifiant $p \geqslant q \geqslant n_0$ nous ayons $|u_p - u_q| < \varepsilon/2$. D'autre part il existe un entier n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$ nous ayons $|u_{g(n)} - u| < \varepsilon/2$. Posons $v = \operatorname{Sup}(n_0, n_1)$; alors pour tout entier $n \geqslant v$ nous avons $g(n) \geqslant n$ (*cf.* exercice 1.13, 1°) donc $g(n) \geqslant n_1$, par suite $|u_{g(n)} - u| < \varepsilon/2$. De même puisque $g(n) \geqslant n \geqslant n_0$ nous avons

$$|u_{g(n)} - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous avons $u_n - u = (u_n - u_{g(n)}) + (u_{g(n)} - u)$ d'où

$$| u_n - u | \leqslant | u_n - u_{g(n)} | + | u_{g(n)} - u | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Ainsi pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier ν tel que pour tout entier $n \geqslant \nu$ nous ayons $| u_n - u | < \varepsilon$; ceci démontre que la suite (u_n) est convergente.

2

FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

2.1 Soient x un nombre réel et α un nombre réel strictement positif. On considère une application f définie sur l'intervalle ouvert $]x-\alpha, x+\alpha[$ et à valeurs réelles. Démontrer que si $f(x+h)$ admet une limite finie l lorsque h tend vers 0, alors $\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Solution 1re *démonstration* : Soit ε un nombre réel strictement positif. Puisque

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = l\,,$$

il existe un nombre réel $\eta > 0$, tel que pour tout nombre réel h vérifiant $0 < |h| < \eta$, nous ayons $|f(x+h) - l| < \varepsilon/2$. Mais

$$f(x+h) - f(x-h) = \big(f(x+h) - l\big) + \big(l - f(x-h)\big)\,,$$

donc

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leqslant |f(x+h) - l| + |l - f(x-h)|\,;$$

par suite si $0 < |h| < \eta$ nous aurons

$$|f(x+h) - f(x-h)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout nombre réel h vérifiant $0 < |h| < \eta$, nous ayons $|f(x+h) - f(x-h)| < \varepsilon$. Ceci démontre que

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0 .$$

2e *démonstration* : Nous avons

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} f(x-h) = l .$$

D'autre part

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)] = \lim_{h \to 0} f(x+h) - \lim_{h \to 0} f(x-h) ;$$

par suite

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0 .$$

Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par $f(x) = 1/x^2$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Nous avons $f(h) - f(-h) = 0$ donc

$$\lim_{h \to 0} f(0+h) - f(0-h) = 0 .$$

D'autre part $\lim_{h \to 0} f(0+h) = +\infty$ donc la réciproque est fausse.

2.2 Calculer les limites suivantes

1°
$$\lim_{x \to a} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où a est un nombre réel et a_i un nombre réel pour $0 \leqslant i \leqslant n$.

2°
$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

où n est un entier naturel et x et h des nombres réels.

3°
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

où m et n sont des entiers positifs et a_i et b_j des nombres réels pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant m$; on suppose de plus que $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

4°
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} .$$

5°
$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} .$$

Solution 1° Nous savons (*cf.* C. E., Ch. 4, § 42, *e*) que

$$\lim_{x \to a} x^k = a^k, \quad \lim_{x \to a} a_k x^k = a_k a^k$$

et

$$\lim_{x \to a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0 .$$

2° Nous avons d'après la formule du binôme

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1} h + h^2 Q(h)$$

où Q est un polynôme en h dont les coefficients sont le produit d'un nombre réel et d'une puissance de x. Par suite

$$\frac{(x + h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + hQ(h) .$$

Lorsque h tend vers 0, $Q(h)$ tend vers $Q(0)$ (*cf.* question 1°)

donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} .$$

3° Supposons d'abord $m = n$; en divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction par x^n, nous obtenons :

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}}{b_n + \dfrac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \dfrac{b_1}{x^{n-1}} + \dfrac{b_0}{x^n}} .$$

Mais

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_k}{x^{n-k}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{b_k}{x^{n-k}} = 0$$

pour tous les entiers k tels que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$. Par suite le numérateur admet la limite a_n et le dénominateur la limite b_n d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n} .$$

Supposons maintenant $m > n$; en divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction par x^m nous obtenons :

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \\ = \frac{\dfrac{a_n}{x^{m-n}} + \dfrac{a_{n-1}}{x^{m-n+1}} + \cdots + \dfrac{a_1}{x^{m-1}} + \dfrac{a_0}{x^m}}{b_m + \dfrac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{x^m}}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ le numérateur admet 0 pour limite et le dénominateur admet b_m pour limite, par suite :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = 0 .$$

Supposons enfin $n > m$; en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur nous obtenons :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \\ = Q(x) (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + R(x)$$

où R est un polynôme de degré strictement inférieur à m. Par suite

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \\ = Q(x) + \frac{R(x)}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $R(x)/(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$ tend vers 0 d'après l'étude précédente. Nous savons que le polynôme Q est de la forme

$$Q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + Q'(x)$$

où Q' est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - m - 1$, par suite

$$Q(x) = x^{n-m} \left(\frac{a_n}{b_m} + \frac{Q'(x)}{x^{n-m}} \right).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $Q'(x)/x^{n-m}$ tend vers 0 donc

$$\lim_{x \to +\infty} Q(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} ,$$

par suite

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty \quad \text{si} \quad \frac{a_n}{b_m} > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} Q(x) = -\infty \quad \text{si} \quad \frac{a_n}{b_m} < 0 .$$

CONCLUSION

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad n = m \\ +\infty & \text{si} \quad n > m \quad \text{et} \quad \dfrac{a_n}{b_m} > 0 . \\ -\infty & \text{si} \quad n > m \quad \text{et} \quad \dfrac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$$

4° Nous avons

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1}} .$$

Si $x > 0$ posons $X = 1/x$ alors $\lim\limits_{x\to0+} X = +\infty$ d'où

$$\lim_{x\to0+} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 = \lim_{X\to+\infty} X^2 + X + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to0+} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = \lim_{X\to+\infty} X^2 + X - 1 = +\infty$$

d'où nous déduisons que

$$\lim_{x\to0+} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} = +\infty$$

par suite

$$\lim_{x\to0+} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} = 0 .$$

Si $x < 0$, posons $X = -1/x$ alors $\lim\limits_{x\to0-} X = +\infty$ et nous démontrerions comme précédemment que

$$\lim_{x\to0-} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} = 0 .$$

5º Nous savons que $|\sin u| \leqslant 1$ pour tout nombre réel u. Soit ε un nombre réel strictement positif, alors si $0 < |x| < \varepsilon$ nous avons

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x| < \varepsilon$$

ce qui démontre que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin (1/x) = 0$.

2.3 Démontrer que la fonction réelle f, définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 ,$$

n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

Solution Remarquons tout d'abord que si k est un entier naturel non nul

$$f\left(\frac{1}{2\,k\pi}\right) = 1 \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{1}{(2\,k+1)\,\pi}\right) = -\,1 .$$

Nous allons donner deux démonstrations du résultat.

1re *démonstration* : Nous allons prouver que f ne vérifie pas les hypothèses du critère de Cauchy. Nous devons trouver un nombre réel $\varepsilon > 0$, tel que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, il existe deux nombres réels x et x' vérifiant $0 < |x| < \alpha$ et $0 < |x'| < \alpha$ et pour lesquels nous ayons $|f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon$. Prenons $\varepsilon = 1$ et soit α un nombre réel strictement positif, nous savons qu'il existe un entier k tel que

$$k \geqslant \frac{1}{2\,\pi\alpha} + 1 \quad \text{d'où}\ k > \frac{1}{2\,\pi\alpha} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2\,k\pi} < \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{(2\,k+1)\,\pi} < \alpha .$$

Posons

$$x = \frac{1}{2\,k\pi} \qquad \text{et} \qquad x' = \frac{1}{(2\,k+1)\,\pi} ,$$

alors $|f(x) - f(x')| = 2 > \varepsilon$. La fonction f ne vérifie pas les hypothèses du critère de Cauchy donc cette fonction n'admet pas de limite au point 0.

2e *démonstration* : Nous allons construire une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres réels telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et que la suite $f(x_n)$ n'ait pas de limite. Posons $x_n = 1/n\pi$, il est clair que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, et que $f(x_n) = (-1)^n$, la suite $(f(x_n))$ n'est pas convergente ce qui prouve que f n'admet pas de limite au point 0.

2.4 Soit f une fonction réelle définie sur **R**. On suppose que f est périodique de période T (*cf.* C. E., Ch. 4, § I, 36, g), et que f admet la limite l lorsque x tend vers l'infini. Démontrer que f est la fonction constante de valeur l.

Solution Nous allons donner deux démonstrations.

1re *démonstration* : Supposons f non constante, alors il existe deux nombres réels x et x' tels que $x \neq x'$ et $f(x) \neq f(x')$. Posons

$$\varepsilon = \frac{|f(x') - f(x)|}{3};$$

puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, il existe un nombre réel A tel que pour tout nombre réel $t \geqslant A$ nous ayons $|f(t) - l| < \varepsilon$. Nous savons qu'il existe un entier n_1 tel que $n_1 T > A - x$ et un entier n_2 tel que $n_2 T > A - x'$. Posons $n = \operatorname{Sup}(n_1, n_2)$; alors $nT + x > A$ et $nT + x' > A$ donc $|f(nT + x) - l| < \varepsilon$ et $|f(nT + x') - l| < \varepsilon$ soit $|f(x) - l| < \varepsilon$ et $|f(x') - l| < \varepsilon$. Mais $f(x) - f(x') = (f(x) - l) + (l - f(x'))$ d'où $|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - l| + |l - f(x')|$ soit $|f(x) - f(x')| < 2\varepsilon$.
D'autre part, d'après la valeur de ε nous avons $2\varepsilon < |f(x) - f(x')|$ d'où contradiction ; par suite la fonction f est constante et comme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l\,,$$

f est la fonction constante de valeur l.

2e *démonstration* : Considérons un nombre réel x et soit ε un nombre réel strictement positif. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, il existe un nombre réel A tel que pour tout nombre réel $t \geqslant A$ nous ayons $|f(t) - l| < \varepsilon$. D'autre part il existe un entier n tel que $nT \geqslant A - x$ soit $nT + x \geqslant A$, donc $|f(nT + x) - l| < \varepsilon$ soit $|f(x) - l| < \varepsilon$. Ainsi pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ nous avons $|f(x) - l| < \varepsilon$ d'où $|f(x) - l| = 0$ (*cf.* exercice 1.1). Ceci étant vrai pour tout nombre réel x, f est la fonction constante de valeur l.

2.5 Soient u un nombre réel strictement positif et a un nombre réel. Soit f une fonction réelle définie sur l'ensemble $I_a =]a - u, a + u[- \{a\}$. On suppose que f vérifie les hypothèses du critère de Cauchy au point a, et on se propose de démontrer par une méthode différente de celle utilisée dans (C.E., Ch. 4, § II, 42, c) que la fonction f admet une limite au point a.

1o Démontrer qu'il existe un nombre réel $h > 0$ tel que l'application f soit bornée sur l'ensemble $]a - h, a + h[- \{a\}$.

2° Construire une suite décroissante (α_n) de nombres réels, telle que pour tout couple (x, x') d'éléments de I_a vérifiant $0 < |x - a| < \alpha_n$ et $0 < |x' - a| < \alpha_n$ on ait

$$|f(x) - f(x')| < \frac{1}{2n}.$$

En déduire que

$$\sup_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t) - \inf_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t) \leqslant \frac{1}{n}.$$

3° On pose

$$y_n = \inf_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t) \quad \text{et} \quad z_n = \sup_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t).$$

Démontrer que la famille $\{[y_n, z_n]\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une famille d'intervalles emboîtés. En déduire que l'application f admet une limite au point a.

Solution 1° Puisque la fonction f vérifie les hypothèses du critère de Cauchy au point a, il existe un nombre réel $h > 0$ tel que $h < u$ et pour tout couple (x, x') d'éléments de I_a vérifiant $0 < |x - a| < h$ et $0 < |x' - a| < h$ nous ayons $|f(x) - f(x')| < 1$, soit $f(x') - 1 < f(x) < f(x') + 1$. Soit x'_0 un élément de I_a vérifiant $0 < |x'_0 - a| < h$ alors pour tout élément x de l'ensemble $]a - h, a + h[- \{a\}$ nous avons $f(x'_0) - 1 < f(x) < f(x'_0) + 1$, la fonction f est donc bornée sur l'ensemble $]a - h, a + h[- \{a\}$.

2° Puisque la fonction f vérifie les hypothèses du critère de Cauchy au point a, pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe un nombre réel $\alpha'_n > 0$ tel que pour tout couple (x, x') d'éléments de I_a vérifiant $0 < |x - a| < \alpha'_n$ et $0 < |x' - a| < \alpha'_n$ nous ayons

$$|f(x) - f(x')| < \frac{1}{2n} \quad \text{soit} \quad f(x') - \frac{1}{2n} < f(x) < f(x') + \frac{1}{2n},$$

par suite

$$f(x') - \frac{1}{2n} \leqslant \inf_{0<|t-a|<\alpha'_n} f(t) \leqslant \sup_{0<|t-a|<\alpha'_n} f(t) \leqslant f(x') + \frac{1}{2n},$$

d'où

$$\sup_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t) - \inf_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Les propriétés précédentes sont encore vraies pour tout nombre $\alpha_n \leqslant \alpha'_n$, posons donc $\alpha_n = \text{Inf}(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha_n)$ alors pour tout couple (x, x') d'éléments de I vérifiant $0 < |x - a| < \alpha_n$ et $0 < |x' - a| < \alpha_n$ nous avons

$$|f(x) - f(x')| < \frac{1}{2n}$$

et comme précédemment nous en déduisons que

$$\sup_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t) - \inf_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t) \leqslant \frac{1}{n};$$

d'autre part il est bien clair d'après la définition de α_n que la suite (α_n) est décroissante.

3° Puisque la suite (α_n) est décroissante on a

$$]a - \alpha_{n+1}, a + \alpha_{n+1}[- \{a\} \subset]a - \alpha_n, a + \alpha_n[- \{a\}$$

donc pour tout nombre réel x appartenant à $]a - \alpha_{n+1}, a + \alpha_{n+1}[- \{a\}$ nous avons

$$f(x) \leqslant \sup_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t);$$

$\sup\limits_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t)$ est donc un majorant de l'ensemble des $f(t)$ pour tous les nombres réels t appartenant à l'ensemble $]a - \alpha_{n+1}, a + \alpha_{n+1}[- \{a\}$ par suite

$$\sup_{0<|t-a|<\alpha_{n+1}} f(t) \leqslant \sup_{0<|t-a|<\alpha_n} f(t) \quad \text{soit} \quad z_{n+1} \leqslant z_n .$$

Nous démontrerions de même que $y_n \leqslant y_{n+1}$, par suite pour tout entier $n \geqslant 1$ nous avons $[y_{n+1}, z_{n+1}] \subset [y_n, z_n]$. Puisque pour tout entier $n \geqslant 1$ nous avons $z_n - y_n \leqslant 1/n$ la suite $(z_n - y_n)$ admet la limite 0 lorsque n tend vers l'infini, ainsi la famille $\{[y_n, z_n]\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une famille d'intervalles emboîtés dont la longueur tend vers 0, donc $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}^*} [y_n, z_n]$ est réduite à un seul nombre réel que nous noterons l.

Nous allons démontrer que l est la limite de la fonction f au point a. Soit ε un nombre réel strictement positif, alors il existe un entier n tel que $1/n < \varepsilon$. Pour tout élément x de I_a tel que $0 < |x - a| < \alpha_n$, nous avons

$$y_n \leqslant f(x) \leqslant z_n ;$$

comme $y_n \leqslant l \leqslant z_n$ on a

$$|f(x) - l| \leqslant z_n - y_n \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Par suite pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un nombre réel α_n tel que pour tout élément x de I_a vérifiant $0 < |x - a| < \alpha_n$ nous ayons $|f(x) - l| < \varepsilon$, ceci démontre que la fonction f admet la limite l au point a.

2.6 1° Soit x un nombre réel, démontrer qu'il existe un entier relatif unique, noté $[x]$, tel que $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

2° On considère la fonction réelle f, définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = x[1/x]$. Démontrer que f peut être prolongée par continuité au point 0.

Solution 1° Supposons d'abord $x \geqslant 1$; soit A l'ensemble des entiers n tels que $n > x - 1$, nous savons que A n'est pas vide (car $\mathbf{R}$ est un corps archimédien) donc il admet un plus petit élément $[x]$; $[x] - 1$ n'appartient pas à A donc $[x] - 1 \leqslant x - 1 < [x]$ d'où $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Supposons $x < 1$ et soit B l'ensemble des entiers n tels que $n \geqslant - x$. Cet ensemble est non vide, donc il admet un plus petit élément n_0. Comme $n_0 - 1$ n'appartient pas à B nous avons $n_0 - 1 < - x \leqslant n_0$ d'où $- n_0 \leqslant x < - n_0 + 1$. Si nous posons $[x] = - n_0$ alors nous avons $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

2° Nous allons d'abord étudier la limite de la fonction f à droite du point 0. Nous avons

$$\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \left[\frac{1}{x}\right] + 1$$

d'où

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x}$$

par suite, puisque $x > 0$, $1 - x < x[1/x] \leqslant 1$, d'où $0 \leqslant 1 - x[1/x] < x$. Soit ε un nombre réel strictement positif, alors pour tout nombre réel x vérifiant $0 < |x| < \varepsilon$ nous avons $|1 - x[1/x]| < \varepsilon$ ce qui démontre que

$$\lim_{x \to 0+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 .$$

Nous démontrerions de manière analogue que

$$\lim_{x \to 0-} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 .$$

Considérons la fonction $\bar{f}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $\bar{f}(0) = 1$. Nous avons $\lim\limits_{x \to 0} \bar{f}(x) = \bar{f}(0)$ donc la fonction $\bar{f}$ est continue au point 0, ce qui démontre que la fonction f peut se prolonger par continuité au point 0.

2.7 Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

1° On suppose qu'il existe un nombre réel $k \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant k\,|x|$ pour tout élément de l'ensemble $]-1, 1[- \{0\}$. Démontrer que f est continue au point 0 si et seulement si $f(0) = 0$.

2° Plus généralement, on suppose qu'il existe deux fonctions réelles g et h, définies et continues sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$, et vérifiant $g(0) = h(0)$ et $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout élément x de l'ensemble $]-1, 1[- \{0\}$. Démontrer que f est continue au point 0 si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Solution 1° Démontrons que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Le résultat est vrai si $k = 0$, supposons donc $k > 0$. Soit ε un nombre réel strictement positif, alors pour tout nombre réel x vérifiant $|x| < 1$ et $0 < |x| < \varepsilon/k$ nous avons $|f(x)| \leqslant k|x| < \varepsilon$ ce qui prouve que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Nous savons que la fonction f est continue au point 0 si et seulement si $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, donc f sera continue au point 0 si et seulement si $f(0) = 0$.

2° Démontrons que $\lim_{x \to 0} f(x) = g(0)$.

1re *démonstration* : soit ε un nombre réel strictement positif ; puisque la fonction g (resp. h) est continue au point 0, il existe un nombre réel η_1 (resp. η_2) strictement positif tel que pour tout nombre réel x vérifiant

$$|x| < 1 \quad \text{et} \quad 0 < |x| < \eta_1 \left(\text{resp. } 0 < |x| < \eta_2\right)$$

nous ayons

$$|g(x) - g(0)| < \frac{\varepsilon}{2} \left(\text{resp. } |h(x) - h(0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Posons $\eta = \operatorname{Inf}(\eta_1, \eta_2)$; alors pour tout nombre réel x vérifiant $|x| < 1$ et $0 < |x| < \eta$ nous aurons

$$|g(x) - g(0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad |h(x) - h(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

soit

$$g(0) - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < g(0) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad g(0) - \frac{\varepsilon}{2} < h(x) < g(0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$g(0) - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < g(0) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{donc} \qquad |f(x) - g(0)| < \varepsilon.$$

La fonction f admet donc la limite $g(0)$ au point 0.

2e *démonstration* : Puisque g et h sont des fonctions continues au point 0 nous avons $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = g(0)$; or pour tout nombre réel x vérifiant $0 < |x| < 1$ nous avons $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ donc

$$0 \leqslant f(x) - g(x) \leqslant h(x) - g(x).$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} (h(x) - g(x)) = 0$ nous en déduisons que

$$\lim_{x\to 0} (f(x) - g(x)) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = g(0).$$

La fonction f sera continue au point 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donc f sera continue au point 0 seulement si $f(0) = g(0)$.

2.8 Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur $\mathbf{R}$.

1° Démontrer que l'ensemble N des nombres réels x tels que $f(x) \neq 0$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}$ (*cf.* exercice 1.2).

2° Démontrer que l'ensemble M des nombres réels x tels que $f(x) > g(x)$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}$.

Solution 1° Soit x un nombre réel tel que $f(x) \neq 0$. Supposons $f(x) > 0$, la fonction f étant continue au point x, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout nombre réel t vérifiant $|t - x| < \eta$ nous ayons $|f(t) - f(x)| < f(x)$ soit $f(x) - f(x) < f(t) < f(x) + f(x)$ donc $f(t) > 0$. Par suite pour tout point t de l'intervalle ouvert $]x - \eta, x + \eta[$ nous avons $f(t) > 0$, donc $f(t) \neq 0$. Le raisonnement est analogue si $f(x) < 0$. Nous venons donc de démontrer que pour tout élément x de N il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x - \eta, x + \eta[$ soit contenu dans N, par suite N est une partie ouverte de $\mathbf{R}$.

2° Soit x un nombre réel tel que $f(x) > g(x)$; alors $f(x) - g(x) > 0$. La fonction $f - g$ est continue au point x donc il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout nombre réel t vérifiant $|t - x| < \eta$ nous ayons

$$|(f - g)(t) - (f - g)(x)| < f(x) - g(x)$$

d'où $0 < (f - g)(t)$ soit $f(t) > g(t)$. Ainsi pour tout élément x de M il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x - \eta, x + \eta[$ soit contenu dans M, ce qui démontre que M est une partie ouverte de $\mathbf{R}$.

2.9 Soient a un nombre réel et f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbf{R}$, telle que $f(1) = a$ et telle que pour tout couple (x, x') de nombres réels on ait $f(x + x') = f(x) + f(x')$.

1° Démontrer que $f(n) = na$ pour tout entier relatif n.

2° Démontrer que $f(1/q) = a/q$ pour tout entier $q > 0$; en déduire que $f(r) = ra$ pour tout nombre rationnel r.

3° Démontrer que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels. En déduire que $f(x) = ax$ pour tout nombre réel x.

Solution 1° Soit n un entier strictement positif ; nous avons $n = 1 + 1 + \cdots + 1$ (n fois) donc $f(n) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1)$ (n fois) d'où $f(n) = na$. D'autre part $f(1 + 0) = f(1) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

Soit n un entier strictement négatif ; nous avons

$$0 = f(0) = f(-n + n) = f(-n) + f(n)$$

d'où $f(n) = -f(-n)$, par suite $f(na) = -(-na) = na$; par conséquent $f(n) = na$ pour tout entier relatif n.

2° Soit q un nombre entier strictement positif ; nous avons

$$1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q} \quad (q \text{ fois})$$

d'où

$$f(1) = f\left(\frac{1}{q}\right) + f\left(\frac{1}{q}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{q}\right) \quad (q \text{ fois})$$

par suite

$$a = qf\left(\frac{1}{q}\right) \qquad \text{d'où} \qquad f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{a}{q}.$$

Soit r un nombre rationnel positif, alors il existe deux entiers positifs p et q ($q \neq 0$) tel que

$$r = \frac{p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q} \quad (p \text{ fois}),$$

par suite

$$f(r) = f\left(\frac{1}{q}\right) + f\left(\frac{1}{q}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{q}\right) \ (p \text{ fois}) \quad \text{soit} \quad f(r) = p\frac{a}{q} = ar.$$

Si r est un nombre rationnel négatif alors $f(-r + r) = f(0) = 0$ d'où $f(r) = -f(-r)$ par suite $f(r) = ar$. Ceci démontre que $f(r) = ar$ pour tout nombre rationnel r.

3° Soient x un nombre réel et n un entier strictement positif. Nous savons qu'il existe un nombre rationnel r_n appartenant à l'intervalle $]x - 1/n, x + 1/n[$. Nous pouvons ainsi construire une suite (r_n) de nombres rationnels, telle que pour tout entier $n \geqslant 1$ nous ayons $|x - r_n| < 1/n$; par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} |x - r_n| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{d'où} \quad \lim_{n\to+\infty} |x - r_n| = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{n\to+\infty} r_n = x.$$

La suite (r_n) est donc une suite de nombres rationnels convergeant vers x.

Soit x un nombre réel et (r_n) une suite de nombres rationnels convergeant vers x. Nous avons $f(r_n) = ar_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, donc par passage à la limite : $\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} ar_n$. Mais f est continue au point x et $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right) = f(x)\,,$$

par suite $f(x) = ax$. Ceci démontre que $f(x) = ax$ pour tout nombre réel x.

2.10 On considère l'ensemble A des fonctions réelles f, définies et continues sur $\mathbf{R}$, telles que pour tout couple (x, x') de nombres réels on ait

$$f\left(\frac{x + x'}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(x')]\,.$$

1° Soit f un élément de A tel qu'il existe un couple (x, x') de nombre réels pour lequel $f(x) = f(x') = 0$ et $x < x'$. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2^n$, on a

$$f\left(x + k\,\frac{x' - x}{2^n}\right) = 0\,.$$

En utilisant l'exercice 1.9 démontrer que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle fermé $[x, x']$ on a $f(t) = 0$. En déduire que f est l'application nulle de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

2° Démontrer que la différence de deux fonctions de A est un élément de A. Soit (a, b) un couple de nombres réels, démontrer que la fonction affine h, définie par $h(x) = ax + b$ pour tout nombre réel x, est un élément de A.

3° Démontrer que tout élément de A est une fonction affine de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Solution 1° La propriété est vraie pour $n = 1$ par hypothèse; supposons la vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$. Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 2^n$; ou bien k est de la forme $k = 2\,k'$ où k' est un entier tel que $0 \leqslant k' \leqslant 2^{n-1}$ et alors nous avons

$$f\left(x + k\,\frac{x' - x}{2^n}\right) = f\left(x + k'\,\frac{x' - x}{2^{n-1}}\right) = 0\,;$$

ou bien k est de la forme $k = 2\,k'' + 1$ avec $0 \leqslant k'' \leqslant 2^{n-1} - 1$, alors

$$x + k\,\frac{x' - x}{2^n} = \frac{1}{2}\left[\left(x + k''\,\frac{x' - x}{2^{n-1}}\right) + \left(x + (k'' + 1)\,\frac{x' - x}{2^{n-1}}\right)\right]$$

d'où

$$f\left(x + k\,\frac{x' - x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(x + k''\,\frac{x' - x}{2^{n-1}}\right) + f\left(x + (k'' + 1)\,\frac{x' - x}{2^{n-1}}\right)\right]$$

donc

$$f\left(x + k\frac{x' - x}{2^n}\right) = 0 .$$

La propriété est donc vraie pour l'entier n, par suite cette propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Dans l'exercice 1.9 nous avons vu que tout nombre réel t de l'intervalle $[x, x']$ est limite d'une suite (x_n) où

$$x_n = x + k_n \frac{x' - x}{2^n} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant k_n \leqslant 2^n .$$

La fonction f étant continue au point x, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = f(x) .$$

Mais $f(x_n) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$ donc $f(x) = 0$ par suite la restriction de la fonction f à l'intervalle $[x, x']$ est nulle. Soit t un élément de $[x, x']$, nous avons $f(t) = 0$; supposons que $f\big(t + k(x' - x)\big) = 0$ pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ alors

$$t + n(x' - x) = \tfrac{1}{2}[t + (n - 1)(x' - x) + t + (n + 1)(x' - x)]$$

par suite

$$f\big(t + n(x' - x)\big) = f\big(\tfrac{1}{2}[t + (n - 1)(x' - x) + t + (n + 1)(x' - x)]\big)$$

d'où $0 = \frac{1}{2}[f(t + (n - 1)(x' - x)) + f(t + (n + 1)(x' - x))]$ par conséquent $f\big(t + (n + 1)(x' - x)\big) = 0$. Ceci démontre que $f\big(t + n(x' - x)\big) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Nous démontrerions de même que $f\big(t + n(x' - x)\big) = 0$ pour tout entier $n \leqslant 0$. La fonction f est une fonction périodique de période $x' - x$; comme cette fonction est nulle sur l'intervalle $[x, x']$ de longueur $x' - x$, elle est nulle sur $\mathbf{R}$.

2° Soient f et g deux fonctions de A et (x, x') un couple de nombres réels. Nous avons

$$f\left(\frac{x + x'}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(x')] \qquad \text{et} \qquad g\left(\frac{x + x'}{2}\right) = \frac{1}{2}[g(x) + g(x')]$$

d'où

$$(f - g)\left(\frac{x + x'}{2}\right) = \frac{1}{2}[(f - g)(x) + (f - g)(x')] ,$$

par suite la fonction $f - g$ est un élément de A.

Soit (x, x') un couple de nombres réels, nous avons

$$a\left(\frac{x + x'}{2}\right) + b = \frac{1}{2}[(ax + b) + (ax' + b)]$$

ce qui démontre que la fonction affine h est un élément de A.

3° Soit f un élément de A. Considérons les nombres réels $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$; alors la fonction g, définie par $g(x) = f(x) - (ax + b)$ pour tout nombre réel x, est un élément de A et d'après le choix des nombres a et b, nous avons

$$g(0) = g(1) = 0 .$$

D'après ce qui précède nous savons que la fonction g est la fonction nulle donc $f(x) = ax + b$ pour tout nombre réel x. Ceci démontre que toute fonction f appartenant à A est de la forme $f(x) = (f(1) - f(0))\,x + f(0)$, *i.e.* f est une fonction affine de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

2.11 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a, b]$. On définit la fonction M par

$$M(x) = \operatorname*{Sup}_{a \leqslant t \leqslant x} f(t)$$

pour tout élément x de $[a, b]$. Démontrer que si la fonction f est continue en un point x_0 de $[a, b]$ et si $f(x_0) < M(x_0)$, alors il existe un intervalle ouvert non vide, contenant le point x_0 sur lequel la fonction M est constante.

Solution Puisque la fonction f est continue au point x_0, il existe un nombre réel $\eta > 0$, tel que pour tout élément x de $[a, b]$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$ nous ayons

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{M(x_0) - f(x_0)}{2} \qquad \text{d'où} \qquad f(x) < \frac{M(x_0) + f(x_0)}{2}$$

par suite $f(x) < M(x_0)$. Nous allons démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $[a, b]$ et à $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ nous avons $M(x) = M(x_0)$. Soit x un élément de $[a, b]$ appartenant à $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$; pour tout nombre réel t appartenant à $[a, x_0]$ nous avons $f(t) \leqslant M(x_0)$ et pour tout élément t de $[a, b]$ appartenant à $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ nous avons $f(t) < M(x_0)$, par suite $M(x_0)$ est un majorant de l'ensemble des $f(t)$ pour tous les éléments t de l'intervalle fermé $[a, x]$. Soit ε un nombre réel strictement positif ; posons

$$\varepsilon' = \operatorname{Inf}\left(\varepsilon, \frac{M(x_0) - f(x_0)}{2}\right);$$

puisque $M(x_0) = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant x_0} f(t)$, il existe un élément ξ de l'intervalle $[a, x_0]$ tel que $M(x_0) - \varepsilon' < f(\xi) \leqslant M(x_0)$ d'où $M(x_0) - \varepsilon < f(\xi)$. Mais

$$\varepsilon' \leqslant \frac{M(x_0) - f(x_0)}{2} \qquad \text{donc} \qquad M(x_0) - \varepsilon \geqslant \frac{M(x_0) + f(x_0)}{2}$$

d'où

$$f(\xi) > \frac{M(x_0) + f(x_0)}{2}$$

ce qui prouve que le point ξ ne peut appartenir à l'intervalle ouvert

$$]x_0 - \eta\,, \quad x_0 + \eta[$$

donc ξ appartient à $[a, x_0 - \eta]$. Par suite, pour chaque élément x de $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $M(x_0)$ est un majorant de l'ensemble des $f(t)$ pour tous les éléments t de l'intervalle $[a, x]$ et quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un élément ξ de l'intervalle $[a, x]$ tel que $M(x_0) - \varepsilon < f(\xi) \leqslant M(x_0)$. Ceci démontre que $M(x_0) = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant x} f(t)$ pour tout élément x de l'intervalle ouvert $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, par suite la fonction M est constante et égale à $M(x_0)$ sur l'intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

2.12 Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle fermé $[0, 1]$ qui prend ses valeurs dans cet intervalle. On suppose que pour tout couple (x, x') d'éléments de $[0, 1]$ on a

$$|f(x) - f(x')| \geqslant |x - x'|\,.$$

Montrer que f est l'une des fonctions f_1, f_2 définies en posant pour chaque élément x de $[0, 1]$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = 1 - x\,.$$

Solution Comme f prend ses valeurs dans $[0, 1]$, on a pour chaque couple (x, x') d'éléments de $[0, 1]$

$$|f(x) - f(x')| \leqslant 1\,.$$

En particulier $|f(0) - f(1)| \leqslant 1$ et il résulte de l'hypothèse que

$$|f(0) - f(1)| \geqslant 1 \qquad \text{donc} \qquad |f(0) - f(1)| = 1$$

et par suite on a soit $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, soit $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

Lorsque $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, si $x \in [0, 1]$ on a

$$f(x) = |f(x) - f(0)| \geqslant |x - 0| = x$$

et

$$1 - f(x) = |f(1) - f(x)| \geqslant |1 - x| = 1 - x$$

de la seconde inégalité il résulte que $f(x) \leqslant x$ donc $f(x) = x$ et $f = f_1$.

Lorsque $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ si $x \in [0, 1]$ on a

$$f(x) = |f(x) - f(1)| \geqslant |x - 1| = 1 - x$$

et

$$1 - f(x) = |f(0) - f(x)| \geqslant |0 - x| = x$$

de la seconde inégalité il résulte que $f(x) \leqslant 1 - x$ donc $f(x) = 1 - x$ et $f = f_2$.

2.13 Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe un nombre réel k tel que $0 < k < 1$ et tel que pour tout couple (x, x') de nombres réels on ait $|f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

1° Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

2° Etant donné un nombre réel a, on définit la suite de nombres réels (x_n) par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que la suite (x_n) est convergente (on pourra utiliser l'exercice 1.16) et que sa limite l vérifie la relation $l = f(l)$.

Solution 1° Soit x_0 un élément quelconque de $\mathbf{R}$; nous allons démontrer que la fonction f est continue au point x_0. Soit ε un nombre réel strictement positif ; alors pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < \varepsilon/k$ nous avons

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant k\,|x - x_0| \leqslant \varepsilon .$$

Par suite pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, le nombre ε/k est tel que pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < \varepsilon/k$ nous ayons $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; ceci démontre que la fonction f est continue au point x_0. Ce raisonnement étant valable pour tout nombre réel x_0, la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

2° Pour tout entier $n \geqslant 0$ nous avons $x_{n+2} - x_{n+1} = f(x_{n+1}) - f(x_n)$ donc $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant k\,|x_{n+1} - x_n|$. Nous avons démontré que sous ces hypothèses la suite (x_n) était convergente (*cf.* exercice 1.16). Soit l la limite de la suite (x_n), démontrons que $f(l) = l$. La fonction f est continue au point l et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$, par suite

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = f(l), \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = f(l)$$

soit $l = f(l)$.

2.14 Soient a un nombre réel positif et (u_n) la suite de nombres réels, définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$; démontrer que cette suite est convergente et déterminer sa limite.

Solution Démontrons d'abord qu'il existe un nombre réel l unique tel que $l = 1 + \sqrt{l}$. Nous devons avoir $l - 1 = \sqrt{l}$ ce qui est équivalent à $(l-1)^2 = l$ et $l - 1 \geqslant 0$ soit $l^2 - 3l + 1 = 0$ et $l \geqslant 1$, d'où $l = (3 + \sqrt{5})/2$.

Etudions le cas $0 \leqslant a \leqslant l$. Supposons que la relation

$$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant l$$

soit vraie jusqu'à un certain entier n, alors $u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant l$ d'où

$$\sqrt{u_{n-1}} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{l} \qquad \text{et} \qquad 1 + \sqrt{u_{n-1}} \leqslant 1 + \sqrt{u_n} \leqslant 1 + \sqrt{l},$$

par suite $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant l$; la relation est donc vraie pour l'entier $n + 1$. Comme cette relation est vraie pour $n = 0$ elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante et majorée par l, par conséquent la suite (u_n) est convergente.

Etudions le cas $a \geqslant l$. Supposons que la relation $u_0 \geqslant u_1 \geqslant \cdots \geqslant u_n \geqslant l$ soit vraie jusqu'à un certain entier n. Nous avons alors

$$u_{n-1} \geqslant u_n \geqslant l \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{u_{n-1}} \geqslant \sqrt{u_n} \geqslant \sqrt{l}$$

donc

$$1 + \sqrt{u_{n-1}} \geqslant 1 + \sqrt{u_n} \geqslant 1 + \sqrt{l},$$

par suite $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant l$; la relation $u_0 \geqslant u_1 \geqslant \cdots \geqslant u_n \geqslant l$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$. Ceci démontre que la suite (u_n) est décroissante et minorée par l ; cette suite est donc convergente.

Nous venons de voir que pour tout nombre réel a la suite (u_n) admet une limite u telle que $0 \leqslant u \leqslant l$ si $0 \leqslant a \leqslant l$ et telle que $u \geqslant l$ si $a \geqslant l$. Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ pour tout nombre réel $x \geqslant 0$; cette fonction est continue au point u. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$ nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(u) \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(u)$$

d'où $u = f(u)$. Nous avons vu au début de cet exercice que le seul nombre réel t vérifiant la relation $t = 1 + \sqrt{t}$ était le nombre $l = (3 + \sqrt{5})/2$, par conséquent la suite (u_n) admet la limite $(3 + \sqrt{5})/2$ et ceci quel que soit le nombre réel $a \geqslant 0$.

2.15 Soient a un nombre réel non nul et (u_n) la suite de nombres réels, définie par

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. Etudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite (on étudiera séparément les cas $a > 0$ et $a < 0$).

Solution Etudions le cas $a < 0$. Supposons que $u_n \leqslant -n$ alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1 \leqslant u_n - 1 \leqslant -n - 1\,,$$

par suite $u_{n+1} \leqslant -(n+1)$. Ainsi nous avons $u_0 \leqslant 0$ et si $u_n \leqslant -n$ alors $u_{n+1} \leqslant -(n+1)$, par suite $u_n \leqslant -n$ pour tout entier $n \geqslant 0$ ce qui démontre que la suite (u_n) admet la limite $-\infty$.

Etudions maintenant le cas $a > 0$. Supposons que nous ayons $u_n \geqslant 1$ pour un certain entier n, alors $1/u_n \leqslant 1$ donc $u_n + 1/u_n - 1 \leqslant u_n$ soit $u_{n+1} \leqslant u_n$. D'autre part $u_n^2 - 2\,u_n + 1 \geqslant 0$ d'où $u_n^2 + 1 \geqslant 2\,u_n$ soit $u_n + 1/u_n \geqslant 2$ car $u_n > 0$ d'où $u_n + (1/u_n) - 1 \geqslant 1$ soit encore $u_{n+1} \geqslant 1$. En particulier si $u_0 \geqslant 1$ tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à 1. Supposons que nous ayons $0 < u_0 < 1$ alors

$$u_1 = u_0 + \frac{1}{u_0} - 1 \qquad \text{d'où} \qquad u_0(u_1 - 1) = u_0^2 - 2\,u_0 + 1 = (u_0 - 1)^2$$

donc $u_1 - 1 \geqslant 0$ soit $u_1 \geqslant 1$. Nous avons démontré que si $1 \leqslant u_n$ alors $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, donc pour tout entier $n \geqslant 1$ nous avons $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, par conséquent la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, elle est donc convergente. Soit l la limite de la suite (u_n) ; nous avons $l \geqslant 1$ donc la fonction f, définie par $f(x) = x + (1/x) - 1$ pour tout nombre réel $x > 0$, est continue au point l, par suite

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l) \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(l)$$

soit $l = f(l)$. Ceci démontre que pour tout nombre réel $a > 0$ la suite (u_n) est convergente et admet une limite l vérifiant $l = f(l)$ c'est-à-dire

$$l = l + \frac{1}{l} - 1$$

ce qui est équivalent à $l = 1$; par conséquent la suite (u_n) admet la limite 1.

2.16 Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1° Démontrer que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

2° Désignons par l (resp. l') la limite de la suite (u_{2n}) (resp. (u_{2n+1})). Démontrer que $l = \cos l'$ et $l' = \cos l$. En admettant l'inégalité $|\sin x| < |x|$ si $x \neq 0$, démontrer que $l = l'$.

Solution 1° Nous avons $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_2 = \cos 1$; comme $1 < \pi/2, 0 \leqslant \cos 1 \leqslant 1$ d'où $u_0 \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant \pi/2$. La fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle fermé $[0, \pi/2]$ donc nous avons $\cos u_0 \geqslant \cos u_2 \geqslant \cos u_1 \geqslant 0$ soit $u_1 \geqslant u_3 \geqslant u_2 \geqslant 0$ d'où

$$u_0 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant u_1 .$$

Supposons que pour un entier n nous ayons

$$u_0 \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_1 ,$$

la fonction réelle qui associe à chaque nombre réel t le nombre $\cos(\cos t)$, est croissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ donc nous avons

$$\cos(\cos u_0) \leqslant \cos(\cos u_{2n}) \leqslant \cos(\cos u_{2n+2}) \leqslant \cos(\cos u_{2n+3}) \leqslant \cos(\cos u_{2n+1}) \leqslant \cos(\cos u_1)$$

soit

$$u_2 \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4} \leqslant u_{2n+5} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_3 ,$$

par suite

$$u_0 \leqslant u_{2(n+1)} \leqslant u_{2(n+1)+2} \leqslant u_{2(n+1)+3} \leqslant u_{2(n+1)+1} \leqslant u_1 .$$

Nous venons de démontrer que les inégalités

$$u_0 \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_1$$

sont vraies pour $n = 0$ et que si elles sont vraies pour un entier n alors elles sont vraies pour l'entier $n + 1$, par suite ces inégalités sont vraies pour tout entier $n \geqslant 0$. La suite (u_{2n}) est donc croissante et majorée par u_1 et la suite (u_{2n+1}) décroissante et minorée par u_0, ces deux suites sont donc convergentes.

2° La fonction cosinus est continue au point l et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = l$, nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \cos u_{2n} = \cos l$$

or $\cos u_{2n} = u_{2n+1}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \cos u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l' \qquad \text{d'où} \qquad l' = \cos l\,.$$

Une démonstration analogue prouverait que $l = \cos l'$. Nous avons donc $l' - l = \cos l - \cos l'$ soit

$$l' - l = -2 \sin \frac{l' - l}{2} \sin \frac{l' + l}{2} \qquad \text{d'où} \qquad |\, l' - l \,| \leqslant 2 \left| \sin \frac{l' - l}{2} \right|.$$

Si $l \neq l'$, alors $l' - l \neq 0$ donc

$$\left| \sin \frac{l' - l}{2} \right| < \left| \frac{l' - l}{2} \right|$$

par suite nous aurions $|\, l' - l \,| < |\, l' - l \,|$ ce qui est impossible donc, $l = l'$. Ceci démontre que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$, admet une limite l vérifiant la relation $l = \cos l$.

2.17 Soit a un nombre réel strictement positif. Considérons la fonction réelle f définie sur l'ensemble $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 + a/x$. Etant donné un nombre $u_0 > 0$, on définit la suite de nombres réels (u_n) par son premier terme u_0 et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1° Démontrer que l'équation $x = f(x)$ admet une et une seule racine positive. Soit α cette racine, démontrer que si $0 < u_n \leqslant \alpha$ alors $u_n \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$. En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes (on pourra étudier séparément les cas $0 < u_0 \leqslant \alpha$ et $u_0 \geqslant \alpha$).

2° Démontrer que la suite (u_n) admet toujours une limite et calculer cette limite.

Solution 1° Résolvons l'équation $x = 2 + a/x$, nous obtenons $x^2 - 2x - a = 0$ d'où $x = 1 \pm \sqrt{1 + a}$ par suite la racine positive est $\alpha = 1 + \sqrt{1 + a}$. Supposons $0 < u_n \leqslant \alpha$, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc $f(u_n) \geqslant f(\alpha)$ d'où $u_{n+1} \geqslant \alpha$, par suite $f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ soit $u_{n+2} \leqslant \alpha$. Démontrons que $u_n \leqslant u_{n+2}$; soit

$$u_n \leqslant 2 + \frac{a}{2 + (a/u_n)} \qquad \text{ou encore} \qquad u_n \leqslant \frac{4\,u_n + 2\,a + au_n}{2\,u_n + a}\,;$$

comme $u_n \geqslant 0$ cette dernière inégalité est équivalente à

$$2\,u_n^2 + au_n \leqslant 4\,a_n + 2\,a + au_n \qquad \text{soit} \qquad u_n^2 - 2\,u_n - a \leqslant 0\,.$$

Mais u_n est compris entre les racines $1 - \sqrt{1 + a}$ et α du trinôme $x^2 - 2\,x - a$

par suite $u_n^2 - 2u_u - a \leqslant 0$ d'où $u_n \leqslant u_{n+2}$. Supposons $0 < u_0 \leqslant \alpha$. Le calcul précédent nous montre que $0 < u_0 \leqslant u_2 \leqslant \alpha$. Supposons que nous ayons $u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant \alpha$ alors nous avons $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4} \leqslant \alpha$, par suite pour tout entier $n \geqslant 0$ nous avons $0 \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant \alpha$. La suite (u_{2n}) étant croissante et majorée par α, admet une limite l telle que $0 < l \leqslant \alpha$. Puisque la fonction f est décroissante nous avons $f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) \geqslant f(\alpha)$, d'où $u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3} \geqslant \alpha$, la suite (u_{2n+1}) est donc décroissante et minorée par α, par suite elle est convergente et admet une limite l' telle que $l' \geqslant \alpha$.

Supposons $u_0 \geqslant \alpha$, alors $0 < f(u_0) \leqslant f(\alpha)$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$; un raisonnement analogue au précédent nous démontre que la suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par α et que la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par α, par conséquent les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

2° Soient l la limite de la suite (u_{2n}) et l' la limite de la suite (u_{2n+1}) ; l'étude précédente nous montre que dans les deux cas les nombres l et l' sont strictement positifs donc la fonction f est continue aux points l et l', par suite comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l$ nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_{2n}) = f(l) \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = f(l)$$

soit $l' = f(l)$. Nous démontrerions de manière analogue que $l = f(l')$. Nous avons donc $f(l') = f[f(l)]$ d'où $l = f[f(l)]$ soit

$$l = 2 + \frac{a}{2 + a/l} \qquad \text{d'où} \qquad l = \frac{4l + 2a + al}{2l + a}$$

et puisque $l > 0$, $2l + a > 0$ donc l'égalité précédente est équivalente à l'égalité $2l^2 + al = 4l + 2a + al$ soit $l^2 - 2l - a = 0$. Nous avons vu au 1° qu'il existe un nombre réel unique $\alpha = 1 + \sqrt{1+a}$, vérifiant cette égalité. Nous avons donc $l = 1 + \sqrt{1+a}$ d'où $l' = f(l) = 1 + \sqrt{1+a}$, par suite pour tout nombre réel u_0 les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et admettent la même limite $1 + \sqrt{1+a}$. Par conséquent la suite (u_n) admet la limite $1 + \sqrt{1+a}$.

2.18 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle définie et uniformément continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

1° Démontrer que f admet une limite à droite (resp. à gauche) au point a (resp. b).

2° Démontrer que f se prolonge en une fonction $\bar{f}$ uniformément continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Solution 1° Nous allons démontrer que la fonction f vérifie les hypothèses du critère de Cauchy à droite du point a. Soit ε un nombre réel strictement positif; puisque la fonction f est uniformément continue il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout couple (x, x') de points de $]a, b[$ vérifiant $|x' - x| < \eta$ nous ayons $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Par suite pour tout couple (x, x') de points de $]a, b[$ vérifiant $0 < |x - a| < \eta$ et $0 < |x' - a| < \eta$ nous avons $0 < x - a < \eta$ et $0 < x' - a < \eta$ d'où $-\eta < x' - x < \eta$ soit $|x' - x| < \eta$ donc

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon .$$

Ceci prouve que la fonction f vérifie les hypothèses du critère de Cauchy à droite du point a. Une démonstration analogue prouve que la fonction f vérifie les hypothèses du critère de Cauchy à gauche du point b, par suite la fonction admet une limite à droite au point a et une limite à gauche au point b.

2° Définissons la fonction $\bar{f}$ par $\bar{f}(x) = f(x)$ si x appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$ et $\bar{f}(a) = \lim\limits_{x \to a+} f(x), \bar{f}(b) = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$. La fonction $\bar{f}$ prolonge la fonction f, or f est uniformément continue sur l'intervalle $]a, b[$ donc f est continue en tout point de cet intervalle, par suite $\bar{f}$ est continue sur $]a, b[$. Comme

$$\bar{f}(a) = \lim_{x \to 0+} \bar{f}(x) \qquad \text{et} \qquad \bar{f}(b) = \lim_{x \to b-} \bar{f}(x) ,$$

la fonction $\bar{f}$ est continue aux points a et b donc sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ donc la fonction $\bar{f}$ est uniformément continue sur cet intervalle (*cf.* C. E., Ch. 4, § IV, 49).

2.19 Soit f une fonction réelle, définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On se propose de démontrer que la fonction f est uniformément continue sur cet intervalle en utilisant le théorème démontré à l'exercice 1.20 : « De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une suite convergente. » On raisonne par l'absurde ; supposons donc que f ne soit pas uniformément continue sur l'intervalle $[a, b]$.

1° Démontrer qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (x'_n) de points de $[a, b]$ telles que pour tout entier $n \geqslant 1$ nous ayons

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon .$$

2° Soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite convergente extraite de la suite (x_n). Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = l$; démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x'_{\varphi(n)} = l$.

3° Démontrer que la fonction f n'est pas continue au point l.

Solution 1° Puisque la fonction f n'est pas uniformément continue il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout nombre réel $\eta > 0$, il existe un couple (x, x') de points de $[a, b]$, vérifiant $|x' - x| < \eta$ et $|f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon$. Par suite pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe un couple $(x_n\, x'_n)$ de points de l'intervalle $[a, b]$ tel que

$$|x'_n - x_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |f(x'_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon .$$

Nous venons ainsi de définir deux suites (x_n) et (x'_n) de points de $[a, b]$.

2° La suite (x_n) est bornée donc nous pouvons en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Soit α un nombre réel strictement positif; alors il existe un entier n_1 tel que pour tout entier $p \geqslant n_1$ nous ayons $1/p < \alpha/2$. Nous savons que $\varphi(k) \geqslant k$ (*cf.* 1.13) donc pour tout entier $p \geqslant n_1$ nous avons

$$|x'_{\varphi(p)} - x_{\varphi(p)}| \leqslant \frac{1}{\varphi(p)} \leqslant \frac{1}{p} < \frac{\alpha}{2}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$ il existe un entier n_2 tel que pour tout entier $p \geqslant n_2$ nous ayons $|x_{\varphi(p)} - l| < \alpha/2$. Posons $n_0 = \text{Sup}\,(n_1, n_2)$; alors pour tout entier $p \geqslant n_0$ nous avons

$$(x'_{\varphi(p)} - l) = (x'_{\varphi(p)} - x_{\varphi(p)}) + (x_{\varphi(p)} - l)$$

donc

$$|x'_{\varphi(p)} - l| \leqslant |x'_{\varphi(p)} - x_{\varphi(p)}| + |x_{\varphi(p)} - l| \quad \text{d'où} \quad |x'_{\varphi(p)} - l| < \alpha ,$$

ce qui démontre que la suite $(x'_{\varphi(n)})$ admet la limite l.

3° Supposons que la fonction f soit continue au point l. Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$$

de même

$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_{\varphi(n)}) = f(l) .$$

D'autre part, d'après la construction des suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(x'_{\varphi(n)})$ nous avons $|f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)})| \geqslant \varepsilon$ d'où par passage à la limite $|f(l) - f(l)| \geqslant \varepsilon$ ce qui est impossible.

Ceci démontre que si la fonction f n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors il existe un point l de cet intervalle où la fonction f n'est pas continue. Par hypothèse la fonction f est continue en tout point de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ donc elle est uniformément continue sur cet intervalle.

2.20 Soit f une fonction réelle définie et continue sur l'ensemble $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$. On suppose que pour tout couple (x, x') de points de $[0, +\infty[$ on ait

$$f\left(\frac{x + x'}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}[f(x) + f(x')].$$

On se propose de démontrer que la fonction f est uniformément continue.

1° Soit (x, x') un couple de nombres réels tels que $0 \leqslant x < x'$. Démontrer que pour tout entier n et tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2^n$ on a :

$$f\left(x + k\frac{x'-x}{2^n}\right) \geqslant f(x) + \frac{k}{2^n}[f(x') - f(x)].$$

En utilisant l'exercice 1.9 démontrer que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[x, x']$ on a

$$f(t) \geqslant (t - x)\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} + f(x).$$

2° Soit x un nombre réel positif; démontrer que l'application φ définie sur l'ensemble $]x, +\infty[$ par

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

est décroissante. Démontrer que la fonction φ est à valeurs positives (on pourra raisonner par l'absurde) et en déduire que la fonction f est croissante.

3° Soient x, y et z trois nombres réels vérifiant $0 \leqslant x < y < z$. Démontrer que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Soient h et x deux nombres réels strictement positifs. Démontrer que si $h \leqslant x$ alors $f(h) - f(0) \geqslant f(x + h) - f(x) \geqslant 0$.

4° En utilisant le fait que l'application f est continue au point 0, démontrer que la fonction f est uniformément continue sur l'ensemble $[0, +\infty[$.

Solution 1° Il est clair que la relation est vraie pour $n = 1$. Supposons la vraie pour un certain entier $n - 1$; alors pour tout entier k' vérifiant $0 \leqslant k' \leqslant 2^{n-1}$ nous avons

$$f\left(x + k'\frac{x'-x}{2^{n-1}}\right) \geqslant f(x) + \frac{k'}{2^{n-1}}[f(x') - f(x)].$$

Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 2^n$; ou bien k est de la forme $k = 2k'$ avec $0 \leqslant k' \leqslant 2^{n-1}$ et alors

$$x + k\frac{x'-x}{2^n} = x + k'\frac{x'-x}{2^{n-1}}$$

donc

$$f\left(x + k\frac{x' - x}{2^n}\right) \geqslant f(x) + \frac{k'}{2^{n-1}}[f(x') - f(x)] = f(x) + \frac{k}{2^n}[f(x') - f(x)],$$

ou bien k est de la forme $k = 2k'' + 1$ avec $0 \leqslant k'' < 2^{n-1}$, et alors

$$x + k\frac{x' - x}{2^n} = \frac{1}{2}\left[\left(x + k''\frac{x' - x}{2^{n-1}}\right) + \left(x + (k'' + 1)\frac{x' - x}{2^{n-1}}\right)\right]$$

donc

$$f\left(x + k\frac{x' - x}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left[\left(x + k''\frac{x' - x}{2^{n-1}}\right) + \left(x + (k'' + 1)\frac{x' - x}{2^{n-1}}\right)\right]\right)$$

d'où

$$f\left(x + k\frac{x' - x}{2^n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{k''}{2^{n-1}}(f(x') - f(x)) + f(x) + \frac{k'' + 1}{2^{n-1}}(f(x') - f(x))\right]$$

soit

$$f\left(x + k\frac{x' - x}{2^n}\right) \geqslant f(x) + \frac{k}{2^n}[f(x') - f(x)]$$

Ceci démontre que l'inégalité

$$f\left(x + k\frac{x' - x}{2^n}\right) \geqslant f(x) + \frac{k}{2^n}[f(x') - f(x)]$$

est vraie pour l'entier n. Comme cette inégalité est vraie pour l'entier $n = 1$ nous avons

$$f\left(x + k\frac{x' - x}{2^n}\right) \geqslant f(x) + \frac{k}{2^n}[f(x') - f(x)]$$

pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2^n$.

Nous savons d'après l'exercice 1.9 que tout nombre réel t, de l'intervalle fermé $[x, x']$, est limite d'une suite de nombres réels (x_n) où x_n est de la forme

$$x_n = x + k_n\frac{x' - x}{2^n}$$

avec $0 \leqslant k_n \leqslant 2^n$. La fonction f est continue au point t et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = t$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(t)$. Or pour tout entier $n \geqslant 1$ nous avons

$$f(x_n) \geqslant f(x) + \frac{k_n}{2^n}[f(x') - f(x)]$$

soit

$$f(x_n) \geqslant f(x) + (x_n - x)\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

Les inégalités se conservent par passage à la limite donc

$$f(t) \geqslant f(x) + (t - x)\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$

Nous remarquons que ceci signifie que le graphe de la fonction f est au-dessus de la corde déterminée par les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$.

2° Soient t et t' deux nombres réels tels que $x < t < t'$; alors d'après la question précédente nous savons que

$$f(t) \geqslant f(x) + (t - x)\frac{f(t') - f(x)}{t' - x} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geqslant \frac{f(t') - f(x)}{t' - x}$$

puisque $t - x > 0$; ceci démontre que la fonction φ est décroissante. Supposons qu'il existe un nombre réel t tel que $x < t$ et $\varphi(t) < 0$. Alors

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} < 0$$

donc la fonction affine g définie par

$$g(u) = f(x) + (u - x)\frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

pour tout nombre réel u, prend la valeur -1 pour

$$u = x - \frac{\big(f(x) + 1\big)(t - x)}{f(t) - f(x)} \qquad \text{soit} \qquad u = t - \frac{\big(f(t) + 1\big)(t - x)}{f(t) - f(x)};$$

mais

$$f(t) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{t - x}{f(t) - f(x)} < 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\big(f(t) + 1\big)(t - x)}{f(t) - f(x)} < 0$$

d'où $u > t$. Nous avons d'autre part $f(u) \geqslant 0$ donc

$$f(u) > f(x) + (u - x)\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad \text{soit} \qquad \frac{f(u) - f(x)}{u - x} > \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

ce qui signifie que $\varphi(u) > \varphi(t)$; ceci est impossible puisque la fonction φ est décroissante. Nous venons donc de démontrer que l'application φ est une application décroissante et positive sur l'ensemble $[0, +\infty[$.

Soient x et x' deux nombres réels tels que $0 < x < x'$; comme la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

est positive, nous avons $\varphi(x') \geqslant 0$ d'où $f(x') \geqslant f(x)$; ceci démontre donc que la fonction f est croissante sur l'ensemble $]0, +\infty[$. Soit x un nombre réel tel que $0 < x$. Puisque la fonction f est continue au point 0 nous avons

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = f(0) .$$

Supposons que $f(0) > f(x)$ et posons $\varepsilon = f(0) - f(x)$; alors il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout nombre réel t vérifiant $0 < t < \eta$ nous ayons $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Soit t un nombre réel tel que $0 < t < \text{Inf}(\eta, x)$, alors nous avons $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$ d'où $f(0) - \varepsilon < f(t) < f(0) + \varepsilon$ soit $f(x) < f(t)$ ce qui est impossible puisque la fonction f est croissante sur l'ensemble $]0, +\infty[$, par suite $f(0) \leqslant f(x)$ si $x > 0$, donc la fonction f est croissante sur l'ensemble $[0, +\infty[$.

3° Puisque φ est une application décroissante nous avons

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{d'où} \quad f(z) \geqslant f(x) + (z - x)\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

par suite

$$f(z) - f(y) \geqslant f(x) + (z - x)\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f(y)$$

soit

$$f(z) - f(y) \geqslant (z - y)\frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

et comme $z - y > 0$ nous avons

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Nous avons $0 < h \leqslant x \leqslant x + h$ donc en appliquant ce qui précède aux nombres $0, x, x + h$ nous obtenons

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geqslant \frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x},$$

or

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

car la fonction φ est décroissante, donc nous avons

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \geqslant \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{d'où} \quad f(h) - f(0) \geqslant f(x+h) - f(x).$$

La fonction f est croissante donc $f(x + h) \geqslant f(x)$ et par suite

$$f(h) - f(0) \geqslant f(x+h) - f(x) \geqslant 0.$$

4° Soit ε un nombre réel strictement positif; puisque la fonction f est continue au point 0, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout nombre réel $x \geqslant 0$ vérifiant $x < \eta$ nous ayons $|f(x) - f(0)| < \varepsilon/2$. Nous allons démontrer que pour tout couple (x, x') de nombres réels positifs vérifiant $|x' - x| < \eta/2$, nous avons $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. L'inégalité est vraie si $x = x'$, supposons donc $x < x'$ et posons $x' = x + h$ où h est un nombre réel strictement positif vérifiant l'inégalité $h < \eta/2$.

Etudions d'abord le cas $x \geqslant \eta$. Nous avons $0 < h < x < x + h$ d'où $f(x + h) - f(x) \leqslant f(h) - f(0) < \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Etudions le cas $x \leqslant \eta \leqslant x + h$. Nous avons $\eta - 2h \leqslant x - h$ d'où $x > h$ par suite $0 < h < x < x + h$ d'où $f(x + h) - f(x) < \varepsilon$.

Etudions maintenant le cas $0 \leqslant x < x + h < \eta$. Nous avons

$$|f(x+h) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad |f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x+h)| = |(f(x) - f(0)) + (f(0) - f(x+h))| &\leqslant \\ |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(x+h)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous venons donc de démontrer que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, le nombre réel $\eta/2$ est tel que pour tout couple (x, x') de points de l'ensemble $[0, +\infty[$ vérifiant $|x' - x| < \eta/2$ nous ayons $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, ceci achève de démontrer que la fonction f est uniformément continue sur l'ensemble $[0, +\infty[$.

2.21 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$ et à valeurs dans ce même intervalle. Démontrer qu'il existe un point x de l'intervalle $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Solution Considérons la fonction $g : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $g(x) = f(x) - x$ pour tout élément x de $[0, 1]$. Cette fonction est continue sur l'intervalle $[0, 1]$ puisqu'elle est la différence de deux fonctions continues. Nous avons $g(0) = f(0)$ et $g(1) = f(1) - 1$. Comme $f(1) \leqslant 1$ nous avons $g(1) \leqslant 0$, et d'autre part $g(0) \geqslant 0$. La fonction g étant continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* C. E., Chap. 4, § IV, 47) cette fonction g prend toute valeur comprise entre $g(0)$ et $g(1)$, donc en particulier la valeur 0, par suite il existe un point x de l'intervalle $[0, 1]$ tel que $g(x) = 0$ donc $f(x) = x$.

2.22

Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbf{R}$. On suppose que

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty .$$

1° Démontrer qu'il existe un nombre réel x (resp. y) tel que $f(x) \leqslant 0$ (resp. $f(y) \geqslant 0$). En déduire que l'équation $f(t) = 0$ admet au moins une solution.

2° Démontrer que tout polynôme de degré *impair* à coefficients réels admet au moins une racine réelle (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 2.2, 3°).

Solution 1° Puisque $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ il existe un nombre réel y tel que pour tout nombre réel $t \geqslant y$ nous ayons $f(t) \geqslant 0$, donc $f(y) \geqslant 0$. Nous démontrerions de même l'existence d'un nombre réel x tel que $f(x) \leqslant 0$. La fonction f étant continue sur $\mathbf{R}$, est continue sur l'intervalle d'extrémités x et y ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires la fonction f prend toute valeur comprise entre $f(x)$ et $f(y)$ donc en particulier la valeur 0. Par suite il existe un nombre réel t tel que $f(t) = 0$.

2° Soit $P(x) = a_{2n+1} x^{2n+1} + a_{2n} x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré impair, à coefficients réels. Nous savons d'après l'exercice 2.2, 3° que $\lim P(t) = +\infty$ si $a_{2n+1} > 0$ et que $\lim_{t \to +\infty} P(t) = -\infty$ si $a_{2n+1} < 0$. De même $\lim_{t \to -\infty} P(t) = -\infty$ si $a_{2n+1} > 0$ et $\lim_{t \to -\infty} P(t) = +\infty$ si $a_{2n+1} < 0$. Supposons $a_{2n+1} > 0$; alors la 1re question démontre qu'il existe un nombre réel t tel que $P(t) = 0$. Si $a_{2n+1} < 0$ il suffit de raisonner sur le polynôme $-P$. En conclusion tout polynôme de degré impair, à coefficients réels, admet au moins une racine réelle.

2.23

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$. On suppose que pour tout élément x de $[a, b]$ on a $f(x) > g(x)$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que pour tout élément x de $[a, b]$ on ait $f(x) \geqslant g(x) + \lambda$.

Solution Considérons la fonction $h = f - g$ définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$ pour tout élément x de $[a, b]$. Cette fonction est définie et continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, par suite elle admet un minimum en un point c de $[a, b]$ et nous avons $\operatorname*{Inf}_{t \in [a,b]} h(t) = h(c)$; or $h(c) > 0$ donc si nous posons $h(c) = \lambda$ nous aurons $h(x) \geqslant \lambda$ pour tout élément x de $[a, b]$ par suite pour tout point x de l'intervalle fermé $[a, b]$ nous avons $f(x) \geqslant g(x) + \lambda$.

2.24 Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbf{R}$. Démontrer que si f est périodique de période T alors f est bornée sur $\mathbf{R}$.

Solution La fonction f étant continue sur $\mathbf{R}$, elle est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, T]$, par suite f admet un maximum M et un minimum m. Soit x un nombre réel alors nous savons qu'il existe un entier relatif n tel que

$$n \leqslant x/T < n + 1$$

(*cf.* exercice 2.6, 1°) donc $nT \leqslant x < (n + 1)\, T$ d'où $0 \leqslant x - nT < T$, par suite $m \leqslant f(x - nT) \leqslant M$ donc $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Ceci démontre que la fonction f est bornée sur $\mathbf{R}$.

2.25 Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que f admet un maximum local en un point x_1 de $[a, b]$ et un maximum local en un point x_2 de $[a, b]$ tels que $x_1 < x_2$. Démontrer que f admet un minimum local en un point c de l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$.

Solution La fonction f, étant continue sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$, admet un minimum en un point c' de l'intervalle $[x_1, x_2]$. Nous avons

$$f(c') = \operatorname*{Inf}_{t \in [x_1,x_2]} f(t) \quad \text{donc} \quad f(c') \leqslant f(x_1) \quad \text{et} \quad f(c') \leqslant f(x_2)\,.$$

Supposons d'abord que l'une des inégalités soit une égalité et par exemple $f(c') = f(x_1)$. Puisque x_1 est un maximum relatif il existe un nombre $\eta > 0$ tel que pour tout point x vérifiant $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \eta$ nous ayons $f(x) \leqslant f(x_1)$. Mais $f(x_1) = \operatorname*{Inf}_{t \in [x_1,x_2]} f(t)$ donc pour tout nombre réel x vérifiant $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \eta$ nous avons $f(x) = f(x_1)$, par suite la fonction f est constante sur l'intervalle

$[x_1, x_1 + \eta]$ donc elle admet un minimum relatif au point $c = x_1 + \frac{\eta}{2}$ (comme d'ailleurs en tout point de l'intervalle ouvert $]x_1, x_1 + \eta[$). Supposons maintenant $f(c') < \text{Inf}\,(f(x_1), f(x_2))$; alors $c' \neq x_1$ et $c' \neq x_2$ donc c' appartient à l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$. Posons $\eta = \text{Inf}\,(c' - x_1, x_2 - c')$; alors en tout point x de l'intervalle $]c' - \eta, c' + \eta[$ nous avons $f(x) \geqslant f(c')$, par suite la fonction f admet un minimum relatif au point c'. Ceci démontre qu'il existe un point c de l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$ où la fonction f admet un minimum relatif.

2.26 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On considère une fonction f définie et croissante sur l'intervalle fermé $[a, b]$ telle que

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]\,.$$

Démontrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Solution Soit x_0 un point du semi-segment $[a, b[$; nous savons (*cf.* C. E., Ch. 4, § V, 51) que $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = \operatorname*{Inf}\limits_{x_0 < x \leqslant b} f(x)$. Posons $i_0 = \operatorname*{Inf}\limits_{x_0 < x \leqslant b} f(x)$, nous avons $f(x_0) \leqslant i_0$. Supposons que f ne soit pas continue à droite au point x_0 ; alors $f(x_0) < i_0$. Soit y un élément de l'intervalle ouvert $]f(x_0), i_0[$; comme

$$]f(x_0), i_0[\, \subset [f(a), f(b)]\,,$$

y appartient à l'ensemble $f([a, b])$ donc il existe un élément x de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(x) = y$. Nous avons alors $f(x_0) < f(x)$ donc $x_0 < x$ et par définition de $i_0, f(x) \geqslant i_0$ ce qui est impossible car y appartient à l'intervalle ouvert $]f(x_0), i_0[$. Nous venons de démontrer que pour tout point x_0 de $[a, b[$, f est continue à droite au point x_0, nous démontrerions de manière analogue que f est une fonction continue en tout point x_1 du semi-segment $]a, b]$, par suite l'application f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

2.27 Soient a et b deux nombres réels ; calculer Arc tg a + Arc tg b.

Solution Nous savons que pour tout couple (α, β) de nombres réels vérifiant $\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta \neq 1$ on a

$$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}\,.$$

Par suite si tg (Arc tg α) tg (Arc tg b) $\neq 1$ nous aurons

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a) + \operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} b)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a)\operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} b)}.$$

D'autre part tg (Arc tg x) $= x$ pour tout nombre réel x donc nous avons

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b) = \frac{a+b}{1-ab} \qquad \text{si} \qquad ab \neq 1\,.$$

Nous savons que la relation Arc tg $x = y$ est équivalente à

$$\operatorname{tg} y = x \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2};$$

par suite

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc}\operatorname{tg} a < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b < \frac{\pi}{2}$$

d'où $-\pi < \operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b < \pi$. Nous avons donc

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{a+b}{1-ab} + k\pi$$

où k est un entier rationnel ; plus précisément

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{a+b}{1-ab} - \pi$$

$$\text{si} \qquad -\pi < \operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b < -\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{a+b}{1-ab}$$

$$\text{si} \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{a+b}{1-ab} + \pi$$

$$\text{si} \qquad \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b < \pi\,.$$

Etudions maintenant le cas $ab = 1$. La relation $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$ est équivalente à la relation

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} \qquad \text{soit} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \qquad \text{et} \qquad \alpha \neq k\pi$$

donc

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta + k\pi \qquad \text{et} \qquad \alpha \neq k\pi ,$$

soit encore

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{et} \qquad \alpha \neq k\pi .$$

Par suite si $ab = 1$, $\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} a)\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} b) = 1$ d'où

$$\operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} b = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arc\,tg} a \neq k\pi$$

ce qui nous donne

$$\operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} b = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{si} \qquad a < 0$$

et

$$\operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} b = \frac{\pi}{2} \qquad \text{si} \qquad a > 0 .$$

Conclusion

$$\text{Si } ab \neq 1 \begin{cases} \operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} b = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{a+b}{1-ab} + \pi \\ \qquad\qquad \text{si} \quad -\pi < \operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} b < -\dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} b = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{a+b}{1-ab} \\ \qquad\qquad \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} b < \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} b = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{a+b}{1-ab} - \pi \\ \qquad\qquad \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} b < \pi . \end{cases}$$

$$\text{Si } ab = 1 \begin{cases} \operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{a} = -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad a < 0 \\ \operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{a} = \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad a > 0 . \end{cases}$$

2.28 Calculer

$$\operatorname{Arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{Arc\,cos} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

suivant les valeurs de x (on pourra poser $x = \operatorname{tg} \theta/2$).

Solution Posons

$$x = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \qquad \text{où} \qquad -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{soit} \qquad -\pi < \theta < \pi \,.$$

Nous avons alors

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sin\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos\theta \,.$$

Nous savons que la relation $y = \operatorname{Arc\,sin} x$ est équivalente à $\sin y = x$ et $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, de même la relation $y = \operatorname{Arc\,cos} x$ est équivalente à $\cos y = x$ et $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Posons $\operatorname{Arc\,sin}(\sin\theta) = \alpha$ et $\operatorname{Arc\,cos}(\cos\theta) = \beta$ alors nous avons

$$\sin\theta = \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},$$

donc $\theta = \alpha + 2k\pi$ ou $\theta = \pi - \alpha + 2k\pi$. Les conditions imposées à θ et à α nous donnent

$$\operatorname{Arc\,sin}(\sin\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] -\pi - \theta & \text{si} \quad -\pi < \theta \leqslant -\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \pi - \theta & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \pi \,. \end{cases}$$

De même nous avons $\cos\theta = \cos\beta$ et $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, donc $\theta = \pm\beta + 2k\pi$; les conditions imposées à θ et β nous donnent

$$\operatorname{Arc\,cos}(\cos\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si} \quad 0 \leqslant \theta < \pi \\ -\theta & \text{si} \quad -\pi < \theta \leqslant 0 \,. \end{cases}$$

Par suite nous avons

$$\operatorname{Arc}\sin(\sin\theta) + \operatorname{Arc}\cos(\cos\theta) = \begin{cases} -\pi - 2\theta & \text{si} \quad -\pi < \theta \leqslant -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 0 \\ 2\theta & \text{si} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \pi & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \pi \end{cases}$$

Comme $x = \operatorname{tg}\theta/2$ avec $-\pi < \theta < \pi$ nous avons $\theta = 2\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ d'où en transformant les conditions sur θ en conditions sur x

$$\operatorname{Arc}\sin\frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{Arc}\cos\frac{1+x^2}{1-x^2} = \begin{cases} -\pi - 4\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

3

FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

3.1 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit f une fonction différentiable en tout point de l'intervalle fermé $[a, b]$. On suppose que f admet des maxima locaux aux points x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) de l'intervalle $[a, b]$. Démontrer qu'il existe un point x_0 de l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

Solution La fonction f est différentiable sur $[a, b]$ donc elle est continue sur $[a, b]$ et à fortiori sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$. Par suite (*cf.* C. E., Ch. 4, § IV, n° 46) la fonction f admet un minimum en un point x_0 de l'intervalle $[x_1, x_2]$. Ou bien x_0 appartient à l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$ ou bien x_0 est l'un des points x_1, x_2. Supposons que $x_0 = x_1$. Puisque la fonction f admet un maximum local au point x_1, il existe un nombre réel strictement positif η' tel que pour tout point x de $[a, b]$ vérifiant $| x - x_1 | < \eta'$ nous ayons $f(x) \leqslant f(x_1)$. Mais $f(x_0) = f(x_1)$ est la borne inférieure de l'ensemble des $f(t)$ pour tout élément t de $[x_1, x_2]$ donc $f(x_1) \leqslant f(x)$ pour tout élément x de $[x_1, x_2]$. Posons $\eta' = \operatorname{Inf}(\eta, x_2 - x_1)$ alors pour tout point x du semi-segment $[x_1, x_1 + \eta[$ nous avons $f(x_1) = f(x)$; la fonction est donc constante sur cet ensemble par suite elle admet aussi un minimum au point $x_1 + \eta/2$ appartenant à l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$. Si nous avions $x_0 = x_2$ un raisonnement analogue prouverait que f admet un minimum en un point de l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$. Nous venons donc de voir que dans tous les cas la fonction f admet un minimum en un point x_0 de l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$; comme cette fonction est différentiable sur cet intervalle nous avons $f'(x_0) = 0$.

3.2 Soient f une fonction réelle, définie au voisinage d'un nombre réel x_0, et α un nombre réel. On dit que f satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α au point x_0 s'il existe des nombres réels strictement positifs M et a tels que pour tout élément x de l'intervalle ouvert $]x_0 - a, x_0 + a[$ on ait

$$|f(x) - f(x_0)| < M\,|x - x_0|^\alpha .$$

1° Démontrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre α en x_0, est continue au point x_0 si $\alpha > 0$.

2° Démontrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre α en x_0, est différentiable et admet une dérivée nulle au point x_0 si $\alpha > 1$.

3° Donner un exemple de fonction, vérifiant une condition de Lipschitz d'ordre α au point x_0, qui est continue mais non différentiable au point x_0.

Solution 1° Soit f une fonction réelle, définie au voisinage de x_0, et vérifiant une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ en x_0. Nous savons qu'il existe deux nombres réels M et a, strictement positifs, tels que pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < a$ nous ayons $|f(x) - f(x_0)| < M\,|x - x_0|^\alpha$. Soit ε un nombre réel strictement positif; nous cherchons un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < \eta$ nous ayons

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Comme pour tout élément x de l'intervalle ouvert $]x_0 - a, x_0 + a[$ nous avons $|f(x) - f(x_0)| < M\,|x - x_0|^\alpha$, il suffit de trouver un nombre réel η tel que $0 < \eta \leqslant a$ et que pour tout élément x de $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ nous ayons $M\,|x - x_0|^\alpha < \varepsilon$. La fonction réelle $x \mapsto |x - x_0|^\alpha$ est continue au point x_0 si $\alpha > 0$, donc il existe un nombre réel $\eta_1 > 0$ tel que pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < \eta_1$ nous ayons $|x - x_0|^\alpha < \varepsilon/M$. Posons

$$\eta = \operatorname{Inf}(a, \eta_1)$$

alors pour tout élément x de $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ nous avons

$$|f(x) - f(x_0)| < M\,|x - x_0|^\alpha < \varepsilon .$$

Ceci démontre que la fonction f est continue au point x_0.

2° Soit f une fonction réelle, définie au voisinage du point x_0 et vérifiant une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 1$ en x_0. Nous savons qu'il existe deux nombres réels M et a, strictement positifs, tels que pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < a$ nous ayons $|f(x) - f(x_0)| < M\,|x - x_0|^\alpha$. Soit ε un nombre réel strictement positif; nous cherchons un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout élément x de l'intervalle ouvert $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ nous ayons

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,|x - x_0| .$$

Comme pour tout élément x de $]x_0 - a, x_0 + a[$ nous avons

$$|f(x) - f(x_0)| < M\,|x - x_0|^\alpha$$

il suffit de trouver un nombre réel η tel que $0 < \eta \leqslant a$ et que pour tout élément x de $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ nous ayons $M\,|x - x_0|^\alpha < \varepsilon\,|x - x_0|$, soit $|x - x_0|^{\alpha-1} < \varepsilon/M$. Puisque $\alpha - 1 > 0$ la fonction réelle $x \mapsto |x - x_0|^{\alpha-1}$ est continue au point x_0 donc il existe un nombre réel $\eta_1 > 0$ tel que pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < \eta_1$ nous ayons $|x - x_0|^{\alpha-1} < \varepsilon/M$. Posons $\eta = \operatorname{Inf}(\eta_1, a)$; alors pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < \eta$ nous avons $|f(x) - f(x_0)| < M\,|x - x_0|^\alpha < \varepsilon\,|x - x_0|$. Ceci démontre que la fonction f est différentiable au point x_0.

3° Considérons la fonction réelle définie au voisinage de 0 par $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Cette fonction vérifie une condition de Lipschitz d'ordre 1/3 au point 0 par conséquent elle est continue en ce point. Nous avons

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$$

donc la fonction f n'est pas différentiable au point 0.

3.3 Soit f une fonction définie au voisinage du nombre réel x_0. On définit la dérivée symétrique de f au point x_0 par

$$f'_s(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

quand cette limite existe.

1° Démontrer que si la fonction f admet une dérivée à droite $f'_d(x_0)$ et une dérivée à gauche $f'_g(x_0)$ au point x_0, elle admet une dérivée symétrique au point x_0. Calculer cette dérivée symétrique en fonction de $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$.

2° Démontrer que la fonction réelle f définie par $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, admet une dérivée symétrique au point 0, mais n'admet pas de dérivée à gauche ni de dérivée à droite au point 0.

3° Démontrer que si une fonction réelle f, définie et croissante sur un intervalle ouvert $]a, b[$ (a et b étant des nombres réels tels que $a < b$) admet en tout point de cet intervalle une dérivée symétrique, celle-ci est positive.

4° Montrer au moyen d'un exemple que la fonction f peut avoir un extremum local au point x_0 sans que $f'_s(x_0)$ soit nulle.

Solution 1° Nous remarquons que la quantité

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

ne change pas si nous remplaçons h par $-h$, par suite

$$f'_s(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

La fonction f admet des dérivées à droite et à gauche au point x_0, nous avons donc

$$f'_d(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{et} \qquad f'_g(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

par suite

$$f'_g(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

d'où

$$\begin{aligned} f'_s(x_0) &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{\big(f(x_0 + h) - f(x_0)\big) + \big(f(x_0) - f(x_0 - h)\big)}{2h} \end{aligned}$$

donc

$$f'_s(x_0) = \frac{1}{2}\big(f'_d(x_0) + f'_g(x_0)\big).$$

2° Calculons la dérivée symétrique de f au point 0. Nous avons $f(h) - f(-h) = 0$ pour tout nombre réel h par suite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0 - h)}{2h} = 0$$

ce qui démontre que f admet une dérivée symétrique nulle au point 0. D'autre part nous avons

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h \sin(1/h) - 0}{h}$$

d'où

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}.$$

Une démonstration analogue à celle donnée dans l'exercice 2.3 nous montre que la fonction $h \mapsto \sin(1/h)$ n'a pas de limite lorsque h tend vers 0, par suite la fonction f n'admet ni dérivée à gauche ni dérivée à droite au point 0.

3° Pour tout nombre réel $h > 0$ tel que les points $x_0 - h$ et $x_0 + h$ appartiennent à l'intervalle ouvert $]a, b[$, nous avons

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \geqslant 0$$

puisque la fonction f est croissante. Mais les inégalités se conservent par passage à la limite donc

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \geqslant 0 \qquad \text{d'où} \qquad f_s'(x_0) \geqslant 0 .$$

Ceci étant vrai pour tout point x_0 de l'intervalle ouvert $]a, b[$ la dérivée symétrique de f est positive sur tout l'intervalle $]a, b[$.

4° Considérons la fonction réelle f définie par $f(x) = x$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = -3x$ pour $x \leqslant 0$. La fonction f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite au point 0 donc elle admet une dérivée symétrique et nous avons

$$f_s'(0) = \tfrac{1}{2}(f_d'(0) + f_g'(0)) = \tfrac{1}{2}(1 - 3) = -1 .$$

D'autre part, comme $f(x) \geqslant 0$ pour tout nombre réel x, nous avons $f(x) \geqslant f(0)$ ce qui prouve que f admet un minimum au point 0.

3.4 Soient k un nombre réel et f la fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} + kx \qquad \text{si} \qquad x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0 .$$

1° Démontrer que la fonction f est différentiable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée en tout point de $\mathbf{R}$.

2° On suppose maintenant $0 < | k | < 1$. Démontrer que pour tout nombre réel $\alpha > 0$ la fonction dérivée f' change de signe sur l'intervalle ouvert $]-\alpha, \alpha[$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

Solution 1° Si $x \neq 0$ les théorèmes sur la somme, le produit et la composée de fonctions différentiables nous permettent d'affirmer que la fonction f est différentiable au point x. Etudions la différentiabilité de f au point 0 et pour cela calculons

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} .$$

Nous avons

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x} + k \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0\,;$$

par suite

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = k\,.$$

La fonction f est donc différentiable en tout point de $\mathbf{R}$. Nous venons de voir que $f'(0) = k$ et nous avons

$$f'(x) = 2\,x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + k$$

pour tout nombre réel x non nul.

2° Si α est un nombre réel strictement positif nous savons qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $1/n\pi < \alpha$; alors les nombres réels $1/n\pi$ et $1/(n+1)\,\pi$ sont des éléments de l'intervalle ouvert $]-\alpha, \alpha[$. Nous avons

$$f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) = (-1)^{n+1} + k \qquad \text{et} \qquad f'\left(\frac{1}{(n+1)\,\pi}\right) = (-1)^n + k\,.$$

Comme $|k| < 1$ ces deux nombres sont de signes contraires ce qui démontre que la fonction dérivée f' change de signe sur $]-\alpha, \alpha[$.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ est continue pour tout élément x non nul de $\mathbf{R}$ car alors

$$f'(x) = 2\,x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + k\,.$$

Supposons que f' soit continue au point 0, alors il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout nombre réel x vérifiant $|x| < \alpha$ nous ayons

$$\left|f'(x) - k\right| < |k|$$

soit $k - |k| < f'(x) < k + |k|$. Si $k > 0$ alors $f'(x) > 0$ et si $k < 0, f'(x) < 0$; par suite pour tout élément x de $]-\alpha, \alpha[, f'$ garde un signe constant ce qui est impossible donc la fonction $x \mapsto f'(x)$ n'est pas continue au point 0.

3.5 Calculer et comparer les dérivées des fonctions réelles f et g définies pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$ par

$$f(x) = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{2\,x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{x+1} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{x-1}{x}\,.$$

Pouvait-on prévoir le résultat ?

Solution Nous avons

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{1}{2\,x^2}\right)'}{1 + \left(\dfrac{1}{2\,x^2}\right)^2} = \frac{-\dfrac{1}{x^3}}{1 + \dfrac{1}{4\,x^4}} = -\frac{4\,x}{4\,x^4 + 1}$$

de même

$$g'(x) = \frac{\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'}{1 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2} - \frac{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)'}{1 + \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2} = \frac{\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{1 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2}} - \frac{\dfrac{x-x+1}{x^2}}{1 + \dfrac{(x-1)^2}{x^2}}$$

d'où

$$g'(x) = \frac{1}{2\,x^2 + 2\,x + 1} - \frac{1}{2\,x^2 - 2\,x + 1} = -\frac{4\,x}{4\,x^4 + 1}.$$

Nous avons donc $f'(x) = g'(x)$.

Nous savons (*cf.* exercice 2.27) que

$$\text{Arc tg}\, u - \text{Arc tg}\, v = \text{Arc tg}\, \frac{u - v}{1 + uv} + k\pi$$

où k est un entier. Nous avons donc

$$\text{Arc tg}\, \frac{x}{x+1} - \text{Arc tg}\, \frac{x-1}{x} = \text{Arc tg}\, \frac{\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x-1}{x}}{1 + \dfrac{x-1}{x+1}} + k\pi$$

d'où

$$g(x) = \text{Arc tg}\, \frac{1}{2\,x^2} + k\pi \qquad \text{soit} \qquad g(x) = f(x) + k\pi\,,$$

par suite pour tout nombre réel x différent de 0 et de -1 nous avons

$$g'(x) = f'(x)\,.$$

3.6 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction réelle définie, continue et n fois différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. On suppose de plus que la fonction f s'annule en $n + 1$ points *distincts* de l'intervalle $]a, b[$. Démontrer qu'il existe un point de cet intervalle où la dérivée d'ordre n de f prend la valeur 0.

Solution Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ les $n+1$ points distincts où f s'annule. Nous pouvons appliquer le théorème de Rolle à la fonction f sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Il existe donc un point a_k^1 de l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f'(a_k^1) = 0$, par suite la fonction f' s'annule en n points distincts de l'intervalle $]a, b[$. Désignons par $f^{(p)}$ la fonction dérivée p-ième de f $(1 \leqslant p < n)$ et supposons que $f^{(p)}$ s'annule en $n+1-p$ points distincts, $a_0^p, a_1^p, \ldots, a_{n-p}^p$, de l'intervalle ouvert $]a, b[$. Nous pouvons appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f^{(p)}$ sur chacun des intervalles $[a_k^p, a_{k+1}^p]$ $(0 \leqslant k \leqslant n-p)$, par suite il existe $n-p$ points a_k^{p+1} $(0 \leqslant k \leqslant n-p-1)$ appartenant chacun à $]a_k^p, a_{k+1}^p[$ tels que $f^{(p+1)}(a_k^{p+1}) = 0$. Nous venons de démontrer par récurrence sur p que pour tout entier q vérifiant $0 \leqslant q \leqslant n$, la fonction $f^{(q)}$ s'annule au moins en $n+1-q$ points distincts de l'intervalle ouvert $]a, b[$, par suite il existe un point de cet intervalle où la fonction $f^{(n)}$ s'annule.

3.7 Soient p et q deux nombres réels et n un entier strictement positif. Démontrer que le polynôme $f(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair et plus de trois racines réelles si n est impair.

Solution Soient a et b deux racines du polynôme $x^n + px + q$. Désignons par f la fonction polynomiale définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = x^n + px + q$$

et appliquons le théorème de Rolle à cette fonction sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Il existe donc un point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ en lequel la fonction f' s'annule, par suite si le polynôme f admet k racines f' en admet au moins $k-1$. Etudions la fonction f' ; nous avons $f'(x) = nx^{n-1} + p$. Si n est pair l'équation $x^{n-1} = -p/n$ admet une et une seule racine réelle donc le polynôme f admet au plus deux racines réelles. Si n est impair l'équation $x^{n-1} = -p/n$ admet au plus deux racines réelles donc le polynôme f admet au plus trois racines réelles.

3.8 Démontrer les inégalités suivantes :

1° $\quad \operatorname{Arc\,sin} x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad$ si $\quad 0 < x < 1$.

2° $\quad \operatorname{Arc\,tg}\, x > \dfrac{x}{1+x^2} \quad$ si $\quad x > 0$.

Solution 1° Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction

$$t \mapsto \operatorname{Arc\,sin} t$$

sur l'intervalle $[0, x]$. Nous savons qu'il existe un point c de l'intervalle ouvert $]0, x[$ tel que

$$\operatorname{Arc\,sin} x - \operatorname{Arc\,sin} 0 = (x - 0)\frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Comme $0 < c < x$, nous avons

$$1 - c^2 > 1 - x^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

d'où

$$\operatorname{Arc\,sin} x < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{pour} \qquad 0 < x < 1 .$$

2° Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction

$$t \mapsto \operatorname{Arc\,tg} t ,$$

sur l'intervalle $[0, x]$. Nous savons qu'il existe un point c de l'intervalle ouvert $]0, x[$ tel que

$$\operatorname{Arc\,tg} x - \operatorname{Arc\,tg} 0 = (x - 0)\frac{1}{1 + c^2}.$$

Comme $0 < c < x$ nous avons

$$1 + c^2 < 1 + x^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1 + c^2} > \frac{1}{1 + x^2}$$

d'où

$$\operatorname{Arc\,tg} x > \frac{x}{1 + x^2} \qquad \text{pour} \qquad x > 0 .$$

3.9 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction réelle, définie continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, différentiable en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$, sauf peut-être en un point x_0 de $]a, b[$.

1° Démontrer que si la fonction dérivée f' admet une limite au point x_0 alors la fonction f est différentiable au point x_0 et

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x) .$$

2° En étudiant la fonction réelle g définie par

$$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 0,$$

démontrer que la réciproque de la propriété démontrée au 1° est fausse.

Solution 1° Soit x un point de l'intervalle $[a, b]$, tel que $x < x_0$. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x, x_0]$. Nous savons qu'il existe un point η_x de l'intervalle ouvert $]x, x_0[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\eta_x).$$

Puisque $x < \eta_x < x_0$, $\lim_{x \to x_0} \eta_x = x_0$ donc

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 -} f'(\eta_x) = \lim_{x \to x_0 -} f'(x).$$

Par suite la fonction f est différentiable à gauche au point x_0 et sa dérivée à gauche $f'_g(x_0)$ en ce point vérifie

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0 -} f'(x).$$

Nous démontrerions de manière analogue que la fonction f est différentiable à droite au point x_0 et que sa dérivée à droite $f'_d(x_0)$ en ce point vérifie

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0 +} f'(x).$$

Par suite la fonction f est différentiable au point x_0 et sa dérivée en ce point vérifie

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

2° Il est clair que la fonction g est différentiable sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être au point 0. Nous avons

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (cf. \text{ exercice } 2.2).$$

La fonction g est donc différentiable au point 0 et sa dérivée $g'(0)$ en ce point est nulle. D'autre part pour tout nombre réel $x \neq 0$, nous avons

$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Lorsque x tend vers 0, $2x \sin (1/x)$ tend vers 0 mais la quantité $\cos (1/x)$ n'a pas de limite (*cf.* exercice 2.3) par suite la fonction g' n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

3.10 Soit f une fonction à valeurs réelles définie et *continûment dérivable* sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose de plus que la fonction f' est strictement positive sur l'intervalle fermé $[0, 1]$.

1° Démontrer qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que pour tout élément de l'intervalle $[0, 1]$ ont ait $f'(x) \geqslant \lambda$.

2° En déduire que si $f(0) = 0$ alors $f(x) \geqslant \lambda x$ pour tout élément de l'intervalle fermé $[0, 1]$.

Solution 1° La fonction f' étant continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$, admet un minimum en un point c de $[0, 1]$. Nous avons donc

$$\operatorname*{Inf}_{t \in [0,1]} f'(t) = f'(c) \qquad \text{mais} \qquad f'(c) > 0 ;$$

par suite si nous posons $f'(c) = \lambda$, pour tout élément x de $[0, 1]$ nous aurons $f'(x) \geqslant \lambda$.

2° Soit x un élément de l'intervalle $]0, 1]$. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$. Nous savons qu'il existe un point u de l'intervalle ouvert $]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(u)\, x$. Mais $f(0) = 0$ et $f'(u) \geqslant \lambda$ donc $f(x) \geqslant \lambda x$. D'autre part cette inégalité est vraie pour $x = 0$ donc nous avons $f(x) \geqslant \lambda x$ pour tout élément de l'intervalle fermé $[0, 1]$.

3.11 Soit f une fonction à valeurs réelles définie, continue et différentiable sur le semi-segment $]0, 1]$. On suppose que pour tout élément x de $]0, 1]$ on a

$$|f'(x)| < 1 .$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(1/n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$; démontrer, en utilisant le critère de Cauchy, que cette suite est convergente.

Solution Soit ε un nombre réel strictement positif ; pour démontrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy nous devons trouver un entier N tel que pour tout couple (p, q) d'entiers, vérifiant $p \geqslant q \geqslant N$, nous ayons $| u_p - u_q | < \varepsilon$. Nous avons

$$u_p - u_q = f\left(\frac{1}{p}\right) - f\left(\frac{1}{q}\right),$$

par suite nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis, à la fonction f, sur l'intervalle fermé $[1/p, 1/q]$. Nous savons qu'il existe alors un point x de l'intervalle ouvert $]1/p, 1/q[$ tel que

$$f\left(\frac{1}{p}\right) - f\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) f'(x).$$

Comme $|f'(x)| < 1$ nous obtenons

$$|u_p - u_q| = \left|f\left(\frac{1}{p}\right) - f\left(\frac{1}{q}\right)\right| = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| |f'(x)| \leqslant \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|.$$

La suite $(1/n)$ est convergente donc c'est une suite de Cauchy, par suite il existe un entier N tel que pour tout couple (p, q) d'entiers vérifiant $p \geqslant q \geqslant N$, nous ayons

$$\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| < \varepsilon \qquad \text{d'où} \qquad |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Ainsi pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout couple (p, q) d'entiers vérifiant $p \geqslant q \geqslant N$, nous ayons $|u_p - u_q| < \varepsilon$. Ceci démontre que la suite (u_n) est une suite de Cauchy donc une suite convergente.

3.12 Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$. On suppose de plus que la fonction dérivée f' est strictement décroissante et à valeurs positives.

1° Démontrer que pour tout élément x de l'ensemble $[1, +\infty[$ on a :

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1).$$

En déduire que si f admet une limite *finie* A lorsque x tend vers $+\infty$, alors f' admet la limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

2° On définit la suite (s_p) par $s_p = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(p)$ pour tout entier $p \geqslant 1$. Démontrer que la suite (s_p) est convergente si et seulement si la fonction f admet une limite *finie* A lorsque x tend vers $+\infty$.

Application : Etudier la convergence des suites suivantes :

$$a_p = \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \cdots + \frac{1}{1+p^2} \qquad (p \geqslant 1)$$

$$b_p = \frac{1}{\sqrt{1+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+p}} \qquad (p \geqslant 1)$$

3° On définit les suites (σ_p) et (σ'_p) par $\sigma_p = s_p - f(p+1)$ et $\sigma'_p = s_p - f(p)$ pour tout entier $p \geqslant 1$. Démontrer que les suites (σ_p) et (σ'_p) sont des suites monotones et que l'on a $\sigma_p < \sigma'_p$ pour tout entier $p \geqslant 1$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f' pour que les suites (σ_p) et (σ'_p) soient adjacentes.

Solution 1° Soit x un nombre réel tel que $x \geqslant 1$; les hypothèses faites sur la fonction f nous permettent d'appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x-1, x]$. Nous savons donc qu'il existe un point c_1 de l'intervalle ouvert $]x-1, x[$ tel que $f(x) - f(x-1) = f'(c_1)$. La fonction f' est strictement décroissante donc $f'(c_1) > f'(x)$ par suite $f(x) - f(x-1) > f'(x)$. En appliquant de nouveau le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x, x+1]$ nous trouverions un point c_2 de l'intervalle ouvert $]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c_2)$. La fonction f' étant strictement décroissante nous avons $f'(x) > f'(c_2)$ d'où $f'(x) > f(x+1) - f(x)$. Ainsi pour tout élément x de l'ensemble $[1, +\infty[$ nous avons

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)\,.$$

Si la fonction f admet la limite A lorsque x tend vers $+\infty$ alors

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - f(x-1)] = 0$$

donc par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus nous obtenons

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0\,.$$

2° Si x prend les valeurs $1, 2, \ldots, p$ nous obtenons les p inégalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} f(2) - f(1) & < f'(1) & < f(1) - f(0) \\ f(3) - f(2) & < f'(2) & < f(2) - f(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(p+1) - f(p) & < f'(p) & < f(p) - f(p-1)\,. \end{array}$$

En effectuant la somme membre à membre de ces inégalités nous obtenons $f(p+1) - f(1) < s_p < f(p) - f(0)$. Puisque la fonction dérivée f' est strictement positive la fonction f est strictement croissante.

Supposons que f admette la limite A lorsque x tend vers $+\infty$ alors pour tout entier $p \geqslant 1$ nous avons $s_p < f(p) - f(0) < A - f(0)$. La suite (s_p) est donc majorée. D'autre part, puisque f' est une fonction strictement positive il est clair que $s_p < s_{p+1}$ pour tout entier $p \geqslant 1$, donc la suite (s_p) est croissante ; la suite (s_p) est donc convergente.

Supposons que f n'admette pas de limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, alors comme la fonction f est croissante $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Mais nous avons vu que $s_p > f(p+1) - f(1)$ donc

$$\lim_{p\to+\infty} s_p \geqslant \lim_{p\to+\infty} [f(p+1) - f(1)] \quad \text{d'où} \quad \lim_{p\to+\infty} s_p = +\infty\,;$$

la suite (s_p) n'est donc pas convergente. Ceci démontre que la suite (s_p) est convergente si et seulement si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Application :

Considérons la fonction réelle f_1 définie pour $x \geqslant 0$ par $f_1(x) = \operatorname{Arc\,tg} x$. Cette fonction est continue, différentiable pour tout nombre réel $x \geqslant 0$ et nous avons $f_1'(x) = 1/(1+x^2)$ par suite la fonction f' est bien strictement décroissante et positive. Nous avons $a_p = f_1'(1) + f_1'(2) + \cdots + f_1'(p)$ et comme $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arc\,tg} x = \pi/2$ nous pouvons affirmer que la suite (a_p) est convergente.

Considérons la fonction réelle f_2 définie pour $x \geqslant 0$ par $f_2(x) = 2\sqrt{1+x}$. Cette fonction est continue, différentiable pour tout nombre réel $x \geqslant 0$ et nous avons $f_2'(x) = 1/\sqrt{1+x}$, par suite la fonction f' est bien strictement décroissante et positive. Nous avons $b_p = f_2'(1) + f_2'(2) + \cdots + f_2'(p)$ et comme $\lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{1+x} = +\infty$ nous pouvons affirmer que la suite b_p admet la limite $+\infty$ donc est divergente.

3° La suite (σ_p) est croissante car

$$\sigma_{p+1} - \sigma_p = s_{p+1} - s_p - f(p+2) + f(p+1) = f'(p+1) - f(p+2) + f(p+1)$$

et nous savons d'après l'inégalité démontrée au 1° que

$$f'(p+1) > f(p+2) - f(p+1) \quad \text{donc} \quad \sigma_{p+1} - \sigma_p > 0\,.$$

De même nous avons

$$\sigma'_{p+1} - \sigma'_p = s_{p+1} - s_p - f(p+1) + f(p) = f'(p+1) - f(p+1) + f(p)\,,$$

or

$$f'(p+1) < f(p+1) - f(p) \qquad \text{donc} \qquad \sigma'_{p+1} - \sigma'_p < 0\,.$$

La suite (σ_p) est donc croissante et la suite (σ'_p) décroissante. D'autre part la fonction f est croissante donc $f(p) \leqslant f(p+1)$ d'où $\sigma_p \leqslant \sigma'_p$ pour tout entier $p \geqslant 1$. Les suites (σ_p) et (σ'_p) seront donc adjacentes si et seulement si

$$\lim_{p\to+\infty} (\sigma'_p - \sigma_p) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \lim_{p\to+\infty} [f(p+1) - f(p)] = 0\,.$$

Nous allons démontrer que cette dernière condition est équivalente à

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0\,.$$

D'après l'inégalité démontrée au 1° nous avons $0 < f(p+1) - f(p) < f'(p)$ donc si

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0 \qquad \text{alors} \qquad \lim_{p \to +\infty} f'(p) = 0$$

et comme les inégalités se conservent par passage à la limite nous obtenons

$$\lim_{p \to +\infty} [f(p+1) - f(p)] = 0\,.$$

Réciproquement d'après l'inégalité démontrée au 1° nous avons

$$0 < f'(p) < f(p) - f(p-1)$$

donc si

$$\lim_{p \to +\infty} [f(p+1) - f(p)] = 0 \qquad \text{alors} \qquad \lim_{p \to +\infty} [f(p) - f(p-1)] = 0$$

et par passage à la limite nous obtenons $\lim_{p \to +\infty} f'(p) = 0$. Soit ε un nombre réel strictement positif, puisque $\lim_{p \to +\infty} f'(p) = 0$ il existe un entier N tel que pour tout entier $p \geqslant N$ nous ayons $f'(p) < \varepsilon$, alors pour tout nombre réel $x > p$ nous avons $f'(x) < f'(p) < \varepsilon$, ce qui démontre que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Ceci achève de démontrer que les suites (σ_p) et (σ'_p) sont adjacentes si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0\,.$$

3.13 Soient a un nombre réel et f une fonction réelle définie, continue et différentiable sur l'ensemble $[a, +\infty[$.

1° On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. Démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

2° On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

3° On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = l$ où l est un nombre réel strictement positif. Démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \qquad \text{et que} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Solution 1° Puisque $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ il existe un nombre réel A tel que pour tout nombre réel $x > A$ nous ayons $f'(x) > 1$. Nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[A, x]$ donc il existe un élément c_x de l'intervalle ouvert $]A, x[$ tel que $f(x) = f(A) + (x - A)f'(c_x)$. Comme $c_x > A$ nous avons $f'(c_x) > 1$ d'où $f(x) > f(A) + (x - A)$. Par suite il est clair que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2° Soit ε un nombre réel strictement positif. Puisque

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0,$$

il existe un nombre réel $A \geqslant a$ tel que pour tout nombre réel $x > A$ nous ayons $|f'(x)| < \varepsilon/2$. Nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[A, x]$ donc il existe un élément c_x de l'intervalle ouvert $]A, x[$ tel que $f(x) = f(A) + (x - A)f'(c_x)$. Nous avons alors pour tout $x > \operatorname{Sup}(A, 0)$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{f(A) + (x - A)f'(c_x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{f(A)}{x}\right| + \frac{x - A}{x} f'(c_x).$$

Puisque $c_x > A$, $f'(c_x) < \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\frac{x - A}{x} f'(c_x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part si $x > \frac{2|f(A)|}{\varepsilon}$ alors $\frac{|f(A)|}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$ par suite pour tout nombre réel $x > \operatorname{Sup}\left(A, \frac{2|f(A)|}{\varepsilon}, 0\right)$ nous avons $|f(x)/x| < \varepsilon$ ce qui démontre que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

3° Soit ε un nombre réel strictement positif ; puisque $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = l$, il existe un nombre réel $A \geqslant a$ tel que pour tout nombre réel x vérifiant $x > A$ nous ayons $|f'(x) - l| < \varepsilon/3$. Nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[A, x]$, donc il existe un point c_x de l'intervalle ouvert $]A, x[$ tel que $f(x) = f(A) + (x - A)f'(c_x)$. Nous avons donc

$$\left|\frac{f(x)}{x} - l\right| = \left|\frac{f(x) - lx}{x}\right| = \left|\frac{f(A) + xf'(c_x) - Af'(c_x) - lx}{x}\right|$$

d'où

$$\left|\frac{f(x)}{x} - l\right| \leqslant \left|\frac{f(A)}{x}\right| + |f'(c_x) - l| + A\left|\frac{f'(c_x)}{x}\right|.$$

Puisque $c_x > A$ nous avons

$$|f'(c_x) - l| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et si} \qquad x > \frac{3\,|f(A)|}{\varepsilon} \qquad \text{alors} \qquad \left|\frac{f(A)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nous avons

$$|f'(x) - l| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si} \qquad x > A \qquad \text{donc} \qquad |f'(c_x) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < f'(c_x) < l + \frac{\varepsilon}{3}$$

et par suite

$$\frac{1}{x}\left(l - \frac{\varepsilon}{3}\right) < \frac{f'(c_x)}{x} < \frac{1}{x}\left(l + \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

pour tout nombre réel $x > \operatorname{Sup}(A, 0)$. Par passage à la limite nous obtenons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(c_x)}{x} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x\to+\infty} A\frac{f'(c_x)}{x} = 0;$$

par suite il existe un nombre réel A' tel que pour tout nombre réel $x > A'$ nous ayons

$$\left| A\frac{f'(c_x)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un nombre réel, à savoir

$$\operatorname{Sup}\left(A, \frac{3\,|f(A)|}{\varepsilon}, A', 0\right)$$

tel que pour tout nombre réel x vérifiant

$$x > \operatorname{Sup}\left(A, \frac{3\,|f(A)|}{\varepsilon}, A', 0\right)$$

nous ayons

$$\left|\frac{f(x)}{x} - l\right| < \varepsilon$$

ce qui achève de démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

Soit M un nombre réel strictement positif. Puisque $l > 0$ il existe un nombre réel ε tel que $0 < \varepsilon < l$, et comme $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = l$ il existe un nombre réel B tel que pour tout élément x de l'ensemble $]B, +\infty[$ nous ayons

$$\left| \frac{f(x)}{x} - l \right| < \varepsilon \qquad \text{soit} \qquad l - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < l + \varepsilon .$$

Si $x > \operatorname{Sup}(B, 0)$ alors $x(l - \varepsilon) < f(x) < x(l + \varepsilon)$ d'où :

$$f(x) > M \qquad \text{si} \qquad x(l - \varepsilon) > M \qquad \text{soit} \qquad x > \frac{M}{l - \varepsilon}.$$

Ainsi pour tout nombre réel $x > \operatorname{Sup}\left(B, 0, \frac{M}{l - \varepsilon}\right)$ nous avons $f(x) > M$ ce qui démontre que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

3.14 Soient a un nombre réel et h un nombre réel strictement positif. Soit f une fonction réelle définie continue sur l'intervalle fermé $[a - h, a + h]$, différentiable sur l'intervalle ouvert $]a - h, a + h[$.

1° Démontrer qu'il existe un élément μ de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que

$$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} = f'(a + \mu h) + f'(a - \mu h) .$$

2° Démontrer qu'il existe un élément θ de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que

$$\frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h} = f'(a + \theta h) - f'(a - \theta h) .$$

3° On définit la fonction réelle φ par

$$\varphi(u) = \frac{f(a + u) - 2f(a) + f(a - u)}{u^2} \qquad \text{pour} \qquad 0 < |u| < h .$$

Démontrer que si $f''(a)$ existe alors $\lim_{u \to 0} \varphi(u) = f''(a)$.

4° Donner un exemple où $\lim_{u \to 0} \varphi(u)$ existe et où $f''(a)$ n'existe pas.

Solution 1° Considérons la fonction F, définie pour tout nombre réel x de l'intervalle fermé $[0, 1]$ par $F(x) = f(a + xh) - f(a - xh)$. La fonction F est continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et différentiable sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$, par suite nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis. Nous savons donc qu'il existe un point μ de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que

$$F(1) - F(0) = F'(\mu)$$

c'est-à-dire

$$f(a + h) - f(a - h) - [f(a) - f(a)] = hf'(a + \mu h) + hf'(a - \mu h)$$

d'où

$$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} = f'(a + \mu h) + f'(a - \mu h) .$$

2° Considérons la fonction G, définie pour tout nombre réel x de l'intervalle fermé $[0, 1]$ par $G(x) = f(a + xh) + f(a - xh)$. Une méthode analogue à la précédente nous démontre l'existence d'un élément θ de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que $G(1) - G(0) = G'(\theta)$ soit

$$\frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h} = f'(a + \theta h) - f'(a - \theta h) .$$

3° Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre 2, pour la fonction f, sur l'intervalle $[a, a + u]$ et sur l'intervalle $[a - u, a]$ où u est un nombre réel vérifiant $0 < u < h$. Nous avons

$$f(a + u) - f(a) = uf'(a) + \frac{u^2}{2}[f''(a) + \varepsilon_1(u)] \quad \text{où} \quad \lim_{u\to 0} \varepsilon_1(u) = 0$$

et

$$f(a - u) - f(a) = - uf'(a) + \frac{u^2}{2}[f''(a) + \varepsilon_2(u)] \quad \text{où} \quad \lim_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0 .$$

Additionnons membre à membre ces deux égalités ; nous obtenons

$$\varphi(u) = f''(a) + \frac{\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u)}{2},$$

mais

$$\lim_{u\to 0} [\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u)] = 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{u\to 0} \varphi(u) = f''(a) .$$

4° Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Posons $a = 0$; nous avons donc

$$\varphi(u) = \frac{u^2 \sin(1/u) - 0 + u^2 \sin(-1/u)}{u^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{u\to 0} \varphi(u) = 0 .$$

D'autre part nous savons (*cf.* exercice 3.4, 1°) que

$$f'(u) = 2\,u \sin\frac{1}{u} - \cos\frac{1}{u} \qquad \text{pour} \qquad u \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0\,,$$

donc

$$\frac{f'(u)}{u} = 2 \sin\frac{1}{u} - \frac{1}{u}\cos\frac{1}{u}$$

par conséquent la quantité $f'(u)/u$ n'a pas de limite lorsque u tend vers 0 ce qui signifie que f' n'admet pas de dérivée au point 0 donc $f''(0)$ n'existe pas.

3.15 Soient a un nombre réel strictement positif et f une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle fermé $[-a, a]$, deux fois différentiable sur l'intervalle ouvert $]-a, a[$. On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que la fonction $|f''|$ est bornée sur l'intervalle ouvert $]-a, a[$. Démontrer que la suite (u_n), définie par

$$u_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right) \qquad \text{pour} \qquad n > \frac{1}{a}\,,$$

est convergente et déterminer sa limite.

Solution Appliquons la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction f sur l'intervalle $[0, p/n^2]$ ($n > 1/a$ et $0 \leqslant p \leqslant n$). Nous savons qu'il existe un élément ξ_p de l'intervalle ouvert $]0, p/n^2[$ tel que

$$f\left(\frac{p}{n^2}\right) = f(0) + \frac{p}{n^2} f'(0) + \frac{p^2}{2\,n^4} f''(\xi_p)\,.$$

Nous obtenons donc

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n^2}\right) = f'(0)\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2}\right) + \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{2\,n^4} f''(\xi_p)\,.$$

Soit M un majorant de $|f''|$ sur l'intervalle $]-a, a[$ nous avons

$$\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{2\,n^4} f''(\xi_p)\right| \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{2\,n^4} M = \frac{M}{2\,n^4} \sum_{p=1}^{n} p^2$$

nous savons que

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2\,n+1)}{6}$$

donc

$$\left| \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{2n^4} f''(\xi_p) \right| \leqslant M \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}.$$

D'autre part

$$\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$$

donc

$$\left| u_n - f'(0) \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2} \right| = \left| u_n - \frac{f'(0)}{2} \frac{n(n+1)}{n^2} \right| \leqslant M \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}.$$

Nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$$

donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente nous obtenons

$$0 \leqslant \lim_{n \to +\infty} \left| u_n - \frac{f'(0)}{2} \frac{n(n+1)}{n} \right| \leqslant M \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}$$

soit

$$\left| \lim_{n \to +\infty} \left(u_n - \frac{f'(0)}{2} \right) \right| = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}.$$

Nous venons donc de démontrer que la suite (u_n) est convergente et admet la limite $f'(0)/2$.

3.16 Soient a un nombre réel et u un nombre réel strictement positif. Soit f une fonction réelle définie, continue et $n + 1$ fois continûment différentiable sur l'intervalle fermé $[a - u, a + u]$. On suppose de plus que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Pour tout entier p vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$ on écrit la formule de Taylor sous la forme

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{r=1}^{p} \frac{h^r}{r!} f^{(r)}(a) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(a + h\theta_{p+1}(h))$$

où $0 < \theta_{p+1}(h) < 1$.

1° On suppose que $f^{(p+1)}(a) \neq 0$. Démontrer que

$$\lim_{h \to 0} \theta_p(h) = \frac{1}{p+1}.$$

2° On suppose que $f^{(p+1)}(a)=0$ et soit r le plus petit entier tel que $f^{(p+r)}(a) \neq 0$. (Un tel entier existe puisque $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ et on a $p + r \leqslant n + 1$.) Démontrer que

$$\lim_{h\to 0} \theta_p(h) = \left[\frac{r\,!\,p\,!}{(p+r)\,!}\right]^{1/r}.$$

Solution 1° Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre p et à l'ordre $p+1$ pour la fonction f au voisinage du point a. Nous avons

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)\,!}f^{(p-1)}(a) + \frac{h^p}{p\,!}f^p(a + h\theta_p(h))$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)\,!}f^{(p-1)}(a) +$$
$$+ \frac{h^p}{p\,!}f^{(p)}(a) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)\,!}f^{(p+1)}(a + h\theta_{p+1}(h)).$$

En comparant les deux égalités nous obtenons :

$$\frac{h^p}{p\,!}f^{(p)}(a + h\theta_p(h)) = \frac{h^p}{p\,!}f^{(p)}(a) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)\,!}f^{(p+1)}(a + h\theta_{p+1}(h))$$

soit

$$f^{(p)}(a + h\theta_p(h)) - f^{(p)}(a) = \frac{h}{p+1}f^{(p+1)}(a + h\theta_{p+1}(h)).$$

Si nous appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $f^{(p)}$ sur l'intervalle $[a, a + h\theta_p(h)]$ nous obtenons

$$f^{(p)}(a + h\theta_p(h)) - f^{(p)}(a) = h\theta_p(h)f^{(p+1)}(a + \lambda h\theta_p(h)) \quad \text{où} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Nous avons donc

$$\theta_p(h)f^{(p+1)}(a + \lambda h\theta_p(h)) = \frac{1}{p+1}f^{(p+1)}(a + h\theta_{p+1}(h)).$$

La fonction $f^{(p+1)}$, étant continue au voisinage du point a, les deux membres de cette dernière inégalité admettent une limite lorsque h tend vers 0. Par suite nous avons

$$\lim_{h\to 0}[\theta_p(h)f^{(p+1)}(a)] = \frac{1}{p+1}f^{(p+1)}(a)$$

et comme $f^{(p+1)}(a) \neq 0$ nous avons

$$\lim_{h\to 0} \theta_p(h) = \frac{1}{p+1}.$$

2° Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre p et à l'ordre $p + r$ pour la fonction f au voisinage du point a. Nous avons

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(a) + \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(a + h\theta_p(h))$$

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(a) + \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(a) +$$
$$+ \frac{h^{p+r}}{(p+r)!}f^{(p+r)}(a + h\theta_{p+r}(h)) .$$

En comparant ces deux égalités nous obtenons :

$$\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(a + h\theta_p(h)) = \frac{h^p}{p!}f^p(a) + \frac{h^{p+r}}{(p+r)!}f^{(p+r)}(a + h\theta_{p+r}(h)) . \qquad (1)$$

Appliquons la formule de Taylor à l'ordre r à la fonction $f^{(p)}$ sur l'intervalle $[a, a + h\theta_p(h)]$ nous obtenons :

$$f^{(p)}(a + h\theta_p(h)) = f^{(p)}(a) + h\theta_p(h)f^{p+1}(a) + \cdots +$$
$$+ \frac{[h\theta_p(h)]^r}{r!}f^{(p+r)}(a + \lambda h\theta_p(h)) \qquad \text{où} \qquad 0 < \lambda < 1 .$$

Mais

$$f^{(p+1)}(a) = \cdots = f^{(p+r-1)}(a) = 0$$

donc en comparant avec l'égalité (1) nous obtenons

$$\frac{[\theta_p(h)]^r}{p!\,r!}f^{(p+r)}(a + \lambda h\theta_p(h)) = \frac{1}{(p+r)!}f^{(p+r)}(a + h\theta_{p+r}(h)) .$$

La fonction $f^{(p+r)}$ étant continue au voisinage de a les deux membres de cette égalité ont une limite lorsque h tend vers 0. Nous obtenons donc

$$\frac{1}{p!\,r!}\left[\lim_{h\to 0}\theta_p(h)\right]^r f^{p+r}(a) = \frac{1}{(p+r)!}f^{(p+r)}(a)$$

et comme $f^{(p+r)}(a) \neq 0$ nous obtenons la relation

$$\lim_{h\to 0}\theta_p(h) = \left[\frac{p!\,r!}{(p+r)!}\right]^{1/r} .$$

3.17 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle définie et convexe sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

1° Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois nombres réels tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ et x_1, x_2, x_3 des éléments de l'intervalle $[a, b]$. Démontrer que

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) .$$

2° Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ n nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $x_1, x_2, ..., x_n$, n éléments de l'intervalle $[a, b]$. Démontrer que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Solution 1° Nous avons $(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3 = 1$ et $\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ est un élément de $[a, b]$ car

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1.$$

D'autre part

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \lambda_3 x_3$$

donc puisque la fonction f est convexe nous avons (*cf.* C. E., Ch. 5, § IV, 69)

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \leqslant (\lambda_1 + \lambda_2) f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) + \lambda_3 f(x_3)$$

mais

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \leqslant \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

donc nous avons

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3).$$

2° Nous allons raisonner par récurrence. La propriété est vraie pour $n = 1, 2, 3$; supposons la vraie pour l'entier $n - 1$. Nous avons

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} = 1$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}\right) + \lambda_n x_n$$

donc

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right)\left[f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}\right)\right] + \lambda_n f(x_n) .$$

Mais d'après l'hypothèse de récurrence nous avons

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} f(x_i)$$

d'où

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) .$$

La propriété est donc vraie pour n par suite nous avons cette inégalité pour tout entier $n \geqslant 1$.

3.18 1° Soient x et y deux nombres réels strictement positifs et soient p et q deux nombres réels strictement supérieurs à 1 vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Démontrer que

$$x^{1/p}\, y^{1/q} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q} .$$

2° Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres réels strictement positifs. En appliquant le résultat précédent aux couples de termes

$$x_i = \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}, \quad y_i = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

démontrer l'inégalité (de Hölder)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} .$$

3° Les notations étant les mêmes que ci-dessus démontrer l'inégalité (de Minkowsky)

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right]^{1/p}.$$

Solution 1° L'inégalité proposée est équivalente à

$$\frac{1}{p}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{q} - \left(\frac{x}{y}\right)^{1/p} \geqslant 0.$$

Etudions la fonction

$$t \mapsto f(t) = \frac{1}{p}\,t + \frac{1}{q} - t^{1/p} \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant 0.$$

Nous avons

$$f'(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\,t^{(1/p)-1} = \frac{1}{p}\left(1 - t^{(1/p)-1}\right).$$

Comme $1/p - 1 < 0, f'(t)$ est positif pour $t \geqslant 1$ et négatif pour $t \leqslant 1$. La fonction f admet donc un minimum pour $t = 1$ et nous avons

$$f(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0.$$

Par suite la fonction f est toujours positive ce qui démontre l'inégalité

$$x^{1/p}\,y^{1/q} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

2° Ecrivons l'inégalité précédente pour les valeurs proposées ; nous obtenons,

$$\left(\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right)^{1/p}\left(\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{p}\,\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q}\,\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2 \dots n.$$

Effectuons la somme membre à membre de ces n inégalités ; nous obtenons :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i^p)^{1/p}\,(b_i^q)^{1/q}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} q^{i}}$$

d'où

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ce qui nous donne

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

3° Remarquons que $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$, d'où

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1}.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder à chacun des termes en posant

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad q = \frac{p}{p-1}.$$

Nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{(p-1)/p}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{(p-1)/p}$$

En additionnant membre à membre ces deux inégalités nous obtenons l'inégalité cherchée :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

4

FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

4.1 Soient u_0 un nombre réel et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et par

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. Etudier la suite (u_n).

Solution Pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons $u_n > 0$ puisque la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. Comme $u_n > 0$ pour $n \geqslant 1$ nous avons $e^{-u_n} < 1$ d'où $0 < u_n < 1/n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Soit ε un nombre réel strictement positif, nous savons qu'il existe un entier n_0 tel que $1/n_0 < \varepsilon$ alors pour tout entier $n \geqslant n_0$ nous avons

$$0 < u_n < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon \qquad \text{d'où} \qquad |u_n - 0| < \varepsilon$$

ce qui démontre que la suite (u_n) admet la limite 0.

4.2 Soit α un nombre réel ; calculer la dérivée n-ième de la fonction réelle définie pour tout nombre réel x par $f(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$.

Solution Nous avons $f'(x) = \cos\alpha\, e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) - e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)\sin\alpha$, d'où $f'(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + \alpha)$. Supposons que nous ayons

$$f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha)$$

alors nous aurons

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\alpha\, e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha) - e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha + n\alpha)\sin\alpha$$

d'où $f^{(n+1)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + (n+1)\alpha)$. Ceci démontre que

$$f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha) \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant 0\,.$$

4.3 Calculer les dérivées des fonctions réelles suivantes définies par :

1° $f(x) = \operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)$ pour tout nombre réel $x > 0$.

2° $g(x) = \operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{Log} x)$ pour tout nombre réel $x > 0$.

3° $h(x) = \operatorname{Log}\sqrt{1-2\sin^2 x}$ pour tout nombre réel x tel que $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

Solution 1° Nous trouvons

$$f'(x) = \frac{1}{x\operatorname{Log} x}\,.$$

2° Nous trouvons

$$g'(x) = \frac{1}{x(1 + \operatorname{Log}^2 x)}\,.$$

3° Remarquons que $h(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1 - 2\sin^2 x)$ par suite

$$h'(x) = \frac{-4\sin x\cos x}{2(1 - 2\sin^2 x)} = \frac{\sin 2x}{2\sin^2 x - 1} = -\operatorname{tg} 2x\,.$$

4.4 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = -\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)$ pour tout nombre réel $x > 1$.

1° Démontrer que f est une fonction convexe.

2° En déduire l'inégalité

$$\operatorname{Log}\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{\operatorname{Log} a \operatorname{Log} b}$$

où a et b sont deux nombres réels supérieurs à 1.

Solution 1° Il est clair que la fonction f est deux fois dérivable pour tout nombre réel $x > 1$, par suite pour démontrer que l'application f est une fonction convexe il suffit de démontrer que la dérivée seconde de f est positive. Nous avons

$$f'(x) = -\frac{1}{x \operatorname{Log} x} \qquad \text{d'où} \qquad f''(x) = \frac{\operatorname{Log} x + 1}{(x \operatorname{Log} x)^2}$$

puisque $x > 1$ nous avons $\operatorname{Log} x > 0$, donc $f''(x) > 0$ pour tout nombre réel $x > 1$.

2° Puisque l'application f est une fonction convexe nous avons

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$$

soit

$$-\operatorname{Log}\left(\operatorname{Log}\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[-\operatorname{Log}(\operatorname{Log} a) - \operatorname{Log}(\operatorname{Log} b)]$$

d'où

$$-\operatorname{Log}\left(\operatorname{Log}\frac{a+b}{2}\right) \leqslant -\operatorname{Log}\sqrt{\operatorname{Log} a \operatorname{Log} b}\,.$$

La fonction logarithme étant croissante cette dernière inégalité nous donne

$$\operatorname{Log}\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{\operatorname{Log} a \operatorname{Log} b}\,.$$

4.5 Pour tout nombre réel $x > 0$ démontrer les inégalités

$$\frac{x}{x+1} < \operatorname{Log}(1 + x) < x\,.$$

Solution La fonction réelle f définie sur l'intervalle $[0, x]$ par $f(t) = \operatorname{Log}(1 + t)$, est continue sur cet intervalle et différentiable sur l'intervalle ouvert $]0, x[$, par suite nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis. Il existe donc un nombre réel c appartenant à l'intervalle ouvert $]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = xf'(c) \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{Log}(1 + x) = \frac{x}{1+c}\,.$$

Comme $c > 0$ nous avons

$$\frac{x}{1+c} < x$$

et comme $c < x$ nous avons

$$1 + c < 1 + x \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c}.$$

Par suite nous obtenons les inégalités

$$\frac{x}{x+1} < \operatorname{Log}(1 + x) < x .$$

4.6 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. On suppose que f ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, b]$ et qu'elle est différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Démontrer qu'il existe un élément c de $]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)f'(c)/f(c)} .$$

Solution La fonction $g = \operatorname{Log}|f|$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, par suite nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis. Il existe donc un élément c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que

$$g(a) - g(b) = (a - b)\, g'(c) \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{Log}\frac{|f(a)|}{|f(b)|} = (a - b)\frac{f'(c)}{(c)}.$$

Puisque la fonction f est continue et ne s'annule pas sur $[a, b]$ cette application conserve un signe constant donc

$$\frac{|f(a)|}{|f(b)|} = \frac{f(a)}{f(b)} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)f'(c)/f(c)} .$$

4.7 Exprimer à l'aide de la fonction logarithme les applications suivantes définies par

1° $f(x) = \operatorname{Arg\,sh}(1/x)$ pour tout nombre réel $x \neq 0$.

2° $g(x) = \operatorname{Arg\,th}[(x^2 - 1)/(x^2 + 1)]$ pour tout nombre réel x.

Solution 1° La fonction f étant impaire il suffit de l'écrire pour $x > 0$. Nous trouvons

$$f(x) = \text{Log}\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)$$

d'où

$$f(x) = \text{Log}\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \text{Log}\,(1 + \sqrt{1+x^2}) - \text{Log}\,x\,.$$

Pour $x < 0$, nous avons

$$f(x) = -f(-x) = -\text{Log}\,(1 + \sqrt{1+x^2}) + \text{Log}\,(-x)\,.$$

2° Nous avons

$$g(x) = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{1 + \dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{1 - \dfrac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{2\,x^2}{2} = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,x^2 = \text{Log}\,|\,x\,|\,.$$

4.8 Démontrer que la fonction réelle f, définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour tout nombre réel $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$, est indéfiniment différentiable au point 0 et que les dérivées de tous les ordres sont nulles au point 0.

Solution Etudions d'abord la dérivée première. Pour $x \neq 0$ nous avons

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\,e^{-1/x^2} \qquad \text{et} \qquad f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ \frac{1}{x}\,e^{-1/x^2}\,.$$

Si x tend vers 0 par valeurs positives alors $1/x$ tend vers $+\infty$ donc

$$\lim_{x\to 0+}\ \frac{1}{x}\,e^{-(1/x)^2} = 0$$

en vertu des théorèmes de croissance comparée des fonctions exponentielle et puissance (*cf.* C. E., Ch. 6, § VIII, 93) ; de même nous avons

$$\lim_{x\to 0-}\ \frac{1}{x}\,e^{-1/x^2} = 0$$

par suite f est dérivable au point 0 donc continue en ce point. Ceci démontre que la fonction f est continue et dérivable en tout point de **R**.

Faisons l'hypothèse de récurrence suivante : pour tout entier positif p inférieur à un entier n, la fonction $f^{(p)}$ est définie, continue et de plus

$$f^{(p)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(p)}(x) = P_p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

où P_p est un polynôme.

Montrons que $f^{(n+1)}$ existe et vérifie toutes ces conditions. Pour $x \neq 0$ nous avons

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

d'où

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \text{ où } P_{n+1}(u) = -u^2 P_n'(u) + 2u^3 P_n(u) .$$

Nous avons

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$$

toujours en vertu des théorèmes de croissance comparée des fonctions exponentielle et puissance. La fonction $f^{(n+1)}$ est continue en tout point de $\mathbf{R}^*$ et comme

$$\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = \lim_{x \to 0} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0 = f^{n+1}(0)$$

la fonction $f^{(n+1)}$ est continue au point 0. Nous venons ainsi de démontrer que la fonction $f^{(n+1)}$ vérifie encore l'hypothèse de récurrence par conséquent f est indéfiniment différentiable et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

4.9 Déterminer toutes les applications continues f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ qui vérifient la relation

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x) f(y)}$$

pour tout couple (x, y) de nombres réels (cet exercice utilise le résultat de l'exercice 2.10).

Solution L'application f ne prenant que des valeurs strictement positives l'égalité

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x) f(y)}$$

est équivalente à l'égalité

$$\operatorname{Log} f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{Log} f(x) + \operatorname{Log} f(y)).$$

Nous voyons donc que la fonction $g = \operatorname{Log} \circ f$ vérifie la relation

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[g(x) + g(y)],$$

par suite d'après l'exercice 2.10 nous savons qu'il existe deux nombres réels a, b tels que $g(x) = ax + b$ pour tout nombre réel x. Nous avons donc

$$\operatorname{Log} f(x) = ax + b \quad \text{d'où} \quad f(x) = e^{ax+b},$$

ceci démontre que toutes les fonctions réelles continues f vérifiant la relation

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$$

pour tout couple (x, y) de nombres réels, sont de la forme $f(x) = e^{ax+b}$ où a et b sont des nombres réels.

4.10 Soit n un entier naturel.

1° Déterminer toutes les applications continues de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ qui vérifient, pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbf{R}_+$, la relation

$$f(x) + f(y) = f[(x^n + y^n)^{1/n}].$$

2° Déterminer toutes les applications continues de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+^*$ qui vérifient, pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbf{R}_+$, la relation

$$f(x)f(y) = f[(x^n + y^n)^{1/n}].$$

Cet exercice utilise le résultat de l'exercice 2.9.

Solution 1° Puisque x et y sont des nombres réels positifs la relation

$$f(x) + f(y) = f[(x^n + y^n)^{1/n}]$$

est équivalente à la relation

$$f(x^{1/n}) + f(y^{1/n}) = f[(x+y)^{1/n}].$$

Si on appelle g la fonction réelle définie par $g(x) = x^{1/n}$ pour tout élément x de $\mathbf{R}_+$, la relation précédente s'écrit

$$f \circ g(x) + f \circ g(y) = f \circ g(x + y) .$$

Nous savons (*cf.* exercice 2.9) que les seules applications continues h de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant la relation $h(x + y) = h(x) + h(y)$, pour tout couple (x, y) de nombres réels, sont de la forme $h(x) = ax$ où a est un nombre réel, par suite

$$f \circ g(x) = ax$$

pour tout élément x de $\mathbf{R}_+$ et comme la fonction g est bijective nous avons $f(x) = ax^n$ pour tout nombre réel $x \geqslant 0$.

2° L'égalité $f(x)f(y) = f[(x^n + y^n)^{1/n}]$ est équivalente à la relation

$$\operatorname{Log}[f(x)f(y)] = \operatorname{Log} f[(x^n + y^n)^{1/n}]$$

soit $\operatorname{Log} f(x) + \operatorname{Log} f(y) = \operatorname{Log} f[(x^n + y^n)^{1/n}]$. Nous voyons donc que la fonction $\operatorname{Log} \circ f$ doit satisfaire à la condition étudiée dans la première question, par suite $\operatorname{Log} f(x) = ax^n$ où a est un nombre réel donc, $f(x) = e^{ax^n}$ pour tout nombre réel $x \geqslant 0$.

4.11

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 x} ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{Arc\,tg} x}{x \sin^2 x} ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3} .$$

Solution

Nous savons que $1 - \cos x \sim x^2/2$ et $\operatorname{tg} x \sim x$ au voisinage de 0, par suite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2} .$$

Nous avons $\operatorname{Arc\,tg} x \sim x$ et $\sin x \sim x$ au voisinage de 0 donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{Arc\,tg} x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2/2)\, x}{x x^2} = \frac{1}{2} .$$

Nous savons que $1 - e^x \sim - x$ au voisinage de 0 donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(- x)\, x}{x^2 + x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{- 1}{1 + x} = - 1 .$$

4.12 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{e^x - 1}{x} ;$$

$$\lim_{x \to 0+} (\cos x)^{1/x^m}$$

où m est un élément de $\mathbf{R}_+$.

Solution Nous avons

$$\frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \operatorname{Log} (e^x - 1) - \frac{1}{x} \operatorname{Log} x ,$$

mais

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x} = 0 \quad (\textit{cf.}\ \text{C. E., Ch. 6, § VIII, 94})$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{Log} (e^x - 1) .$$

Nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x} = 1 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x \to +\infty} (\operatorname{Log} (e^x - 1) - \operatorname{Log} e^x) = \operatorname{Log} 1 = 0$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} (\operatorname{Log} (e^x - 1) - x) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} (e^x - 1)}{x} - 1 = 0$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{Log} (e^x - 1) = 1 .$$

Nous avons $(\cos x)^{1/x^m} = e^{(1/x^m) \operatorname{Log} (\cos x)}$. Au voisinage du point 0 nous savons que

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Log} (1 + u) \sim u$$

comme $\lim\limits_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$,

$$\text{Log}\,(1 + (\cos x - 1)) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

donc $\text{Log} \cos x \sim -x^2/2$ au voisinage de 0. Par suite : si $m > 2$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^m} \text{Log} \cos x = \lim_{x\to 0+} -\frac{1}{2\,x^{m-2}} = -\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{x\to 0+} (\cos x)^{1/x^m} = 0$$

si $m = 2$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^m} \text{Log} \cos x = \lim_{x\to 0+} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

d'où

$$\lim_{x\to 0+} (\cos x)^{1/x^m} = \mathrm{e}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

si $m < 2$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^m} \text{Log} \cos x = \lim_{x\to 0+} -x^{2-m} = 0$$

d'où

$$\lim_{x\to 0+} (\cos x)^{1/x^m} = 1 .$$

Conclusion

Si $m > 2$, $\quad \lim\limits_{x\to 0+} (\cos x)^{1/x^m} = 0 .$

Si $m = 2$, $\quad \lim\limits_{x\to 0+} (\cos x)^{1/x^m} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} .$

Si $0 \leqslant m < 2$, $\quad \lim\limits_{x\to 0+} (\cos x)^{1/x^m} = 1 .$

4.13 Trouver les développements limités à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions suivantes définies par :

1° $$f_1(x) = \frac{x}{\sin x} .$$

2° $$f_2(x) = \frac{1}{\cos x} .$$

Solution 1° Nous avons

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + o(x^5)$$

d'où

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)} = \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^4)}\,.$$

Nous avons d'autre part

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

pour u au voisinage de 0, donc

$$\frac{x}{\sin x} = 1 - \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4)$$

d'où

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7\,x^4}{360} + o(x^4)\,.$$

Nous pourrions obtenir ce résultat en effectuant la division suivant les puissances croissantes, de 1 par $1 - (x^2/6) + (x^4/120)$.

2° Nous avons

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + o(x^4)\,.$$

Effectuons la division suivant les puissantes croissantes, de 1 par

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\,;$$

nous obtenons

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \\ \hline
-1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} & 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5\,x^4}{24} \\ \cline{1-1}
\qquad \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} & \\
\qquad -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{48} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad \dfrac{5\,x^4}{24} - \dfrac{x^6}{48} &
\end{array}$$

Par suite

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5\,x^4}{24} + o(x^4)\,.$$

Nous pouvions aussi obtenir ce résultat en utilisant la méthode indiquée dans le 1°.

4.14 Trouver les développements limités à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions suivantes définies par :

1° $$f_1(x) = \frac{\mathrm{Log}\,(1 + x)}{1 + x}\,.$$

2° $$f_2(x) = \frac{x}{e^x - 1}\,.$$

Solution 1° Nous avons

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

et

$$\mathrm{Log}\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

d'où en effectuant le produit de ces deux développements limités

$$\frac{\mathrm{Log}\,(1 + x)}{1 + x} = x - \frac{3\,x^2}{2} + \frac{11\,x^3}{6} - \frac{25\,x^4}{12} + o(x^4)\,.$$

2° Nous avons

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + o\,(x^5)\,.$$

Effectuons la division par puissance croissante de x par

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\,,$$

nous obtenons

$$
\begin{array}{r|l}
x & x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} \\ \cline{2-2}
-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^5}{120} & 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^4}{720} \\ \cline{1-1}
- \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^5}{120} & \\
\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^5}{48} & \\ \cline{1-1}
\dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{80} & \\
- \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^5}{72} & \\ \cline{1-1}
- \dfrac{x^5}{720} &
\end{array}
$$

D'où

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)\,.$$

4.15 Donner les développements limités à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions suivantes définies par :

1° $\qquad f_1(x) = \sqrt{1 + \sin x}$

2° $\qquad f_2(x) = e^{\cos x}\,.$

3° $\qquad f_3(x) = e^{x/\cos x}\,.$

4° $\qquad f_4(x) = (1 + x)^{1/x}\,.$

Solution 1° En posant $u = \sin x$ nous avons

$$f_1(x) = (1 + u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2\,!}u^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3\,!}u^3$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4\,!}u^4 + o(u^4)\,.$$

Mais

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + o(x^4)$$

d'où

$$u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\,; \quad u^3 = x^3 + o(x^4)\,; \quad u^4 = x^4 + o(x^4)$$

donc

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$$

d'où

$$f_1(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + o(x^4)\,.$$

2° Nous savons que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + o(x^4)$$

donc

$$f_2(x) = \mathrm{e}^{1-(x^2/2)+(x^4/24)+o(x^4)} = \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-(x^2/2)+(x^4/24)+o(x^4)}\,.$$

Si nous posons

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad \text{alors} \qquad \mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

d'où

$$\mathrm{e}^u = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\,.$$

Nous avons donc

$$f_2(x) = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}x^4 + o(x^4)\,.$$

3° Nous avons

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)}\,.$$

En posant

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

nous trouvons

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

soit

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5\,x^4}{24} + o(x^4) \qquad \text{donc} \qquad \frac{x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{2} + o(x^4)\,.$$

Si nous posons

$$v = x + \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

nous avons

$$f_3(x) = e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2\,!} + \frac{v^3}{3\,!} + \frac{v^4}{4\,!} + o(v^4)\,.$$

Mais $v^2 = x^2 + x^4 + o(x^4)$; $v^3 = x^3 + o(x^4)$; $v^4 = x^4 + o(x^4)$ par suite

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + x^4) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

d'où

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{13\,x^4}{24} + o(x^4)\,.$$

4° Nous avons $f_4(x) = (1+x)^{1/x} = e^{(1/x)\mathrm{Log}(1+x)}$. Mais

$$\mathrm{Log}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

donc nous avons

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{Log}\,(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\,.$$

Si nous posons

$$u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4) \qquad \text{alors} \qquad f_4(x) = e\,.\,e^u$$

d'où

$$f_4(x) = e\left(1 + u + \frac{u^2}{2\,!} + \frac{u^3}{3\,!} + \frac{u^4}{4\,!} + o(u^4)\right).$$

D'autre part

$$u^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{13\,x^4}{36} + o(x^4)$$

$$u^3 = -\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$u^4 = \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

Nous avons donc

$$f_4(x) = e\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{13\,x^4}{36}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{24}\,\frac{x^4}{16} + o(x^4)\right].$$

Donc

$$f_4(x) = e\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11\,x^2}{24} - \frac{7\,x^3}{16} + \frac{2\,447}{5\,760}x^4 + o(x^4)\right].$$

4.16 Donner le développement limité jusqu'à l'ordre 3 de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de 1.

Solution 1re *méthode* : Nous pouvons appliquer directement la formule de Taylor au voisinage de 1 ; nous obtenons ainsi

$$f(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1\,!}f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2\,!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3\,!}f'''(1) + o[(x-1)^3].$$

Nous avons

$$f(1) = 1; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{d'où} \qquad f'(1) = \frac{1}{2};$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad \text{d'où} \qquad f''(1) = -\frac{1}{4};$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}} \qquad \text{d'où} \qquad f''(1) = \frac{3}{8}.$$

Par suite nous trouvons

$$f(x) = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} + o[(x-1)^3].$$

2e *méthode* : Posons $u = x - 1$. Quand x se trouve au voisinage de 1, u est au voisinage de 0 et on peut appliquer les formules habituelles

$$\sqrt{x} = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2\,!}u^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3\,!}u^3 + o(u^3)$$

d'où

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} + o[(x-1)^3].$$

4.17 1° Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage d'un point x_0, de l'intervalle ouvert $]0, \pi[$, de la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{Log} \sin x$.

2° En déduire le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage du point $\pi/2$.

Solution 1° Nous allons utiliser la formule de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1\,!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2\,!}f''(x_0) + $$
$$+ \frac{(x-x_0)^3}{3\,!}f'''(x_0) + o[(x-x_0)^3].$$

Nous avons

$$f'(x) = \operatorname{cotg} x\,, \quad f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}\,, \quad f'''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

pour tout élément x de $]0, \pi[$, d'où le développement cherché

$$\operatorname{Log}\sin x = \operatorname{Log}\sin x_0 + (x-x_0)\operatorname{cotg} x_0 - \frac{(x-x_0)^2}{2\sin^2 x_0} +$$
$$+ \frac{\cos x_0}{3\sin^3 x_0}(x-x_0)^3 + o[(x-x_0)^3].$$

2° Si nous appliquons le résultat ci-dessus pour $x_0 = \pi/2$ nous obtenons :

$$\operatorname{Log}\sin x = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right].$$

Faisons le calcul directement : posons $u = x - \pi/2$ alors nous avons

$$\sin x = \sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos u \qquad \text{mais} \qquad \cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$$

donc

$$\operatorname{Log} \cos u = \operatorname{Log}\left[1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)\right] = -\frac{u^2}{2} + o(u^3)$$

d'où

$$\operatorname{Log} \sin x = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right].$$

4.18 Donner le développement limité jusqu'à l'ordre 3 de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

au voisinage de $+\infty$.

Solution Comme

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = 1\,,$$

cherchons d'abord le développement limité de la fonction Arc tg au voisinage de 1. En appliquant la formule de Taylor nous trouvons :

$$\operatorname{Arc\,tg} v = \operatorname{Arc\,tg} 1 + \frac{(v-1)}{1\,!}(\operatorname{Arc\,tg})'(1) + \frac{(v-1)}{2\,!}(\operatorname{Arc\,tg})''(1) + \\ + \frac{(v-1)^3}{3\,!}(\operatorname{Arc\,tg})'''(1) + o[(v-1)^3]\,.$$

Nous avons :

$$\operatorname{Arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}; \quad (\operatorname{Arc\,tg})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{d'où} \qquad (\operatorname{Arc\,tg})'(1) = \frac{1}{2}$$

$$(\operatorname{Arc\,tg})''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{d'où} \qquad (\operatorname{Arc\,tg})''(1) = -\frac{1}{2}$$

$$(\operatorname{Arc\,tg})'''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \qquad \text{d'où} \qquad (\operatorname{Arc\,tg})'''(1) = \frac{1}{2}.$$

Par suite nous obtenons

$$\text{Arc tg } v = \frac{\pi}{4} + \frac{v-1}{2} - \frac{(v-1)^2}{4} + \frac{(v-1)^3}{12} + o[(v-1)^3].$$

Développons maintenant $v(x) = \sqrt{(x+1)/(x+2)}$ au voisinage de $+\infty$. Posons $X = 1/x$, nous avons alors $v(x) = \sqrt{(1+X)/(1+2X)}$ à développer par rapport à X au voisinage de 0 or :

$$\frac{1}{1+2X} = 1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + o(X^3)$$

d'où

$$\frac{1+X}{1+2X} = (1+X)(1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + o(X^3)) =$$
$$= 1 - X + 2X^2 - 4X^3 + o(X^3).$$

Si nous posons $w = -X + 2X^2 - 4X^3 + o(X^3)$ nous devons développer

$$v = \sqrt{1+w} = 1 + \frac{w}{2} - \frac{w^2}{8} + \frac{w^3}{16} + o(w^3).$$

Nous avons $w^2 = X^2 - 4X^3 + o(X^3)$ et $w^3 = -X^3 + o(X^3)$ d'où

$$v = 1 - \frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16} + o(X^3),$$

par suite

$$v - 1 = -\frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16} - o(X^3);\ (v-1)^2 = \frac{X^2}{4} - \frac{7X^3}{8} + o(X^3)$$

$$(v-1)^3 = -\frac{X^3}{8} + o(X^3).$$

En remplaçant dans la formule donnant Arc tg v nous trouvons

$$\text{Arc tg } v = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{X^2}{4} - \frac{7X^3}{8}\right) +$$
$$+ \frac{1}{12}\left(-\frac{X^3}{8}\right) + o(X^3)$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{X}{4} + \frac{3X^2}{8} - \frac{55X^3}{96} + o(X^3)$$

d'où finalement

$$\text{Arc tg } \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4x} + \frac{3}{8x^2} - \frac{55}{96x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

4.19 Donner le développement limité au voisinage de 0, jusqu'à l'ordre 5, de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En déduire le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 6, de la fonction g définie par $g(x) = (\text{Arc sin } x)^2$.

Solution Calculons le développement limité au voisinage de 0 de $1/\sqrt{1 - x^2}$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3\,x^4}{8} + o(x^4).$$

Nous savons que Arc sin x est la primitive de $1/\sqrt{1 - x^2}$ qui s'annule pour $x = 0$, d'où le développement de Arc sin x au voisinage de 0 :

$$\text{Arc sin } x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + o(x^5).$$

Par suite nous avons

$$f(x) = \frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1 - x^2}} = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3\,x^4}{8} + o(x^4)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + o(x^5)\right)$$

d'où

$$f(x) = x + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{8\,x^5}{15} + o(x^5).$$

Nous remarquons que

$$g'(x) = \frac{2 \text{ Arc sin } x}{\sqrt{1 - x^2}} = 2 f(x),$$

par suite $g(x)$ est la primitive de $2 f(x)$ qui s'annule pour $x = 0$. Nous avons donc

$$g'(x) = 2\,x + \frac{4\,x^3}{3} + \frac{16\,x^5}{15} + o(x^5)$$

d'où

$$g(x) = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{8\,x^6}{45} + o(x^5).$$

4.20 Trouver, lorsque x tend vers 0, la partie principale de la fonction f définie par

$$f(x) = 1 - \cos x + \operatorname{Log} \cos x .$$

Solution Nous savons que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

au voisinage de 0. Posons

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

nous trouvons alors

$$\operatorname{Log} \cos x = \operatorname{Log}(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

d'où

$$\operatorname{Log} \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) .$$

Par suite nous avons

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) = -\frac{x^4}{8} + o(x^4) .$$

La fonction f est donc un infiniment petit, d'ordre 4 au voisinage de 0, et de partie principale $-x^4/8$.

4.21 Trouver la partie principale et l'ordre de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arg\,th}(\operatorname{Arg\,sh} x) - \operatorname{Arg\,sh}(\operatorname{Arg\,th} x)$$

au voisinage de 0.

Solution Calculons d'abord les développements limités au voisinage de 0 des fonctions qui interviennent. Si $g(u) = \operatorname{Arg\,th} u$ nous avons

$$g'(u) = \frac{1}{1 - u^2}$$

et au voisinage de 0, $g'(u) = 1 + u^2 + u^4 + u^6 + o(u^6)$ d'où

$$g(u) = u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + o(u^7) \qquad \text{car} \qquad g(0) = 0\,.$$

Posons $h(v) = \operatorname{Arg\,sh} v$, nous savons que

$$h'(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}$$

donc au voisinage de 0 nous avons

$$h'(v) = (1 + v^2)^{-1/2} = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{3\,v^4}{8} - \frac{5\,v^6}{16} + o(v^6)$$

d'où

$$h(v) = v - \frac{v^3}{6} + \frac{3\,v^5}{40} - \frac{5\,v^7}{7.16} + o(v^7) \qquad \text{car} \qquad h(0) = 0\,.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg\,th}(\operatorname{Arg\,sh} x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} - \frac{5\,x^7}{7.16} + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{9\,x^7}{40} + \frac{x^7}{12}\right) \\
&\quad + \frac{1}{5}\left(x^5 - \frac{5\,x^7}{6}\right) + \frac{x^7}{7} + o(x^7) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} + \frac{3\,x^5}{40} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{5} + \frac{3\,x^7}{40} - \frac{5\,x^7}{7.16} \\
&\quad + \frac{x^7}{36} - \frac{x^7}{6} + \frac{x^7}{7} + o(x^7)\,.
\end{aligned}$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg\,sh}(\operatorname{Arg\,th} x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{1}{6}\left(x^3 + x^5 + \frac{3\,x^7}{5} + \frac{x^7}{3}\right) \\
&\quad + \frac{3}{40}\left(x^5 + \frac{5\,x^7}{3}\right) - \frac{5\,x^7}{7.16} + o(x^7) \\
&= x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^7}{10} \\
&\quad - \frac{x^7}{18} + \frac{5\,x^7}{40} - \frac{5\,x^7}{7.16} + o(x^7)\,.
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\operatorname{Arg\,th}(\operatorname{Arg\,sh} x) - \operatorname{Arg\,sh}(\operatorname{Arg\,th} x) = \frac{3\,x^7}{40} + \frac{x^7}{36} - \frac{x^7}{6} + \frac{x^7}{10} + \frac{x^7}{18} - $$
$$- \frac{5\,x^7}{40} + o(x^7)$$
$$= -\frac{x^7}{30} + o(x^7)\,.$$

La fonction f est d'ordre 7 au voisinage de 0 et de partie principale $-\,x^7/30$.

4.22 Déterminer les nombres réels a et b de manière que la fonction f, définie par

$$f(x) = \sin x - \frac{x + ax^3}{1 + bx^2}\,,$$

soit au voisinage de 0 un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible ; trouver alors sa partie principale.

Solution Divisons le polynôme $x + ax^3$ par le polynôme $1 + bx^2$ selon les puissances croissantes. Nous obtenons

$$\begin{array}{l|l}
x + ax^3 & 1 + bx^2 \\ \hline
-x - bx^3 & x + (a-b)\,x^3 - b(a-b)\,x^5 + b^2(a-b)\,x^7 \\ \cline{1-1}
(a-b)\,x^3 & \\
-(a-b)\,x^3 - b(a-b)\,x^5 & \\ \cline{1-1}
-b(a-b)\,x^5 & \\
b(a-b)\,x^5 + b^2(a-b)\,x^7 & \\ \cline{1-1}
b^2(a-b)\,x^7 &
\end{array}$$

Nous avons donc

$$\frac{x + ax^3}{1 + bx^2} = x + (a - b)\,x^3 - b(a - b)\,x^5 + b^2(a - b)\,x^7 + o(x^7)$$

et d'autre part

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + o(x^7)\,,$$

par conséquent pour que f soit d'ordre aussi élevé que possible nous devons avoir :

$$a - b = -\frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad -b(a-b) = \frac{1}{120}.$$

Par suite il faut prendre

$$b = \frac{1}{20} \qquad \text{et} \qquad a = \frac{1}{20} - \frac{1}{6} = -\frac{7}{60},$$

nous aurons alors

$$f(x) = -\frac{x^7}{7!} - b^2(a-b)\,x^7 + o(x^7) = \left(-\frac{1}{7!} + \frac{1}{2\,400}\right)x^7 + o(x^7)$$

soit

$$f(x) = -\frac{11}{50\,400}\,x^7 + o(x^7).$$

Si $a = -7/60$ et $b = 1/20$, la fonction f sera un infiniment petit d'ordre 7 et de partie principale $-11\,x^7/50\,400$.

4.23 Déterminer les nombres réels a et b de manière que la fonction f, définie par

$$f(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2},$$

soit au voisinage de 0 un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible ; trouver alors sa partie principale.

Solution Développons d'abord $(1 + ax^2)/(1 + bx^2)$, nous avons

$$\frac{1}{1 + bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)$$

et par suite

$$\frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} = (1 + ax^2)\left(1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)\right)$$

$$= 1 + (a-b)\,x^2 - b(a-b)\,x^4 + b^2(a-b)\,x^6 + o(x^6).$$

Comme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + o(x^6),$$

pour que f soit d'ordre aussi élevé que possible il faut prendre

$$a - b = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad -b(a-b) = \frac{1}{24}$$

ce qui nous donne

$$b = \frac{1}{12} \qquad \text{et} \qquad a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = -\frac{5}{12}.$$

Nous trouvons alors

$$f(x) = -\frac{x^6}{720} - b^2(a-b)\,x^6 + o(x^6) = \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{288}\right)x^6 + o(x^6)$$

donc

$$f(x) = \frac{x^6}{480} + o(x^6).$$

Si $a = -5/12$ et $b = 1/12$, la fonction f sera un infiniment petit d'ordre 6 et de partie principale $x^6/480$.

4.24 Trouver la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction f définie par

$$f(x) = x - x^2 \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Solution Quand x tend vers $+\infty$, $1/x$ se trouve au voisinage de 0 et on peut écrire :

$$\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{3\,x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

et par suite

$$f(x) = x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{3\,x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

d'où

$$f(x) = x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3\,x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\,x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous avons donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

4.25 Donner un développement limité généralisé, jusqu'au terme en $1/x^2$, au voisinage de $+\infty$, de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 1}.$$

Solution Nous remarquons que

$$f(x) = x^2\,\frac{1 + (2/x^3)}{1 - (1/x)}.$$

Posons $X = 1/x$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $1/x$ est au voisinage de 0, donc nous pouvons faire un développement limité à l'ordre 4 de la fonction

$$\frac{1 + 2\,X^3}{1 - X}$$

au voisinage de 0. Nous avons

$$\frac{1}{1 - X} = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + o(X^4)$$

d'où

$$\frac{1 + 2\,X^3}{1 - X} = (1 + 2\,X^3)\left(1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + o(X^4)\right) =$$

$$= 1 + X + X^2 + 3\,X^3 + 3\,X^4 + o(X^4).$$

Par suite

$$f(x) = x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

soit

$$f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

4.26 Donner un développement limité généralisé jusqu'à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{Log}(1 + x)}$$

Solution Nous savons que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

et que

$$\operatorname{Log}(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

Nous trouvons alors

$$f(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)}{1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} + o(x^4)}.$$

Effectuons la division selon les puissances croissantes du polynôme

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

par le polynôme

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5},$$

nous obtenons

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & & -\dfrac{x^2}{2} & & +\dfrac{x^4}{24} & 1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^4}{5} \\ \cline{6-6}
-1 & +\dfrac{x}{2} & -\dfrac{x^2}{3} & +\dfrac{x^3}{4} & -\dfrac{x^4}{5} & 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{7x^2}{12}-\dfrac{5x^3}{24}+\dfrac{41x^4}{720} \\ \cline{1-5}
 & \dfrac{x}{2} & -\dfrac{5x^2}{6} & +\dfrac{x^3}{4} & -\dfrac{19x^4}{120} & \\
 & -\dfrac{x}{2} & +\dfrac{x^2}{4} & -\dfrac{x^3}{6} & +\dfrac{x^4}{8} & \\ \cline{1-5}
 & & -\dfrac{7x^2}{12} & +\dfrac{x^3}{12} & -\dfrac{x^4}{30} & \\
 & & \dfrac{7x^2}{12} & -\dfrac{7x^3}{24} & +\dfrac{7x^4}{36} & \\ \cline{3-5}
 & & & -\dfrac{5x^3}{24} & +\dfrac{29x^4}{180} & \\
 & & & \dfrac{5x^3}{24} & -\dfrac{5x^4}{48} & \\ \cline{4-5}
 & & & & \dfrac{41x^4}{720} &
\end{array}
$$

Nous obtenons donc

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{7x^2}{12} - \frac{5x^3}{24} + \frac{41x^4}{720} + o(x^4)\right)$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{7x}{12} - \frac{5x^2}{24} + \frac{41x^3}{720} + o(x^3)\,.$$

4.27 Déterminer les parties principales au voisinage de 0 des fonctions suivantes définies par :

1° $\quad f(x) = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\operatorname{sh} x} \quad$ pour $\quad x > 0$

2° $\quad g(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{\operatorname{tg} x} \quad$ pour $\quad x > 0$

3° $\quad h(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sin x - \operatorname{tg}^2 x}} \quad$ pour $\quad x > 0\,.$

Solution 1° Nous savons que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\,.$$

Nous avons

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{1/2}$$

d'où

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) = x^{1/2} - \frac{x^{5/2}}{12} + o(x^{5/2})\,.$$

D'autre part

$$\sqrt{\operatorname{sh} x} = \sqrt{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

et de manière analogue nous obtenons

$$\sqrt{\operatorname{sh} x} = x^{1/2} + \frac{x^{5/2}}{12} + o(x^{5/2})$$

par suite

$$f(x) = -\frac{x^{5/2}}{6} + o(x^{5/2})\,.$$

2° Trouvons d'abord le développement de la fonction tangente au voisinage de 0. Nous avons

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3\,!} + o(x^3)}{1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)}$$

d'où

$$\operatorname{tg} x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,,$$

par suite

$$\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} = x^{1/4}\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^{1/4} = x^{1/4}\left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right).$$

Nous obtenons donc

$$g(x) = x^{1/4} - x^{1/4}\left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) = -\frac{x^{9/4}}{12} + o(x^{9/4}).$$

3° Nous avons $\sin x = x + o(x^2)$ et $\operatorname{tg}^2 x = x^2 + o(x^2)$ d'où

$$\sqrt[3]{\sin x - \operatorname{tg}^2 x} = \sqrt[3]{x - x^2 + o(x^2)} = x^{1/3}(1 - x + o(x))^{1/3}$$
$$= x^{1/3}\left(1 - \frac{x}{3} + o(x)\right)$$

et par suite

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x - \operatorname{tg}^2 x}} = x^{-1/3}\left(1 + \frac{x}{3} + o(x)\right).$$

Nous avons alors

$$h(x) = (x - x^{1/2})\, x^{-1/3}\left(1 + \frac{x}{3} + o(x)\right) = -x^{1/6} + o(x^{1/6})$$

car $x^{2/3}$, $x^{5/3}$ et $x^{7/6}$ sont des infiniment petits par rapport à $x^{1/6}$.

4.28 Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la fonction f définie par

$$f(x) = x\left[\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}\right].$$

Solution Nous trouvons d'abord

$$\sqrt{x^4 + 1} = x^2\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} = x^2\left(1 + \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

d'où

$$\sqrt{1 + x^4} = x^2 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

par conséquent

$$\sqrt{x^2 + \sqrt{1 + x^4}} = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{2}\, x\left(1 + \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{2}\, x\left(1 + \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = \sqrt{2}\, x + \frac{\sqrt{2}}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Nous avons finalement

$$f(x) = x\left[\sqrt{2}\,x + \frac{\sqrt{2}}{8\,x^3} - \sqrt{2}\,x + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \quad \text{soit} \quad f(x) = \frac{\sqrt{2}}{8\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

par suite au voisinage de $+\infty$

$$x\left[\sqrt{x^2 + \sqrt{1 + x^4}} - x\sqrt{2}\right] \sim \frac{\sqrt{2}}{8\,x^2}.$$

4.29 Déterminer le nombre réel λ tel que la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + \lambda x^2 + 1}$$

admette 0 pour limite lorsque x tend vers $-\infty$; trouver alors un équivalent de f au voisinage de $-\infty$.

Solution Nous avons

$$f(x) = |\,x\,|\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} + x\left(1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^{1/3}$$

d'où

$$f(x) = -\,x\left(1 - \frac{1}{2\,x} + \frac{3}{8\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + x\left(1 + \frac{\lambda}{3\,x} - \frac{\lambda^2}{9\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{3}\right) - \left(\frac{\lambda^2}{9} + \frac{3}{8}\right)\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi nous obtenons

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{3},$$

cette limite sera nulle si et seulement si $\lambda = -\frac{3}{2}$ et nous aurons alors

$$f(x) = -\frac{5}{8\,x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

4.30 Soient a et t deux nombres réels. On définit la suite de nombres réels (x_n) en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = a + t \sin x_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1° Démontrer que quels que soient les nombres réels u et v on a l'inégalité $|\sin u - \sin v| \leqslant |u - v|$.

2° Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $|x_{n+1} - x_n| \leqslant |a||t^n|$.

3° Démontrer que si $|t| < 1$ et $m \geqslant n$ on a

$$|x_m - x_n| \leqslant \frac{|a||t^n|}{1 - |t|}.$$

En déduire que si $|t| < 1$ la suite (x_n) est convergente et que sa limite x est le seul nombre réel qui vérifie la relation $x = a + t \sin x$.

4° Si on suppose a fixé, $x_1(t) = a$ et $x_2(t) = a + t \sin a$ sont des fonctions continues de t. Démontrer par récurrence que les fonctions x_n définies par $x_n(t) = a + t \sin x_{n-1}(t)$ sont continues.

5° Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de la fonction sinus au voisinage du point a.

6° Démontrer par récurrence sur n, que pour tout entier p strictement positif la fonction x_n possède un développement limité d'ordre p au voisinage de 0, qu'on écrira

$$x_n(t) = c_0(n) + c_1(n)\, t + \cdots + c_p(n)\, t^p + \varepsilon_p(x, t)\, t^p \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon_p(x, t) = 0\,.$$

7° Démontrer que si $m \geqslant n > r$ on a $c_r(n) = c_r(m)$ (autrement dit les coefficients $c_r(n)$ de t^r dans les développements limités des $x_n(t)$ sont tous égaux dès que $n > r$). On notera c_r cette valeur commune.

8° Démontrer que si $|t| \leqslant k < 1$ on a

$$|x(t) - x_n(t)| \leqslant \frac{|a|}{1 - k} |t|^n\,.$$

En déduire que pour tout entier p strictement positif, la fonction x admet le développement limité d'ordre p au voisinage de 0

$$x(t) = c_0 + c_1\, t + c_2\, t^2 + \cdots + c_p\, t^p + \varepsilon_p(t)\, t^p \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon_p(t) = 0\,.$$

9° Calculer le développement limité d'ordre 3 de la fonction x au voisinage de 0.

Solution 1° Supposons $u < v$; nous savons que la fonction sinus est continue sur l'intervalle fermé $[u, v]$ et différentiable sur l'intervalle ouvert $]u, v[$ par suite nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction sinus sur l'intervalle $[u, v]$. Il existe donc un point w de l'intervalle ouvert $]u, v[$ tel que $\sin v - \sin u = (v - u) \cos w$, comme $|\cos w| \leqslant 1$ nous avons

$$|\sin v - \sin u| = |v - u||\cos w| \leqslant |v - u|\,.$$

Si $v < u$ nous ferions un raisonnement analogue et enfin si $u = v$ l'inégalité est vérifiée.

2° En appliquant l'inégalité précédente nous trouvons

$$| x_{n+1} - x_n | = | t \sin x_n - t \sin x_{n-1} | \leqslant | t | \, | x_n - x_{n-1} | \,.$$

Par suite nous avons les n inégalités :

$$\begin{array}{ll} | x_{n+1} - x_n | & \leqslant | t | \, | x_n - x_{n-1} | \\ | x_n - x_{n-1} | & \leqslant | t | \, | x_{n-1} - x_{n-2} | \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ | x_2 - x_1 | & \leqslant | t | \, | x_1 - x_0 | \,. \end{array}$$

En multipliant ces n inégalités membre à membre nous obtenons

$$| x_{n+1} - x_n | \leqslant | t |^n \, | x_1 - x_0 | = | a | \, | t |^n \,.$$

3° Comme m est supérieur à n nous avons

$$(x_m - x_n) = (x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)$$

d'où

$$| x_m - x_n | \leqslant | x_m - x_{m-1} | + | x_{m-1} - x_{m-2} | + \cdots + | x_{n+1} - x_n |$$

et par suite

$$| x_m - x_n | \leqslant | a | \, | t |^{m-1} + | a | \, | t |^{m-2} + \cdots + | a | \, | t |^n$$

d'où

$$| x_m - x_n | \leqslant | a | \, | t |^n (1 + | t | + \cdots + | t |^{m-n-1}) = | a | \, | t |^n \frac{1 - | t |^{m-n}}{1 - | t |} \,.$$

Comme $| t | < 1$ nous avons $1 - | t | > 0$ et $| t |^{m-n} > 0$ donc

$$| x_m - x_n | \leqslant | a | \, | t |^n \frac{1 - | t |^{m-n}}{1 - | t |} \leqslant \frac{| a | \, | t |^n}{1 - | t |} \,.$$

Pour démontrer que la suite (x_n) est convergente nous allons démontrer que c'est une suite de Cauchy. Il est clair que si $a = 0$ alors $x_n = 0$ pour tout entier n et la suite (x_n) est une suite de Cauchy. Supposons donc $| a | \neq 0$ et soit ε un nombre réel strictement positif. Comme $| t | < 1$ nous savons qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ nous ayons

$$| t |^n < \frac{\varepsilon(1 - | t |)}{| a |} \,,$$

par suite pour tout couple (m, n) d'entiers vérifiant $m \geqslant n \geqslant n_0$ nous avons $| x_m - x_n | < \varepsilon$. La suite (x_n) est donc une suite de Cauchy, par suite elle est convergente. Posons

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_n \,;$$

comme la fonction réelle $u \mapsto a + t \sin u$ est continue au point x, nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} (a + t \sin x_n) = a + t \sin x$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = a + t \sin x \qquad \text{soit} \qquad x = a + t \sin x .$$

Soit x' un nombre réel différent de x et tel que $x' = a + t \sin x'$. Comme $|t| < 1$ nous avons $|x - x'| = |t|\,|\sin x - \sin x'| \leqslant |t|\,|x - x'|$ ce qui est impossible car $|t|\,|x - x'| < |x - x'|$, par suite x est l'unique nombre réel vérifiant la relation $x = a + t \sin x$.

4° Supposons la fonction x_n continue, alors la fonction $\sin x_n$ est continue car composée de deux fonctions continues et par suite $x_{n+1}(t) = a + t \sin x_n(t)$ est une fonction continue. Comme x_1 est une fonction continue toutes les fonctions x_n le sont.

5° Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre 3 au voisinage du point a ; nous obtenons :

$$\sin x = \sin a + (x - a) \sin'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \sin''(a) + \\ + \frac{(x-a)^3}{3!} \sin'''(a) + o[(x-a)^3] .$$

On obtient le développement :

$$\sin x = \sin a + (x - a) \cos a - \frac{\sin a}{2} (x-a)^2 - \\ - \frac{\cos a}{6} (x-a)^3 + o[(x-a)^3] .$$

6° La fonction constante x_1 admet des développements limités de tous ordres. Supposons que x_n admette un développement limité d'ordre p au voisinage de 0. Comme la fonction sinus admet des développements limités d'ordre quelconque au voisinage de tout nombre réel, la fonction $\sin x_n$ admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0 et par suite la fonction

$$x_{n+1}(t) = a + t \sin x_n(t)$$

en admet aussi un.

7° Comme $x_n(0) = a$ pour tout entier n nous avons bien $c_0(n) = c_0(m)$. Nous pouvons faire un raisonnement par récurrence sur r, l'hypothèse de récurrence étant que $c_i(n) = c_i(m)$ pour $i \leqslant r - 1$. Nous avons alors

$$x_m(t) - x_n(t) = \left[\sum_{i=1}^{p} \big(c_i(m) - c_i(n)\big) t^i \right] + \big(\varepsilon_p(m, t) - \varepsilon_p(n, t)\big) t^p .$$

Mais d'après le 3° nous savons que

$$| x_m(t) - x_n(t) | \leqslant \frac{| a | | t |^n}{1 - | t |},$$

donc

$$| t |^r \left| (c_r(m) - c_r(n)) + t \left[\sum_{i=r+1}^{p} (c_i(m) - c_i(n)) \, t^{i-r-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\varepsilon_p(m, t) - \varepsilon_p(n, t)\right) t^{p-r-1} \right] \right| \leqslant \frac{| a | | t |^n}{1 - | t |}.$$

Comme $r < n$, en divisant les deux membres de cette inégalité par $| t |^r$ nous obtenons

$$\left| (c_r(m) - c_r(n)) + t \left[\sum_{i=r+1}^{p} (c_i(m) - c_i(n)) \, t^{i-r-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\varepsilon_p(m, t) - \varepsilon_p(n, t)\right) t^{p-r-1} \right] \right| \leqslant \frac{| a | | t |^{n-r}}{1 - | t |}.$$

Mais

$$\lim_{t \to 0} \frac{| a | | t |^{n-r}}{1 - | t |} = 0,$$

et la limite du premier membre lorsque t tend vers 0 est $c_r(m) - c_r(n)$. Nous avons donc $c_r(m) = c_r(n)$, par suite $c_r(m) = c_r(n)$ pour tout triplet (m, n, r) d'entiers vérifiant $m \geqslant n > r$.

8° L'inégalité démontrée au 3° devient pour $| t | \leqslant k < 1$

$$| x_m(t) - x_n(t) | \leqslant \frac{| a | | t^n |}{1 - k},$$

par suite lorsque m tend vers $+ \infty$ nous obtenons l'inégalité

$$| x(t) - x_n(t) | \leqslant \frac{| a | | t^n |}{1 - k}.$$

Choisissons $n > p$ nous avons alors

$$x_n(t) = c_0 + c_1 \, t + \cdots + c_p \, t^p + o(t^p).$$

D'autre part pour $n > p$, $| t |^n = o(t^p)$ donc $| x(t) - x_n(t) | = o(t^p)$ et par suite $x(t) - x_n(t) = o(t^p)$. Nous trouvons donc $x(t) = x_n(t) + o(t^p)$ d'où $x(t) = c_0 + c_1(t) + \cdots + c_p(t^p) + o(t^p)$ ce qui donne le développement limité à l'ordre p de la fonction x.

9° D'après ce que l'on a vu il suffit de déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x_4(t)$. Nous avons $x_1(t) = a$, $x_2(t) = a + t \sin a$,

$$x_3(t) = a + t \sin (a + t \sin a).$$

Si nous utilisons le développement limité de $\sin x$ au voisinage du point a nous obtenons

$$\sin(a + t\sin a) = \sin a + t\sin a\cos a - t^2\frac{\sin^3 a}{2} + o(t^2)$$

et par suite

$$x_3(t) = a + t\sin a + t^2\sin a\cos a - t^3\frac{\sin^3 a}{2} + o(t^3)\,.$$

Comme $x_4 = a + t\sin x_3(t)$ nous devons calculer le développement limité à l'ordre 2 de $\sin x_3(t)$, nous avons

$$\sin\left(a + t\sin a + t^2\sin a\cos a + o(t^2)\right) =$$
$$= \sin a + \cos a(t\sin a + t^2\sin a\cos a) - \frac{\sin^3 a}{2}t^2 + o(t^2)\,.$$

Nous obtenons donc

$$x_4(t) = a + t\sin a + t^2\sin a\cos a + t^3\left(\sin a\cos^2 a - \frac{\sin^3 a}{2}\right) + o(t^3)\,.$$

D'où

$$x(t) = a + t\sin a + t^2\sin a\cos a + t^3\left(\sin a\cos^2 a - \frac{\sin^3 a}{2}\right) + o(t^3)\,.$$

5

ETUDES DE FONCTIONS

Ce chapitre est entièrement consacré à des études de fonctions réelles de variable réelle. Rappelons que l'étude d'une fonction comporte les étapes suivantes :

1) Détermination de l'ensemble de définition ; cet ensemble est le plus souvent une réunion d'intervalles de $\mathbf{R}$.

2) Etude de la continuité et des limites aux bornes de chacun des intervalles composant l'ensemble de définition. Eventuellement, prolongement par continuité de la fonction.

3) Détermination, s'il y a lieu, des asymptotes et de la position du graphe par rapport à ces asymptotes.

4) Etude de la dérivabilité de la fonction prolongée.
Détermination du signe de la dérivée.

5) Etablissement du tableau de variation et tracé du graphe.

5.1 Etudier la fonction réelle f définie par $f(x) = x^x$.

Solution Nous avons $f(x) = x^x = e^{x \operatorname{Log} x}$, donc l'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $D =]0, +\infty[$ et f est continue sur cet ensemble. Comme

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{Log} x = 0$$

nous avons

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1\,,$$

de même

$$\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{Log} x = +\infty \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Nous voyons que l'on peut prolonger la fonction par continuité en posant $f(0) = 1$.

Pour tout élément x de D nous avons

$$f'(x) = e^{x \operatorname{Log} x}(\operatorname{Log} x + 1);$$

la fonction dérivée f' est du signe de l'expression $\operatorname{Log} x + 1$ qui s'annule pour $x = 1/e$. Etudions maintenant si la fonction prolongée par continuité est dérivable à droite au point 0. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x \operatorname{Log} x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x \operatorname{Log} x} - 1}{x \operatorname{Log} x} \times \frac{x \operatorname{Log} x}{x}\,.$$

Lorsque x tend vers $0+$, $x \operatorname{Log} x$ tend vers 0 donc

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x \operatorname{Log} x} - 1}{x \operatorname{Log} x} = 1\,;$$

d'autre part

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{Log} x = -\infty \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-1}{x} = -\infty\,.$$

Résumons dans un tableau ces résultats

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Nous obtenons le graphe suivant

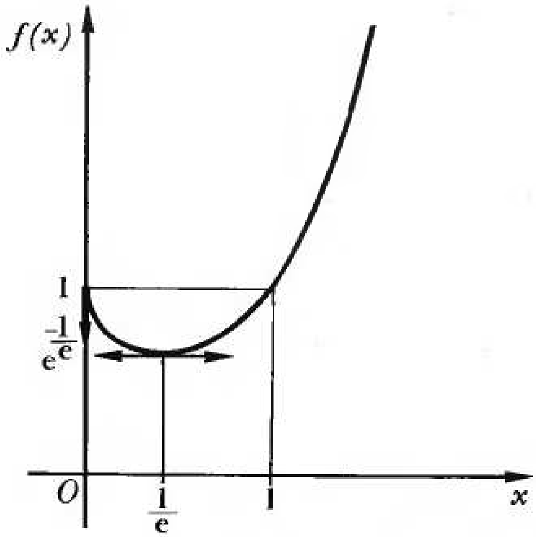

FIG. 5.1

5.2 Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = (x^2 - 1) \operatorname{Log} \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Solution Pour que la fonction f soit définie il faut et il suffit que

$$\frac{1 + x}{1 - x} > 0,$$

par suite l'ensemble de définition de f est $D =]-1, 1[$. Remarquons que

$$f(-x) = (x^2 - 1) \operatorname{Log} \frac{1 - x}{1 + x} = -f(x),$$

la fonction f est impaire ; il suffit donc de l'étudier sur l'ensemble $D' = [0, 1[$. Remarquons aussi que pour tout élément x de D', $1 + x$ et $1 - x$ sont des nombres réels positifs, par suite nous pouvons écrire

$$f(x) = (x^2 - 1) \operatorname{Log}(1 + x) - (x^2 - 1) \operatorname{Log}(1 - x).$$

Comme

$$\lim_{x \to 1-} (x - 1) \operatorname{Log}(x - 1) = 0,$$

nous avons

$$\lim_{x \to 1-} (x^2 - 1) \operatorname{Log} (1 - x) = 0$$

d'où

$$\lim_{x \to 1-} (x^2 - 1) \operatorname{Log} (1 + x) - (x^2 - 1) \operatorname{Log} (1 - x) = 0 ,$$

d'autre part il est clair que $f(0) = 0$.

Pour tout élément x de D' nous avons

$$f'(x) = 2\, x \operatorname{Log} \frac{1 + x}{1 - x} + (x^2 - 1) \left[\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}\right]$$

$$= 2\left[x \operatorname{Log} \frac{1 + x}{1 - x} - 1\right] = 2\, x\left[\operatorname{Log} \frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1}{x}\right].$$

Nous sommes donc conduits à étudier la fonction g définie sur $]0, 1[$ par

$$g(x) = \operatorname{Log} \frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1}{x}$$

Nous avons

$$g'(x) = \frac{2}{1 - x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2(1 - x^2)}$$

donc pour tout élément x de l'intervalle $]0, 1[$ nous avons $g'(x) > 0$ ce qui prouve que la fonction g est strictement croissante. Nous avons

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \to 1-} g(x) = \lim_{x \to 1-} \operatorname{Log} (1 + x) - \lim_{x \to 1-} \operatorname{Log} (1 - x) - \lim_{x \to 1-} \frac{1}{x} = +\infty .$$

La fonction g s'annule donc une fois pour une valeur α et comme la fonction dérivée f' est du signe de g nous avons $f'(x) < 0$ pour $0 < x < \alpha$ et $f'(x) > 0$ pour $\alpha < x < 1$. Enfin il est clair que $f'(0) = -2$. Calculons maintenant la pente de la demi-tangente à gauche du point 1. Nous avons

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} [(x + 1) \operatorname{Log} (x + 1) - (x + 1) \operatorname{Log} (1 - x)] = +\infty .$$

Résumons ces résultats dans le tableau de variations

x	-1		$-\alpha$		0		$+\alpha$		1
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(-\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

Nous obtenons le graphe suivant :

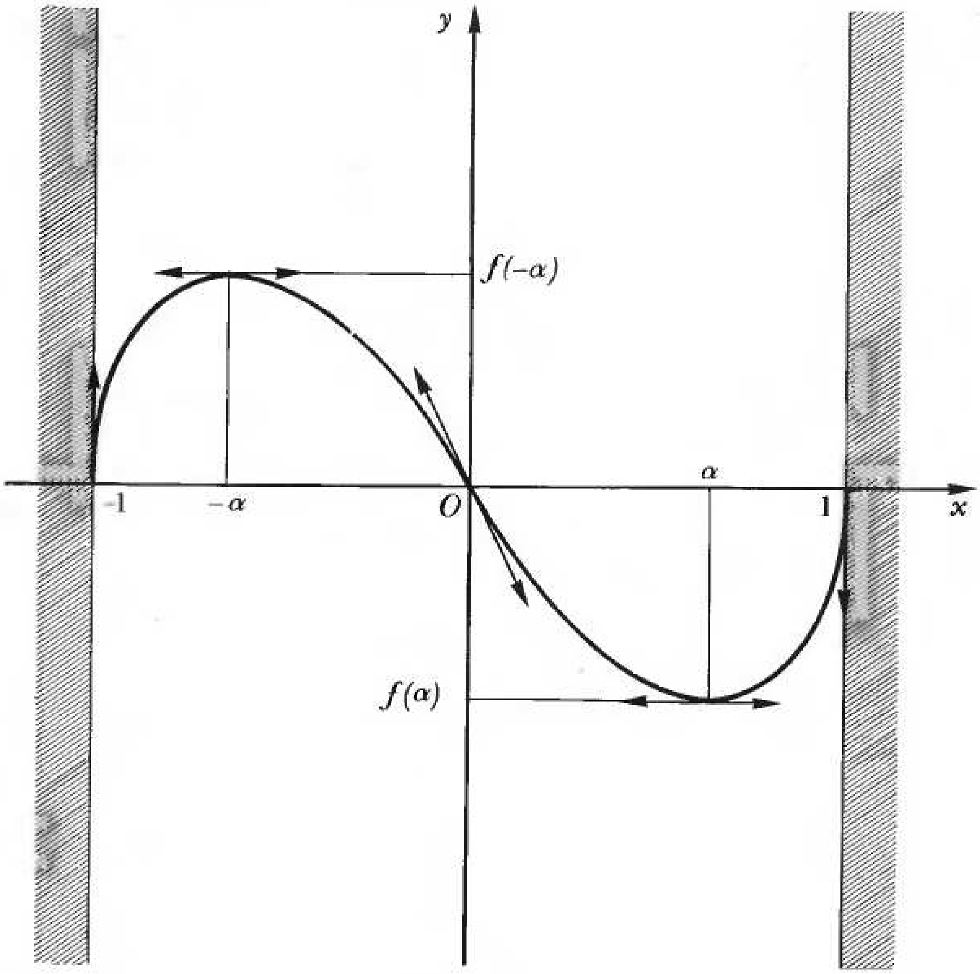

FIG. 5.2

5.3

Etudier la fonction f définie par $f(x) = x^{1/(x-1)}$.

Solution Nous avons $f(x) = e^{(\mathrm{Log}\,x)/(x-1)}$ donc l'ensemble de définition de f est l'ensemble $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Nous avons $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Pour étudier f au voisinage du point 1 posons $x = 1 + u$: lorsque x tend vers 1, u tend vers 0 et nous pouvons écrire

$$f(x) = e^{(\operatorname{Log} x)/(x-1)} = e^{[\operatorname{Log}(1+u)]/u} = e^{1-(u/2)+o(u)}$$

d'où

$$f(x) = e.e^{-(u/2)+o(u)} = e\left(1 - \frac{u}{2} + o(u)\right)$$

$$= e - \frac{eu}{2} + o(u) = e - \frac{e(x-1)}{2} + o(x-1)\,.$$

Nous voyons que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = e$, par suite nous pouvons prolonger par continuité la fonction f au point 1 en posant $f(1) = e$. De plus nous avons

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-e}{x-1} = -\frac{e}{2}$$

ce qui démontre que la fonction prolongée est dérivable au point 1 et que $f'(1) = -e/2$.

Pour tout élément x de D nous avons

$$f'(x) = e^{(\operatorname{Log} x)/(x-1)}\left[\frac{(1/x)(x-1) - \operatorname{Log} x}{(x-1)^2}\right]$$

donc la fonction f' a le même signe que la fonction g définie par

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} - \operatorname{Log} x\,.$$

Nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{x - 1 - x\operatorname{Log} x}{x} = -\infty\,.$$

Comme

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

nous voyons que $g'(x) = 0$ pour $x = 1$ par suite la fonction g croît de $-\infty$ à $g(1) = 0$ lorsque x varie de 0 à 1 et ensuite décroît de 0 à $-\infty$ quand x varie de 1 à $+\infty$. La fonction g et par conséquent f' est toujours négative.

Nous avons le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{e}{2}$	$-$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	e	↘	1

Nous obtenons le graphe suivant :

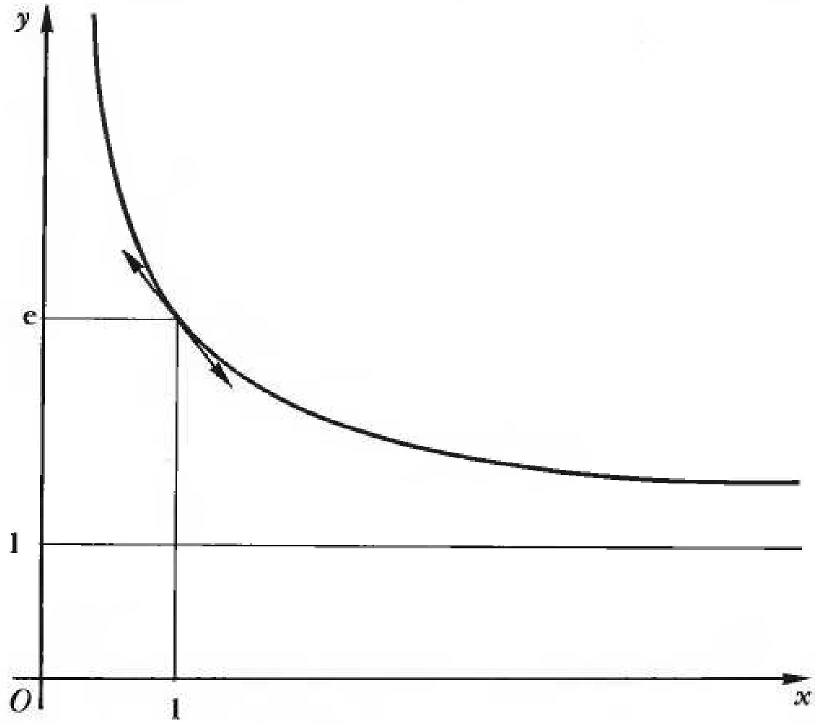

FIG. 5.3

5.4 Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{Log} x}.$$

Solution La fonction f est définie et continue sur l'ensemble

$$D =]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

D'après la croissance comparée des fonctions puissance et logarithme nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = 0.$$

Nous pouvons donc prolonger par continuité la fonction f au point 0 en posant $f(0) = 0$. D'autre part

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty.$$

Calculons $f'(x)$ pour tout élément x de D. Nous avons

$$f'(x) = \frac{\operatorname{Log} x - 1}{(\operatorname{Log} x)^2}$$

par suite $f'(x) = 0$ pour $x = \mathrm{e}$. Cherchons si la fonction prolongée est dérivable à droite au point 0. Nous avons

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\operatorname{Log} x} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad f_d'(0) = 0\,.$$

Résumons ces résultats dans le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	‖ $-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Nous obtenons le graphe suivant :

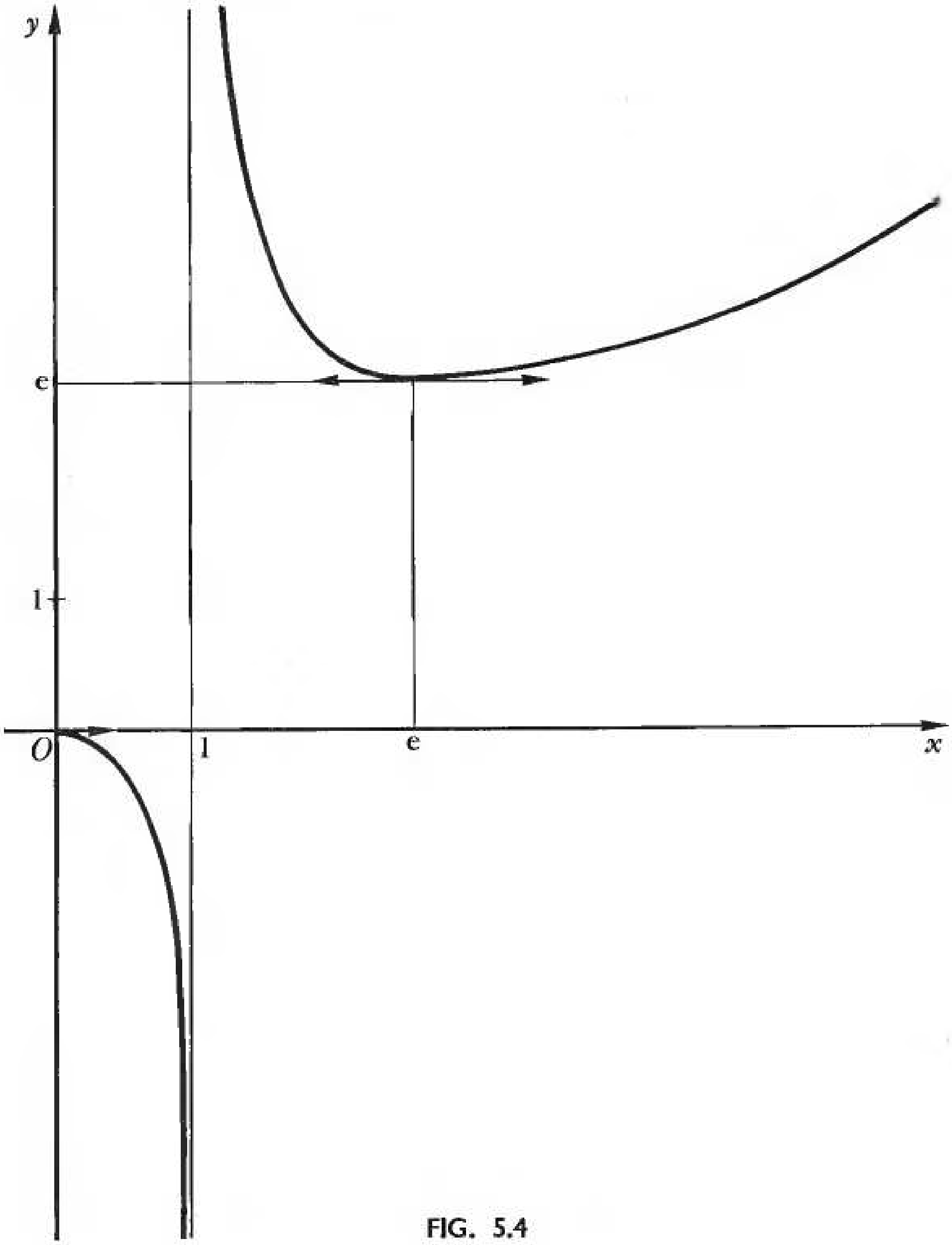

FIG. 5.4

5.5 Etudier la fonction f définie par $f(x) = e^{(x-1)/x^2}$.

Solution La fonction f est définie et continue sur l'ensemble $\mathbf{R}^*$. Comme

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0\,,$$

nous avons

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1\,.$$

D'autre part

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0\,.$$

Nous pouvons donc prolonger la fonction f par continuité au point 0 en posant $f(0) = 0$.

Calculons $f'(x)$ pour tout élément x de $\mathbf{R}^*$; nous avons

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2\,x(x-1)}{x^4}\, e^{(x-1)/x^2} = \frac{2-x}{x^3}\, e^{(x-1)/x^2}\,.$$

Comme $e^{(x-1)/x^2}/x^2 > 0$ pour tout élément x de $\mathbf{R}^*$, le signe de la fonction f' est le même que celui de l'expression $x(2-x)$. Cherchons si la fonction prolongée est dérivable au point 0 ; nous avons

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\, e^{(x-1)/x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(x-1)/x^2}{e^{-(x-1)/x^2}} \; \frac{1}{x(x-1)/x^2}\,,$$

mais $-(x-1)/x^2$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x-1)/x^2}{e^{-(x-1)/x^2}} = 0\,,$$

d'autre part

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x(x-1)/x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x-1} = 0$$

par suite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

ce qui prouve que la fonction prolongée est dérivable au point 0 et que $f'(0) = 0$.

Résumons ces résultats dans un tableau de variations

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[4]{e}$	$\searrow$	1

Nous obtenons le graphe suivant :

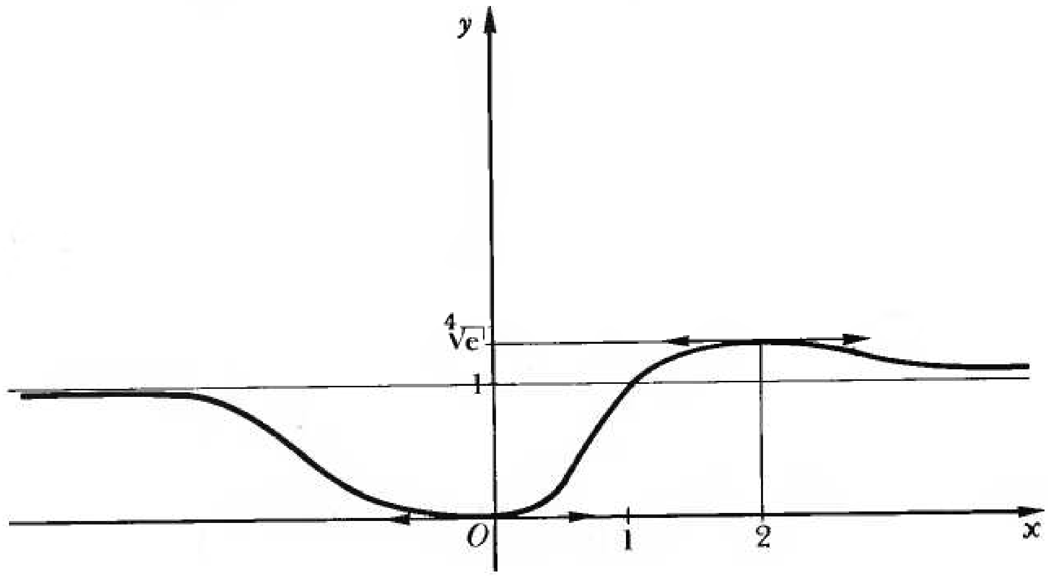

FIG. 5.5

5.6 Etudier la fonction f définie par $f(x) = (x - 1)\, e^{x/(x-1)}$.

Solution L'ensemble de définition de f est l'ensemble $D = \mathbf{R} - \{1\}$. Etudions le comportement de f au voisinage du point 1. Nous pouvons écrire

$$f(x) = e(x - 1)\, e^{1/(x-1)},$$

si x tend vers 1 par valeurs plus petites, $1/(x - 1)$ tend vers $-\infty$ donc

$$\lim_{x \to 1-} (x - 1)\, e^{1/(x-1)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = 0 .$$

Si $x > 1$ nous avons

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} e \frac{e^{1/(x-1)}}{1/(x - 1)}$$

et comme

$$\lim_{x \to 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty,$$

le théorème sur la croissance comparée d'une exponentielle et d'une puissance nous montre que

$$\lim_{x \to 1+} \mathrm{e} \frac{\mathrm{e}^{1/(x-1)}}{1/(x-1)} = +\infty .$$

Pour tout élément x de D nous avons

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x/(x-1)} \left(1 + (x-1) \frac{x-1-x}{(x-1)^2} \right) = \mathrm{e}^{x/(x-1)} \frac{x-2}{x-1},$$

par suite la fonction f' s'annule pour $x = 2$ et est du même signe que l'expression $(x-2)(x-1)$. Déterminons la pente de la demi-tangente à gauche du point 1, nous avons :

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \mathrm{e}^{x/(x-1)} = 0 .$$

Pour faire l'étude des branches infinies remarquons que si x tend vers $+\infty$, $1/(x-1)$ tend vers 0 ; nous pouvons donc écrire : $f(x) = \mathrm{e}(x-1)\,\mathrm{e}^{1/(x-1)}$ d'où

$$f(x) = \mathrm{e}(x-1) \left(1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{1}{(x-1)^2} \right) \right)$$

$$= \mathrm{e} \left(x - 1 + 1 + \frac{1}{2(x-1)} + o\left(\frac{1}{x-1} \right) \right)$$

d'où

$$f(x) = \mathrm{e}x + \frac{\mathrm{e}}{2(x-1)} + o\left(\frac{1}{x-1} \right).$$

Le graphe de f admet donc pour asymptote la droite $y = \mathrm{e}x$.

Résumons ces résultats dans le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0 ‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

Nous obtenons le graphe suivant

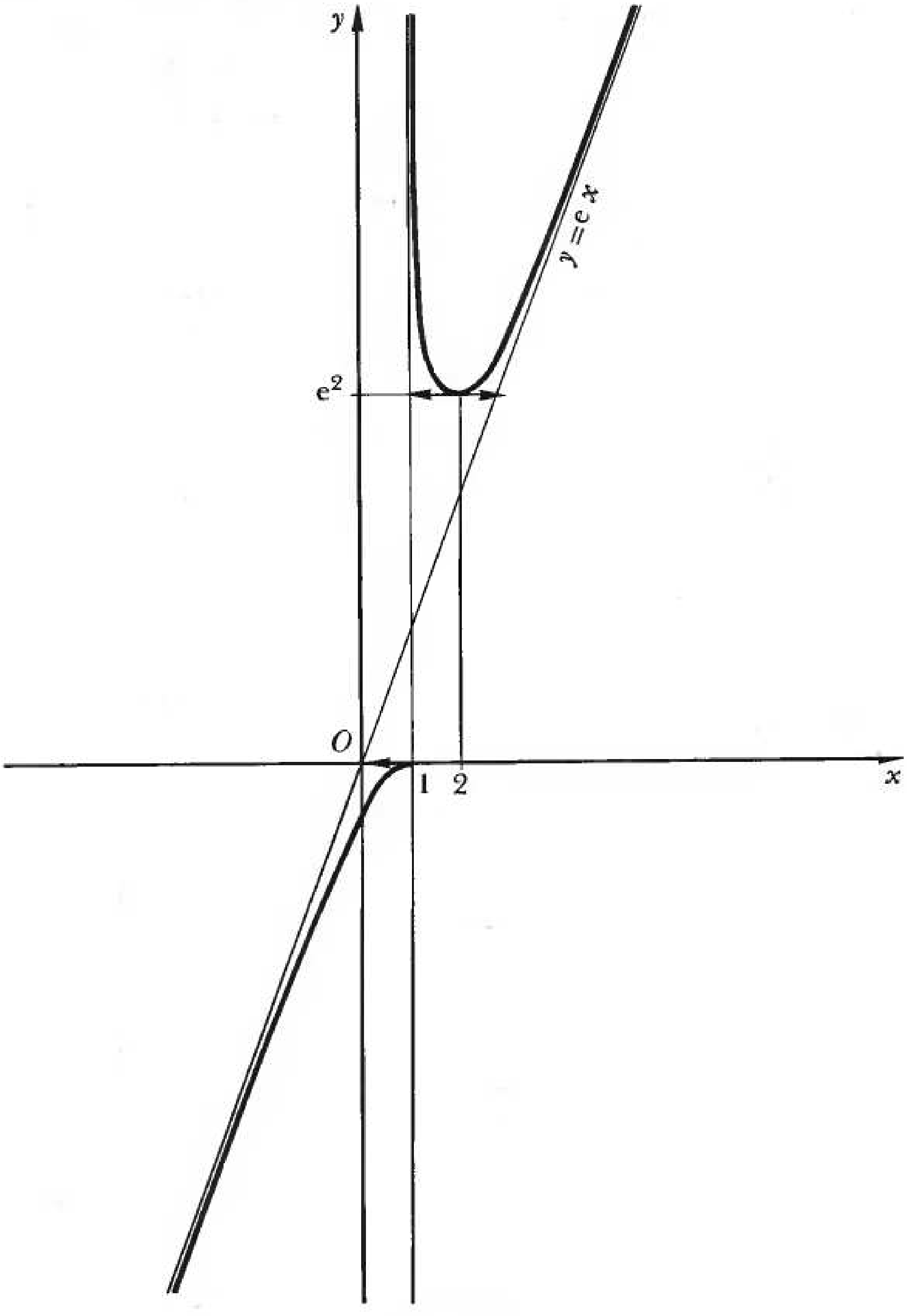

FIG. 5.6

5.7 Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

Solution Nous avons $f(x) = e^{x \operatorname{Log}[(x+1)/x]}$, la fonction f est donc définie et continue pour $(x+1)/x > 0$, i.e. pour tout élément x de l'ensemble

$$D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ nous avons

$$x \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 + o(1) ,$$

par suite

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1 + o(1)} = e .$$

Comme

$$\lim_{x \to (-1)-} x \operatorname{Log} \frac{x+1}{x} = +\infty$$

nous avons

$$\lim_{x \to (-1)-} f(x) = +\infty .$$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives nous savons que $x \operatorname{Log} x$ tend vers 0 donc

$$\lim_{x \to 0+} x \operatorname{Log} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to 0+} x \operatorname{Log}(x+1) - \lim_{x \to 0+} x \operatorname{Log} x = 0$$

d'où

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1 .$$

Nous pouvons ainsi prolonger la fonction f par continuité au point 0 en posant $f(0) = 1$.
Calculons $f'(x)$ pour tout élément x de D; nous avons

$$f'(x) = e^{x \operatorname{Log}[(x+1)/x]}\left(\operatorname{Log}\frac{x+1}{x} + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= e^{x \operatorname{Log}[(x+1)/x]}\left(\operatorname{Log}\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de

$$g(x) = \operatorname{Log}\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} .$$

Etudions sommairement la fonction g. Nous avons

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0 ,$$

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to (-1)-} g(x) = \lim_{x \to (-1)-} \frac{(x+1)\operatorname{Log}[(x+1)/x] - 1}{x+1} = \lim_{x \to (-1)-} \frac{-1}{x+1} = +\infty .$$

Comme

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

la fonction g croît de 0 à $+\infty$ lorsque x varie de $-\infty$ à -1 et décroît de $+\infty$ à 0 lorsque x varie de 0 à $+\infty$; la fonction g reste donc constamment positive. Etudions si la fonction f est dérivable à droite au point 0. Nous savons que

$$\lim_{x\to 0+} x \operatorname{Log}\frac{x+1}{x} = 0 \qquad \text{donc} \qquad e^{x \operatorname{Log}[(x+1)/x]} - 1 \sim x \operatorname{Log}\frac{x+1}{x},$$

par suite nous avons

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x \operatorname{Log}[(x+1)/x]} - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x \operatorname{Log}[(x+1)/x]}{x} = +\infty .$$

Le graphe de la fonction f admet donc une demi-tangente verticale à l'origine. Nous avons le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+\infty$	$+$	
$f(x)$	e ↗		$+\infty$	1	↗	e

Nous obtenons le graphe suivant :

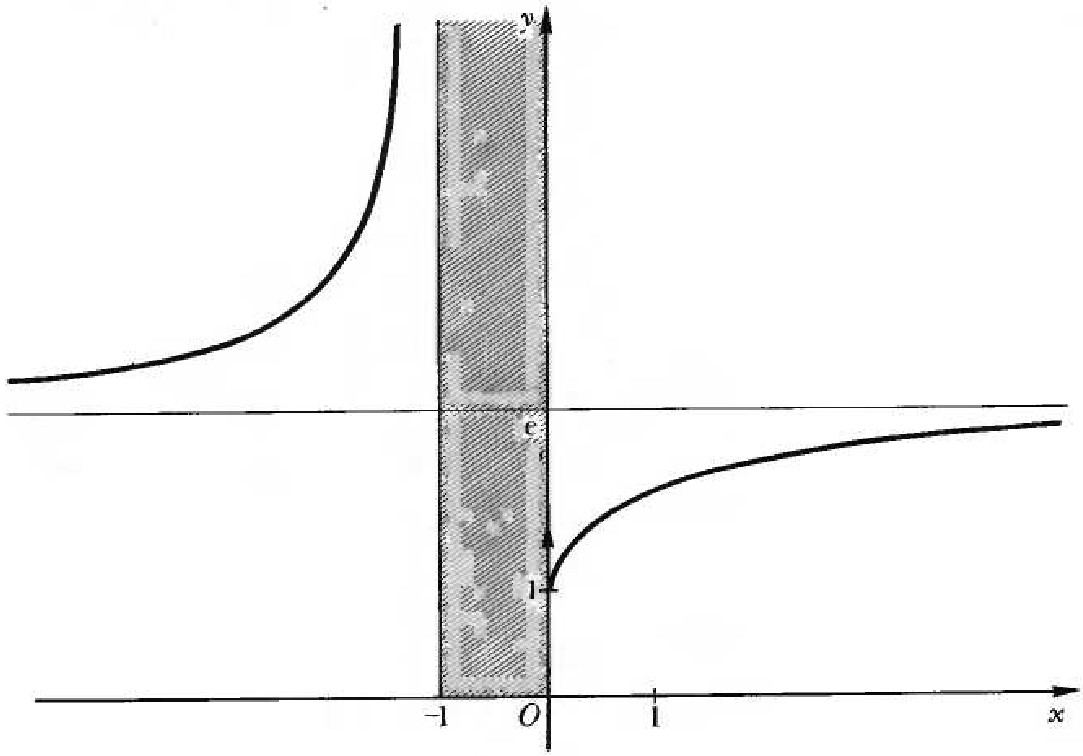

FIG. 5.7

5.8 Etudier la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Solution La fonction f est définie pour $x^2 - 1 \geqslant 0$ donc sur l'ensemble

$$D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\,.$$

Etudions f au voisinage de $+\infty$, nous avons

$$f(x) = x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

d'où

$$f(x) = x + x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right);$$

par suite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

le graphe de f admet la droite d'équation $y = 2x$ comme asymptote et se trouve au-dessous de cette droite. Au voisinage de $-\infty$ nous avons

$$f(x) = x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

d'où

$$f(x) = x - x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right);$$

par suite

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\,.$$

Calculons $f'(x)$ pour tout élément x de D, différent de 1 et de -1, nous avons

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,.$$

Il est clair que f' ne s'annule jamais ; comme f' est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ elle y garde un signe constant. Comme

$$f'(-2) = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} < 0\,,$$

f' est négative sur l'intervalle $]-\infty, -1[$; de même

$$f'(2) = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} > 0\,,$$

donc f' est positive sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Déterminons la pente de la demi-tangente au graphe à droite du point 1 ; nous avons

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\left(1+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right) = +\infty .$$

De la même manière déterminons la pente de la demi-tangente au graphe à gauche du point -1 ; nous avons

$$\lim_{x\to(-1)-} \frac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1} = \lim_{x\to(-1)-}\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = -\infty .$$

Nous avons le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	1	↗	$+\infty$

Nous obtenons le graphe suivant

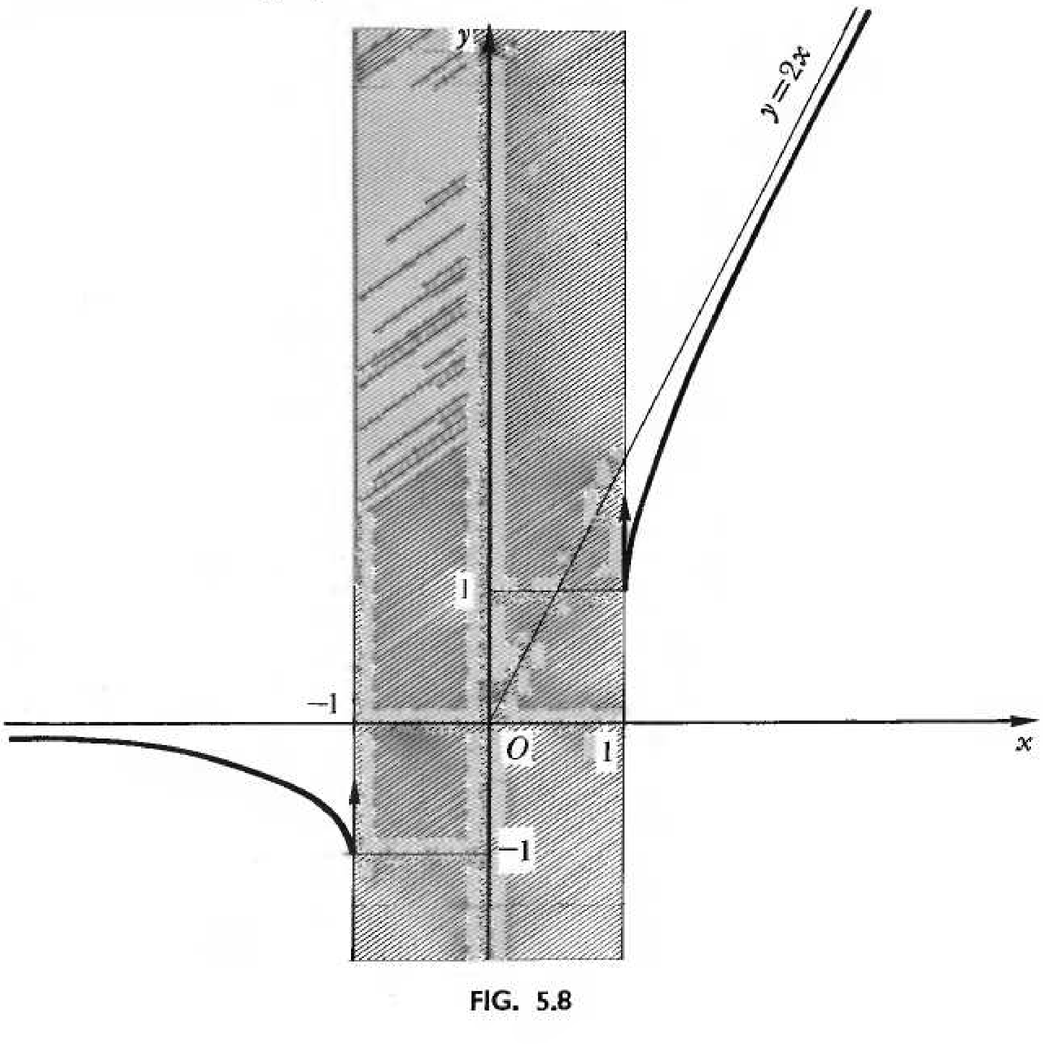

FIG. 5.8

5.9 Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}.$$

Solution La fonction f est définie si $x(x+2) \geqslant 0$ et $x \neq 0$, donc l'ensemble de définition de f est l'ensemble $D =]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$. Etudions la limite de la fonction f à droite au point 0, nous avons

$$\lim_{x\to 0+} e^{1/x}\sqrt{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}}{(1/x)^{1/2}} = +\infty$$

d'après la croissance comparée d'une exponentielle et d'une puissance au voisinage de $+\infty$; par suite $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. Etudions la fonction f lorsque x tend vers $\pm\infty$, nous avons

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\sqrt{x(x+2)} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}} = |x|\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ nous avons

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(x + 1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 2 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

le graphe de la fonction f admet donc la droite d'équation $y = x + 2$ comme asymptote et se trouve au-dessus de cette droite. Lorsque x tend vers $-\infty$ nous avons

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(-x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x - 2 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

le graphe de la fonction f admet donc la droite d'équation $y = -x - 2$ comme asymptote et se trouve au-dessus de cette droite.

Pour tout élément x de D tel que $x \neq -2$ nous avons

$$f'(x) = e^{1/x}\left(-\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x^2} + \frac{2x+2}{2\sqrt{x(x+2)}}\right) = \frac{e^{1/x}}{x}\,\frac{x^2-2}{\sqrt{x(x+2)}},$$

f' est donc du signe de l'expression $x(x^2 - 2)$ et la fonction f admet un minimum pour $x = \sqrt{2}$. Il est aisé de vérifier que $f(\sqrt{2}) > \sqrt{2} + 2$ donc ce minimum est situé sur le graphe au-dessus de l'asymptote. Déterminons la pente de la demi-tangente à gauche du point -2 ; nous avons

$$\lim_{x\to(-2)-} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x\to(-2)-} -\,e^{1/x}\sqrt{\frac{x}{x+2}} = -\infty\,.$$

La demi-tangente à gauche du point -2 est donc parallèle à l'axe Oy. Nous avons le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$		‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Nous obtenons le graphe suivant.

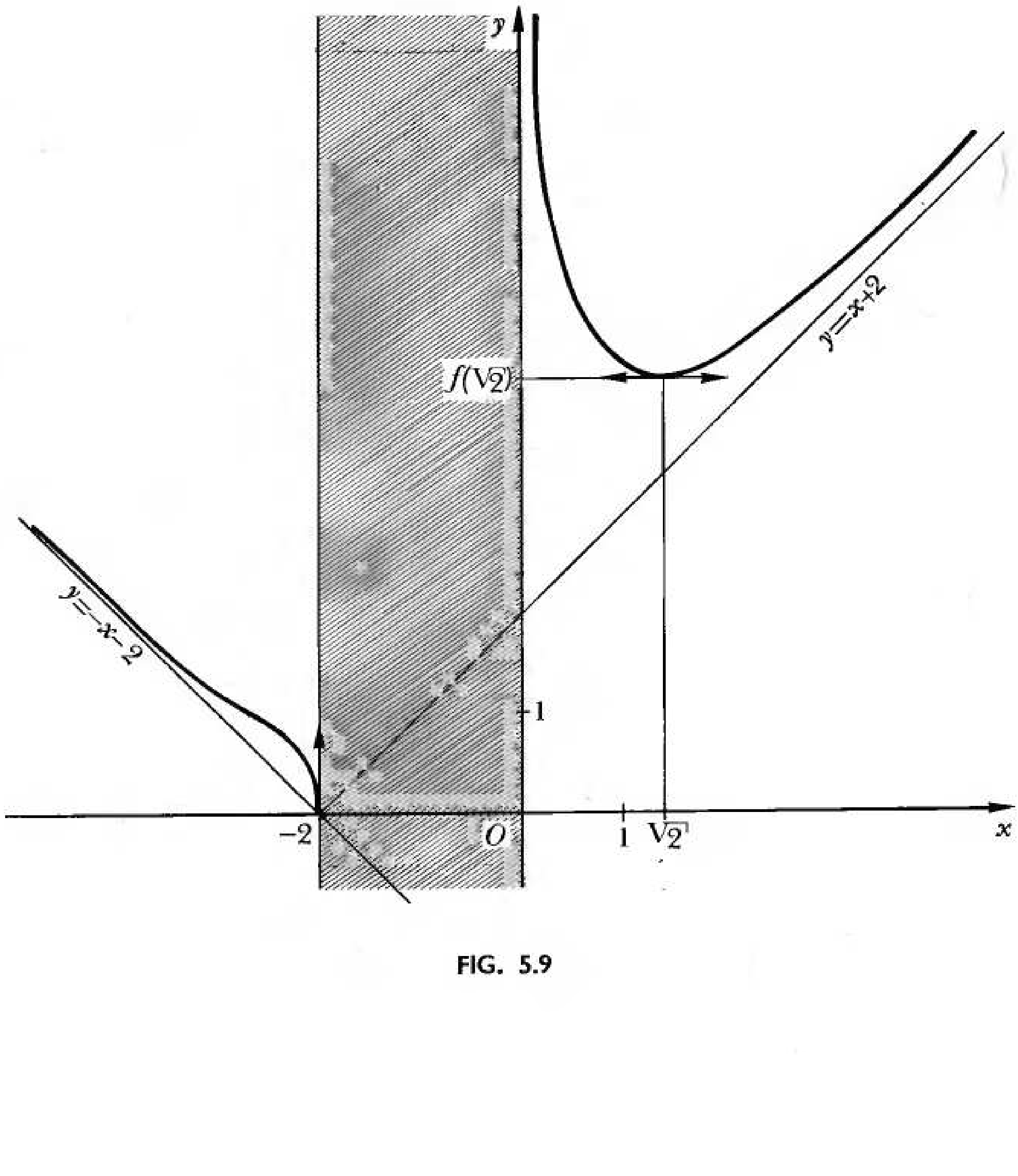

FIG. 5.9

5.10 Etudier la fonction f définie par $f(x) = x^2 \operatorname{Arc\,tg}[1/(x+1)]$.

Solution La fonction f est continue pour tout nombre réel x appartenant à l'ensemble $D = \mathbf{R} - \{-1\}$. Nous avons

$$\lim_{x \to (-1)-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (-1)+} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Pour étudier la fonction f au voisinage de l'infini posons $u = 1/(x+1)$. Nous avons

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x+1} = \operatorname{Arc\,tg} u = u + o(u^2) \quad \text{et} \quad x^2 = \left(\frac{1}{u} - 1\right)^2 = 1 - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2};$$

par suite

$$f(x) = \frac{1}{u} - 2 + u + o(u) \quad \text{d'où} \quad f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x+1}\right);$$

le graphe de la fonction f admet la droite d'équation $y = x - 1$ pour asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Calculons la dérivée de f pour tout élément x de D. Nous avons

$$f'(x) = 2x \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x+1} + x^2 \frac{-1/(x+1)^2}{1 + [1/(x+1)^2]}$$

d'où

$$f'(x) = x\left(2 \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\right).$$

Pour connaître le signe de f' nous devons étudier la fonction g définie par

$$g(x) = 2 \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2 + 2x + 2}.$$

Nous avons

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \to (-1)-} g(x) = -\pi + 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (-1)+} g(x) = \pi + 1.$$

Comme

$$g'(x) = 2\,\frac{-\,1/(x+1)^2}{1+[1/(x+1)^2]} - \frac{x^2+2\,x+2-2\,x^2-2\,x}{(x^2+2\,x+2)^2}$$

$$= \frac{-\,2}{x^2+2\,x+2} - \frac{-\,x^2+2}{(x^2+2\,x+2)^2} = \frac{-\,x^2-4\,x-6}{(x^2+2\,x+2)^2}$$

nous remarquons que g' est toujours négative donc la fonction g est décroissante et par suite négative pour $x < -1$ et positive pour $x > -1$.

Calculons les pentes des demi-tangentes à droite et à gauche du point -1 ; pour cela posons $x + 1 = v$. Pour $v > 0$ nous avons

$$\frac{f(x)-(\pi/2)}{x+1} = \frac{(v-1)^2\,[\operatorname{Arc\,tg}(1/v)] - (\pi/2)}{v}$$

$$= \frac{(v^2-2\,v+1)\,[(\pi/2) - \operatorname{Arc\,tg} v] - (\pi/2)}{v}$$

$$= \frac{1}{v}\left[(1-2\,v+o(v))\left(\frac{\pi}{2} - v + o(v)\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{v}[-\,v - \pi v + o(v)] = -\,1 - \pi + o(1)\,.$$

Donc

$$\lim_{x\to(-1)+} \frac{f(x)-(\pi/2)}{x+1} = -\,1-\pi\,.$$

Pour $v < 0$ nous ferions un calcul analogue en utilisant la relation

$$\operatorname{Arc\,tg} v = -\,\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{v}$$

(*cf.* exercice 2.27), nous obtenons le résultat

$$\lim_{x\to(-1)-} \frac{f(x)+(\pi/2)}{x+1} = \pi - 1\,.$$

Résumons tous ces résultats dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1 ‖	‖		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\pi-1$ ‖	‖ $-1-\pi$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$ ‖	‖ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Nous obtenons le graphe suivant :

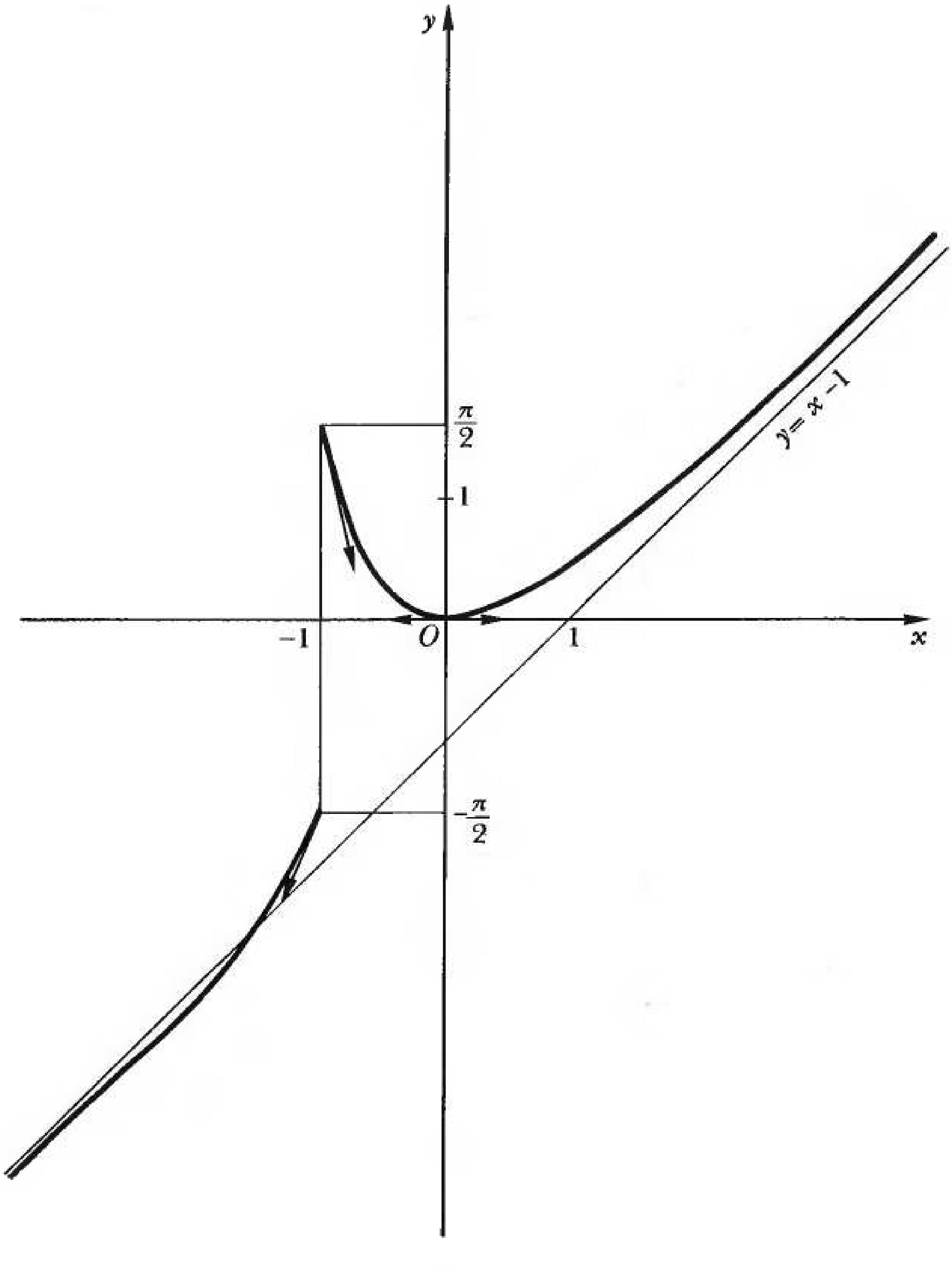

FIG. 5.10

5.11 Etudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

Solution La fonction f est définie et continue sur $\mathbf{R}$ tout entier. Pour étudier les branches infinies posons $X = 1/x$ et effectuons un développement limité pour X au voisinage de 0.

$$f(x) = x\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{1}{X}(1 - 3X^2 + 2X^3)^{1/3} = \frac{1}{X}(1 - X^2 + o(X^2))$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{X} - X + o(X) = x - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le graphe de f admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote et se trouve au-dessus de cette droite quand x tend vers $-\infty$ et au-dessous lorsque x tend vers $+\infty$.

Remarquons que $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$, la fonction f est donc dérivable sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être pour $x = 1$ et $x = -2$. Pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$ nous avons

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{3x^2 - 3}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+2)^2}} = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+2)^2}},$$

la fonction f' est donc du même signe que l'expression $x^2 - 1$. Au voisinage de 1 nous avons

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{(x-1)^{2/3}(x+2)^{1/3}}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{(x+2)^{1/3}}{(x-1)^{1/3}} = +\infty$$

de même

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{(x+2)^{1/3}}{(x-1)^{1/3}} = -\infty\,.$$

Le graphe de f présente donc un point de rebroussement à demi-tangente parallèle à l'axe Oy. Au voisinage du point -2 nous avons

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-1)^{2/3}(x+2)^{1/3}}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-1)^{2/3}}{(x+2)^{2/3}} = +\infty\,;$$

le graphe de f admet une tangente parallèle à l'axe Oy.

Nous avons le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Nous obtenons le graphe suivant :

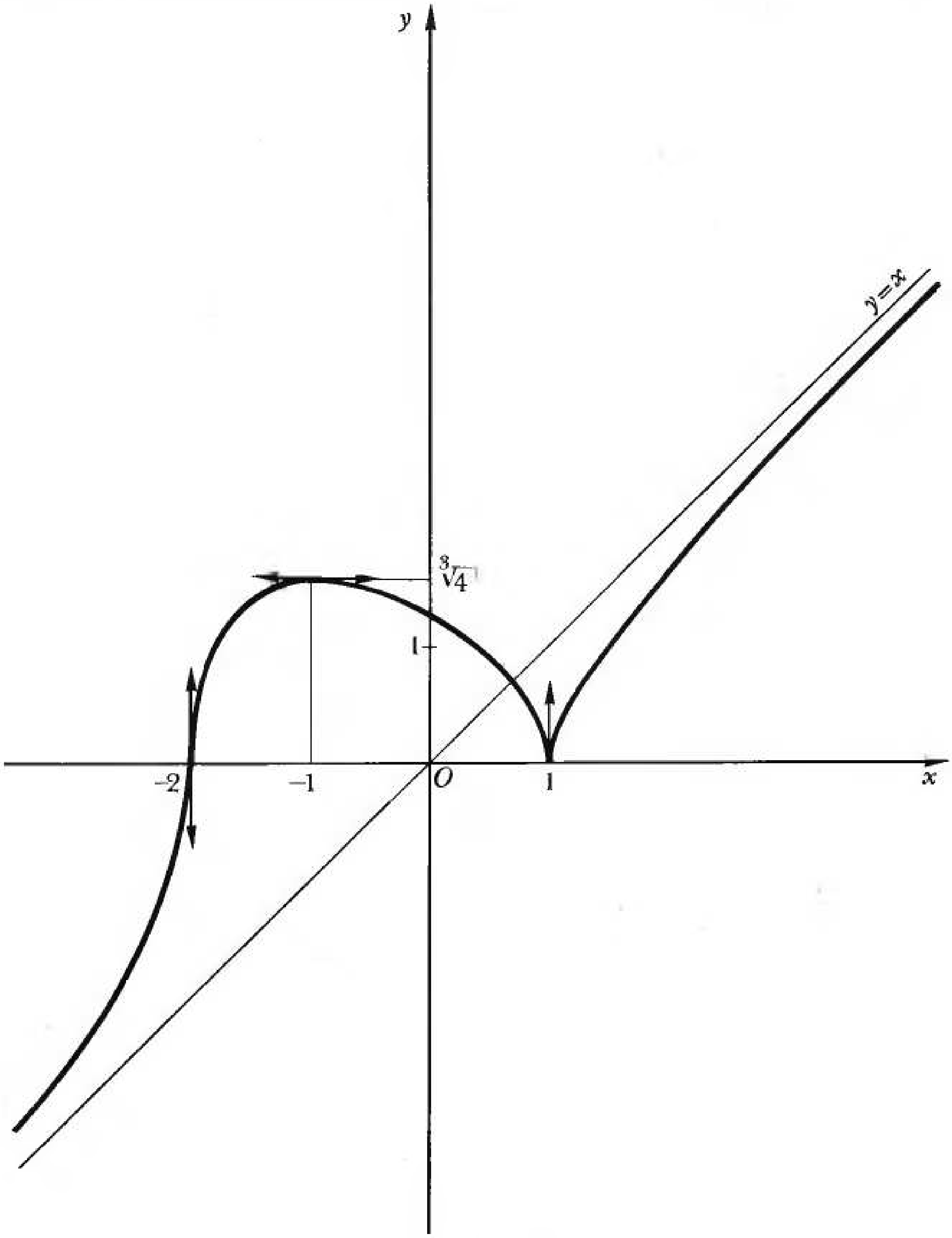

FIG. 5.11

5.12 Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\text{Log}\,|\,x-2\,|}{\text{Log}\,|\,x\,|}.$$

Solution La fonction f est définie et continue sur l'ensemble $D = \mathbf{R} - \{-1, 0, 1, 2\}$. Nous avons

$$\lim_{x \to -1} \operatorname{Log} |x| = 0$$

donc

$$\lim_{x \to (-1)-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (-1)+} f(x) = -\infty,$$

comme

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{Log} |x| = -\infty$$

nous avons

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

nous pouvons donc prolonger par continuité la fonction f en posant $f(0) = 0$. D'autre part, puisque

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{Log} |x| = 0,$$

nous avons

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

ce qui prouve que le graphe de f admet un point de rebroussement à demi-tangente parallèle à l'axe Oy. Pour étudier f au voisinage du point 1 posons $x = 1 + u$ où u est au voisinage de 0. En ce cas $|-1 + u| = 1 - u$ et $|1 + u| = 1 + u$, nous pouvons donc écrire

$$f(x) = \frac{\operatorname{Log} |-1 + u|}{\operatorname{Log} |1 + u|} = \frac{\operatorname{Log}(1 - u)}{\operatorname{Log}(1 + u)}$$

d'où

$$f(x) = \frac{-u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)}{u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)}$$

$$= \left(-1 - \frac{u}{2} + o(u)\right)\left(1 + \frac{u}{2} + o(u)\right) = -1 - u + o(u).$$

Nous avons donc

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -1,$$

par suite f peut être prolongée par continuité au point 1 en posant $f(1) = -1$. Comme

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{u \to 0} \frac{-1 - u + o(u) + 1}{u} = -1,$$

la fonction f prolongée en posant $f(1) = -1$ est dérivable au point 1 et $f'(1) = -1$. Il est clair d'autre part que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\operatorname{Log}|x| + \operatorname{Log}|1 - (2/x)|}{\operatorname{Log}|x|} = 1.$$

Le graphe de la fonction f admet donc comme asymptotes les droites d'équations $x = -1$, $x = 2$ et $y = 1$.

Pour tout élément x de D nous avons

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x-2} \operatorname{Log}|x| - \dfrac{1}{x} \operatorname{Log}|x-2|}{(\operatorname{Log}|x|)^2} = \frac{x \operatorname{Log}|x| - (x-2) \operatorname{Log}|x-2|}{x(x-2)(\operatorname{Log}|x|)^2}.$$

Nous sommes donc amenés à étudier la fonction g définie par

$$g(x) = x \operatorname{Log}|x| - (x-2) \operatorname{Log}|x-2|.$$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbf{R}$ si nous posons $g(0) = g(2) = 2 \operatorname{Log} 2$. Nous avons

$$g'(x) = \operatorname{Log}|x| + 1 - \operatorname{Log}|x-2| - 1 = \operatorname{Log}\left|\frac{x}{x-2}\right|.$$

Il est clair que $|x/(x-2)| > 1$ pour $x > 1$, $|x/(x-2)| = 1$ pour $x = 1$ et $|x/(x-2)| < 1$ pour $x < 1$; par suite $g'(1) = 0$, $g'(x) < 0$ pour $x < 1$ et $g'(x) > 0$ pour $x > 1$. La fonction g admet donc un minimum pour $x = 1$ et ce minimum vaut $g(1) = 0$, ceci prouve donc que la fonction g est toujours positive et par suite la fonction f' a le même signe que l'expression $x(x-2)$.

Nous avons le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$-$	-1	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Nous obtenons le graphe suivant :

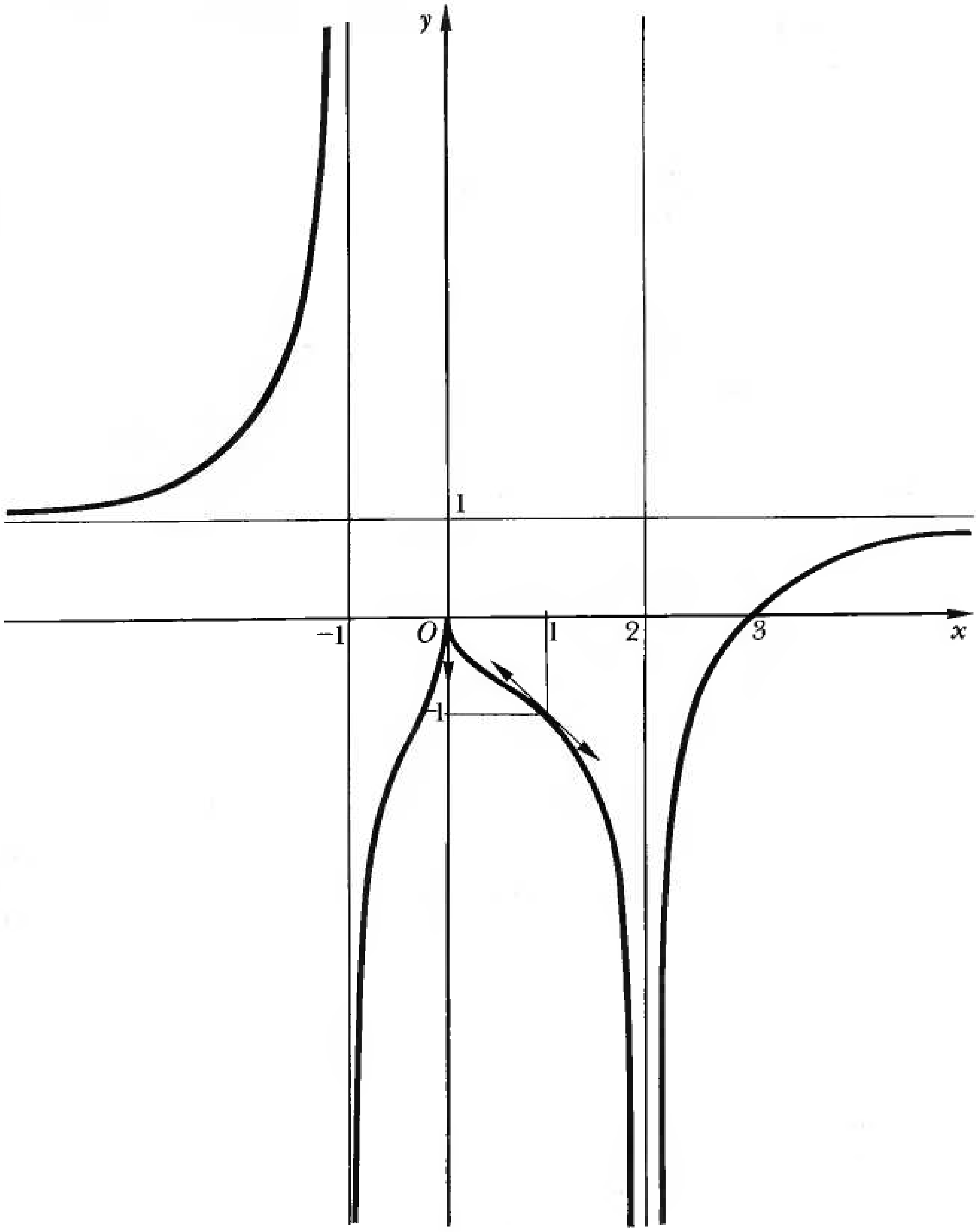

FIG. 5.12

5.13 Etudier la fonction f définie par $f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

Solution Comme $f(x) = e^{\sin x \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg} x)}$ la fonction f est définie si et seulement si $1 + \operatorname{tg} x > 0$ et $x \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. La fonction f étant périodique de période 2π, nous pouvons nous limiter à l'étude sur l'ensemble

$$D = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

Etudions le comportement de f aux bornes des intervalles constituant D. Nous avons

$$\lim_{x \to (-\pi/4)+} e^{\sin x \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg} x)} = +\infty ;$$

$$\lim_{x \to (\pi/2)-} e^{\sin x \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg} x)} = +\infty ; \qquad \lim_{x \to (3\pi/4)+} e^{\sin x \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg} x)} = 0 ;$$

$$\lim_{x \to (3\pi/2)-} e^{\sin x \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg} x)} = 0 .$$

Nous pouvons donc prolonger f par continuité en posant

$$f\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = f\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$$

pour tout entier relatif k.

Cherchons la pente de la demi-tangente à droite au point $3\pi/4$. Posons $x = (3\pi/4) + u$; lorsque x tend vers $3\pi/4$, u tend vers 0 et nous aurons

$$\operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg} x) = \operatorname{Log}\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + u\right)\right) = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{-1 + \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} u}\right)$$

$$= \operatorname{Log}(2 \operatorname{tg} u) - \operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg} u) = \operatorname{Log}(2 \operatorname{tg} u) - u + o(u)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + u\right) = \sin\frac{3\pi}{4}\cos u + \cos\frac{3\pi}{4}\sin u = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos u - \sin u)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - u + o(u)).$$

Nous avons donc

$$\frac{f(x) - f(3\pi/4)}{x - (3\pi/4)} = \frac{1}{u} e^{(\sqrt{2}/2)(1-u+o(u))(\operatorname{Log}(2 \operatorname{tg} u) - u + o(u))}$$

d'où

$$\frac{f(x) - f(3\pi/4)}{x - (3\pi/4)} = \frac{1}{u}\left[e^{(\sqrt{2}/2)(\operatorname{Log}(2 \operatorname{tg} u) - u - u \operatorname{Log}(2 \operatorname{tg} u) + o(u))}\right],$$

par suite

$$\lim_{x \to (3\pi/4)+} \frac{f(x) - f(3\pi/4)}{x - (3\pi/4)} =$$

$$= \left[\lim_{u \to 0+} \frac{e^{(\sqrt{2}/2)\,\mathrm{Log}\,(2\,\mathrm{tg}\,u)}}{u}\right]\left[\lim_{u \to 0+} e^{(\sqrt{2}/2)\,(-u - u\,\mathrm{Log}\,(2\,\mathrm{tg}\,u) + o(u))}\right].$$

Comme

$$u \,\mathrm{Log}\,(2\,\mathrm{tg}\,u) = \frac{u}{2\,\mathrm{tg}\,u}\; 2\,\mathrm{tg}\,u\,\mathrm{Log}\,(2\,\mathrm{tg}\,u)\,,$$

$$\lim_{u \to 0} \left(- u - u\,\mathrm{Log}\,(2\,\mathrm{tg}\,u) + o(u)\right) = 0$$

d'où

$$\lim_{u \to 0+} e^{(\sqrt{2}/2)\,(-u - u\,\mathrm{Log}\,(2\,\mathrm{tg}\,u) + o(u))} = 1\,;$$

d'autre part

$$e^{(\sqrt{2}/2)\,\mathrm{Log}\,(2\,\mathrm{tg}\,u)} = (2\,\mathrm{tg}\,u)^{\sqrt{2}/2}$$

et comme $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$,

$$\lim_{u \to 0+} \frac{(2\,\mathrm{tg}\,u)^{\sqrt{2}/2}}{u} = +\infty$$

par suite

$$\lim_{x \to (3\pi/4)+} \frac{f(x) - f(3\pi/4)}{x - (3\pi/4)} = +\infty\,;$$

le graphe de f admet donc une demi-tangente parallèle à l'axe Oy. Pour chercher la pente de la demi-tangente au point $3\pi/2$, posons $x = (3\pi/2) - v$. Nous savons que

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - v\right) = -\cos v \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - v\right) = -\sin v$$

d'où

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - v\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}\,v}\,,$$

par suite

$$\sin x \,\mathrm{Log}\,(1 + \mathrm{tg}\,x) = -\cos v\left(\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{tg}\,v}\right)\right)$$

d'où $\sin x \operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg} x) = -\cos v \operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg} v) + \cos v \operatorname{Log} \sin v - \cos v \operatorname{Log} \cos v$. Il est clair que

$$\lim_{v \to 0+} \left(-\cos v \operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg} v) - \cos v \operatorname{Log} \cos v\right) = 0$$

par suite

$$\lim_{x \to (3\pi/2)-} \frac{f(x) - f(3\pi/2)}{x - (3\pi/2)} = \lim_{v \to 0+} \left[\frac{e^{\cos v \operatorname{Log} \sin v}}{-v} e^{-\cos v \operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg} v) - \cos v \operatorname{Log} \cos v}\right]$$

d'où

$$\lim_{x \to (3\pi/2)-} \frac{f(x) - f(3\pi/2)}{x - (3\pi/2)} = \lim_{v \to 0+} \frac{e^{\cos v \operatorname{Log} \sin v}}{-v}.$$

Nous avons

$$\frac{e^{\cos v \operatorname{Log} \sin v}}{-v} = [e^{(\cos v - 1) \operatorname{Log} \sin v}] \left[\frac{e^{\operatorname{Log} \sin v}}{-v}\right] = [e^{(\cos v - 1) \operatorname{Log} \sin v}] \frac{\sin v}{-v}$$

d'où

$$\lim_{v \to 0+} \frac{e^{\cos v \operatorname{Log} \sin v}}{-v} = \left[\lim_{v \to 0+} e^{(\cos v - 1) \operatorname{Log} \sin v}\right] \left[\lim_{v \to 0+} \frac{\sin v}{-v}\right].$$

Mais

$$\lim_{v \to 0+} \frac{\sin v}{-v} = -1$$

il suffit donc de déterminer

$$\lim_{v \to 0+} (\cos v - 1) \operatorname{Log} \sin v.$$

Nous avons :

$$(\cos v - 1) \operatorname{Log} \sin v = \frac{\cos v - 1}{\sin v} \sin v \operatorname{Log} \sin v.$$

Lorsque v tend vers $0+$, $\sin v \operatorname{Log} \sin v$ tend vers $0+$, $\cos v - 1 \sim v^2/2$ et $\sin v \sim v$ donc

$$\lim_{v \to 0+} \frac{\cos v - 1}{\sin v} = 0$$

par suite

$$\lim_{v \to 0+} (\cos v - 1) \operatorname{Log} \sin v = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x \to (3\pi/2)-} \frac{f(x) - f(3\pi/2)}{x - (3\pi/2)} = -1.$$

Calculons la dérivée de f. Nous avons :

$$f'(x) = f(x)\left[\cos x \operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg} x) + \sin x \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}\right]$$

$$= f(x) \cos x \left[\operatorname{Log}(1 + \operatorname{tg} x) + \frac{\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg} x}\right].$$

La fonction tangente étant strictement croissante, la fonction qui se trouve entre crochets dans l'égalité ci-dessus aura le même signe que la fonction g définie par

$$g(u) = \operatorname{Log}(1 + u) + \frac{u(1 + u^2)}{1 + u}$$

lorsque u varie de -1 à $+\infty$. Il est clair que $g(0) = 0$. Calculons g' ; nous avons

$$g'(u) = \frac{1}{1 + u} + \frac{(1 + 3u^2)(1 + u) - u - u^3}{(1 + u)^2}$$

d'où

$$g'(u) = \frac{2u^3 + 3u^2 + u + 2}{(1 + u)^2}.$$

Nous devons donc trouver le signe de $P(u) = 2u^3 + 3u^2 + u + 2$ pour $u \geqslant -1$. Comme $P'(u) = 6u^2 + 6u + 1$ admet les racines

$$u_1 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{6} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{6},$$

le polynôme P est d'abord croissant ensuite décroissant puis à nouveau croissant. La valeur du minimum relatif est

$$P(u_2) = \frac{216 - 24\sqrt{3}}{108}$$

qui est strictement positive donc P change une seule fois de signe. Comme $P(-1) = 2$ est strictement positif on a $P(u) > 0$ pour tout $u > -1$. La fonction g est alors strictement croissante et comme elle s'annule pour $u = 0$ elle est négative pour $u \leqslant 0$ et positive pour $u \geqslant 0$. Nous pouvons construire le tableau de variations de f.

x		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{3\pi}{2}$	
$f'(x)$			$-$	0	$+$				$+$	0	$-$		
$f(x)$		$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	

Nous obtenons le graphe suivant :

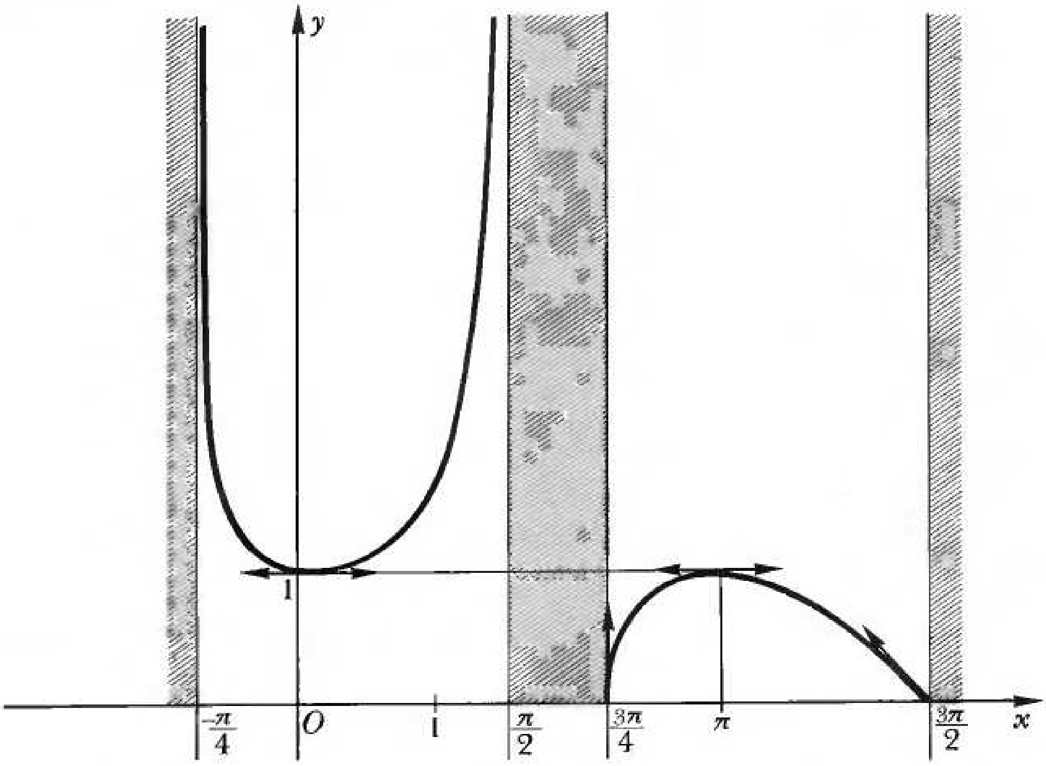

FIG. 5.13

5.14 Etudier la fonction f définie par $f(x) = x\ e^{1/x}$ pour tout nombre réel $x < 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \operatorname{Log}[(x+1)/x]$ pour tout nombre réel $x > 0$.

Solution La fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ et continue partout sauf peut-être au point 0. Nous avons

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x\, e^{1/x} = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left[x^2 \operatorname{Log}(x+1) - x^2 \operatorname{Log} x\right] = 0;$$

par suite

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0+} f(x),$$

la fonction f est donc continue au point 0.

Etudions la dérivabilité en ce point. Nous avons :

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} e^{1/x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \left[x \operatorname{Log}(x+1) - x \operatorname{Log} x\right] = 0.$$

Il existe donc une dérivée à gauche et une dérivée à droite et comme elles sont égales, la fonction f est dérivable au point 0 et $f'(0) = 0$.

Lorsque x tend vers $-\infty$ nous avons :

$$f(x) = x\,e^{1/x} = x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 1 + \frac{1}{2\,x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le graphe de f admet donc la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote et se trouve au-dessous de cette droite. Lorsque x tend vers $+\infty$ nous avons :

$$f(x) = x^2 \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{3\,x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3\,x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le graphe de f admet donc la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ comme asymptote et se trouve au-dessus de cette droite.

Pour tout nombre réel $x < 0$ nous avons

$$f'(x) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

par suite la fonction f' est positive pour $x < 0$. Comme

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \left(e^{1/x} - \frac{1}{x}\,e^{1/x}\right) = 0\,,$$

la fonction dérivée f' est continue à gauche du point 0. Pour $x > 0$ nous avons :

$$f'(x) = 2\,x \operatorname{Log}\frac{x+1}{x} + x^2\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = x\left(2 \operatorname{Log}\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Nous devons étudier le signe de

$$g(x) = 2 \operatorname{Log}\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\,.$$

Nous avons

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2(x+1)\operatorname{Log}(x+1) - 2\,x \operatorname{Log} x - 2 \operatorname{Log} x - 1}{x+1} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0\,.$$

Comme

$$g'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x-2}{x(x+1)^2}$$

est strictement négatif pour tout nombre réel $x > 0$ la fonction g décroît de $+\infty$ à 0, et reste donc positive. D'autre part nous avons

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \left[2\,x \operatorname{Log}\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1}\right] = 0 = f'(0)$$

ce qui prouve que la fonction f' est continue à droite de 0 donc continue au point 0.

Les résultats précédents se trouvent résumés dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Nous obtenons le graphe suivant :

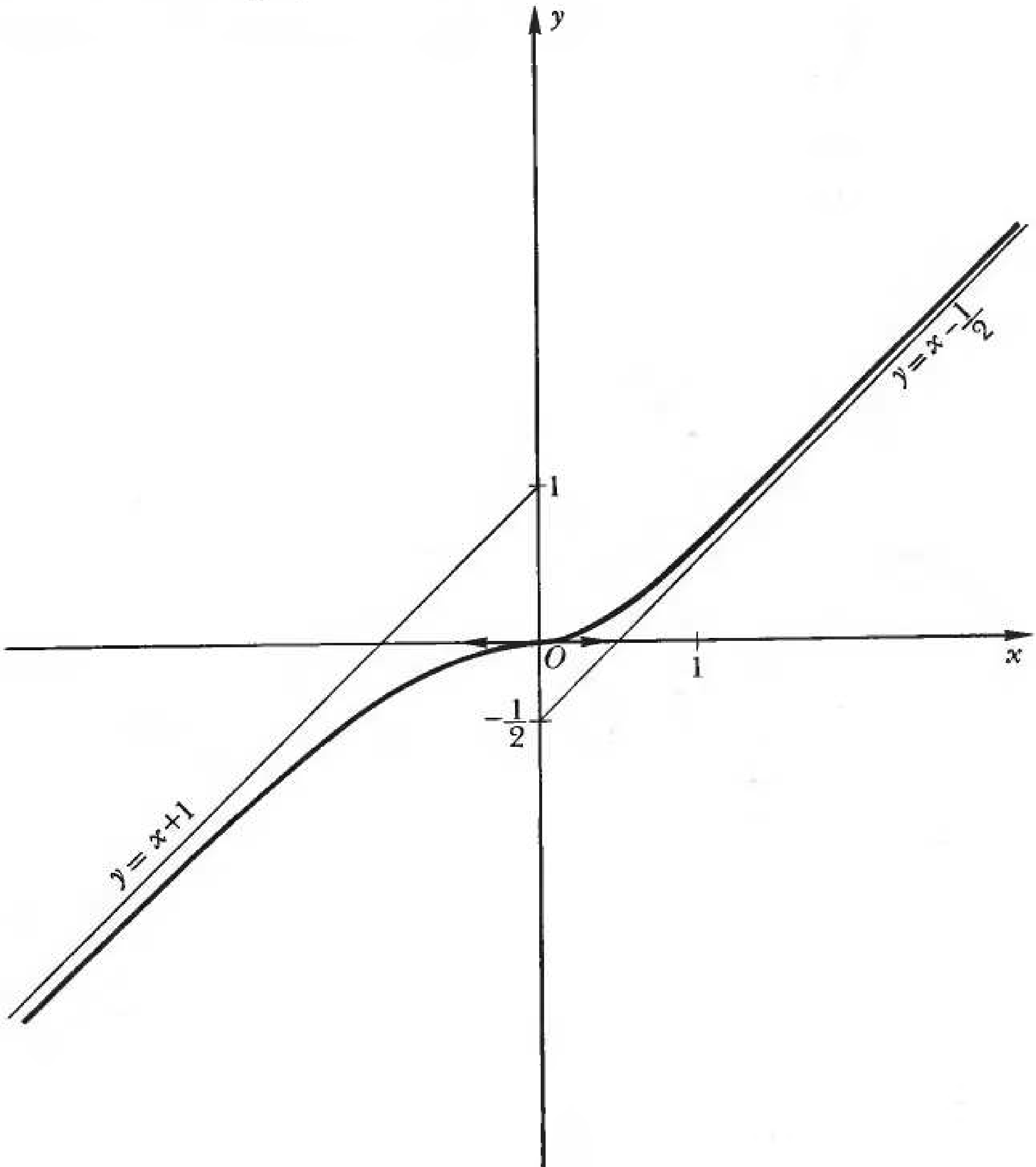

FIG. 5.14

5.15 1° Etudier les variations et construire le graphe Γ de la fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(t) = \operatorname{Log} \operatorname{ch} t$.

2° Former l'équation de la tangente au graphe Γ au point d'abscisse t_0. Déterminer l'ordonnée $g(t_0)$ du point de cette tangente d'abscisse nulle.

3° Etudier les variations et construire le graphe de la fonction g.

Solution 1° Comme ch t est un nombre réel strictement positif quel que soit t appartenant à $\mathbf{R}$, la fonction f est définie et continue sur $\mathbf{R}$. Comme f est une fonction paire nous l'étudierons pour $t \geqslant 0$. Lorsque t tend vers $+\infty$ nous avons

$$f(t) = \operatorname{Log} \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{Log} e^t + \operatorname{Log}(1 + e^{-2t}) - \operatorname{Log} 2$$

$$= t - \operatorname{Log} 2 + e^{-2t} + o(e^{-2t}) .$$

Le graphe de f admet la droite d'équation $y = t - \operatorname{Log} 2$ comme asymptote et Γ se trouve au-dessus de cette droite.

Nous avons

$$f'(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \operatorname{th} t .$$

Pour $t \geqslant 0$, th t est positive donc f est croissante.

Nous avons le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Nous obtenons le graphe suivant :

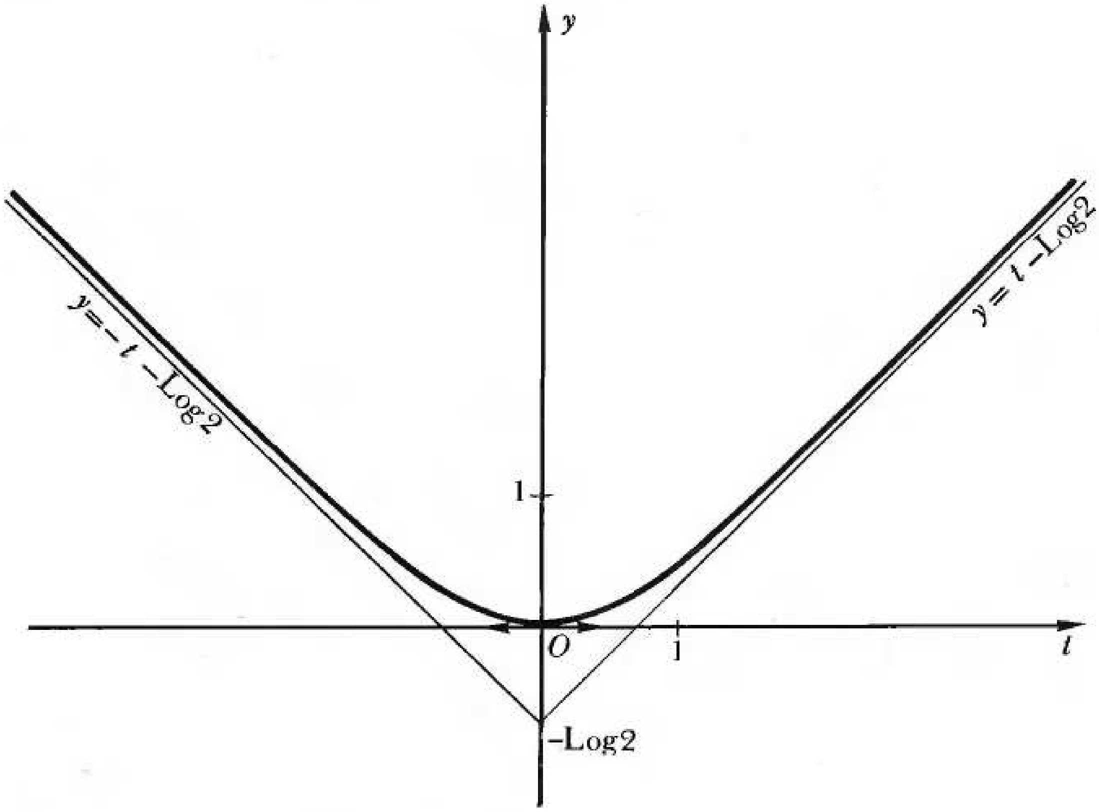

FIG. 5.15.1

2° La tangente cherchée est la droite de pente $f'(t_0) = \operatorname{th} t_0$ qui passe par le point de coordonnées $(t_0, f(t_0)) = (t_0, \operatorname{Log}\operatorname{ch} t_0)$. Son équation est

$$y = \operatorname{Log}\operatorname{ch} t_0 + (t - t_0)\operatorname{th} t_0$$

si $t = 0$ nous obtenons $g(t_0) = \operatorname{Log}\operatorname{ch} t_0 - t_0 \operatorname{th} t_0$.

3° La fonction g est définie et continue sur $\mathbf{R}$ et est paire. Lorsque t tend vers $+\infty$, $\lim_{t \to +\infty} \operatorname{th} t = 1$ et $\operatorname{Log}\operatorname{ch} t \sim t - \operatorname{Log} 2$; nous avons donc

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = -\operatorname{Log} 2\,.$$

Comme $g'(t) = \operatorname{th} t - \operatorname{th} t - t(1 - \operatorname{th}^2 t)$ est négative pour $t \geqslant 0$, nous obtenons le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\operatorname{Log} 2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\operatorname{Log} 2$

Nous obtenons le graphe suivant :

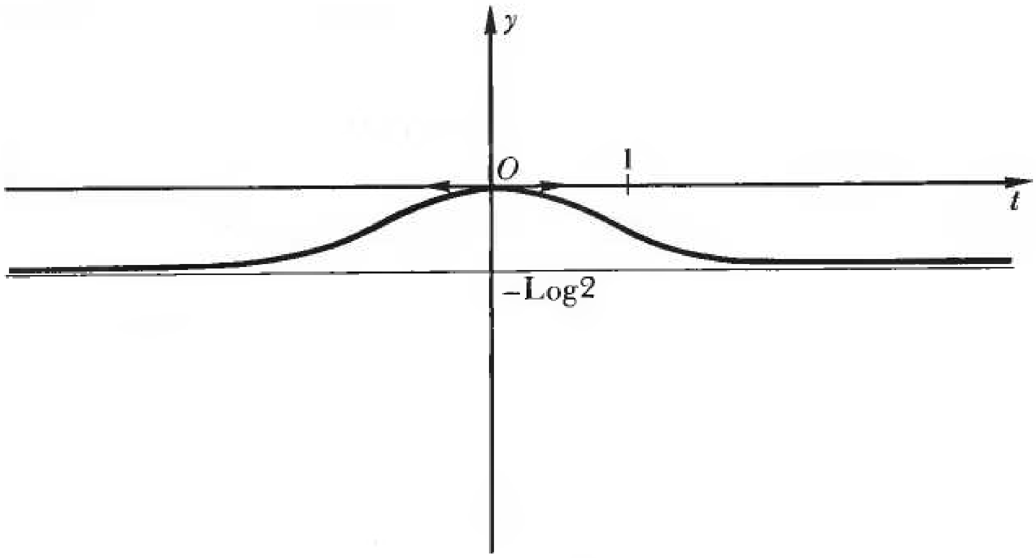

FIG. 5.15.2

5.16 Pour chaque nombre réel a on considère la fonction f_a définie par

$$f_a(x) = (x - a)^{ax}.$$

On désigne par Γ_a le graphe de f_a. Etudier les variations de la fonction f_a et construire le graphe Γ_a dans chacun des cas suivants :

$$a < -1 \,;\, a = -1 \,;\, -1 < a < 0 \,;\, a = 0 \,;$$

$$0 < a < \frac{1}{e^2};\; a = \frac{1}{e^2};\; \frac{1}{e^2} < a < 1;\; a > 1\,.$$

Solution La fonction $f_a(x) = e^{ax \operatorname{Log}(x-a)}$ est définie et continue pour $x \in]a + \infty[$. Quand x tend vers a par valeurs supérieures nous avons

$$\lim_{x \to a+} f_a(x) = \lim_{x \to a+} e^{a(x-a)\operatorname{Log}(x-a)}\, e^{a^2 \operatorname{Log}(x-a)} = 0\,.$$

Nous pouvons prolonger par continuité la fonction f_a en posant $f_a(a) = 0$. Comme

$$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{Log}(x - a) = +\infty\,,$$

nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty \quad \text{si} \quad a > 0\,, \quad \lim_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = 0 \quad \text{si} \quad a < 0 .$$

Calculons la pente de la demi-tangente à droite au point a. Nous avons :

$$\lim_{x \to a+} \frac{f_a(x) - f_a(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{e^{a(x-a)\,\mathrm{Log}\,(x-a)}\, e^{a^2\,\mathrm{Log}\,(x-a)}}{x - a}$$

soit

$$\lim_{x \to a+} \frac{f_a(x) - f_a(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} e^{a(x-a)\,\mathrm{Log}\,(x-a)}(x - a)^{a^2 - 1} .$$

Mais

$$\lim_{x \to a+} (x - a)\,\mathrm{Log}\,(x - a) = 0 ,$$

par suite la pente de la demi-tangente est 0 pour $a^2 - 1 > 0$, 1 pour $a^2 - 1 = 0$ et $+\infty$ pour $a^2 - 1 < 0$.

Nous avons

$$f_a'(x) = a f_a(x) \left[\mathrm{Log}\,(x - a) + \frac{x}{x - a}\right].$$

Si nous posons

$$g_a(x) = \mathrm{Log}\,(x - a) + \frac{x}{x - a} ,$$

le signe de f_a' sera celui de $a g_a(x)$. Nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} g_a(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a+} g_a(x) = \lim_{x \to a+} \frac{(x - a)\,\mathrm{Log}\,(x - a) + x}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{x}{x - a} .$$

Cette limite vaut $+\infty$ pour $a > 0$ et $-\infty$ pour $a < 0$.

Nous avons

$$g_a'(x) = \frac{1}{x - a} + \frac{x - a - x}{(x - a)^2} = \frac{x - 2a}{(x - a)^2} .$$

Si $a < 0$, $g_a'(x)$ est positive pour $x > 0$ et comme

$$\lim_{x \to a+} g_a(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} g_a(x) = +\infty$$

il existe un nombre réel unique α_a tel que $\alpha_a > a$ et $g_a(\alpha_a) = 0$; par suite $g_a(x) < 0$ pour $x < \alpha_a$ et $g_a(x) > 0$ pour $x > \alpha_a$. Si $a > 0$, $g_a'(x)$ s'annule pour $x = 2\,a$ et le signe de g_a dépend de celui de $g_a(a) = \operatorname{Log} a + 2$. Nous distinguerons les trois cas suivants :

(i) $0 < a < 1/e^2$; nous avons le tableau de variations suivant :

x	a		$2a$		$+\infty$
$g_a'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g_a(2a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $g_a(2\,a) < 0$ il existe deux nombres réels β_a et γ_a tels que β_a appartienne à l'intervalle $]\,a, 2a\,[$, γ_a appartienne à l'intervalle $]\,2a, +\infty\,[$ et

$$g_a(\beta_a) = g_a(\gamma_a) = 0\,.$$

(ii) $a = 1/e^2$; nous avons le tableau de variations suivant :

x	$\frac{1}{e^2}$		$\frac{2}{e^2}$		$+\infty$
$g_a'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(iii) $a > 1/e^2$; nous obtenons le tableau de variations suivant

x	a		$2a$		$+\infty$
$g_a'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g_a(2a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $g_a(2\,a) > 0$ la fonction g ne s'annule jamais.

Résumons ces divers cas dans des tableaux de variations de f_a et contruisons les graphes correspondants ; nous obtenons :

$a < -1$

x	a		α_a		$+\infty$
$f_a'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$f_a(\alpha_a)$	$\searrow$	0

Le graphe de f_a est :

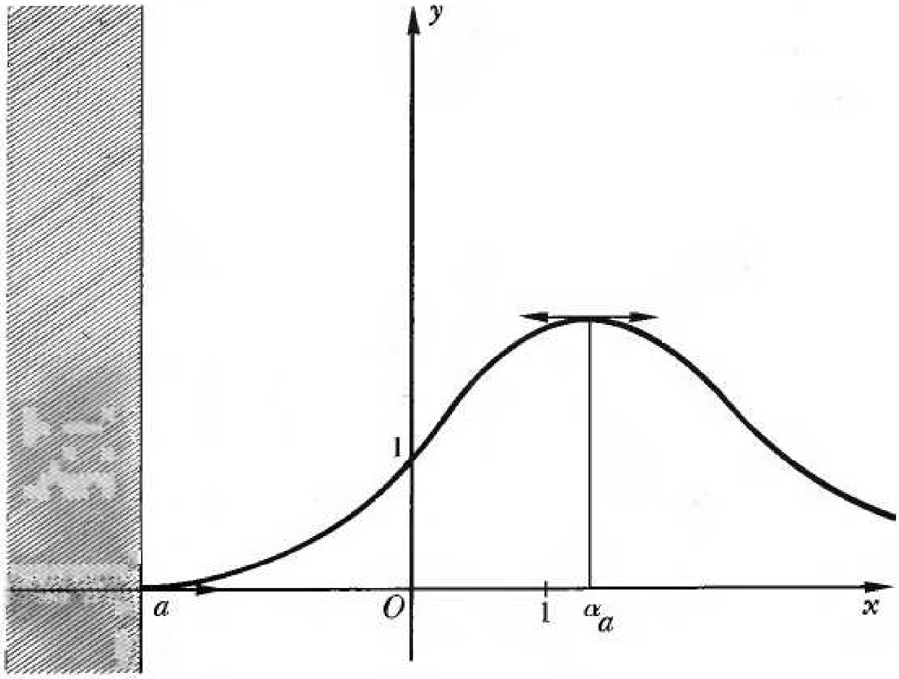

FIG. 5.16.1

$a = -1$

x	-1		α_{-1}		$+\infty$
$f_{-1}'(x)$	1	+	0	—	
$f_{-1}(x)$	0	↗	$f_{-1}(\alpha_{-1})$	↘	0

On remarque que $\alpha_{-1} = 0$ et $f_{-1}(\alpha_{-1}) = 1$, donc le graphe de f_{-1} est :

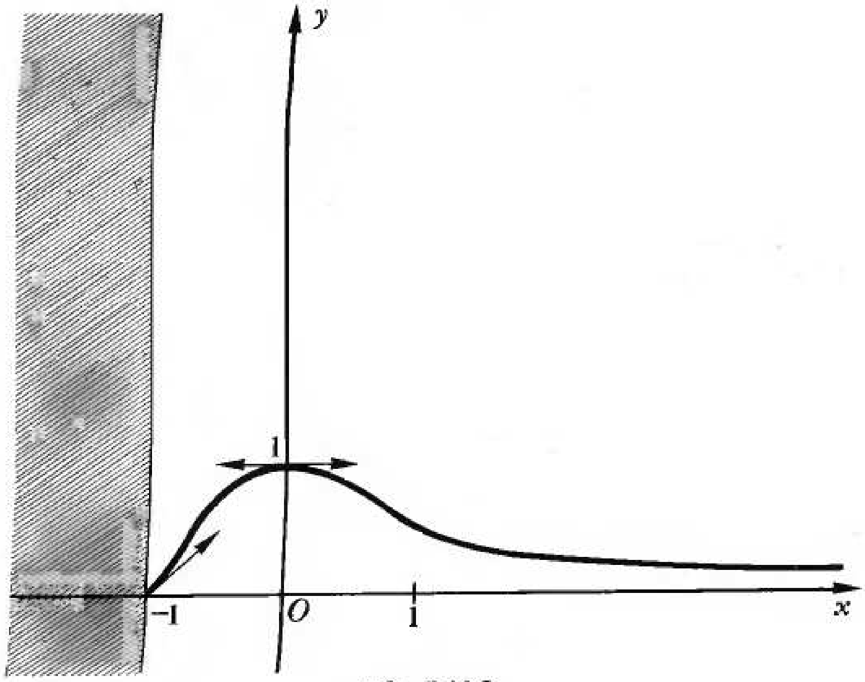

FIG. 5.16.2

$-1 < a < 0$

x	a		α_a		$+\infty$
$f_a'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$f_a(\alpha_a)$	$\searrow$	0

Le graphe de f_a est :

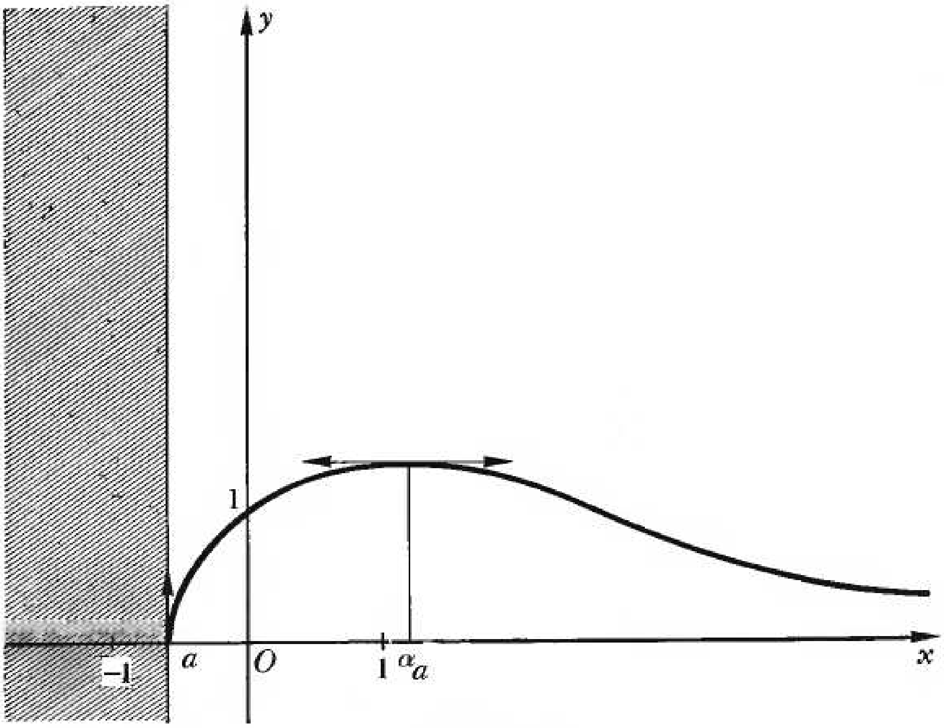

FIG. 5.16.3

$a = 0$

Nous avons $f_0(x) = x^0 = 1$, la fonction f_0 est constante et de valeur 1. Le graphe de f_0 est :

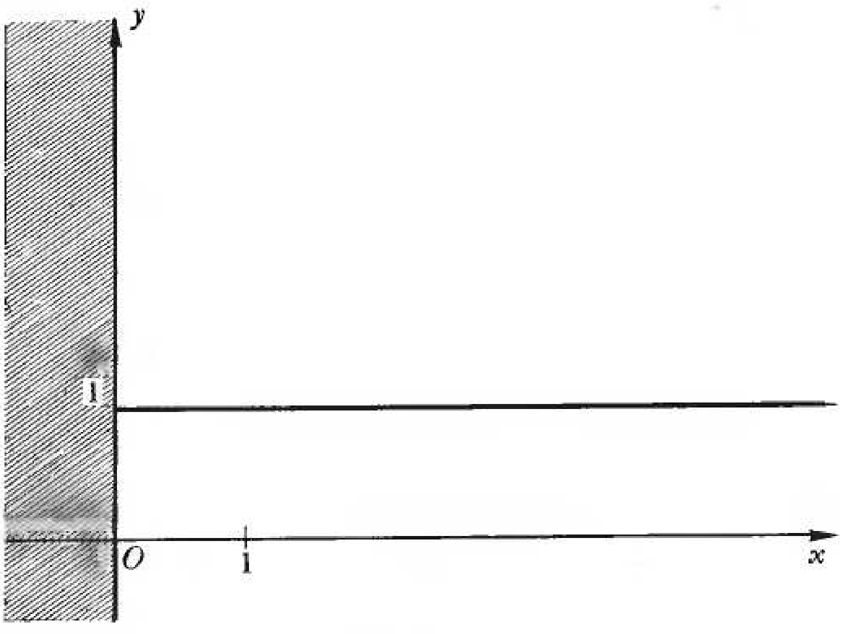

FIG. 5.16.4

$$0 < a < \frac{1}{e^2}$$

x	a		β_a		γ_a		$+\infty$
$f'_a(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$f_a(\beta_a)$	$\searrow$	$f_a(\gamma_a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de f_a est :

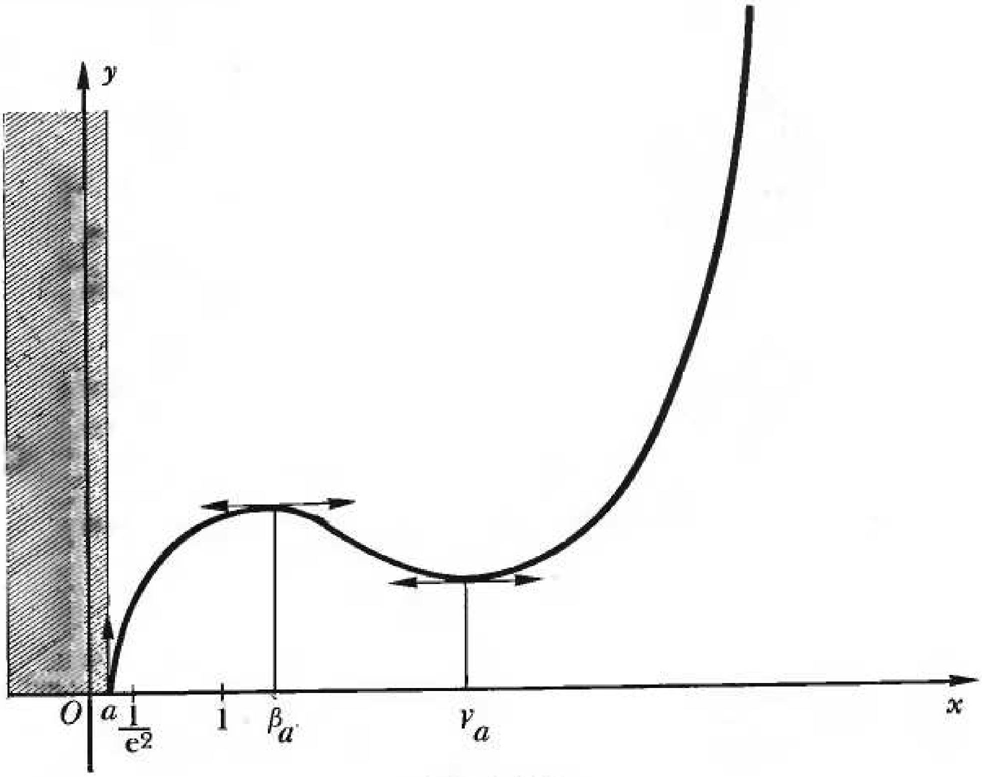

FIG. 5.16.5

$$a = \frac{1}{e^2}$$

x	$\frac{1}{e^2}$		$\frac{2}{e^2}$		$+\infty$
$f'_{\frac{1}{e^2}}(x)$	$+\infty$	$+$	0	$+$	
$f_{\frac{1}{e^2}}(x)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de f_{1/e^2} est :

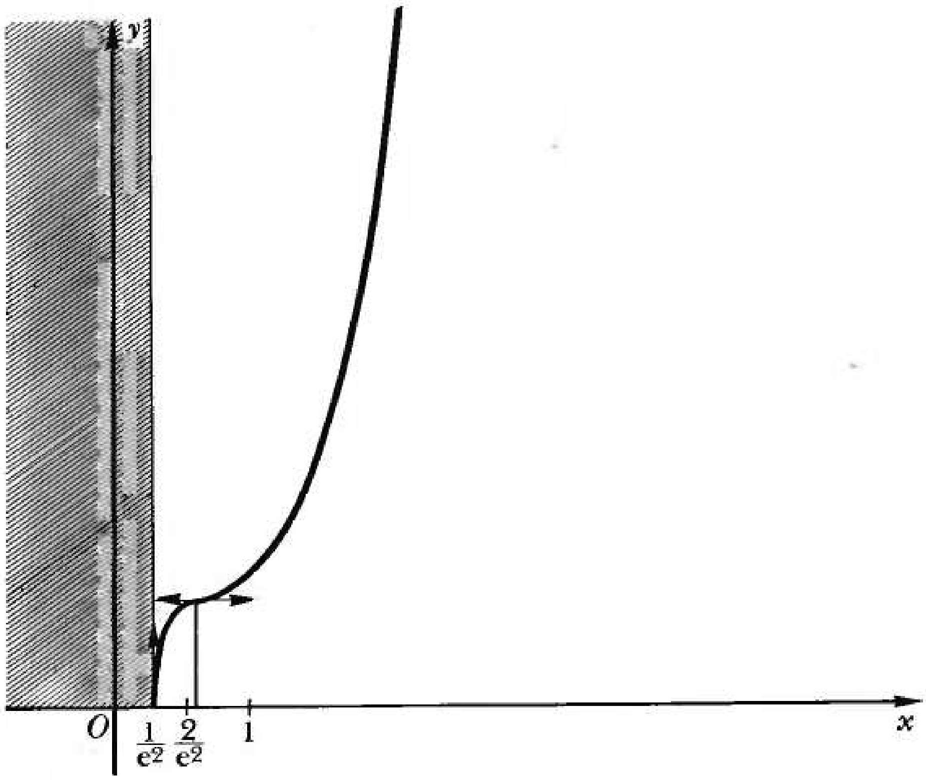

FIG. 5.16.6

$$\frac{1}{e^2} < a < 1$$

x	a		$+\infty$
$f'_a(x)$	$+\infty$	$+$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de f_a est :

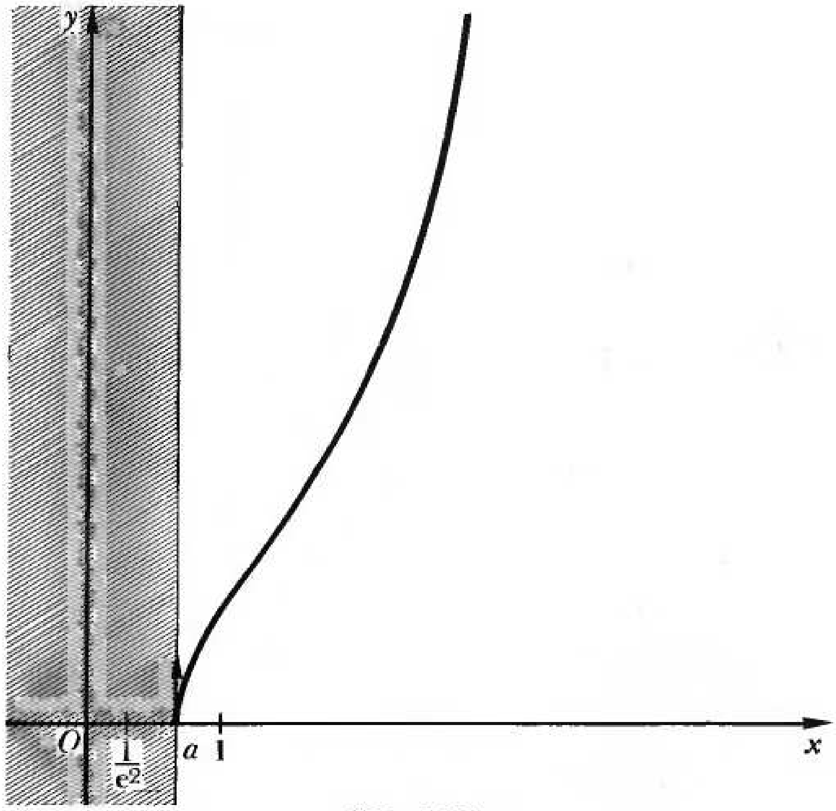

FIG. 5.16.7

$a = 1$

x	1		$+\infty$
$f_1'(x)$	1	$+$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de f_1 est :

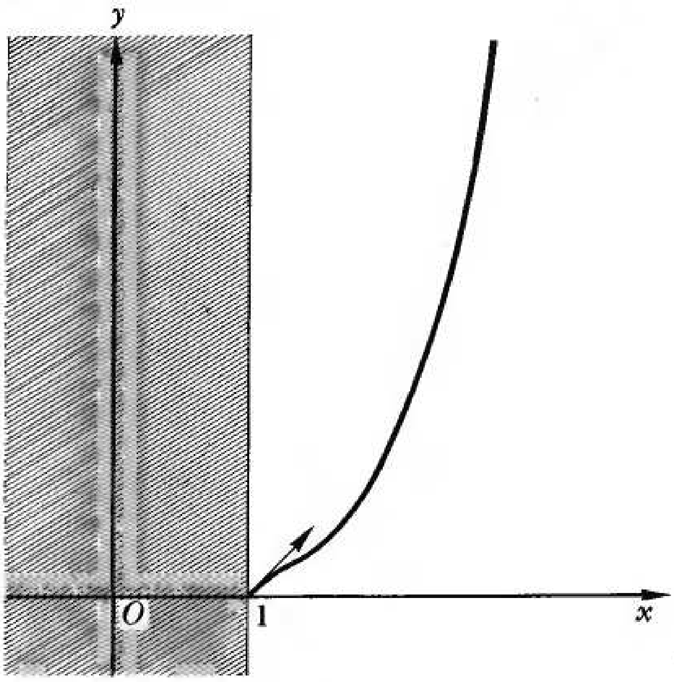

FIG. 5.16.8

$a > 1$

x	a		$+\infty$
$f'_a(x)$	0	$+$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de f_a est

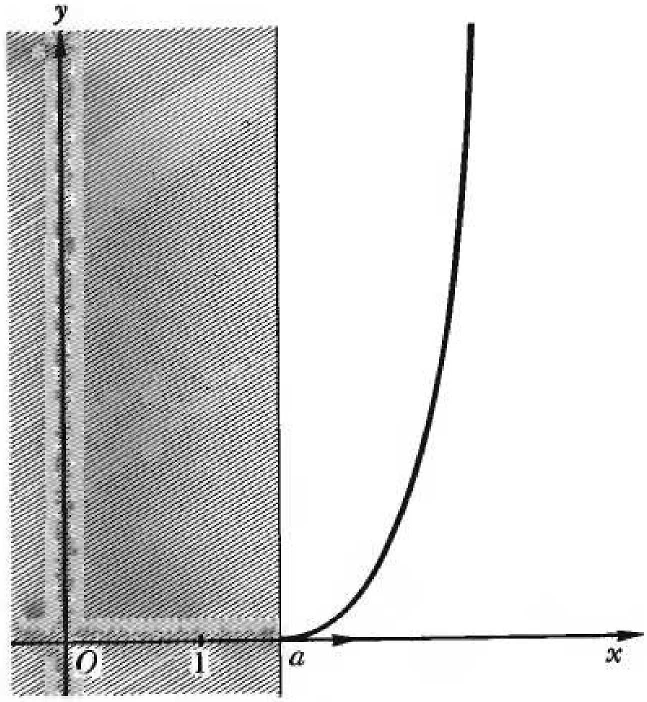

FIG. 5.16.9

5.17 On considère les applications f_λ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dépendant du paramètre réel λ, définies en posant $f_\lambda(x) = \lambda\,e^x + x^2 + 2\,x + 2$. On désigne par C_λ le graphe de f_λ.

1° Etudier le comportement de f_λ quand x tend vers $+\infty$. Démontrer qu'il existe une application g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} (f_\lambda(x) - g(x)) = 0$ pour tout nombre réel λ.

2° Calculer $f'_\lambda(x)$. Démontrer que $y = f_\lambda(x)$ et $y' = f'_\lambda(x)$ vérifient quel que soit λ une relation de la forme $F(x, y, y') = 0$ que l'on déterminera. En déduire l'ensemble des points de C_λ où la tangente est parallèle à l'axe Ox.

3° Calculer $y'' = f''_\lambda(x)$. En déduire l'ensemble des points d'inflexion de C_λ.

4° Etudier le signe de f'_λ.

5° Pour $\lambda \neq \lambda'$ étudier les positions respectives des graphes C_λ et $C_{\lambda'}$.

6° Etudier les variations de f_λ et construire sur un même graphique, les graphes C_λ pour $\lambda < -2$; $\lambda = -2$; $-2 < \lambda < 0$; $\lambda = 0$; $\lambda > 0$.

Solution 1° Si $\lambda = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 + 2x + 2) = +\infty .$$

si $\lambda \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \to +\infty} \lambda e^x \left(1 + \frac{x^2 + 2x + 2}{\lambda e^x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \lambda e^x$$

quand $\lambda > 0$ nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = +\infty$$

et quand $\lambda < 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = -\infty .$$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, en posant $g(x) = x^2 + 2x + 2 = f_0(x)$ nous avons

$$\lim_{x \to -\infty} (f_\lambda(x) - g(x)) = 0 .$$

2° Nous avons $f'_\lambda(x) = \lambda e^x + 2x + 2$. La relation cherchée est

$$y - y' - x^2 = 0 .$$

Nous savons que la tangente au graphe C_λ au point (x, y) est parallèle à l'axe Ox si et seulement si $f'_\lambda(x) = 0$. Par suite les coordonnées de ce point vérifient la relation $y = x^2$. Ceci signifie que l'ensemble des points de C_λ où la tangente est parallèle à l'axe Ox est l'intersection de C_λ avec la parabole d'équation $y = x^2$.

3° Nous avons $f''_\lambda(x) = \lambda e^x + 2$. L'équation $\lambda e^x + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle si $\lambda \geqslant 0$ et admet l'unique solution $x = \operatorname{Log}(-2/\lambda)$ si $\lambda < 0$. Comme $f''_\lambda(x) > 0$ si $x < \operatorname{Log}(-2/\lambda)$ et $f''_\lambda(x) < 0$ si $x > \operatorname{Log}(-2/\lambda)$, le point

$$x = \operatorname{Log}(-2/\lambda)$$

correspond à un point d'inflexion du graphe C_λ. La relation trouvée au 2° devient par dérivation $y' - y'' - 2x = 0$ d'où $y - y'' - x^2 - 2x = 0$. Les points d'inflexion de C_λ se trouvent donc sur la parabole d'équation

$$y = x^2 + 2x .$$

4° Cherchons le signe de

$$f'_\lambda(x) = \lambda e^x + 2x + 2 .$$

A la question précédente nous avons étudié le signe de la dérivée de f'_λ. Si $\lambda \geqslant 0$, $f'_\lambda(x)$ croît de $-\infty$ à $+\infty$ donc s'annule une fois et change de signe. Si $\lambda < 0$,

f_λ admet un maximum pour $x = \text{Log}\,(-\,2/\lambda)$ et tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Nous devons donc chercher le signe du maximum. Nous avons :

$$f_\lambda\left(\text{Log}\left(-\frac{2}{\lambda}\right)\right) = \lambda\, e^{\text{Log}\,(-2/\lambda)} + 2\,\text{Log}\left(-\frac{2}{\lambda}\right) + 2 = 2\,\text{Log}\left(-\frac{2}{\lambda}\right),$$

donc si $\lambda < -2$ le maximum est négatif et f'_λ est toujours strictement négative.

Si $\lambda = -2$, f'_{-2} s'annule pour $x = 0$ et est strictement négative pour $x \neq 0$. si $\lambda > -2$, le maximum est strictement positif et f'_λ s'annule deux fois et change deux fois de signe.

5° Si $\lambda < \lambda'$ nous avons $f_{\lambda'}(x) - f_\lambda(x) = (\lambda' - \lambda)\, e^x$ ce qui prouve que $f_{\lambda'}(x) > f_\lambda(x)$ pour tout nombre réel x donc $C_{\lambda'}$ est au-dessus de C_λ.

6° Donnons les tableaux de variations de f_λ pour chacun des cas étudiés précédemment.

$\lambda < -2$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$-$	
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$\lambda = -2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_{-2}(x)$		$-$	0	$-$	
$f_{-2}(x)$	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

$-2 < \lambda < 0$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_\lambda(\alpha)$	$\nearrow$	$f_\lambda(\beta)$	$\searrow$	$-\infty$

$\lambda = 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'_0(x)$		$-$	0	$+$	
$f_0(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lambda > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_\lambda(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nous obtenons les graphes suivants

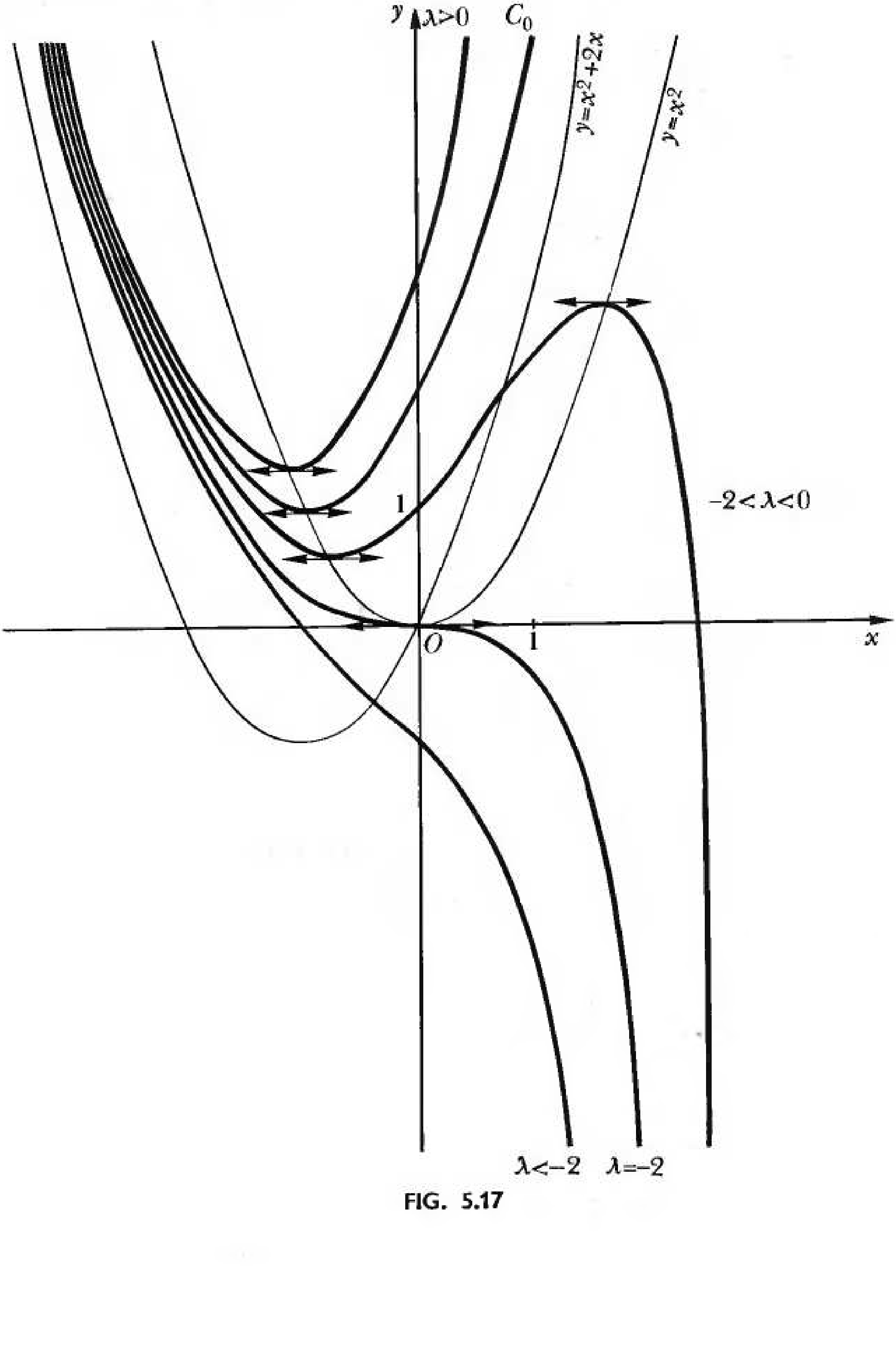

FIG. 5.17

5.18 Soit $\{f_\lambda\}$ une famille de fonctions définies pour tout nombre réel λ par $f_\lambda(x) = (x - \lambda)\, e^{1/x}$. On appelle Γ_λ le graphe de la fonction f_λ.

1° Etudier f_λ au voisinage de 0 pour $\lambda < 0$; $\lambda = 0$; $\lambda > 0$.

2° Etudier les branches infinies de f_λ.

3° Calculer la dérivée de f_λ et étudier son signe pour

$$\lambda < \tfrac{1}{4}\,; \quad \lambda = \tfrac{1}{4}\,; \quad \lambda > \tfrac{1}{4}\,.$$

4° Si λ et λ' sont deux nombres réels tels que $\lambda < \lambda'$, que peut-on dire des graphes Γ_λ et $\Gamma_{\lambda'}$?

5° Etudier les variations des fonctions f_λ et dessiner sur un même graphique les graphes Γ_λ pour $\lambda < 0$; $\lambda = 0$; $0 < \lambda < \frac{1}{4}$; $\lambda = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{2}$; $\lambda = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < \lambda < 1$; $\lambda = 1$; $\lambda > 1$.

Solution 1° Nous savons que

$$\lim_{x \to 0+} x\, e^{1/x} = +\infty = \lim_{x \to 0+} f_0(x)$$

et

$$\lim_{x \to 0-} x\, e^{1/x} = \lim_{x \to 0-} f_0(x) = 0\,.$$

De plus

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{x \to 0-} e^{1/x} = 0$$

ce qui prouve que Γ_0 admet l'axe Ox pour demi-tangente à gauche au point 0. Nous avons

$$\lim_{x \to 0} f_\lambda(x) = \lim_{x \to 0} (-\lambda\, e^{1/x})$$

donc pour $\lambda > 0$ nous avons

$$\lim_{x \to 0+} (-\lambda\, e^{1/x}) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0-} (-\lambda\, e^{1/x}) = 0\,.$$

Pour $\lambda < 0$ nous avons

$$\lim_{x \to 0+} (-\lambda\, e^{1/x}) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0-} (-\lambda\, e^{1/x}) = 0\,.$$

De plus

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f_\lambda(x)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\lambda\, e^{1/x}}{x} = 0$$

ce qui prouve que tous les graphes des fonctions f_λ admettent l'axe Ox comme demi-tangente à gauche du point 0.

2° Lorsque x tend vers l'infini $1/x$ tend vers 0 et nous avons

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et par suite

$$f_\lambda(x) = \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right](x-\lambda) = x + (1-\lambda) + \frac{1-2\,\lambda}{2\,x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le graphe Γ_λ admet donc comme asymptote la droite d'équation

$$y = x + (1-\lambda)\,.$$

Pour $\lambda > \frac{1}{2}$ ce graphe se trouve en dessous de l'asymptote quand x tend vers $+\infty$ et au-dessus quand x tend vers $-\infty$. Pour $\lambda < \frac{1}{2}$, Γ_λ se trouve au-dessus de l'asymptote pour x tendant vers $+\infty$ et en dessous pour x tendant vers $-\infty$. Pour connaître la position de $\Gamma_{1/2}$ par rapport à la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ nous devons calculer le terme suivant du développement limité de f_λ. Nous avons

$$f_\lambda(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{6\,x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12\,x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

par suite le graphe $\Gamma_{1/2}$ se trouve au-dessous de l'asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

3° Pour tout nombre réel $x \neq 0$ nous avons :

$$f'_\lambda(x) = e^{1/x}\left(1 - \frac{x-\lambda}{x^2}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^2}(x^2 - x + \lambda)\,.$$

Le signe de f'_λ est le même que celui du trinôme $x^2 - x + \lambda$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1 - 4\,\lambda$, par suite pour $\lambda > \frac{1}{4}$, Δ est strictement négatif et $x^2 - x + \lambda$ est toujours strictement positif, donc la fonction f_λ est croissante. Pour $\lambda = \frac{1}{4}$ le trinôme admet la racine double $x = \frac{1}{2}$ et est positif pour tout nombre réel x, la fonction $f_{1/4}$ est donc croissante. Si $\lambda < \frac{1}{4}$, le trinôme admet deux racines distinctes α et β et est négatif pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ et positif pour $x \leqslant \alpha$ ou $x \geqslant \beta$. Comme $\alpha\beta = \lambda$, quand $\lambda > 0$, α et β sont de même signe et comme $\alpha + \beta = 1$, ils sont tous deux positifs. De plus, de l'égalité $\alpha + \beta = 1$ nous déduisons que $\alpha < 1$ et $\beta < 1$ donc $\lambda = \alpha\beta < \alpha$ et $\lambda < \beta$. Quand $\lambda < 0$ α et β sont de signes contraires. Pour $\lambda = 0$, la dérivée f'_0 s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$.

4° Si $\lambda < \lambda'$, pour tout élément x de $\mathbf{R}^*$ nous avons

$$f_\lambda(x) - f_{\lambda'}(x) = (x-\lambda)\,e^{1/x} - (x-\lambda')\,e^{1/x} = (\lambda'-\lambda)\,e^{1/x}\,,$$

par suite si $\lambda < \lambda'$ le graphe Γ_λ se trouve au-dessus du graphe $\Gamma_{\lambda'}$.

5° Nous obtenons les tableaux de variations suivants :

$\lambda < 0$

x	$-\infty$		λ		α		0		β		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_\lambda(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_\lambda(\alpha)$	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f_\lambda(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum $f_\lambda(\beta)$ est strictement positif car f_λ ne s'annule qu'une fois pour $x = \lambda$.

$\lambda = 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$	0 ‖	$-$	0	$+$	
$f_0(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

$0 < \lambda < \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		0		λ		α		β		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	0 ‖	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_\lambda(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_\lambda(\alpha)$	$\searrow$	$f_\lambda(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme f_λ ne s'annule qu'au point $x = \lambda$ nous avons nécessairement

$$f_\lambda(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad f_\lambda(\beta) > 0\,.$$

$\lambda = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'_{\frac{1}{4}}(x)$		$+$	0 ‖	$+$	0	$+$	
$f_{\frac{1}{4}}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lambda > \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		0		λ		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	‖		$+$		
$f_\lambda(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $\lambda > \frac{1}{4}$ toutes les fonctions f_λ ont le même tableau de variations, les courbes ne différant que par leur position par rapport aux asymptotes

Nous obtenons les graphes suivants :

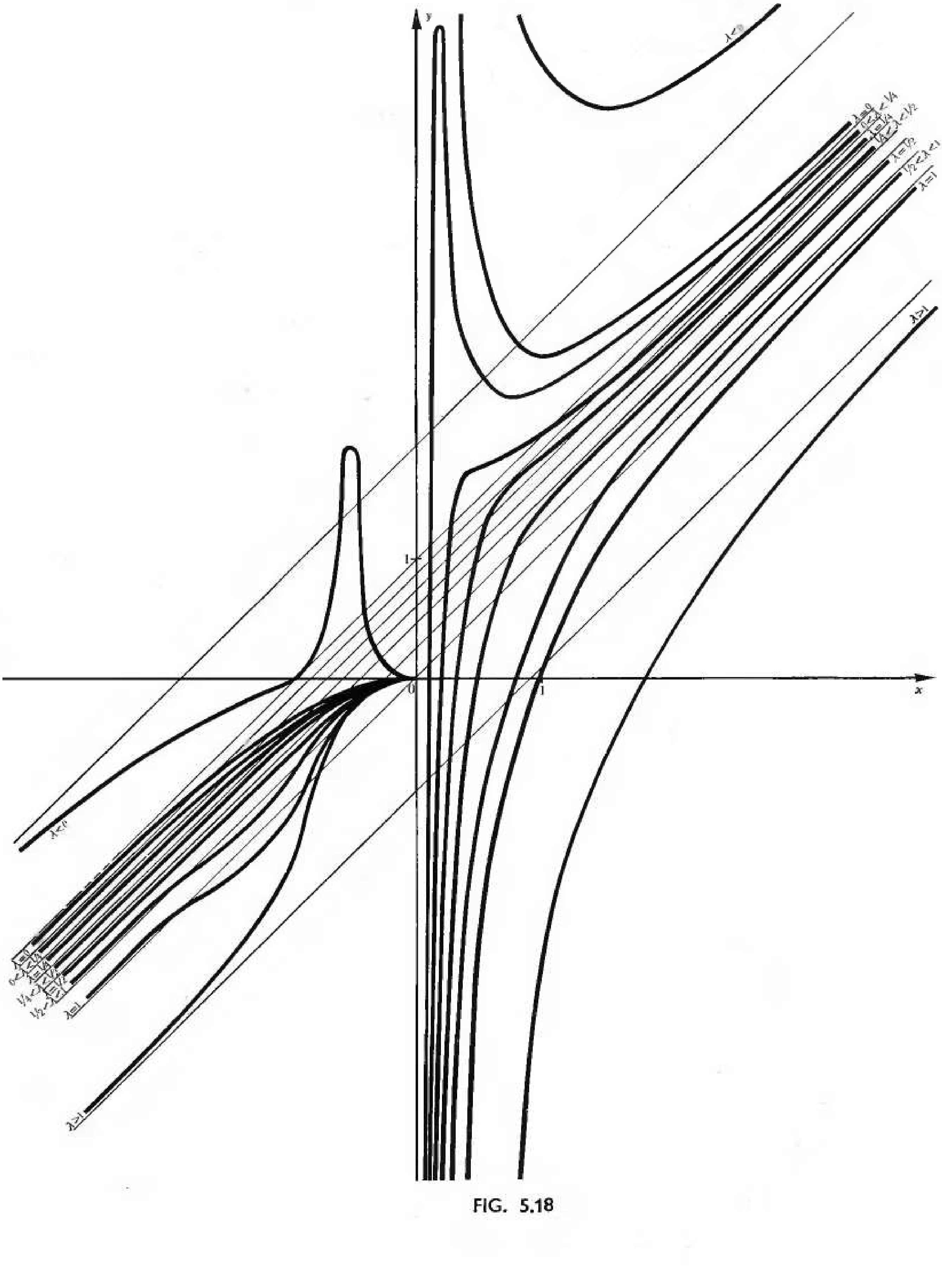

FIG. 5.18

6

INTÉGRATION

6.1 Soit x un nombre réel strictement positif ; à l'aide des propriétés des progressions géométriques, démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} e^{px/n} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Utiliser ce résultat pour établir pour, tout nombre réel $x > 0$, la relation

$$\int_0^x e^t \, dt = e^x - 1 .$$

Solution La quantité

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} e^{px/n}$$

est la somme des n premiers termes de la progression géométrique de raison $e^{x/n}$ et de premier terme 1. Nous avons

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} e^{px/n} = \frac{1 - e^{nx/n}}{1 - e^{x/n}},$$

par suite

$$\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} e^{px/n} = \frac{1 - e^x}{n(1 - e^{x/n})}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $e^{x/n} - 1$ tend vers 0 en étant équivalent à x/n (*cf.* C. E., Ch. 6, § I n° 76, *b*) par suite

$$\lim_{n\to+\infty} n(1 - e^{x/n}) = -x \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} e^{px/n} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Calculons l'intégrale $\int_0^x e^t\,dt$ comme limite des sommes de Darboux inférieures, relatives au partage de l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales. Nous obtenons :

$$\int_0^x e^t\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} e^{px/n} = e^x - 1$$

(*cf.* C. E., Ch. 8, § II, n° 112).

6.2 Soit α un nombre réel strictement positif.

1° Pour quelles valeurs de α l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\,(1 - 2\,\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx$$

est-elle définie ?

2° Calculer I lorsqu'elle est définie.

Solution 1° L'intégrale I est définie lorsque la quantité $1 - 2\,\alpha\cos x + \alpha^2$ est strictement positive sur l'intervalle fermé $[0, 2\,\pi]$; or

$$1 - 2\,\alpha\cos x + \alpha^2 = 0 \qquad \text{si} \qquad \cos x = \frac{1+\alpha^2}{2\,\alpha}.$$

Comme l'expression $(1 + \alpha^2)/2\,\alpha$ a toujours une valeur supérieure ou égale à 1 et ne prend la valeur 1 que pour $\alpha = 1$, l'intégrale I est définie pour tout nombre réel α strictement positif et différent de 1.

2° Supposons $\alpha \neq 1$ et calculons I comme limite des sommes de Darboux relatives au partage de l'intervalle $[0, 2\,\pi]$ en n parties égales. Nous obtenons

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{2\,\pi}{n}\,\mathrm{Log}\left(1 - 2\,\alpha\cos\frac{2\,\pi p}{n} + \alpha^2\right)$$

d'où

$$I = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\,\pi}{n}\,\mathrm{Log}\left[\prod_{p=1}^{p=n}\left(1 - 2\,\alpha\cos\frac{2\,\pi p}{n} + \alpha^2\right)\right].$$

Le trinôme $1 - 2\,\alpha \cos(2\,\pi p/n) + \alpha^2$ admet pour racines les nombres complexes $e^{2i\pi p/n}$ et $e^{-2i\pi p/n}$. Les nombres $e^{2i\pi p/n}$ et $e^{-2i\pi p/n}$ sont les n racines n-ièmes de l'unité lorsque p varie de 1 à n, par suite :

$$\prod_{p=1}^{p=n}\left(1 - 2\,\alpha\cos\frac{2\,\pi p}{n} + \alpha^2\right) = \prod_{p=1}^{p=n}(\alpha - e^{2i\pi p/n})\prod_{p=1}^{p=n}(\alpha - e^{-2i\pi p/n})$$

d'où

$$\prod_{p=1}^{p=n}\left(1 - 2\,\alpha\cos\frac{2\,\pi p}{n} + \alpha^2\right) = (\alpha^n - 1)(\alpha^n - 1) = (\alpha^n - 1)^2\,.$$

Nous obtenons donc

$$I = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\,\pi}{n}\operatorname{Log}(\alpha^n - 1)^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{4\,\pi}{n}\operatorname{Log}|1 - \alpha^n|$$

d'où $I = 0$ si $0 < \alpha < 1$. Si $\alpha > 1$ nous avons

$$\operatorname{Log}|1 - \alpha^n| = \operatorname{Log}(\alpha^n - 1) = \operatorname{Log}\alpha^n\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right) = n\operatorname{Log}\alpha + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right)$$

d'où $I = 4\,\pi \operatorname{Log}\alpha$.

6.3 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction réelle à valeurs positives définie et intégrable sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ de **R**. Démontrer que la fonction $\sqrt{f}$ est intégrale sur $[a, b]$.

Solution Soit (x_p) $(0 \leqslant p \leqslant n)$ une suite finie de points de l'intervalle $[a, b]$ telle que $x_0 = a$, $x_{p-1} \leqslant x_p$ pour $1 \leqslant p \leqslant n$ et $x_n = b$. Soient M_p (resp. m_p) le maximum (resp. minimum) de la fonction f sur l'intervalle $[x_p, x_{p+1}[$ pour $0 \leqslant p \leqslant n - 1$. La fonction f étant intégrable sur $[a, b]$, pour tout nombre réel $\varepsilon' > 0$ il existe un nombre réel $\eta' > 0$ tel que si $x_{p+1} - x_p < \eta'$ pour $p = 0, 1, \ldots, n - 1$ alors

$$\sum_{p=0}^{p=n-1}(M_p - m_p)(x_{p+1} - x_p) < \varepsilon'\,.$$

Si M_p et m_p ne sont pas tous deux nuls nous avons :

$$\sqrt{M_p} - \sqrt{m_p} = \frac{M_p - m_p}{\sqrt{M_p} + \sqrt{m_p}}\,;$$

par suite $M_p \geqslant \varepsilon'$ implique

$$\sqrt{M_p} - \sqrt{m_p} \leqslant \frac{M_p - m_p}{\sqrt{M_p}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}(M_p - m_p)$$

et d'autre part $M_p < \varepsilon'$ entraîne $\sqrt{M_p} - \sqrt{m_p} \leqslant \sqrt{M_p} \leqslant \sqrt{\varepsilon'}$. Dans tous les cas nous avons

$$\sqrt{M_p} - \sqrt{m_p} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}} (M_p - m_p) + \sqrt{\varepsilon'} .$$

Si M_p et m_p sont tous deux nuls il est clair que cette dernière inégalité est encore vérifiée. Nous avons donc

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} (\sqrt{M_p} - \sqrt{m_p})(x_{p+1} - x_p) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}} \sum_{p=0}^{p=n-1} (M_p - m_p)(x_{p+1} - x_p) + \sqrt{\varepsilon'}(b-a)$$

soit encore si $x_{p+1} - x_p < \eta'$ pour $p = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} (\sqrt{M_p} - \sqrt{m_p})(x_{p+1} - x_p) \leqslant \sqrt{\varepsilon'}(b - a + 1) .$$

Soit ε un nombre réel strictement positif, en posant $\varepsilon' = \varepsilon^2/(b - a + 1)^2$ ce qui précède nous démontre l'existence d'un nombre réel $\eta' > 0$ tel que si $x_{p+1} - x_p < \eta'$ pour $p = 0, 1, \dots, n - 1$ alors

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} (\sqrt{M_p} - \sqrt{m_p})(x_{p+1} - x_p) < \varepsilon ,$$

ce qui démontre que la fonction $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a, b]$ (*cf.* C. E., Ch. 8, § II, n° 114).

6.4 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. On suppose que

$$\int_a^b [f(x)]^2 \, dx = 0 .$$

Démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[a, b]$.

Solution Supposons que f ne soit pas nulle alors il existe un point x_0 de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. La fonction étant continue au point x_0, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout élément x de $[a, b]$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$ nous ayons

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2} \qquad \text{soit} \qquad |f(x)| \geqslant \left|\frac{f(x_0)}{2}\right| .$$

Par suite si nous posons $\alpha = \operatorname{Sup}(a, x_0 - \eta)$ et $\beta = \operatorname{Inf}(b, x_0 + \eta)$ il est clair que l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est de longueur non nulle d'où :

$$\int_a^b [f(x)]^2 \, dx \geqslant \int_\alpha^\beta [f(x)]^2 \, dx \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{[f(x_0)]^2}{4} \, dx = (\beta - \alpha) \frac{[f(x_0)]^2}{4}.$$

La dernière quantité étant strictement positive, $\int_a^b [f^2(x)] \, dx$ est non nulle ce qui est en contradiction avec l'hypothèse, par suite si

$$\int_a^b [f(x)]^2 \, dx = 0$$

alors f est la fonction nulle.

6.5 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et g une fonction positive et intégrable sur $[a, b]$. On désigne par m (resp. M) le minimum (resp. maximum) de f sur $[a, b]$.

1° Démontrer que la fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = f(x) \int_a^b g(t) \, dt$$

est continue et trouver ses extrema en fonction de m et M.

2° En déduire qu'il existe un élément c de $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\, g(t) \, dt = f(c) \int_a^b g(t) \, dt .$$

(Cette égalité est appelée *première formule de la moyenne.*)

Etudier le cas où g est la fonction constante de valeur 1.

Solution 1° Posons $A = \int_a^b g(t) \, dt$; alors $F = Af$ donc F est une fonction continue sur $[a, b]$; comme $A \geqslant 0$ le maximum de F est AM et son minimum Am.

2° Pour tout élément t de $[a, b]$ nous avons :

$$mg(t) \leqslant f(t)\, g(t) \leqslant Mg(t)$$

d'où

$$m \int_a^b g(t) \, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, g(t) \, dt \leqslant M \int_a^b g(t) \, dt$$

par suite

$$mA \leqslant \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \leqslant MA\,.$$

La fonction F étant continue sur l'intervalle $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction F nous montre qu'il existe un élément c de $[a, b]$ tel que

$$F(c) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = f(c) \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

La fonction constante g de valeur 1 est intégrable sur $[a, b]$ et nous avons

$$\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t = b - a\,,$$

par suite il existe un nombre c de $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = (b - a) f(c)\,;$$

ceci n'est autre que le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

6.6 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction continue et monotone sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et g une fonction continue sur $[a, b]$. On désigne par G la fonction définie par

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, \mathrm{d}t$$

pour tout élément x de $[a, b]$ et on considère l'intégrale :

$$I = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\, G'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

1° Démontrer que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver une famille finie d'éléments a_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) de $[a, b]$ tels que

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i)\, G'(t)\, \mathrm{d}t \right| < \varepsilon\,.$$

2° Etablir l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i)\, G'(t)\, \mathrm{d}t = f(b)\, G(b) - \sum_{i=2}^{i=n} G(a_{i-1}) \left[f(a_i) - f(a_{i-1}) \right].$$

3° On pose

$$\mathscr{I}_\varepsilon = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i)\, G'(t)\, dt\,.$$

Démontrer que le nombre $\mathscr{I}_\varepsilon - f(b)\, G(b)$ appartient à l'intervalle limité par les nombres

$$[f(a_1) - f(b)] \left[\operatorname*{Inf}_{x \in [a,b]} G(x)\right] \quad \text{et} \quad [f(a_1) - f(b)] \left[\operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} G(x)\right];$$

en déduire que le nombre $I - f(b)\, G(b)$ appartient à l'intervalle limité par les nombres

$$[f(a) - f(b)] \left[\operatorname*{Inf}_{x \in [a,b]} G(x)\right] \quad \text{et} \quad [f(a) - f(b)] \left[\operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} G(x)\right].$$

4° On considère la fonction continue H définie sur l'intervalle $[a, b]$ par $H(x) = [f(a) - f(b)]\, G(x)$; démontrer qu'il existe un nombre c de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant $H(c) = I - f(b)\, G(b)$. En déduire l'égalité suivante :

$$I = f(a) \int_a^c g(t)\, dt + f(b) \int_c^b g(t)\, dt\,.$$

(Cette égalité est appelée *seconde formule de la moyenne.*)

Solution

1° Considérons une famille finie de points a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$ et $a_i \leqslant a_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Nous avons :

$$I - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i)\, G'(t)\, dt = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f(t) - f(a_i)]\, G'(t)\, dt\,.$$

La fonction f étant continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, est uniformément continue sur cet intervalle, donc pour tout nombre réel $\varepsilon_1 > 0$ il existe un nombre réel $\eta_1 > 0$ tel que pour tout couple (x, x') de points de $[a, b]$ vérifiant $|x' - x| < \eta_1$ nous ayons $|f(x) - f(x')| < \varepsilon_1$. Supposons que la famille (a_i) vérifie en outre la condition $|a_{i+1} - a_i| < \eta_1$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, alors pour tout élément t de $[a_{i-1}, a_i]$ nous avons $|f(t) - f(a_i)| < \varepsilon_1$. Nous déduisons de ceci que :

$$\left| I - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i)\, G'(t)\, dt \right| \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(t) - f(a_i)|\, G'(t)\, dt$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_1 \int_{a_{i-1}}^{a_i} |G'(t)|\, dt = \varepsilon_1 \int_a^b |G'(t)|\, dt\,.$$

Il est clair que si la fonction $g(t) = G'(t)$ est partout nulle le problème est évident, nous exclurons donc ce cas. Nous supposons donc que

$$\int_a^b |G'(t)|\, dt > 0\,,$$

si nous choisissons

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\int_a^b | G'(t) | \, dt}$$

nous obtenons

$$\left| I - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i) \, G'(t) \, dt \right| < \varepsilon .$$

2° Nous avons :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i) \, G'(t) \, dt = f(a_1) [G(a_1) - G(a)] + f(a_2) [G(a_2) - G(a_1)] + \cdots +$$
$$+ f(a_{n-1}) [G(a_{n-1}) - G(a_{n-2})] + f(b) [G(b) - G(a_{n-1})] .$$

En regroupant différemment les termes de cette somme nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i) \, G'(t) \, dt = f(b) \, G(b) - \sum_{i=2}^{n} G(a_{i-1}) [f(a_i) - f(a_{i-1})] .$$

3° La fonction G est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$; elle est donc bornée sur cet intervalle. Posons

$$M = \operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} G(x) \qquad \text{et} \qquad m = \operatorname*{Inf}_{x \in [a,b]} G(x) .$$

Supposons la fonction f croissante alors $f(a_i) - f(a_{i-1}) \geqslant 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et par suite :

$$m \sum_{i=2}^{i=n} [f(a_i) - f(a_{i-1})] \leqslant \sum_{i=2}^{i=n} G(a_{i-1}) [f(a_i) - f(a_{i-1})]$$
$$\leqslant M \sum_{i=2}^{i=n} [f(a_i) - f(a_{i-1})] .$$

ce qui peut s'écrire :

$$m[f(b) - f(a_1)] \leqslant \sum_{i=2}^{i=n} G(a_{i-1}) [f(a_i) - f(a_{i-1})] \leqslant M[f(b) - f(a_1)]$$

Supposons la fonction f décroissante, nous avons :

$$M[f(b) - f(a_1)] \leqslant \sum_{i=2}^{i=n} G(a_{i-1}) [f(a_i) - f(a_{i-1})] \leqslant m[f(b) - f(a_1)] .$$

Nous avons donc dans tous les cas

$$\mathscr{I}_\varepsilon - f(b) \, G(b) = - \sum_{i=2}^{i=n} G(a_{i-1}) [f(a_i) - f(a_{i-1})]$$

par suite le nombre $\mathscr{I}\varepsilon - f(b)\,G(b)$ appartient à l'intervalle limité par les nombres $m[f(a_1) - f(b)]$ et $M[f(a_1) - f(b)]$. Nous pouvons choisir la suite finie (a_i) associée à ε de telle manière qu'elle vérifie outre la condition

$$| a_{i+1} - a_i | < \eta_1 ,$$

la condition $| a_{i+1} - a_i | < \varepsilon$ pour $i = 0, 1, ..., n - 1$. Nous avons alors $| I - \mathscr{I}_\varepsilon | < \varepsilon$ (*cf.* 1°)

Si la fonction f est croissante nous pouvons écrire :

$$M[f(a_1) - f(b)] \leqslant \mathscr{I}_\varepsilon - f(b)\,G(b) \leqslant m[f(a_1) - f(b)] .$$

Lorsque ε tend vers 0, $\mathscr{I}_\varepsilon$ tend vers I et a_1 tend vers a. A la limite nous avons donc $M[f(a) - f(b)] \leqslant I - f(b)\,G(b) \leqslant m[f(a) - f(b)]$.

Si f est croissante nous obtenons les inégalités de sens contraire. Dans tous les cas le nombre $I - f(b)\,G(b)$ appartient à l'intervalle limité par les points $M[f(a) - f(b)]$, $m[f(a) - f(b)]$.

4° La fonction H définie par $H(x) = [f(a) - f(b)]\,G(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est continue sur $[a, b]$. Ses extrema sont $M[f(a) - f(b)]$ et $m[f(a) - f(b)]$. Le nombre $I - f(b)\,G(b)$ appartient à l'intervalle d'extrémités $M[f(a) - f(b)]$ et $m[f(a) - f(b)]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction H, nous montre qu'il existe un point c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $H(c) = I - f(b)\,G(b)$. Nous avons donc

$$[f(a) - f(b)] \int_a^c G(t)\,\mathrm{d}t = I - f(b) \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t ,$$

soit encore

$$I = f(a) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b) \left[\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t \right]$$

et par suite

$$I = f(a) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b) \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t .$$

6.7 Les notations sont celles de l'exercice précédent. On suppose que f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, positive et décroissante et que g est une fonction continue sur $[a, b]$.

1° Démontrer les inégalités

$$f(a)\left[\operatorname*{Inf}_{x \in [a,b]} G(x) \right] \leqslant I \leqslant f(a) \left[\operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} G(x) \right].$$

2° En considérant la fonction K continue, définie sur $[a, b]$ par $K(x) = f(a)\,G(x)$, démontrer qu'il existe un nombre réel x_0 de $[a, b]$ tel que

$$I = f(a) \int_a^{x_0} g(t)\,dt .$$

Solution 1° Considérons le nombre $\mathcal{I}_\varepsilon$ défini à la question 3° de l'exercice précédent. Nous pouvons écrire

$$\mathcal{I}_\varepsilon = f(b)\,G(b) + \sum_{i=2}^{i=n} G(a_{i-1})\,[f(a_{i-1}) - f(a_i)] .$$

Comme la fonction f est décroissante nous avons $f(a_{i-1}) - f(a_i) \geqslant 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et d'autre part $f(b) \geqslant 0$. En notant toujours M et m le maximum et le minimum de la fonction G sur $[a, b]$ nous avons :

$$m\left[f(b) + \sum_{i=2}^{i=n} (f(a_{i-1}) - f(a_i))\right] \leqslant \mathcal{I}_\varepsilon \leqslant M\left[f(b) + \sum_{i=2}^{i=n} (f(a_{i-1}) - f(a_i))\right],$$

soit encore $mf(a_1) \leqslant \mathcal{I}_\varepsilon \leqslant Mf(a_1)$. Lorsque ε tend vers 0, a_1 tend vers a et $\mathcal{I}_\varepsilon$ vers I, à la limite nous avons donc

$$mf(a) \leqslant I \leqslant Mf(a) .$$

2° La fonction K définie sur $[a, b]$ par $K(x) = f(a)\,G(x)$ est continue sur $[a, b]$, son maximum et son minimum sont respectivement $Mf(a)$ et $mf(a)$, I est un nombre compris entre les extrema de K sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction K, nous montre qu'il existe un nombre x_0 de l'intervalle $[a, b]$ tel que $K(x_0) = I$, c'est-à-dire que

$$I = f(a) \int_a^{x_0} g(t)\,dt .$$

6.8 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et f et g deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$, vérifiant la relation :

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 = \left[\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right]\left[\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right] \neq 0 .$$

1° Démontrer qu'il existe un nombre réel k tel que

$$\int_a^b [f(x) - kg(x)]^2\,dx = 0 .$$

2° Que peut-on en conclure si de plus les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a, b]$?

Solution 1° Considérons le trinôme du second degré en t :

$$t^2 \int_a^b [g(x)]^2 \, dx - 2t \int_a^b f(x) g(x) \, dx + \int_a^b [f(x)]^2 \, dx .$$

Le discriminant de ce trinôme est

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) \, dx\right]^2 - \int_a^b [g(x)]^2 \, dx \int_a^b [f(x)]^2 \, dx ;$$

ce discriminant est nul par hypothèse, le trinôme admet donc la racine double

$$k = \frac{\int_a^b f(x) g(x) \, dx}{\int_a^b [g(x)]^2 \, dx} .$$

Le nombre réel k ainsi trouvé vérifie donc la relation :

$$k^2 \int_a^b [g(x)]^2 \, dx - 2k \int_a^b f(x) g(x) \, dx + \int_a^b [f(x)]^2 \, dx = 0$$

soit

$$\int_a^b [f(x) - kg(x)]^2 \, dx = 0 .$$

2° Si les fonctions f et g sont continues alors la fonction $f - kg$ est continue, d'où $f - kg = 0$ (*cf.* exercice 6.4), soit encore $f = kg$.

6.9 On considère la suite (g_n) de fonctions en escalier sur l'intervalle $[0, 1]$ définie par :

$$g_n(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \geqslant \frac{1}{n}$$

$$g_n(x) = n \qquad \text{pour} \qquad x < \frac{1}{n} .$$

1° Existe-t-il une fonction bornée définie sur $[0, 1]$ qui soit limite de cette suite ?

2° Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$; démontrer que la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^1 f(x) \, g_n(x) \, dx$$

a pour limite $f(0)$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution 1° Pour tout élément x du semi-segment $]0, 1[$, $g_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En effet pour tout élément α de $]0, 1]$ il existe un entier N tel que $1/N < \alpha$, donc pour tout entier $n \geqslant N$ nous avons $g_n(\alpha) = 0$. D'autre part $g_n(0) = n$ pour tout entier $n \geqslant 0$, donc lorsque n tend vers l'infini $g_n(0)$ tend vers l'infini ; il n'existe donc pas de fonction bornée sur $[0, 1]$ qui soit limite de la suite (g_n).

2° Nous avons

$$I_n = \int_0^1 f(x)\, g_n(x)\, \mathrm{d}x = n \int_0^{1/n} f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

D'après la première formule de la moyenne appliquée à l'intégrale $\int_0^{1/n} f(x)\,\mathrm{d}x$, nous savons (*cf.* exercice 6.5) qu'il existe un nombre α_n de $]0, 1/n[$ tel que

$$\int_0^{1/n} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n} f(\alpha_n)\,.$$

Par suite $I_n = f(\alpha_n)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, α_n tend vers 0 et comme la fonction f est continue $f(\alpha_n)$ tend vers $f(0)$. La suite (I_n) admet donc la limite $f(0)$ lorsque n tend vers l'infini.

6.10 On considère la suite de nombres réels (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, \mathrm{d}x$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. Démontrer que cette suite admet 0 pour limite lorsque n tend vers l'infini.

Solution Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < \pi/2$; la fonction sinus est une fonction positive croissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ par suite pour tout élément x de $[0, \pi/2 - \varepsilon/2]$ nous avons

$$0 \leqslant \sin x \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et par suite

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x\, \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^n.$$

Le nombre réel $\sin(\pi/2 - \varepsilon/2)$ est strictement plus petit que 1, il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^n = 0\,.$$

En raison de l'inégalité précédente $\int_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x \, dx$ tend aussi vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$ nous ayons

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x \, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part

$$0 \leqslant \int_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2} \sin^n x \, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$I_n = \int_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x \, dx + \int_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2} \sin^n x \, dx,$$

par suite, si $n \geqslant N$ nous aurons $0 \leqslant I_n \leqslant \varepsilon$. La suite (I_n) admet donc 0 pour limite lorsque n tend vers l'infini.

6.11 Soit f une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$; démontrer que la fonction réelle F définie par

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t) \, dt$$

pour tout nombre réel x, est dérivable et vérifie la relation $F'(x) = \cos x . f(\sin x)$.

Solution La fonction F est la fonction composée de la fonction g définie par

$$g(u) = \int_0^u f(t) \, dt$$

et de la fonction sinus. Comme ces fonctions sont dérivables, la fonction F est dérivable et nous avons $F'(x) = g'[u(x)] \, (\sin)' \, (x)$. Mais $(\sin)' \, (x) = \cos x$ et $g'(u) = f(u)$ par suite $F'(x) = \cos x . f[\sin x]$.

6.12 Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbf{R}$. Démontrer que l'existence d'une période T pour f entraîne la propriété suivante : La fonction F définie pour tout nombre réel x par

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t) \, dt$$

est constante.

Solution Supposons que la fonction f admette la période T, nous avons

$$f(x) = f(x + T)$$

pour tout nombre réel x. Considérons l'intégrale

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

on remarque que

$$F(x) = \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Effectuons le changement de variable $t = u + T$ dans l'intégrale

$$\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Nous obtenons

$$\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u + T)\,\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

par suite

$$F(x) = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

et F est une fonction constante.

6.13 Pour tout nombre réel x strictement positif, établir l'égalité

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \int_1^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}\,.$$

Solution *Première méthode.*

Considérons l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}\,,$$

cette intégrale est toujours définie puisque la quantité $1 + t^2$ ne s'annule jamais. Effectuons un changement de variable en prenant comme nouvelle variable $u = 1/t$, ceci est possible puisque t ne s'annule jamais sur l'intervalle d'extrémités 1 et x. Nous obtenons

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+(1/u^2)}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_{1/x}^1 \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{1/x} \frac{du}{1+u^2}.$$

Nous avons donc

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Seconde méthode.

On a $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arc tg } 1 - \text{Arc tg } x = \frac{\pi}{4} - \text{Arc tg } x$

et $\displaystyle\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arc tg } \frac{1}{x} - \text{Arc tg } 1 = \text{Arc tg } \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}$

or (*cf.* exercice 2.27) on sait que si $x > 0$, $\text{Arc tg } x + \text{Arc tg } \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ d'où le résultat.

6.14 Soit k un nombre réel strictement positif. On considère la fonction F définie pour $x > 0$ par :

$$F(x) = \int_0^1 s^k \sin(sx)\, ds.$$

1° Etablir l'égalité suivante :

$$F(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k \sin t\, dt.$$

2° En déduire que la fonction F est dérivable pour $x > 0$ et vérifie la relation $xF'(x) + (k+1)F(x) = \sin x$ pour tout nombre réel $x > 0$.

Solution 1° Le nombre réel x étant strictement positif nous pouvons effectuer le changement de variable $t = sx$. Nous obtenons :

$$\int_0^1 s^k \sin(sx)\, ds = \int_0^x \frac{t^k}{x^k} \sin t \frac{dt}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k \sin t\, dt.$$

2° La fonction $t \mapsto t^k \sin t$ est une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle fermé $[0, x]$. Par suite la fonction

$$x \mapsto \int_0^x t^k \sin t \, dt$$

est dérivable et sa dérivée au point x est $x^k \sin x$ (*cf.* C. E., Ch. 9, § I, n° 130). La fonction F est donc dérivable car elle est le produit de deux fonctions dérivables ; nous avons :

$$F'(x) = \frac{1}{x^{k+1}} x^k \sin x - \frac{k+1}{x^{k+2}} \int_0^x t^k \sin t \, dt$$

et par suite

$$xF'(x) + (k+1) F(x) = \sin x .$$

6.15 Soient k un nombre réel tel que $0 < k < 1$ et x un nombre réel quelconque ; on considère l'intégrale

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \, dt .$$

On pose $T = y(\pi/2)$.

1° Etudier directement la fonction y ainsi définie sur $\mathbf{R}$. Montrer que y est une fonction différentiable et calculer sa dérivée y'. En déduire que la fonction z définie pour tout nombre réel x par $z(x) = y(x + \pi) - y(x)$ a une valeur constante que l'on exprimera à l'aide de T.

2° Démontrer que la fonction G admet une dérivée seconde G'' vérifiant $G''(y) + k^2 \sin G(y) \cos G(y) = 0$ pour tout nombre réel y.

3° Pour tout nombre réel v on définit les fonctions Sn, Cn et H par

$$Sn(v) = \sin G(v),\ Cn(v) = \cos G(v) \text{ et } H(v) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 G(v)} .$$

Etudier la parité de ces fonctions. Calculer les dérivées de ces fonctions.

Solution 1° Le nombre réel k vérifiant $0 < k < 1$, $k^2 \sin^2 t$ est toujours strictement plus petit que 1 donc $1 - k^2 \sin^2 t$ ne s'annule jamais et la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

est continue pour tout nombre réel t, par suite la fonction y est définie pour tout nombre réel x. Nous avons

$$y(-x) = \int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \mathrm{d}t\,;$$

effectuons le changement de variable $t = -u$, nous obtenons

$$y(-x) = \int_0^{x} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = -\,y(x)\,.$$

La fonction y est donc impaire. La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

étant continue pour tout nombre réel t la fonction y est dérivable et sa dérivée est définie par

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

(*cf.* C. E., Ch. 9, § 1, n° 130). La fonction y est donc strictement croissante puisque sa dérivée est toujours strictement positive. La fonction z a pour dérivée 0, car $y'(x + \pi) = y'(x)$ pour tout nombre réel x, cette fonction étant continue elle est constante et égale à $y(\pi) - y(0)$ soit aussi

$$y(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \mathrm{d}t\,.$$

Nous avons :

$$y(\pi) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}\,.$$

Effectuons le changement de variable $u = \pi - t$ dans la seconde intégrale, nous obtenons :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \int_{\pi/2}^{0} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}\,.$$

Par suite $y(\pi) = 2\,T$ et $z(x) = y(x + \pi) - y(x) = 2\,T$ pour tout nombre réel x. Si n est un entier nous déduisons de ce qui précède que $y(x + n\pi) - y(x) = 2\,nT$ et donc que $y(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Le tableau de variation de la fonction $y(x)$ est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2° La fonction y étant continue et strictement croissante, elle admet une fonction réciproque G également continue et strictement croissante sur **R** (*cf.* C. E., Ch. 4, § V, n° 52). La fonction G est dérivable et sa dérivée est

$$G'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$$

avec $x = G(y)$ (*cf.* C. E., Ch. 5, § I, n° 62). Nous avons donc

$$G'(y) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 G(y)}\,.$$

La fonction $y \mapsto \sqrt{1 - k^2 \sin^2 G(y)}$ étant dérivable comme fonction composée de fonctions dérivables, G' est dérivable et par suite nous avons

$$G''(y) = \tfrac{1}{2}[1 - k^2 \sin^2 G(y)]^{-1/2}[-2k^2 G'(y) \cos G(y).\sin G(y)]$$

soit $G''(y) = -k^2 \cos G(y) \sin G(y)$.

3° La fonction y étant impaire, la fonction G est aussi impaire, nous avons donc

$$Sn(-v) = \sin G(-v) = \sin[-G(v)] = -\sin G(v) = -Sn(v)\,.$$
$$Cn(-v) = \cos G(-v) = \cos[-G(v)] = \cos G(v) = Cn(v)$$
$$H(-v) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 G(-v)} = H(v)\,.$$

La fonction Sn est impaire, les fonctions Cn et H sont paires. Nous avons $H(v) = -G'(v)$ d'où $H'(v) = G''(v) = -k^2\, Cn(v)\, Sn(v)$. Les fonctions Sn et Cn sont dérivables comme fonctions composées de fonctions dérivables et nous avons :

$$Sn'(v) = G'(v) \cos G(v) = H(v)\, Cn(v)$$
$$Cn'(v) = -G'(v) \sin G(v) = -H(v)\, Sn(v)\,.$$

6.16 1° Etudier la fonction F définie pour tout nombre réel $x \geqslant 0$ par

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt\,.$$

Démontrer que F admet une limite finie K lorsque x tend vers $+\infty$.

2° Etudier la fonction G définie pour tout nombre réel $x \geqslant 0$ par

$$G(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt\,.$$

3° Soit k un nombre réel tel que $0 < k < K$; démontrer qu'il est possible de définir une fonction y vérifiant sur un intervalle que l'on précisera

$$\int_x^{y(x)} e^{-t^2}\, dt = k\,.$$

Etudier la fonction y.

Solution 1° La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur l'intervalle fermé $[0, x]$ donc, la fonction F est définie et dérivable pour tout $x \geqslant 0$ et sa dérivée au point x est e^{-x^2}. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ étant positive pour tout x, la fonction F est croissante. Pour $t > 1$, e^{-t^2} est inférieur à e^{-t} car la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante. Nous avons donc pour $t > 1$, $e^{-t^2} < e^{-t}$ et par suite pour $x > 1$,

$$\int_1^x e^{-t^2}\,dt < \int_1^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{e} - e^{-x}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\int_1^x e^{-t}$ tend vers $1/e$; donc quand x tend vers $+\infty$ la fonction F est majorée par

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{e}$$

et comme F est croissante, F admet une limite finie K. Le tableau de variation de la fonction F est donc :

x	0	$+\infty$
$F(x)$	0	$\nearrow K$

La dérivée de la fonction F vaut 1 pour $x = 0$ par suite la tangente à l'origine du graphe de F a pour pente 1. Nous obtenons le graphe suivant :

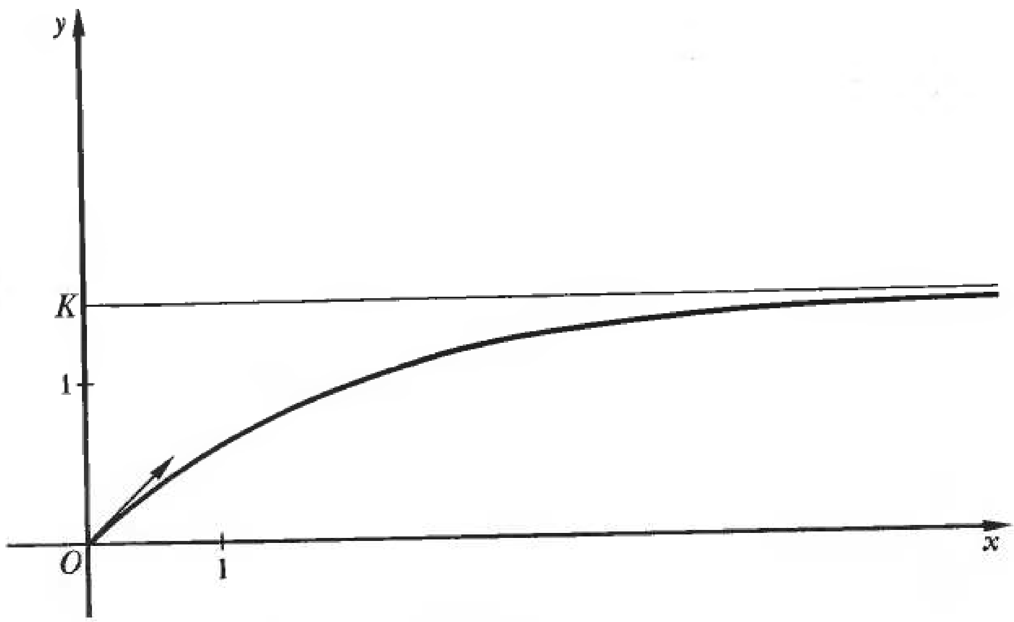

FIG. 6.16.1

2° La fonction G est définie pour tout $x \geqslant 0$ et nous avons

$$G(x) = F(x^2) - F(x) .$$

La fonction G est dérivable et sa dérivée est

$$G'(x) = 2\,xF'(x^2) - F'(x) = 2\,x\,e^{-x^4} - e^{-x^2} = e^{-x^2}[2\,x\,e^{-x^4+x^2} - 1] .$$

Etudions la fonction z définie par $z(x) = 2\,x\,e^{-x^4+x^2} - 1$. Nous avons

$$z'(x) = 2\,e^{-x^4+x^2}[1 + x(-4\,x^3 + 2\,x)] = 2\,e^{-x^4+x^2}\,[1 + 2\,x^2 - 4\,x^4] .$$

Le trinôme $1 - 2\,X + 4\,X^2$ admet la racine positive $(1 + \sqrt{5})/4$. Posons $x_0 = \sqrt{(1 + \sqrt{5})/4}$. On remarque que $x_0 < 1$, nous déduisons de ceci le tableau des variations de la fonction z.

x	0		x_0		1		$+\infty$
$z'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$z(x)$	-1	$\nearrow$	$z(x_0)$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1

Nous déduisons de ceci que la fonction z admet deux racines l'une plus petite que 1 que nous noterons α et l'autre plus grande que 1 que nous noterons β. Le signe de $z(x)$ nous donne le signe de $G'(x)$. Le tableau des variations de la fonction G est donc :

x	0		α		1		β		$+\infty$
$G'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$G(x)$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

La fonction G admet donc un minimum négatif m et un maximum positif M. La tangente au graphe, à l'origine a pour pente -1. Nous obtenons le graphe suivant :

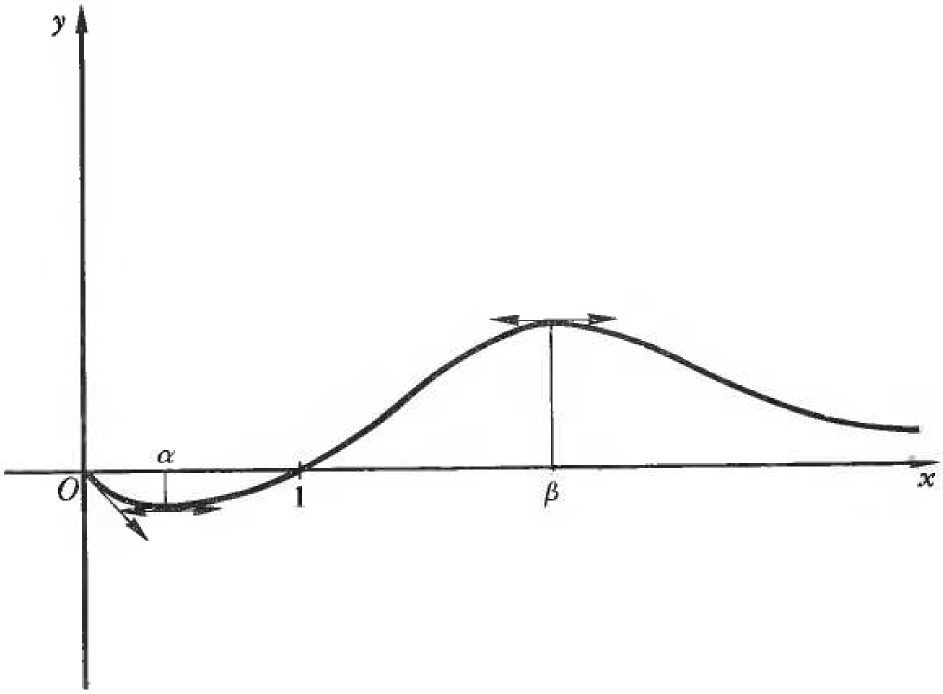

FIG. 6.16.2

3° La fonction F étant continue, croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, elle admet une fonction réciproque H, également continue et croissante sur l'intervalle $[0, K[$, telle que $H(0) = 0$ et $\lim\limits_{y \to K^-} H(y) = +\infty$. La fonction H est également dérivable sur $[0, K[$ et sa dérivée au point $y_0 = F(x_0)$ est :

$$H'(y_0) = \frac{1}{F'(x_0)} = \frac{1}{e^{-x_0^2}} = e^{x_0^2} \qquad \text{d'où} \qquad H'(y_0) = e^{[H(y_0)]^2}.$$

Soit k un nombre réel fixé tel que $0 < k < K$, cherchons s'il est possible de définir une fonction y vérifiant $\int_x^{y(x)} e^{-t^2}\,dt = k$ c'est-à-dire telle que

$$F(y(x)) - F(x) = k\,;$$

y est définie par $F(y(x)) = F(x) + k$; ceci suppose que $F(x) + k < K$ donc que $x < H(K - k)$. La fonction y ne peut être définie que sur l'intervalle $[0, H(K-k)[$ et sur cet intervalle elle est définie par $y(x) = H[F(x) + k]$. Les fonctions F et H étant croissantes, la fonction y l'est également. Le tableau des variations de y est le suivant :

x	0		$H(K-k)$
$F(x)$	0	$\nearrow$	$K-k$
$F(x)+k$	k	$\nearrow$	K
$y(x)$	$H(k)$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction y est dérivable comme fonction composée de fonctions dérivables. Nous avons

$$y'(x) = H'[F(x) + k].F'(x) = e^{[y(x)]^2}.e^{-x^2}.$$

Le graphe de la fonction y est le suivant :

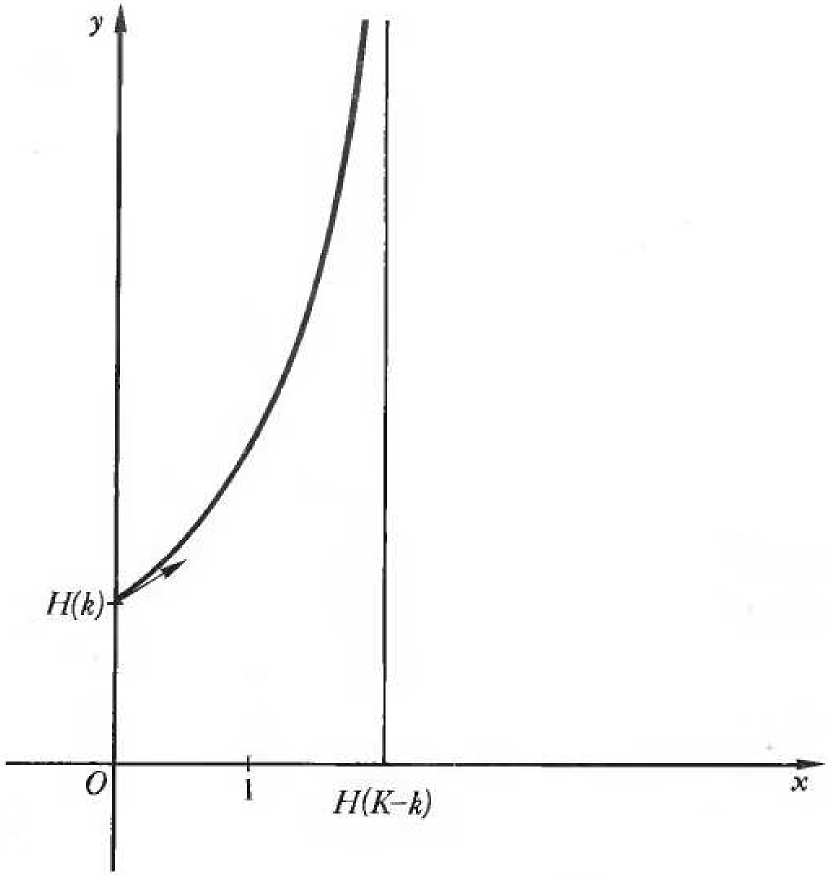

FIG. 6.16.3

6.17 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et g et h deux fonctions réelles continues admettant sur l'intervalle $[a, b]$ des dérivées d'ordre $n + 1$ continues. On note $g^{(k)}$ (resp. $h^{(k)}$) la dérivée d'ordre k de g (resp. h). On pose $g^{(0)} = g$ et $h^{(0)} = h$. Pour tout élément x de $[a, b]$ établir l'égalité :

$$\int_a^x g(t)\, h^{(n+1)}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \left[g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x) - g^{(k)}(a)\, h^{(n-k)}(a)\right] + $$

$$+ (-1)^{n+1} \int_a^x g^{(n+1)}(t)\, h(t)\, dt.$$

Quel résultat obtient-on dans le cas particulier où

$$h(t) = \frac{(t-x)^n}{n!} \, ?$$

Solution Nous allons démontrer cette formule par récurrence. Pour $n = 0$ nous avons d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^x g(t)\, h'(t)\, \mathrm{d}t = [g(x)\, h(x) - g(a)\, h(a)] - \int_a^x g'(t)\, h(t)\, \mathrm{d}t\,;$$

c'est-à-dire que la formule proposée est vraie pour $n = 0$.

Supposons que la formule soit vraie jusqu'à l'ordre n et appliquons-la au couple (g, h') ; nous obtenons :

$$\int_a^x g(t)\,(h')^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \left[g^{(k)}(x)\,(h')^{(n-1-k)}(x) - g^{(k)}(a)\,(h')^{(n-1-k)}(a)\right] + (-1)^n \int_a^x g^{(n)}(t)\, h'(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais

$$\int_a^x g^{(n)}(t)\, h'(t)\,\mathrm{d}t = g^{(n)}(x)\, h(x) - g^{(n)}(a)\, h(a) - \int_a^x g^{(n+1)}(t)\, h(t)\,\mathrm{d}t$$

et en remplaçant dans l'égalité précédente nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)\, h^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \left[g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x) - g^{(k)}(a)\, h^{(n-k)}(a)\right] + \\ &\quad + (-1)^n \left[g^{(n)}(x)\, h(x) - g^{(n)}(a)\, h(a)\right] + (-1)^{n+1} \int_a^x g^{(n+1)}(t)\, h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \left[g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x) - g^{(k)}(a)\, h^{(n-k)}(a)\right] + \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_a^x g^{(n+1)}(t)\, h(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

La formule est vraie pour l'entier $n + 1$ donc par récurrence la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Dans le cas particulier où $h(t) = (t - x)^n/(n\,!)$ nous obtenons la relation

$$0 = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \left[g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x) - g^{(k)}(a)\, h^{(n-k)}(a)\right] + \\ + (-1)^{n+1} \int_a^x g^{(n+1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n\,!} \mathrm{d}t$$

$$= g(x) - g(a) + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k g^{(k)}(a) \frac{(a-x)^k}{k\,!} + \\ + (-1)^{2n+1} \int_a^x g^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n\,!} \mathrm{d}t$$

d'où

$$g(x) = g(a) + \frac{(x-a)}{1\,!} g'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} g''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n\,!} g^{(n)}(a) \\ + \int_a^x g^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n\,!} \mathrm{d}t\,.$$

Ceci est la formule de Taylor avec reste sous la forme d'une intégrale (*cf.* C. E., Ch. 9, § I, nº 132).

6.18 1º Soient k_1, k_2, A et B des nombres réels et y une fonction réelle admettant sur un intervalle fermé $[a, b]$ une dérivée y' et une dérivée seconde y'' vérifiant pour tout élément x de $[a, b]$ les relations :

(1) $y''(x) = k_1 + k_2(x - a)$.

(2) $y(a) = A$.

(3) $y'(a) = B$.

Déterminer la fonction y.

2º Etant donné un nombre réel C trouver une fonction y vérifiant les relations (1) et (2) et la relation $y(b) = C$.

Solution 1º La fonction y' est la primitive de la fonction y'' prenant la valeur B pour $x = a$; par suite

$$y'(x) = \frac{k_2}{2}(x-a)^2 + k_1(x-a) + B\,.$$

y est la primitive de y' prenant la valeur A pour $x = a$; par suite

$$y(x) = \frac{k_2}{6}(x-a)^3 + \frac{k_1}{2}(x-a)^2 + B(x-a) + A\,.$$

2° y' est une primitive de y'', donc il existe un nombre réel k_3 tel que

$$y'(x) = \frac{k_2}{2}(x-a)^2 + k_1(x-a) + k_3\,.$$

Comme y est une primitive de y', il existe un nombre réel k_4 tel que

$$y(x) = \frac{k_2}{6}(x-a)^3 + \frac{k_1}{2}(x-a)^2 + k_3(x-a) + k_4\,.$$

Comme $y(a) = A$ nous obtenons $k_4 = A$. Comme $y(b) = C$ nous obtenons

$$C = \frac{k_2}{6}(b-a)^3 + \frac{k_1}{2}(b-a)^2 + k_3(b-a) + A$$

d'où :

$$k_3 = \frac{C-A}{b-a} - \frac{k_2}{6}(b-a)^2 - \frac{k_1}{2}(b-a)\,.$$

La fonction y qui vérifie les trois conditions imposées est donc :

$$y(x) = \frac{k_2}{6}(x-a)^3 + \frac{k_1}{2}(x-a)^2 + \\ + \left(\frac{C-A}{b-a} - \frac{k_2}{6}(b-a)^2 - \frac{k_1}{2}(b-a)\right)(x-a) + A\,,$$

soit encore

$$y(x) = \frac{k_2}{6}(x-a)(x-b)(x+b-2a) + \\ + \frac{k_1}{2}(x-a)(x-b) + \frac{C-A}{b-a}(x-a) + A\,.$$

6.19 Soit h un nombre réel strictement positif ; on pose $x_i = ih$ pour $i = 1, 2, 3$. Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-h}^{h} |\, x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,|\, \mathrm{d}x\,.$$

Solution Sur l'intervalle fermé $[-h, h]$ les expressions $x - x_i$ pour $i = 1, 2, 3$ sont négatives, par suite nous avons :

$$I = \int_{-h}^{0} x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\,dx - \\ - \int_{0}^{h} x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\,dx .$$

Nous devons calculer la primitive du polynôme

$$P(x) = x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \\ + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)x - x_1 x_2 x_3]$$

soit $P(x) = x^4 - 6hx^3 + 11h^2x^2 - 6h^3x$. Nous avons donc

$$I = \int_{-h}^{0} P(x)\,dx - \int_{0}^{h} P(x)\,dx$$

d'où, si Q désigne une primitive du polynôme P, $I = -Q(-h) - Q(h)$. Nous pouvons prendre

$$Q(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3hx^4}{2} + \frac{11h^2x^3}{3} - 3h^3x^2$$

et par suite $I = 9h^5$.

6.20 Soient a, b, c trois nombres réels ; on considère la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{(x - 1)^2(x + 1)^2} .$$

1° Décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples.

2° Soit $\tilde{f}$ la fonction rationnelle associée à f. A quelles conditions les primitives de $\tilde{f}$ sont-elles des fonctions rationnelles ? Donner leurs expressions lorsque ces conditions sont satisfaites.

Solution 1° La décomposition de la fraction rationnelle f est de la forme

$$f(x) = \frac{\alpha}{(x - 1)^2} + \frac{\beta}{x - 1} + \frac{\gamma}{(x + 1)^2} + \frac{\delta}{x + 1}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des nombres réels. Nous obtenons α (resp. γ) en multipliant $f(x)$

par $(x-1)^2$ (resp. $(x+1)^2$) et en remplaçant x par 1 (resp. -1) dans le résultat obtenu. Nous trouvons

$$\alpha = \frac{a+b+c}{4}, \quad \gamma = \frac{a-b+c}{4}.$$

En calculant $f(0)$ et la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$, nous obtenons $c = \alpha - \beta + \gamma + \delta$ et $0 = \beta + \delta$ d'où

$$\beta = \frac{a-c}{4} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{c-a}{4}.$$

Nous avons donc

$$f(x) = \frac{a+b+c}{4(x-1)^2} + \frac{a-b+c}{4(x+1)^2} + \frac{a-c}{4}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right].$$

2° Les primitives de la fonction $\tilde{f}$ sont toutes de la forme

$$F(x) = \frac{a+b+c}{4}\,\frac{-1}{x-1} + \frac{a-b+c}{4}\,\frac{-1}{x+1} + \frac{a-c}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + k$$

où k désigne une constante réelle. Les primitives de $\tilde{f}$ seront donc des fonctions rationnelles si et seulement si $a = c$. Dans cette situation nous obtenons

$$F(x) = -\frac{2a+b}{4}\,\frac{1}{x-1} - \frac{2a-b}{4}\,\frac{1}{x-1} + k$$

où k désigne une constante réelle.

6.21 Soient a et x deux nombres réels strictement supérieurs à 1 et tels que $a < x$. Calculer les intégrales des fonctions rationnelles suivantes.

1° $$I = \int_a^x \frac{3t^3 + 10t^2 - 2t}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

2° $$J = \int_a^x \frac{1}{t^3(1+t^3)}\,dt.$$

Solution 1° Les racines du polynôme $(t^2-1)^2$ étant extérieures à l'intervalle $[a, x]$, la fonction rationnelle $(3t^3 + 10t^2 - 2t)/(t^2-1)^2$ est continue sur l'intervalle $[a, x]$ donc intégrable.

Décomposons la fraction rationnelle $(3t^3 + 10t^2 - 2t)/(t^2 - 1)^2$ en éléments simples, cette décomposition sera de la forme :

$$\frac{3t^3 + 10t^2 - 2t}{(t^2 - 1)^2} = \frac{A}{(t-1)^2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{t+1}. \qquad (1)$$

Nous obtenons A (resp. C) en multipliant l'égalité (1) par $(t-1)^2$ (resp. $(t+1)^2$) et en remplaçant x par 1 (resp. -1) dans l'égalité obtenue. Nous avons $A = 11/4$ et $C = 9/4$. Pour $t = 0$ nous obtenons la relation

$$0 = A - B + C + D.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par t et en faisant tendre t vers $+\infty$ nous obtenons la relation $3 = B + D$ d'où $B = 4$ et $D = -1$. Nous obtenons donc

$$\frac{3t^3 + 10t^2 - 2t}{(t^2 - 1)^2} = \frac{11}{4}\,\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{9}{4}\,\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{4}{t-1} - \frac{1}{t+1}.$$

L'intégrale est donc égale à

$$I = \left[-\frac{11}{4}\,\frac{1}{t-1} - \frac{9}{4}\,\frac{1}{t+1} + 4\,\mathrm{Log}\,|t-1| - \mathrm{Log}\,|t+1|\right]_a^x$$

soit

$$I = \left[-\frac{1}{2}\,\frac{10t+1}{t^2-1} + \mathrm{Log}\,\frac{(t-1)^4}{|t+1|}\right]_a^x$$

d'où

$$I = -\frac{1}{2}\left[\frac{10x+1}{x^2-1} - \frac{10a+1}{a^2-1}\right] + \mathrm{Log}\,\frac{(x-1)^4(a+1)}{(x+1)(a-1)^4}.$$

2° Nous avons $t^3(1+t^3) = t^3(1+t)(1-t+t^2)$. Les racines réelles du polynôme $t^3(1+t^3)$ sont donc 0 et -1 ; elles sont extérieures à l'intervalle $[a, x]$ donc l'intégrale J est bien définie. Nous avons

$$\frac{1}{t^3(t^3+1)} = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{1+t^3}.$$

Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $1/(1+t^3)$. Nous obtenons

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1-t+t^2}$$

où A, B, C désignent des nombres réels. En réduisant le second membre au même dénominateur et en identifiant avec le premier membre, nous obtenons $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ et $C = \frac{2}{3}$, nous avons donc

$$\frac{1}{t^3(t^3+1)} = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right].$$

La fraction rationnelle $(2-t)/(1-t+t^2)$ peut s'écrire

$$\frac{2-t}{1-t+t^2} = \frac{-\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1} = -\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2}\frac{2}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

soit encore

$$\frac{2-t}{1-t+t^2} = -\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{2}{\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

Nous obtenons donc :

$$J = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{3}\operatorname{Log}|1+t| + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\operatorname{Log}|t^2-t+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]_a^x.$$

Soit

$$J = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right] - \frac{1}{3}\operatorname{Log}\frac{1+x}{1+a} + \frac{1}{6}\operatorname{Log}\frac{x^2-x+1}{a^2-a+1}$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{Arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{2}\right)\right].$$

6.22 Pour chaque entier $n \geqslant 1$ calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \qquad \text{où} \qquad f_n(x) = \frac{nx-1}{(x\operatorname{Log} n + 1)(1 + nx^2\operatorname{Log} n)}.$$

Lorsque n tend vers l'infini étudier les suites (I_n) et $\big(f_n(x)\big)$.

Solution La fonction f_n est une fonction rationnelle dont le dénominateur a pour seule racine réelle $x = -1/\operatorname{Log} n$, nous obtenons donc

$$f_n(x) = \frac{A}{x + (1/\operatorname{Log} n)} + \frac{Cx+D}{1+nx^2\operatorname{Log} n}. \qquad (1)$$

Pour calculer A, multiplions les deux membres de cette égalité par $x + (1/\mathrm{Log}\, n)$ et remplaçons x par $- 1/\mathrm{Log}\, n$ dans l'égalité obtenue. Nous trouvons

$$A = - 1/\mathrm{Log}\, n\,.$$

En remplaçant x par 0 dans l'égalité (1) nous obtenons $D = 0$ et en calculant la limite lorsque x tend vers l'infini de l'expression $xf_n(x)$ nous obtenons

$$A + \frac{C}{n\,\mathrm{Log}\, n} = 0\,,$$

d'où $C = n$. Par suite nous avons

$$f_n(x) = -\frac{1}{\mathrm{Log}\, n} \cdot \frac{1}{x + (1/\mathrm{Log}\, n)} + \frac{nx}{1 + nx^2\,\mathrm{Log}\, n}\,.$$

Une primitive de f_n est donc

$$F_n(x) = -\frac{1}{\mathrm{Log}\, n}\,\mathrm{Log}\left|x + \frac{1}{\mathrm{Log}\, n}\right| + \frac{1}{2\,\mathrm{Log}\, n}\,\mathrm{Log}\,|\,1 + nx^2\,\mathrm{Log}\, n\,|$$

Par suite $I_n = F_n(1) - F_n(0)$ soit

$$I_n = -\frac{1}{\mathrm{Log}\, n}\,\mathrm{Log}\left|1 + \frac{1}{\mathrm{Log}\, n}\right| + \frac{1}{2\,\mathrm{Log}\, n}\,\mathrm{Log}\,|\,1 + n\,\mathrm{Log}\, n\,| + \\ + \frac{1}{\mathrm{Log}\, n}\,\mathrm{Log}\left|\frac{1}{\mathrm{Log}\, n}\right|$$

d'où

$$I_n = -\frac{1}{\mathrm{Log}\, n}\,\mathrm{Log}\,(1 + \mathrm{Log}\, n) + \frac{1}{2\,\mathrm{Log}\, n}\,\mathrm{Log}\,(1 + n\,\mathrm{Log}\, n)\,.$$

Nous savons que

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}\, u}{u} = 0\,,$$

par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}\,(1 + \mathrm{Log}\, n)}{\mathrm{Log}\, n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}\,(1 + \mathrm{Log}\, n)}{1 + \mathrm{Log}\, n} \cdot \frac{1 + \mathrm{Log}\, n}{\mathrm{Log}\, n} = 0\,.$$

D'autre part

$$\frac{\mathrm{Log}\,(1 + n\,\mathrm{Log}\, n)}{2\,\mathrm{Log}\, n} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{1}{n} + \mathrm{Log}\, n\right)}{\mathrm{Log}\, n}\right].$$

Comme

$$\frac{\operatorname{Log}\left(\frac{1}{n} + \operatorname{Log} n\right)}{\operatorname{Log} n} = \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{1}{n} + \operatorname{Log} n\right)}{\frac{1}{n} + \operatorname{Log} n} \cdot \frac{\frac{1}{n} + \operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} n}$$

nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{1}{n} + \operatorname{Log} n\right)}{\operatorname{Log} n} = 0 .$$

Par suite lorsque n tend vers l'infini I_n tend vers $\frac{1}{2}$. D'autre part

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(0) = -1$$

et pour tout nombre réel x de $]0, 1]$, nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0;$$

nous voyons donc que dans ce cas particulier :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n \neq \int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = 0 .$$

6.23 Soit m un entier positif, on considère l'intégrale

$$I_m = \int_0^1 \frac{(1 - t)^m}{1 + t^2} \, \mathrm{d}t .$$

Démontrer que I_m vérifie une égalité de la forme : $I_m = A_m + B_m \pi + C_m \operatorname{Log} 2$ où A_m, B_m et C_m sont des nombres rationnels. Trouver les entiers positifs m tels que $B_m = 0$ ou $C_m = 0$.

Solution Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $(1 - t)^m/(1 + t^2)$. Nous obtenons

$$\frac{(1 - t)^m}{1 + t^2} = E_m(t) + \frac{\alpha_m t + \beta_m}{1 + t^2}$$

où $E_m(t)$ représente la partie entière de la fraction rationnelle et α_m et β_m des nombres rationnels. Le polynôme $E_m(t)$ est à coefficients rationnels si $m \geqslant 2$ sinon $E_m(t) = 0$. Par suite

$$I_m = \left[P_m(t) + \frac{\alpha_m}{2}\operatorname{Log}(1 + t^2) + \beta_m \operatorname{Arc\,tg} t\right]_0^1$$

où $P_m(t)$ désigne une primitive de la fonction polynôme E_m. Nous obtenons donc

$$I_m = P_m(1) - P_m(0) + \frac{\alpha_m}{2}\operatorname{Log} 2 + \beta_m \frac{\pi}{4}.$$

Comme E_m est un polynôme à coefficients rationnels, il est clair que P_m est aussi un polynôme à coefficients rationnels, donc I_m est de la forme

$$I_m = A_m + B_m \pi + C_m \operatorname{Log} 2$$

où A_m, B_m et C_m sont des rationnels définis par :

$$A_m = P_m(1) - P_m(0)\,, \quad B_m = \frac{\beta_m}{4} \qquad \text{et} \qquad C_m = \frac{\alpha_m}{2}.$$

Les expressions de $E_m(t)$, β_m et α_m s'obtiennent par division du polynôme $(1 - t)^m$ par $1 + t^2$. Ecrivons l'identité de la division de ces deux polynômes, nous avons : $(1 - t)^m = (1 + t^2)\,E_m(t) + \alpha_m t + \beta_m$. Pour $t = i$ nous obtenons $(1 - i)^m = \alpha_m i + \beta_m$, d'autre part

$$1 - i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4} \qquad \text{donc} \qquad \alpha_m i + \beta_m = (\sqrt{2})^m\,\mathrm{e}^{-im\pi/4}\,.$$

Nous avons donc

$$\beta_m = (\sqrt{2})^m \cos\frac{m\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \alpha_m = -\,(\sqrt{2})^m \sin\frac{m\pi}{4}.$$

Les entiers m tels que $B_m = 0$ sont les entiers tels que $\beta_m = 0$ donc tels que $\cos(m\pi/4) = 0$, par suite $B_m = 0$ si et seulement si $m = 2 + 4k$ où k est un entier naturel. De même les entiers m tels que $C_m = 0$ sont les entiers m tels que $\sin(m\pi/4) = 0$ donc $C_m = 0$ si et seulement si $m = 4k$ ou k est un entier naturel.

6.24 Soient a un nombre réel et F une fonction rationnelle définie sur l'intervalle $[a, +\infty[$. La fonction G définie sur $[a, +\infty[$ par $G(x) = \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle bornée ?

Solution La fonction F est définie pour $t \geqslant 0$, ses pôles réels sont donc tous strictement plus petits que a. Considérons la décomposition en éléments simples de la fonction $F(t)$, cette décomposition comporte une partie entière $E(t)$ (éventuellement nulle), des termes de la forme $A_i/(t - a_i)^{k_i}$ (a_i étant un pôle réel de la fonction et k_i un entier strictement positif) et des termes de la forme

$$\frac{C_j t + B_j}{(t^2 + b_j t + c_j)^{m_j}}$$

(C_j, B_j, b_j, c_j étant des nombres réels et m_j un entier strictement positif).

L'intégrale $\int_0^x E(t)\,dt$ est un polynôme en x équivalent pour x tendant vers l'infini à un monôme de la forme $\alpha_p x^p$ où p est le degré de ce polynôme. Nous avons d'autre part

$$\int_a^x \frac{A_i}{(t - a_i)^{k_i}}\,dt = -\frac{A_i}{k_i - 1}\left[\frac{1}{(x - a_i)^{k_i - 1}} - \frac{1}{(a - a_i)^{k_i - 1}}\right]$$

lorsque k_i est différent de 1 et

$$\int_a^x \frac{A_i}{(t - a_i)^{k_i}} = A_i \operatorname{Log}\left|\frac{x - a_i}{a - a_i}\right|.$$

lorsque $k_i = 1$.

Par suite lorsque x tend vers $+\infty$

$$\int_a^x \frac{A_i}{(t - a)^{k_i}}\,dt$$

tend vers 0 si $k_i \neq 1$ et vers l'infini en étant équivalent à $A_i \operatorname{Log} x$ si $k_i = 1$. Si m_j est différent de 1,

$$\int_a^x \frac{C_j t + B_j}{(t^2 + b_j t + c_j)^{m_j}}\,dt = H(x) + \operatorname{Arc\,tg}[L(x)]$$

où $H(x)$ est une fonction rationnelle ayant la limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et $L(x)$ un polynôme du premier degré en x. Par suite

$$\int_a^x \frac{C_j t + B_j}{(t^2 + b_j t + c_j)^{m_j}}\,dt$$

a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ (*cf.* C. E., Ch. 9, § I, n° 132 et § II, n° 134). D'autre part

$$\frac{C_j t + B_j}{t^2 + b_j t + c_j} = \frac{C_j}{2}\,\frac{2t + b_j}{t^2 + b_j t + c_j} + \frac{B_j - \dfrac{C_j b_j}{2}}{t^2 + b_j t + c_j}.$$

Par suite

$$\int_a^x \frac{C_j t + B_j}{t^2 + b_j t + c_j}\, dt = \frac{C_j}{2} \operatorname{Log} \left| \frac{x^2 + b_j x + c_j}{a^2 + b_j a + c_j} \right| + D_j \operatorname{Arc\,tg} L'(x) + E_j$$

D_j et E_j étant des constantes et $L'(x)$ un polynôme du premier degré en x, donc lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_a^x \frac{C_j t + B_j}{t^2 + b_j t + c_j}\, dt$$

tend vers l'infini en étant équivalent à $C_j \operatorname{Log} x$.

Dans la décomposition de la fraction rationnelle $F(t)$, considérons la somme S des coefficients relatifs aux termes qui sont d'ordre $1/t$ lorsque t tend vers l'infini. Si $E(t)$ est non nul l'étude précédente montre que lorsque x tend vers $+\infty$, $\int_a^x F(t)\, dt$ est équivalent à $\alpha_p x^p + S \operatorname{Log} x$ (avec $\alpha_p \neq 0$) donc admet une limite infinie.

Si $E(t)$ est nul, $\int_0^x F(t)$ est équivalente à $S \operatorname{Log} x$ pour x tendant vers $+\infty$ donc si $S \neq 0$, $\int_0^x F(t)$ admet une limite infinie. La fonction G est donc bornée si et seulement si la partie entière de la fraction $F(t)$ est nulle ainsi que la somme des coefficients relatifs aux termes qui sont d'ordre $1/t$ dans la décomposition en éléments simples de la fraction.

6.25 Calculer les intégrales suivantes :

1° $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1 + t^2}\, dt$ où x est un nombre réel quelconque

2° $\displaystyle\int_0^x t^4(1 + t^5)^5\, dt$ où x est un nombre réel quelconque

3° $\displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{Log} t}{t}\, dt$ où x est un nombre réel strictement positif

4° $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t(\operatorname{Log} t)^m}\, dt$ où m est un entier positif et x un nombre réel strictement plus grand que 2.

5° $\displaystyle\int_0^x \cos^5 t \sin t\, dt$ où x est un nombre réel quelconque.

Solution D'après les conditions imposées à x toutes les intégrales données ci-dessus sont définies.

1° Prenons comme nouvelle variable $u = t^2$, nous avons :

$$\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{x^2} \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u}{1+u} = \left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}|1+u|\right]_0^{x^2} = \operatorname{Log}\sqrt{1+x^2}\,.$$

2° Effectuons le changement de variable $u = t^5$, nous obtenons

$$\int_0^x t^4(1+t^5)^5\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^5}(1+u)^5\,\frac{1}{5}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{(1+u)^6}{30}\right]_0^{x^5} = \frac{1}{30}[(1+x^5)^6 - 1]\,.$$

3° Prenons comme nouvelle variable $u = \operatorname{Log} t$, nous avons :

$$\int_1^x \frac{\operatorname{Log} t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\operatorname{Log} x} u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\operatorname{Log} x} = \frac{1}{2}(\operatorname{Log} x)^2\,.$$

4° Avec la même méthode qu'au 3° nous obtenons

$$\int_2^x \frac{1}{t(\operatorname{Log} t)^m}\,\mathrm{d}t = \int_{\operatorname{Log} 2}^{\operatorname{Log} x} \frac{\mathrm{d}u}{u^m}\,.$$

Si $m = 1$ nous avons

$$\int_{\operatorname{Log} 2}^{\operatorname{Log} x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\operatorname{Log} u]_{\operatorname{Log} 2}^{\operatorname{Log} x} = \operatorname{Log}\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} 2}\,.$$

Si $m \neq 1$ nous avons

$$\int_{\operatorname{Log} 2}^{\operatorname{Log} x} \frac{\mathrm{d}u}{u^m} = \frac{1}{1-m}\left[\frac{1}{u^{m-1}}\right]_{\operatorname{Log} 2}^{\operatorname{Log} x}$$

d'où

$$\int_2^x \frac{1}{t(\operatorname{Log} t)^m} = \frac{1}{1-m}\left[\frac{1}{(\operatorname{Log} x)^{m-1}} - \frac{1}{(\operatorname{Log} 2)^{m-1}}\right].$$

5°
$$\int_0^x \cos^5 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \cos^5 t\,\mathrm{d}[\cos t]$$

$$= \left[-\frac{\cos^6 t}{6}\right]_0^x = \frac{1}{6}[1 - \cos^6 x]\,.$$

6.26 Soit z une fonction définie sur **R** et à valeurs dans **C**. Pour tout nombre réel x on note $f(x)$ la partie réelle de $z(x)$ et $g(x)$ sa partie imaginaire. Si f et g sont deux fonctions intégrables, et a et b deux nombres réels, on pose

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b z(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Soit α un nombre complexe ; on note h sa partie réelle et k sa partie imaginaire. Pour tout nombre réel x on pose par définition $e^{\alpha x} = e^{hx}[\cos kx + i \sin kx]$. Démontrer que l'on peut définir

$$\int_a^b e^{\alpha x}\, dx \qquad \text{et que} \qquad \int_a^b e^{\alpha x}\, dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]_a^b .$$

Solution Les fonctions réelles $e^{hx} \cos kx$ et $e^{hx} \sin kx$ étant continues sur **R**, pour tout couple (a, b) de nombres réels on peut définir

$$\int_a^b e^{hx} \cos kx\, dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b e^{hx} \sin kx\, dx$$

et par suite

$$\int_a^b e^{\alpha x}\, dx .$$

Soit $F(x)$ (resp. $G(x)$) la partie réelle (resp. imaginaire) de $e^{\alpha x}/\alpha$. Nous avons

$$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} = \frac{e^{hx}}{h^2 + k^2}(h - ik)(\cos kx + i \sin kx)$$

et par suite

$$F(x) = \frac{e^{hx}}{h^2 + k^2}(h \cos kx + k \sin kx)$$

et

$$G(x) = \frac{e^{hx}}{h^2 + k^2}(-k \cos kx + h \sin kx) .$$

Calculons $F'(x)$ et $G'(x)$ nous obtenons :

$$F'(x) = \frac{h\, e^{hx}}{h^2 + k^2}(h \cos kx + k \sin kx) + \frac{e^{hx}}{h^2 + k^2}(-kh \sin kx + k^2 \cos kx)$$

soit encore $F'(x) = e^{hx} \cos kx$. Nous démontrerions de même que

$$G'(x) = e^{hx} \sin kx$$

nous avons donc :

$$\int_a^b e^{\alpha x}\, dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]_a^b = \frac{e^{\alpha a} - e^{\alpha b}}{\alpha} .$$

6.27 Soient f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[0, \pi]$, et n un entier strictement positif. On considère l'intégrale

$$f_1(n) = \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx .$$

Soit k un entier strictement positif, calculer $f_1(n)$ dans les cas suivants :

1° $f(x) = \sin kx$

2° $f(x) = e^{kx}$,

3° $f(x) = x^2 - 2\pi x$.

Solution 1° Nous avons

$$f_1(n) = \int_0^\pi \sin kx \cos nx \, dx .$$

Supposons $k \neq n$ alors $\sin kx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin (k+n) x - \sin (k-n) x]$. Par suite nous avons

$$f_1(n) = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos (k+n) x}{k+n} + \frac{\cos (k-n) x}{k-n}\right]_0^\pi$$

d'où

$$f_1(n) = \frac{1}{2}\left[-\frac{(-1)^{k+n}}{k+n} + \frac{(-1)^{k-n}}{k-n} + \frac{1}{k+n} - \frac{1}{k-n}\right].$$

Comme $k+n$ et $k-n$ ont même parité nous obtenons :

$$f_1(n) = \frac{n}{k^2 - n^2}[(-1)^{k+n} - 1] .$$

Supposons maintenant que $k = n$, alors

$$f_1(n) = \int_0^\pi \sin nx \cos nx \, dx$$

d'où

$$f_1(n) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2nx \, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2nx}{2n}\right]_0^\pi = 0 .$$

2° Nous avons

$$f_1(n) = \int_0^\pi e^{kx} \cos nx \, dx .$$

Posons $z_1(n) = \int_0^\pi e^{(k+in)x}\,dx$ (*cf.* exercice 6.26), $f_1(n)$ est la partie réelle de $z_1(n)$.

Or nous avons

$$z_1(n) = \left[\frac{e^{(k+in)x}}{k+in}\right]_0^\pi \quad \text{et} \quad \frac{e^{(k+in)x}}{k+in} = \frac{k-in}{k^2+n^2}\,e^{kx}[\cos nx + i\sin nx]$$

donc

$$f_1(n) = \left[\frac{e^{kx}}{k^2+n^2}(k\cos nx + n\sin nx)\right]_0^\pi = \frac{k}{k^2+n^2}\left[(-1)^n e^{k\pi} - 1\right].$$

3° Nous avons

$$f_1(n) = \int_0^\pi (x^2 - 2\pi x)\cos nx\,dx$$

soit

$$f_1(n) = \int_0^\pi x^2\cos nx\,dx - 2\pi\int_0^\pi x\cos nx\,dx.$$

Par intégration par parties nous obtenons successivement :

$$\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}\,dx$$

$$= \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2x\sin nx}{n}\,dx$$

$$= -\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx$$

$$\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}.$$

Par suite nous obtenons

$$f_1(n) = \frac{(-1)^n 2\pi}{n^2} - 2\pi\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right] = \frac{2\pi}{n^2}.$$

6.28 Soient A, B, C, a, x des nombres réels tels que $0 < a < x$. On suppose que $A > 0$ et que $B^2 - AC < 0$ et on considère la fonction g définie pour tout nombre réel t par $g(t) = \sqrt{At^2 + 2Bt + C}$. Calculer au moyen d'une intégration par parties l'intégrale $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution Compte tenu des hypothèses faites sur A, B, C le trinôme $At^2 + 2Bt + C$ est strictement positif sur $\mathbf{R}$ et la fonction g est définie, continue et strictement positive sur tout intervalle fermé $[a, x]$ de $\mathbf{R}$. Par intégration par parties nous obtenons :

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \left[t\sqrt{At^2 + 2Bt + C}\right]_a^x - \int_a^x \frac{(At + B)\,t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{At^2 + 2Bt + C}}. \qquad (1)$$

Observons que

$$\sqrt{At^2 + 2Bt + C} = \sqrt{A}\sqrt{\left(t + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}}$$

et posons

$$u = t + \frac{B}{A} \qquad \text{et} \qquad K = \sqrt{\frac{AC - B^2}{A^2}};$$

nous obtenons :

$$\int_a^x \frac{(At + B)\,t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{At^2 + 2Bt + C}} = \sqrt{A}\int_{a+(B/A)}^{x+(B/A)} \frac{u[u - (B/A)]\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + K^2}}$$

$$= \sqrt{A}\int_{a+(B/A)}^{x+(B/A)} \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + K^2}} - \frac{B}{\sqrt{A}}\int_{a+(B/A)}^{x+(B/A)} \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + K^2}}.$$

Mais

$$\frac{B}{\sqrt{A}}\int_{a+(B/A)}^{x+(B/A)} \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + K^2}} = \left[\frac{B}{\sqrt{A}}\sqrt{u^2 + K^2}\right]_{a+(B/A)}^{x+(B/A)} = \left[\frac{B}{A}\sqrt{At^2 + 2Bt^2 + C}\right]_a^x$$

et d'autre part

$$\sqrt{A}\int_{a+(B/A)}^{x+(B/A)} \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + K^2}} = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t - \sqrt{A}\int_{a+(B/A)}^{x+(B/A)} \frac{K^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + K^2}}.$$

Nous avons donc :

$$\int_a^x \frac{(At + B)\,dt}{\sqrt{At^2 + 2\,Bt + C}} = \int_a^x g(t)\,dt - K^2\sqrt{A}\int_{a+(B/A)}^{x+(B/A)} \frac{du}{\sqrt{u^2 + K^2}} - \left[\frac{B}{A}\sqrt{At^2 + 2\,Bt + C}\right]_a^x ;$$

mais

$$\int_{a+(B/A)}^{x+(B/A)} \frac{du}{\sqrt{u^2 + K^2}} = \left[\mathrm{Log}\,|\,u + \sqrt{u^2 + K^2}|\right]_{a+(B/A)}^{x+(B/A)}$$

donc nous obtenons

$$\int_a^x \frac{(At + B)\,dt}{\sqrt{At^2 + 2\,Bt + C}} = \int_a^x g(t)\,dt - \left[\frac{B}{A}\sqrt{At^2 + 2\,Bt + C}\right]_a^x - \left[K^2\sqrt{A}\,\mathrm{Log}\,|\,u + \sqrt{u^2 + K^2}|\right]_{a+(B/A)}^{x+(B/A)}$$

et en portant ce résultat dans l'égalité (1) nous obtenons finalement :

$$2\int_a^x g(t)\,dt = \left[\left(t + \frac{B}{A}\right)\sqrt{At^2 + 2\,Bt + C}\right]_a^x + \left[\left(\frac{AC - B^2}{A\sqrt{A}}\right) \times \mathrm{Log}\,|\,u + \sqrt{u^2 + K^2}|\right]_{a+(B/A)}^{x+(B/A)}$$

d'où

$$\int_a^x g(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(x + \frac{B}{A}\right)\sqrt{Ax^2 + 2\,Bx + C} - \frac{1}{2}\left(a + \frac{B}{A}\right)\sqrt{Aa^2 + 2\,Ba + C} + \frac{AC - B^2}{2\,A\sqrt{A}}\,\mathrm{Log}\left|\frac{Ax + B + \sqrt{A}\sqrt{Ax^2 + 2\,Bx + C}}{Aa + B + \sqrt{A}\sqrt{Aa^2 + 2\,Ba + C}}\right| .$$

6.29 Soient a un nombre réel strictement supérieur à 2 et x un nombre réel tel que $x \geqslant a$. Calculer les intégrales

$$I = \int_a^x \frac{t + 1}{(t^2 - 3\,t + 2)^{1/2}}\,dt ; \quad J = \int_a^x \frac{t^2}{(4 + 9\,t^2)^{1/2}}\,dt .$$

Solution Calculons I. Nous avons

$$t^2 - 3t + 2 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}[(2t-3)^2 - 1].$$

Prenons comme nouvelle variable $u = 2t - 3$. Nous avons alors

$$I = \int_{2a-3}^{2x-3} \frac{\left(\frac{1}{2}u + \frac{5}{2}\right)du}{\frac{1}{2}\sqrt{u^2-1}} = \int_{2a-3}^{2x-3} \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-1}} + 5\int_{2a-3}^{2x-3} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

et par suite

$$I = \left[\sqrt{u^2-1} + 5\,\mathrm{Log}\,|u + \sqrt{u^2-1}|\right]_{2a-3}^{2x-3}$$

nous obtenons donc

$$I = [2\sqrt{t^2-3t+2} + 5\,\mathrm{Log}\,|2t - 3 + 2\sqrt{t^2-3t+2}|]_a^x$$

d'où

$$I = 2\sqrt{x^2-3x+2} - 2\sqrt{a^2-3a+2} + 5\,\mathrm{Log}\left|\frac{2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}}{2a-3+2\sqrt{a^2-3a+2}}\right|.$$

Calculons J. Nous avons

$$4 + 9t^2 = 4\left(1 + \frac{9}{4}t^2\right).$$

Prenons comme nouvelle variable $u = \mathrm{Arg\,sh}\,(3t/2)$ et posons

$$\alpha = \mathrm{Arg\,sh}\,\frac{3a}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \mathrm{Arg\,sh}\,\frac{3x}{2}.$$

Nous obtenons

$$J = \int_\alpha^\beta \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 (\mathrm{sh}\,u)^2}{2\,\mathrm{ch}\,u}\,\frac{2}{3}\,\mathrm{ch}\,u\,du \qquad \text{soit} \qquad J = \frac{4}{27}\int_\alpha^\beta \mathrm{sh}^2\,u\,du.$$

Calculons $\int_\alpha^\beta \mathrm{sh}^2\,u\,du$ par une intégration par parties ; nous obtenons

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{sh}^2\,u\,du = [\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathrm{ch}^2\,u\,du, \qquad \text{or} \qquad \mathrm{ch}^2\,u = 1 + \mathrm{sh}^2\,u$$

donc

$$2\int_\alpha^\beta \mathrm{sh}^2\, u\, \mathrm{d}u = [\mathrm{sh}\, u\, \mathrm{ch}\, u - u]_\alpha^\beta \qquad \text{et par suite} \qquad J = \frac{2}{27}[\mathrm{sh}\, u\, \mathrm{ch}\, u - u]_\alpha^\beta.$$

Nous avons

$$u = \mathrm{Arg\,sh}\frac{3t}{2} = \mathrm{Log}\left(\frac{3t}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}t^2 + 1}\right).$$

et par suite

$$J = \frac{2}{27}\left[\frac{3}{4}t\sqrt{4 + 9t^2} - \mathrm{Log}\left(\frac{3t}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}t^2 + 1}\right)\right]_a^x$$

d'où

$$J = \frac{2}{27}\left[\frac{3}{4}(x\sqrt{4 + 9x^2} - a\sqrt{4 + 9a^2}) - \mathrm{Log}\frac{3x + \sqrt{9x^2 + 4}}{3a + \sqrt{9a^2 + 4}}\right].$$

6.30 1° Soit a un nombre réel. Démontrer que toute fonction G, définie sur l'intervalle $[-a, a]$ par

$$G(x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$$

où $P(u, v)$ et $Q(u, v)$ sont des polynômes à deux indéterminées u et v, peut s'écrire

$$G(x) = \frac{L_1(\cos x) + \sin x . M_1(\cos x)}{L_2(\cos x) + \sin x . M_2(\cos x)}$$

ou $L_1(v)$, $M_1(v)$, $L_2(v)$, $M_2(v)$ sont des polynômes en v.

2° Démontrer que dans l'hypothèse où pour tout élément x de $[-a, a]$, $G(x) = -G(-x)$, la fonction G est de la forme $G(x) = S(\cos x)\sin x$ où S est une fonction rationnelle.

3° En déduire une remarque utile pour reconnaître que l'intégrale

$$\int^b G(x)\,\mathrm{d}x$$

peut être calculée à l'aide du changement de variable $s = \cos x$.

Quelles sont les remarques analogues pour reconnaître que cette intégrale peut être calculée à l'aide du changement de variable $s = \sin x$ ou $s = \mathrm{tg}\, x$?

Solution 1° Le polynôme $P(u, v)$ peut s'écrire sous la forme

$$P(u, v) = \sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant m \\ 0 \leqslant q \leqslant n}} a_{pq}\, u^p\, v^q$$

où a_{pq} est le coefficient du monôme $u^p\, v^q$ de ce polynôme. Séparons les monômes qui contiennent u à une puissance impaire des monômes qui contiennent u à une puissance paire. Nous avons

$$P(u, v) = \sum_{\substack{0 \leqslant 2r \leqslant m \\ 0 \leqslant q \leqslant n}} a_{2r,q}\, u^{2r}\, v^q + \sum_{\substack{1 \leqslant 2r+1 \leqslant m \\ 0 \leqslant q \leqslant n}} a_{2r+1,q}\, u^{2r+1}\, v^q .$$

Si $u = \sin x$ et $v = \cos x$ nous avons $u^2 + v^2 = 1$. Soit $L_1(v)$ le polynôme

$$\sum_{\substack{0 \leqslant 2r \leqslant m \\ 0 \leqslant q \leqslant n}} a_{2r,q}(1 - v^2)^r\, v^q$$

et $M_1(v)$ le polynôme

$$\sum_{\substack{1 \leqslant 2r+1 \leqslant m \\ 0 \leqslant q \leqslant n}} a_{2r+1,q}\,(1 - v^2)^r\, v^q ,$$

alors pour $u = \sin x$ et $v = \cos x$ nous obtenons $P(u, v) = L_1(v) + uM_1(v)$. Nous démontrerions de manière analogue qu'il existe deux polynômes $L_2(v)$ et $M_2(v)$ tels que pour $u = \sin x$ et $v = \cos x$ nous ayons

$$Q(u, v) = L_2(v) + uM_2(v)$$

et par suite

$$G(x) = \frac{L_1(\cos x) + \sin x . M_1(\cos x)}{L_2(\cos x) + \sin x . M_2(\cos x)} .$$

2° Supposons que pour tout élément x de $[-a, a]$ nous ayons

$$G(x) = -G(-x) .$$

La fonction cosinus est une fonction paire et la fonction sinus une fonction impaire. Nous avons donc

$$\frac{L_1(\cos x) + \sin x . M_1(\cos x)}{L_2(\cos x) + \sin x . M_2(\cos x)} = - \frac{L_1(\cos x) - \sin x . M_1(\cos x)}{L_2(\cos x) - \sin x . M_2(\cos x)}$$

pour tout élément x de $[-a, a]$. Par suite :

$$\begin{aligned}
&L_1(\cos x)\, L_2(\cos x) + \sin x[M_1(\cos x)\, L_2(\cos x) - L_1(\cos x)\, M_2(\cos x)] - \\
&- \sin^2 xM_1(\cos x)\, M_2(\cos x) = - L_1(\cos x)\, L_2(\cos x) + \\
&\qquad + \sin x[M_1(\cos x)\, L_2(\cos x) - L_1(\cos x)\, M_2(\cos x)] + \\
&\qquad\qquad + \sin^2 xM_1(\cos x)\, M_2(\cos x)
\end{aligned}$$

pour tout élément x de $[-a, a]$. Nous avons donc la relation

$$L_1(\cos x)\, L_2(\cos x) - \sin^2 x M_1(\cos x)\, M_2(\cos x) = 0$$

pour tout élément x de $[-a, a]$. Supposons que le polynôme L_2 ne soit pas identiquement nul, alors nous aurons

$$L_1(\cos x) = \frac{\sin^2 x M_1(\cos x)\, M_2(\cos x)}{L_2(\cos x)} \quad \text{et par suite} \quad G(x) = \frac{\sin x M_1(\cos x)}{L_2(\cos x)}.$$

Si le polynôme L_2 est identiquement nul alors nécessairement le polynôme M_1 est identiquement nul, car M_2 ne peut être identiquement nul en même temps que L_2. Nous avons alors

$$G(x) = \frac{L_1(\cos x)}{\sin x M_2(\cos x)} = \sin x \frac{L_1(\cos x)}{(1 - \cos^2 x)\, M_2(\cos x)}.$$

Donc si $G(x) = -G(-x)$ pour tout élément x de $[-a, \alpha]$ il existe une fonction rationnelle S telle que $G(x) = \sin x . S(\cos x)$.

3° Nous déduisons du 2° que l'intégrale $\int_a^b G(x)\,dx$ peut être calculée en faisant le changement de variable $\cos x = s$, si $G(x) = -G(-x)$ soit encore si l'élément différentiel $G(x)\,dx$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$. Les notations et les hypothèses étant celles de la question précédente nous avons alors

$$\int_a^b G(x)\,dx = \int_a^b \sin x S(\cos x)\,dx;$$

donc si $\bar{S}$ est une primitive de la fonction rationnelle S, nous avons :

$$\int_a^b G(x)\,dx = \bar{S}(\cos b) - \bar{S}(\cos a).$$

Nous démontrerions de même que l'intégrale proposée peut être calculée en faisant le changement de variable $\sin x = s$ (resp. $\operatorname{tg} x = t$) si l'élément différentiel $G(x)\,dx$ est invariant par la transformation

$$x \mapsto \pi - x \,(\text{resp. } x \mapsto \pi + x).$$

6.31 Soient b et c deux nombres réels non nuls et a et x deux nombres réels tels que chacune des intégrales suivantes soit définie :

1° $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{2 + \cos t}\,dt;$ 2° $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt;$ 3° $\displaystyle\int_a^x \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t}\,dt;$

4° $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t}\,dt;$ 5° $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{b^2 \cos^2 t + c^2 \sin^2 t}\,dt;$

Calculer ces intégrales.

Solution 1° Prenons comme nouvelle variable $u = \operatorname{tg}(t/2)$. Nous obtenons :

$$\int_a^x \frac{1}{2+\cos t}\,dt = \int_{\operatorname{tg}(a/2)}^{\operatorname{tg}(x/2)} \frac{1+u^2}{3+u^2}\,\frac{2\,du}{1+u^2} = \int_{\operatorname{tg}(a/2)}^{\operatorname{tg}(x/2)} \frac{2\,du}{3+u^2},$$

d'où

$$\int_a^x \frac{1}{2+\cos t}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{\operatorname{tg}(a/2)}^{\operatorname{tg}(x/2)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} - \operatorname{Arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}(a/2)}{\sqrt{3}}\right].$$

2° L'élément différentiel $\cos^3 t/\sin^4 t\,dt$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$, prenons donc $u = \sin t$ comme nouvelle variable. Nous obtenons

$$\int_a^x \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt = \int_{\sin a}^{\sin x} \frac{1-u^2}{u^4}\,du = \left[-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u}\right]_{\sin a}^{\sin x}$$

par suite

$$\int_a^x \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{\sin^3 a}\right] + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin a}.$$

3° L'élément différentiel considéré est invariant par la transformation $x \mapsto x + \pi$ nous pouvons donc prendre $u = \operatorname{tg} t$ comme nouvelle variable. Nous avons

$$\int_a^x \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t}\,dt = \int_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}[\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a].$$

4° Nous avons comme ci-dessus en posant $u = \operatorname{tg} t$

$$\int_a^x \frac{1}{\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = \int_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} \frac{1+u^2}{u^2}\,du$$

$$= \left[-\frac{1}{u} + u\right]_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} a} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a.$$

5° Nous avons de même :

$$\int_a^x \frac{1}{b^2\cos^2 t + c^2\sin^2 t}\,dt = \int_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{b^2 + c^2u^2}\,du = \frac{1}{cb}\left[\operatorname{Arc\,tg}\frac{c}{b}u\right]_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x}$$

$$= \frac{1}{cb}\left[\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{c}{b}\operatorname{tg} x\right) - \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{c}{b}\operatorname{tg} a\right)\right].$$

6.32 Soit n un entier positif ; calculer :

$$\int_a^x (\operatorname{tg} t)^n \, dt .$$

Solution Posons

$$I_n = \int_a^x (\operatorname{tg} t)^n \, dt$$

et effectuons le changement de variable $\operatorname{tg} t = u$. Nous obtenons

$$I_n = \int_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} \frac{u^n}{1+u^2} \, du .$$

Nous pouvons écrire que $u^n = (1+u^2)\,u^{n-2} - u^{n-2}$ et par suite que :

$$I_n = \int_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} u^{n-2} \, du - I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\left[(\operatorname{tg} x)^{n-1} - (\operatorname{tg} a)^{n-1}\right] - I_{n-2} .$$

Ceci nous permet de calculer I_n par récurrence pour tout $n \geqslant 0$ si nous connaissons I_0 et I_1. Nous avons

$$I_0 = \int_a^x dt = x - a$$

et

$$I_1 = \int_a^x \operatorname{tg} t \, dt = \int_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} \frac{u \, du}{1+u^2} = \left[\operatorname{Log} \sqrt{1+u^2}\right]_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} = \operatorname{Log} \left| \frac{\cos a}{\cos x} \right| .$$

Supposons n pair. Si nous posons $n = 2p$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I_{2p} &= \frac{1}{2p-1}\left[(\operatorname{tg} x)^{2p-1} - (\operatorname{tg} a)^{2p-1}\right] - I_{2p-2} \\
I_{2p-2} &= \frac{1}{2p-3}\left[(\operatorname{tg} x)^{2p-3} - (\operatorname{tg} a)^{2p-3}\right] - I_{2p-4} \\
&\vdots \\
I_2 &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a\right] - I_0 \\
I_0 &= x - a .
\end{aligned}$$

De ces $p + 1$ égalités nous déduisons :

$$I_{2p} = \frac{1}{2p-1}[(\operatorname{tg} x)^{2p-1} - (\operatorname{tg} a)^{2p-1}] + \\ + \frac{(-1)}{2p-3}[(\operatorname{tg} x)^{2p-3} - (\operatorname{tg} a)^{2p-3}] + \cdots \\ + (-1)^{p-1}(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a) + (-1)^p (x - a).$$

Supposons n impair. Si nous posons $n = 2p + 1$ nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{1}{2p}[(\operatorname{tg} x)^{2p} - (\operatorname{tg} a)^{2p}] - I_{2p-1} \\ I_{2p-1} &= \frac{1}{2p-2}[(\operatorname{tg} x)^{2p-2} - (\operatorname{tg} a)^{2p-2}] - I_{2p-3} \\ &\vdots \\ I_3 &= \frac{1}{2}[(\operatorname{tg} x)^2 - (\operatorname{tg} a)^2] - I_1 \\ I_1 &= \operatorname{Log}\left|\frac{\cos a}{\cos x}\right| \end{aligned}$$

Des $p + 1$ égalités précédentes nous déduisons :

$$I_{2p+1} = \frac{1}{2p}[(\operatorname{tg} x)^{2p} - (\operatorname{tg} a)^{2p}] + \frac{(-1)}{2p-2}[(\operatorname{tg} x)^{2p-2} - (\operatorname{tg} a)^{2p-2}] + \cdots + \\ + \frac{(-1)^{p-1}}{2}[\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a] + (-1)^p \operatorname{Log}\left|\frac{\cos a}{\cos x}\right|.$$

6.33 Soient a et x deux nombres réels et n un entier rationnel. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_a^x \frac{dt}{3 + \operatorname{ch} t}; \quad J = \int_a^x \frac{dt}{(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^n}.$$

Solution Effectuons le changement de variable $u = \operatorname{th}(t/2)$ dans I ; nous obtenons

$$du = \frac{1}{2}(1 - u^2)\, dt, \quad \operatorname{ch} t = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}$$

et par suite en posant $\alpha = \text{th}(a/2)$ et $\beta = \text{th}(x/2)$ nous avons :

$$\int_a^x \frac{dt}{3 + \text{ch}\, t} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{3 + \dfrac{1 + u^2}{1 - u^2}} \frac{2\,du}{1 - u^2} = \int_\alpha^\beta \frac{du}{2 - u^2}.$$

Mais nous avons

$$\frac{1}{2 - u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2} - u} + \frac{1}{\sqrt{2} + u}\right]$$

donc

$$\int_a^x \frac{dt}{3 + \text{ch}\, t}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{2} - u} + \int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{2} + u}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\text{Log}\left|\frac{\sqrt{2} + u}{\sqrt{2} - u}\right|\right]_\alpha^\beta$$

soit

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Log}\left|\frac{(\sqrt{2} + \text{th}(x/2))(\sqrt{2} - \text{th}(a/2))}{(\sqrt{2} - \text{th}(x/2))(\sqrt{2} + \text{th}(a/2))}\right|.$$

Si $n = 0$ nous avons

$$J_0 = \int_a^x dt = x - a;$$

si $n \neq 0$, en observant que $\text{sh}\, t + \text{ch}\, t = e^t$ nous obtenons

$$J_n = \int_a^x e^{-nt}\, dt = \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_a^x$$

d'où

$$J_n = \frac{e^{-na} - e^{-nx}}{n}.$$

6.34 Soient a et x deux nombres réels strictement positifs ; on considère l'intégrale

$$F(x, n, p) = \int_a^x \frac{t^n}{(e^t - 1)^p}\, dt$$

où n et p sont des entiers positifs tels que $p \geqslant 1$. En supposant $n \geqslant 1$ et $p > 1$ exprimer $F(x, n, p)$ à l'aide de $F(x, n, p - 1)$ et de $F(x, n - 1, p - 1)$. Démontrer que le calcul de $F(x, n, p)$ peut se ramener à celui d'intégrales de la forme $F(x, m, 1)$ avec $1 \leqslant m \leqslant n$ (on ne cherchera pas à calculer ces dernières). Appliquer cette méthode à la réduction de l'intégrale

$$F(x, 1, 2) = \int_a^x \frac{t}{(e^t - 1)^2} dt .$$

Solution Nous pouvons écrire

$$F(x, n, p) = \int_a^x \frac{t^n(1 - e^t + e^t)}{(e^t - 1)^p} dt$$

et par suite

$$F(x, n, p) = - F(x, n, p - 1) + \int_a^x \frac{t^n e^t}{(e^t - 1)^p} dt .$$

L'entier p étant strictement supérieur à 1, nous obtenons par intégration par parties :

$$\int_a^x \frac{t^n e^t}{(e^t - 1)^p} dt = \left[\frac{t^n}{(1 - p)(e^t - 1)^{p-1}}\right]_a^x - \frac{n}{1 - p} \int_a^x \frac{t^{n-1}}{(e^t - 1)^{p-1}} dt .$$

Nous avons donc

$$F(x, n, p) = \frac{1}{1 - p}\left[\frac{x^n}{(e^x - 1)^{p-1}} - \frac{a^n}{(e^a - 1)^{p-1}}\right] +$$

$$+ \frac{n}{p - 1} F(x, n - 1, p - 1) - F(x, n, p - 1) .$$

Si $n \geqslant 2$ et $p - 1 > 1$ nous pouvons appliquer à nouveau la formule précédente à $F(x, n, p - 1)$ et à $F(x, n - 1, p - 1)$ ce qui ramène le calcul de $F(x, n, p)$ au calcul d'intégrales de la forme $F(x, r, p - 2)$ avec $n - 2 \leqslant r \leqslant n$. Donc si $n \geqslant p$ à la suite de $p - 1$ opérations nous ramenons le calcul de $F(x, n, p)$ à celui d'intégrales de la forme $F(x, r, 1)$ avec $1 \leqslant r \leqslant n$. Si $p < n$, après $p - 1$ applications de la formule précédente nous nous ramenons au calcul d'intégrales de la forme $F(x, m, 1)$ avec $1 \leqslant m \leqslant n$ et au calcul d'intégrales de la forme $F(x, 0, r)$ avec $p - n \leqslant r \leqslant 1$. Démontrons que ces dernières intégrales se calculent par récurrence. Nous avons

$$F(x, 0, s) = \int_a^x \frac{dt}{(e^t - 1)^s} = \int_a^x \frac{1 - e^t}{(e^t - 1)^s} dt + \int_a^x \frac{e^t \, dt}{(e^t - 1)^s}$$

soit

$$F(x, 0, s) = - F(x, 0, s - 1) + \frac{1}{1 - s} \left[\frac{1}{(e^t - 1)^{s-1}}\right]_a^x$$

d'où

$$F(x, 0, s) = -F(x, 0, s-1) + \frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{(e^a - 1)^{s-1}} - \frac{1}{(e^x - 1)^{s-1}}\right].$$

En ajoutant membre à membre les r égalités obtenues en multipliant la s-ième égalité ci-dessus par $(-1)^{s-1}$ pour $s = 1, 2, ..., r$, nous obtenons

$$F(x, 0, r) = \frac{1}{r-1}\left[\frac{1}{(e^a - 1)^{r-1}} - \frac{1}{(e^x - 1)^{r-1}}\right] -$$

$$- \frac{1}{r-2}\left[\frac{1}{(e^a - 1)^{r-2}} - \frac{1}{(e^x - 1)^{r-2}}\right] + \cdots + (-1)^{r-2}\left[\frac{1}{e^a - 1} - \frac{1}{e^x - 1}\right]$$

$$+ (-1)^{r-1} \operatorname{Log}\left|\frac{e^x - 1}{e^a - 1}\right| + (-1)^r (x - a).$$

Par suite dans tous les cas le calcul de $F(x, n, p)$ se ramène à celui d'intégrales de la forme $F(x, m, 1)$.

Etudions $F(x, 1, 2)$. Nous obtenons

$$F(x, 1, 2) = \left[\frac{a}{e^a - 1} - \frac{x}{e^x - 1}\right] + F(x, 0, 1) - F(x, 1, 1).$$

Mais

$$F(x, 0, 1) = -(x - a) + \operatorname{Log}\left|\frac{e^x - 1}{e^a - 1}\right|.$$

Nous avons donc :

$$F(x, 1, 2) = \left[\frac{a}{e^a - 1} - \frac{x}{e^x - 1}\right] - (x - a) + \operatorname{Log}\left|\frac{e^x - 1}{e^a - 1}\right| - F(x, 1, 1).$$

Le calcul de $F(x, 1, 2)$ se ramène donc au calcul de $F(x, 1, 1)$.

7

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

7.1 Intégrer les équations différentielles suivantes

$$(1 + x^2)^2\, y' + 2\,x + 2\,xy^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\sqrt{1 + x^2}\, y' - y^2 - y - 1 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + x^2}} - e^{-y} = 0\,. \qquad (3)$$

Solution Ces trois équations sont à variables séparables.

1° L'équation (1) s'écrit aussi

$$(1 + x^2)^2\, y' = -\,2\,x(1 + y^2)$$

soit encore

$$\frac{y'}{1 + y^2} = \frac{-\,2\,x}{(1 + x^2)^2}.$$

En intégrant les deux membres de cette dernière équation on trouve

$$\text{Arc tg}\, y = \frac{1}{1 + x^2} + K$$

où K est un nombre réel ; donc les solutions de l'équation (1) sont de la forme

$$y = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{1 + x^2} + K\right]$$

où K est un nombre réel.

2° L'équation (2) se met sous la forme

$$y' = \frac{y^2 + y + 1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Le polynôme $r^2 + r + 1$ ne possède aucune racine réelle donc l'équation (2) est équivalente à l'équation

$$\frac{y'}{y^2 + y + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Pour intégrer le premier membre posons $u = y + \frac{1}{2}$ et $t = 2\,u/\sqrt{3}$, alors

$$\frac{y'}{y^2 + y + 1} = \frac{u'}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{t'}{t^2 + 1}$$

donc une primitive du premier membre est

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\,y + 1}{\sqrt{3}}.$$

Par ailleurs nous savons (*cf.* C. E., Ch. 9, § I, n° 129) que les primitives du second membre sont de la forme

$$\operatorname{Arg\,sh} x + \lambda$$

où λ est un nombre réel, donc on a

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\,y + 1}{\sqrt{3}} = \operatorname{Arg\,sh} x + \lambda$$

d'où

$$\frac{2\,y + 1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Arg\,sh} x + \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}\right)$$

et

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Arg\,sh} x + \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

donc les solutions de l'équation (2) sont de la forme

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arg\,sh} x + K\right) - \frac{1}{2}$$

où K est un nombre réel.

3° L'équation (3) s'écrit aussi

$$\frac{y'}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{e}^{-y}$$

soit encore

$$y'\,\mathrm{e}^y = \sqrt{x^2+1}\,.$$

Une primitive du premier membre est e^y ; pour calculer une primitive du second membre posons $x = \operatorname{sh} u$, alors

$$\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1}\,\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = \int \operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$= \int \frac{\operatorname{ch} 2u + 1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{\operatorname{sh} 2u + 2u}{4} + K\,.$$

où K est un nombre réel ; or

$$\frac{\operatorname{sh} 2u + 2u}{4} = \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + u}{2} = \frac{x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{Arg\,sh} x}{2}$$

donc

$$\mathrm{e}^y = \frac{x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{Arg\,sh} x}{2} + K$$

où K est un nombre réel. Comme la fonction

$$x \mapsto \frac{x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{Arg\,sh} x}{2}$$

est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, pour chaque nombre réel K l'ensemble des nombres réels x tels que

$$\frac{x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{Arg\,sh} x}{2} + K > 0$$

est un intervalle ouvert, soit

$$]a_K, +\infty[$$

et l'équation (3) admet alors, sur cet intervalle la solution

$$y = \operatorname{Log}\left(\frac{x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{Arg\,sh} x}{2} + K\right)$$

7.2 On considère les équations différentielles

$$y' = \frac{x+y}{x} \tag{1}$$

$$xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{2}$$

Trouver leurs intégrales générales sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Solution On constate aisément que les équations (1) et (2) sont inchangées lorsqu'on remplace x par λx et y par λy où λ est un nombre réel. Ces deux équations sont donc homogènes.

1° Cherchons d'abord si l'équation (1) possède une solution de la forme $y = tx$ où t est un nombre réel ; on devrait avoir pour cela $t = (x + tx)/x$ pour tout nombre réel x non nul, ce qui est impossible.

Posons à présent $y = tx$, t étant une fonction dérivable de x. Alors on a $y' = t'x + t$ et en portant dans l'équation (1) on trouve

$$t'x + t = \frac{x+tx}{x}.$$

Dans chacun des intervalles considérés cette équation équivaut à

$$t'x = 1$$

soit

$$t' = \frac{1}{x}$$

et par intégration

$$t = \operatorname{Log}|x| + K$$

où K est un nombre réel.

La solution générale de l'équation (1) est donc de la forme

$$\begin{cases} y = x\operatorname{Log} x + K_1 x & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\\ y = x\operatorname{Log}(-x) + K_2 x & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels.

2° On démontre facilement que la seule solution de l'équation (2) de la forme $y = tx$ où t est un nombre réel, est la fonction constante de valeur 0. Cherchons à présent les solutions de l'équation (2) sous la forme $y = tx$ où t est une fonction dérivable de x. On a $y = t'x + t$ d'où en portant dans l'équation (2)

$$x(t'x + t) = tx + \sqrt{x^2 + t^2 x^2}$$

soit encore

$$t' x^2 = |x| \sqrt{1 + t^2}.$$

Dans chacun des intervalles considérés cette équation équivaut à

$$\frac{t'}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{|x|}{x^2}.$$

Dans l'intervalle $]0, +\infty[$ on obtient en intégrant les deux membres

$$\operatorname{Arg\,sh} t = \operatorname{Log} x + K_1$$

où K_1 est un nombre réel ; d'où $t = \operatorname{sh}(\operatorname{Log} x + K_1)$.
Dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ on obtient

$$\operatorname{Arg\,sh} t = -\operatorname{Log}(-x) + K_2$$

où K_2 est un nombre réel ; d'où $t = \operatorname{sh}(K_2 - \operatorname{Log}(-x))$.

Par suite la forme générale des solutions de l'équation (2) est

$$\begin{cases} y = x \operatorname{sh}(K_1 + \operatorname{Log} x) & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\\ y = x \operatorname{sh}(K_2 - \operatorname{Log}(-x)) & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels.

On peut transformer l'expression de ces solutions en posant $K_1 = \operatorname{Log} C_1$. $K_2 = \operatorname{Log} C_2$ où C_1, C_2 sont deux nombres strictement positifs ; on a alors

$$\operatorname{sh}(K_1 + \operatorname{Log} x) = \operatorname{sh}(\operatorname{Log} C_1 x) = \frac{C_1 x - \dfrac{1}{C_1 x}}{2} = \frac{C_1^2 x^2 - 1}{2 C_1 x}$$

$$\operatorname{sh}(K_2 - \operatorname{Log}(-x)) = \operatorname{sh}\left(\operatorname{Log}\left(-\frac{C_2}{x}\right)\right) = \frac{-\dfrac{C_2}{x} + \dfrac{x}{C_2}}{2} = \frac{x^2 - C_2^2}{2 C_2 x}$$

la forme générale des solutions de l'équation (2) devient alors

$$\begin{cases} y = \dfrac{C_1^2 x^2 - 1}{2 C_1} & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\\[2ex] y = \dfrac{x^2 - C_2^2}{2 C_2} & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

où C_1, C_2 sont deux nombres réels strictement positifs.

7.3 On considère l'équation différentielle

$$xy' - (x + 1)\,y + e^x(x^2 + 1) = 0\,. \tag{1}$$

1° Trouver son intégrale générale dans chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$.

3° Montrer qu'il existe des fonctions définies et continues sur $\mathbf{R}$ qui sont solutions de l'équation (1) pour $x \neq 0$.

Solution 1° L'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$xy' - (x + 1)\,y = 0\,. \tag{2}$$

Dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ les solutions de cette équation qui ne s'annulent pas sont celles de l'équation

$$\frac{y'}{y} = \frac{x + 1}{x}\,. \tag{3}$$

En intégrant chacun des membres de l'équation (3) on obtient

$$\operatorname{Log}|y| = x + \operatorname{Log}|x| + K$$

où K est un nombre réel ; il en résulte que

$$y = Cx\,e^x$$

où C est un nombre réel.

Pour déterminer la solution générale de l'équation (1) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, appliquons la méthode de variation des constantes.
Ecrivons y sous la forme

$$y = C(x)\,x\,e^x \tag{4}$$

où C est une fonction dérivable de x. Alors on a en dérivant (4)

$$y' = C'(x)\,x\,e^x + C(x)\,e^x + C(x)\,x\,e^x$$

et en portant dans l'équation (1) on obtient

$$C'(x)\,x^2\,e^x + C(x)\,x\,e^x + C(x)\,x^2\,e^x - C(x)\,x^2\,e^x - C(x)\,x\,e^x + \\ + e^x(x^2 + 1) = 0$$

soit

$$C'(x)\,x^2\,e^x + e^x(x^2 + 1) = 0$$

d'où il vient

$$C'(x) = -\frac{x^2+1}{x^2} = -1 - \frac{1}{x^2}$$

d'où en intégrant

$$C(x) = -x + \frac{1}{x} + k$$

où k est un nombre réel.

L'intégrale générale de l'équation (1) est donc de la forme

$$\begin{cases} y = (-x^2 + 1 + k_1 x)\,e^x & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_-^* \\ y = (-x^2 + 1 + k_2 x)\,e^x & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_+^* \end{cases}$$

où k_1, k_2 sont des nombres réels.

2° Pour tout nombre réel k on a

$$\lim_{x \to 0} (-x^2 + 1 + kx)\,e^x = 1$$

donc les fonctions $g_{\lambda\mu}(\lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R})$ définies par

$$\begin{cases} g_{\lambda\mu}(x) = (-x^2 + 1 + \lambda x)\,e^x & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_-^* \\ g_{\lambda\mu}(0) = 1 & \\ g_{\lambda\mu}(x) = (-x^2 + 1 + \mu x)\,e^x & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_+^* \end{cases}$$

satisfont à la question

7.4

On considère l'équation différentielle

$$xy' - y = \text{Log}\,|1 + x| \tag{1}$$

1° Trouver son intégrale générale dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2° Montrer qu'il existe des fonctions définies et continues sur $\mathbf{R}$ qui sont solutions de l'équation (1) pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$ et qui ont des dérivées infinies pour $x = 0$ et $x = -1$.

Solution 1° L'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$xy' - y = 0 \tag{2}$$

Dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ les solutions de l'équation (2) qui ne s'annulent pas sont celles de l'équation

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \tag{3}$$

d'où en intégrant

$$\operatorname{Log} |y| = \operatorname{Log} |x| + K$$

donc $y = Cx$ où C est un nombre réel.

Comme $\operatorname{Log} |1 + x|$ n'est pas défini pour $x = -1$, nous allons déterminer la forme de l'intégrale générale de l'équation (1) dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, +\infty[$. Pour cela nous appliquons la méthode de variation des constantes en posant

$$y = C(x)\, x \tag{4}$$

où C est une fonction dérivable de x. En dérivant (4) on obtient

$$y' = C'(x)\, x + C(x)$$

d'où en portant dans l'équation (1),

$$C'(x)\, x^2 = \operatorname{Log} |1 + x|$$

d'où

$$C'(x) = \frac{\operatorname{Log} |1 + x|}{x^2}.$$

Une intégration par parties donne alors

$$C(x) = \frac{-(x+1) \operatorname{Log} |1 + x|}{x} + \operatorname{Log} |x| + k$$

où k est un nombre réel.

La forme générale de l'intégrale de l'équation (1) est donc

$$\begin{cases} y = -(x+1) \operatorname{Log}(x+1) + x \operatorname{Log} x + k_1 x & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\\ y = -(x+1) \operatorname{Log}(x+1) + x \operatorname{Log} |x| + k_2 x & \text{si} \quad x \in]-1, 0[\\ y = -(x+1) \operatorname{Log} |x+1| + x \operatorname{Log} |x| + k_3 x & \text{si} \quad x \in]-\infty - 1[\end{cases}$$

où k_1, k_2, k_3 sont des nombres réels.

2° Observons que pour tout nombre réel k on a

$$\lim_{x \to 0} \left[-(x+1) \operatorname{Log}(x+1) + x \operatorname{Log} |x| + kx \right] = 0$$

donc si k_1, k_2 sont deux nombres réels, on définit une fonction g continue sur $]-1, +\infty[$ en posant

$$\begin{cases} g(x) = -(x+1)\operatorname{Log}(x+1) + x\operatorname{Log} x + k_1 x & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\\ g(0) = 0 \\ g(x) = -(x+1)\operatorname{Log}(x+1) + x\operatorname{Log}|x| + k_2 x & \text{si} \quad x \in]-1, 0[. \end{cases}$$

A présent observons que

$$\lim_{x \to (-1)+} [-(x+1)\operatorname{Log}(x+1) + x\operatorname{Log}|x| + k_2 x] = -k_2$$

et

$$\lim_{x \to (-1)-} [-(x+1)\operatorname{Log}|x+1| + x\operatorname{Log}|x| + k_3 x] = -k_3 .$$

Il en résulte que pour tout couple (k_1, k_2) de nombres réels, la fonction $g_{k_1 k_2}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\begin{cases} g_{k_1k_2}(x) = -(x+1)\operatorname{Log}(x+1) + x\operatorname{Log} x + k_1 x & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\\ g_{k_1k_2}(0) = 0 \\ g_{k_1k_2}(x) = -(x+1)\operatorname{Log}(x+1) + x\operatorname{Log}|x| + k_2 x & \text{si} \quad x \in]-1, 0[\\ g_{k_1k_2}(-1) = -k_2 \\ g_{k_1k_2}(x) = -(x+1)\operatorname{Log}|x+1| + x\operatorname{Log}|x| + k_2 x & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1[\end{cases}$$

est continue sur $\mathbf{R}$ et sa restriction à chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$ est évidemment solution de l'équation (1). Soit (k_1, k_2) un couple de nombres réels ; posons $g = g_{k_1 k_2}$ où $g_{k_1 k_2}$ est la fonction définie comme ci-dessus ; alors,

$$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \left[-\frac{x+1}{x}\operatorname{Log}(x+1) + \operatorname{Log}|x| + k_1\right] = -\infty$$

et

$$\lim_{x \to 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \left[-\frac{x+1}{x}\operatorname{Log}(x+1) + \operatorname{Log}|x| + k_2\right] = -\infty$$

donc la dérivée de g au point 0 est $-\infty$.

D'autre part

$$\lim_{x \to -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-(x+1)\operatorname{Log}|x+1| + x\operatorname{Log}|x| + k_2 x + k_2}{(x+1)} = +\infty$$

donc la dérivée de g au point -1 est $+\infty$.

7.5 On considère l'équation différentielle

$$x(x^2 - 1)\, y' + 2\, y = x^2 . \tag{1}$$

1° Trouver sa solution générale dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

2° En déduire qu'il existe une fonction réelle g et une seule, définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ qui soit solution de l'équation (1) dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Solution 1° L'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$x(x^2 - 1)\, y' + 2\, y = 0 . \tag{2}$$

Dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$, les solutions de cette équation qui ne s'annulent pas sont celles de l'équation

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x(x^2 - 1)} . \tag{3}$$

En décomposant la fonction rationnelle $-2/x(x^2 - 1)$ en éléments simples on obtient

$$\frac{-2}{x(x^2 - 1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

et en intégrant les deux membres de l'équation (3) il vient

$$\operatorname{Log} |\, y\,| = \operatorname{Log} \frac{x^2}{|\, x^2 - 1\,|} + K$$

où K est un nombre réel ; il en résulte que

$$y = \frac{Cx^2}{x^2 - 1}$$

où C est un nombre réel

Pour déterminer la solution générale de l'équation (1) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$ appliquons la méthode de variation des constantes. Posons

$$y = C(x)\, \frac{x^2}{x^2 - 1} \tag{4}$$

où C est une fonction dérivable de x. Alors en dérivant (4) on obtient

$$y' = C'(x)\, \frac{x^2}{x^2 - 1} - C(x)\, \frac{2\, x}{(x^2 - 1)^2}$$

d'où en portant dans l'équation (1)

$$x^3 C'(x) = x^2$$

soit

$$C'(x) = \frac{1}{x}$$

et en intégrant

$$C(x) = \text{Log} \mid x \mid + k$$

où k est un nombre réel.

Revenant maintenant à la formule (4) on a l'intégrale générale de l'équation (1) sous la forme

$$\begin{cases} y = (\text{Log} \mid x \mid + k_1) \dfrac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1[\\ y = (\text{Log} \mid x \mid + k_2) \dfrac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \in]-1, 0[\\ y = (\text{Log} \mid x \mid + k_3) \dfrac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \in]0, 1[\\ y = (\text{Log} \mid x \mid + k_4) \dfrac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

où k_1, k_2, k_3, k_4 sont des nombres réels.

2° Supposons qu'il existe une fonction g définie et continue sur $\mathbf{R}$ dont la restriction à chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$ soit solution de l'équation (1). Alors on a des nombres réels k_1, k_2, k_3, k_4 tels que

$$\begin{cases} g(x) = (\text{Log} \mid x \mid + k_1) \dfrac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1[\\ g(x) = (\text{Log} \mid x \mid + k_2) \dfrac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \in]-1, 0[\\ g(x) = (\text{Log}\, x + k_3) \dfrac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \in]0, 1[\\ g(x) = (\text{Log}\, x + k_4) \dfrac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

Comme g est continue au point 1, on a

$$g(1) = \lim_{x\to 1-} (\operatorname{Log} x + k_3)\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1+} (\operatorname{Log} x + k_4)\frac{x^2}{x^2-1}$$

Calculons la limite de $x^2 \operatorname{Log} x/(x^2 - 1)$ lorsque x tend vers 1 ; en posant $x = 1 + h$, on a

$$\frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1} = \frac{\operatorname{Log}(1+h)}{2h+h^2}.$$

Au voisinage de 0, $\operatorname{Log}(1 + h) \sim h$ et $2h + h^2 \sim 2h$ donc

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2\operatorname{Log} x}{x^2-1}$$

Mais on a

$$g(1) = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 1-}\frac{k_3 x^2}{x^2-1} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 1+}\frac{k_4 x^2}{x^2-1}$$

donc on a nécessairement $k_3 = k_4 = 0$.

En utilisant la continuité de g au point -1 on démontre de la même manière que $k_1 = k_2 = 0$; par ailleurs on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{Log}|x|}{x^2-1} = 0$$

et g est continue au point 0 donc $g(0) = 0$. Par suite la fonction g est définie par

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2\operatorname{Log}|x|}{x^2-1} & \text{si} \quad x \in \mathbf{R} - \{-1, 0, +1\} \\[2ex] g(-1) = g(1) = \dfrac{1}{2} & \text{et} \quad g(0) = 0\,. \end{cases}$$

Comme il est clair que ces formules définissent une fonction continue sur $\mathbf{R}$, nous venons de démontrer qu'il existe une fonction g définie et continue sur $\mathbf{R}$, et une seule, dont la restriction à chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ soit solution de l'équation (1).

Montrons que cette fonction g est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$. Sur

$$\mathbf{R} - \{-1, 0, 1\},$$

g s'exprime sous forme d'un produit de fonctions dérivables donc est dérivable. D'autre part g est une fonction paire donc il suffira de démontrer que g est dérivable aux points 0 et 1. On a

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{x\operatorname{Log}|x|}{x^2-1}$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0$$

par suite g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Faisons un développement limité de g au voisinage de 1 ; en posant $x = 1 + h$ on a

$$g(x) = \frac{(1 + h)^2 \operatorname{Log}(1 + h)}{2\,h + h^2} \qquad \frac{(1 + 2\,h + o(h))\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h)\right)}{2\,h + h^2}$$

soit

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{h}{2} + o(h) = \frac{1}{2} + \frac{x - 1}{2} + o(x - 1)$$

or $g(1) = \frac{1}{2}$ donc

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

par suite g est dérivable au point 1 et $g'(1) = \frac{1}{2}$.

7.6

On considère l'équation différentielle

$$2\,x(1 - x)\,y' + (1 - x)\,y = 1\,. \tag{1}$$

1° Trouver son intégrale générale dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

2° Montrer qu'il existe une fonction f continue sur $]-\infty, 1[$ et une seule, qui soit solution de l'équation (1) pour $x \neq 0$. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$.

3° Montrer qu'il n'existe aucune fonction g définie et continue sur **R** dont la restriction à chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ soit solution de l'équation (1).

Solution 1° L'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$2\,x(1 - x)\,y' + (1 - x)\,y = 0\,. \tag{2}$$

Dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ les solutions de cette équation qui ne s'annulent pas sont celles de l'équation

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2x}. \tag{3}$$

En intégrant les deux membres de cette équation il vient

$$\operatorname{Log}|y| = -\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}|x| + K$$

où K est un nombre réel, d'où

$$y = \frac{C}{\sqrt{|x|}}$$

où C est un nombre réel.

Pour trouver la solution générale de l'équation (1), appliquons la méthode de variation des constantes. Nous distinguerons deux cas suivant que x appartient à $]-\infty, 0[$ ou a l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

Dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ posons

$$y = \frac{C(x)}{\sqrt{-x}} \tag{4}$$

où C est une fonction dérivable de x ; en dérivant (4) on obtient

$$y' = \frac{C'(x)}{\sqrt{-x}} + \frac{C(x)}{2x\sqrt{-x}}$$

d'où en portant dans l'équation (1)

$$\frac{2x(1-x)\,C'(x)}{\sqrt{-x}} + \frac{2x(1-x)\,C(x)}{2x\sqrt{-x}} + \frac{(1-x)\,C(x)}{\sqrt{-x}} = 1$$

soit

$$C'(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2x(1-x)} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}(1-x)}. \tag{5}$$

On intègre (5) en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{-x}$ et on trouve

$$C(x) = \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-x} + K$$

où K est un nombre réel. La forme générale de la solution de l'équation (1) dans $]-\infty, 0[$ est donc

$$y = \frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} + \frac{K}{\sqrt{-x}}$$

où K est un nombre réel.

Dans chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ posons

$$y = \frac{C(x)}{\sqrt{x}} \tag{6}$$

où C est une fonction dérivable de x ; alors en dérivant (6) il vient

$$y' = \frac{C'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{C(x)}{2\,x\sqrt{x}}$$

et en portant ce résultat dans l'équation (1) on trouve

$$\frac{2\,x(1-x)\,C'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{2\,x(1-x)\,C(x)}{2\,x\sqrt{x}} + \frac{(1-x)\,C(x)}{\sqrt{x}} = 1$$

soit

$$C'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\,x(1-x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}. \tag{7}$$

On intègre (7) en faisant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, et il vient

$$C(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + K'$$

où K' est un nombre réel, donc la forme générale de la solution de l'équation (1) dans chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ est

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \frac{K'}{\sqrt{x}}$$

où K' est un nombre réel (*cf.* C. E. Ch. 9, § I, nº 129).

Il résulte de tout ceci que l'intégrale générale de l'équation (1) se présente sous la forme

$$\begin{cases} y = \dfrac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} + \dfrac{K_1}{\sqrt{-x}} & \text{si} \quad x \in\,]-\infty, 0[\\[2ex] y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{Log}\left|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \dfrac{K_2}{\sqrt{x}} = \dfrac{\operatorname{Arg\,th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{K_2}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in\,]0, 1[\\[2ex] y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{Log}\left|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \dfrac{K_3}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in\,]1, +\infty[\end{cases}$$

où K_1, K_2, K_3 sont des nombres réels (*cf.* C. E., Ch. 6, § VIII, nº 91).

2° Supposons qu'il existe une fonction f continue sur $]-\infty, 1[$ dont la restriction à chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$ soit solution de l'équation (1). Alors il existe des nombres réels K_1, K_2 tels que

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} + \dfrac{K_1}{\sqrt{-x}} & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\[2ex] f(x) = \dfrac{\operatorname{Arg\,th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{K_2}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0, 1[\end{cases}$$

de plus on a

$$f(0) = \lim_{x \to 0-} \left[\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} + \frac{K_1}{\sqrt{-x}}\right] = \lim_{x \to 0+} \left[\frac{\operatorname{Arg\,th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{K_2}{\sqrt{x}}\right].$$

Or les développements limités au voisinage de 0 des fonctions Arc tg et Arg th sont

$$\operatorname{Arc\,tg} u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

$$\operatorname{Arg\,th} u = u + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

(*cf.* C. E., Ch. 7, § II, n^os^ 102 et 103) ; on a donc au voisinage de 0 les développements limités

$$\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} = 1 + \frac{x}{3} + o(x), \qquad \text{pour} \qquad x < 0$$

et

$$\frac{\operatorname{Arg\,th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{x}{3} + o(x), \qquad \text{pour} \qquad x > 0.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{Arg\,th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} = 1.$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 0-} K_1/\sqrt{-x}$ est infinie si $K_1 \neq 0$ donc on a nécessairement $K_1 = 0$. De la même manière on voit que $K_2 = 0$ et $f(0) = 1$. Or il est clair que la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ en posant

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\[2ex] f(0) = 1 \\[2ex] f(x) = \dfrac{\operatorname{Arg\,th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0, 1[\end{cases}$$

est continue sur $]-\infty, 1[$ et est solution de l'équation (1) pour $x \neq 0$; cette fonction f est la seule fonction définie et continue sur $]-\infty, 1[$ qui soit solution de l'équation (1) pour $x \neq 0$. Montrons que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$; en tout point de cet intervalle différent de 0, f s'exprime sous forme d'un produit de fonctions dérivables donc est dérivable, de plus en se servant des développements limités calculés ci-dessus, on a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} + o(1) = \frac{1}{3}$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{3}$, par suite f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.

3° Supposons qu'il existe une fonction g définie et continue sur $\mathbf{R}$ dont la restriction à chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ soit solution de l'équation (1) ; alors nécessairement la restriction de g à $]-\infty, 1[$ est f donc il existe un nombre réel K tel que

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\ g(0) = 1 & \\ g(x) = \dfrac{\operatorname{Arg\,th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0, 1[\\ g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Log}\left|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \dfrac{K}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]1, +\infty[\,. \end{cases}$$

Or

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\operatorname{Arg\,th}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

et pour tout nombre réel K, on a

$$\lim_{x\to 1+} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \frac{K}{\sqrt{x}}\right) = +\infty\,,$$

donc la fonction g ne peut être continue au point 1, par suite il n'existe aucune fonction g définie et continue sur $\mathbf{R}$ qui soit solution de l'équation (1) pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

7.7

On considère l'équation différentielle

$$y' - \frac{y}{x} + x^3 y^4 = 0\,. \tag{1}$$

Trouver son intégrale générale dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Solution Cette équation est une équation de Bernoulli (*cf.* C. E., Ch. 11, § I, nº 166). Cherchons donc ses solutions qui ne s'annulent pas en la divisant par y^4 et en posant $z = 1/y^3$. On a $z' = -3\,y'/y^4$ et l'équation (1) qui s'écrit alors

$$\frac{y'}{y^4} - \frac{1}{xy^3} + x^3 = 0$$

devient

$$-\frac{z'}{3} - \frac{z}{x} + x^3 = 0\,. \tag{2}$$

Cette équation est linéaire. L'équation homogène qui lui est associée est

$$-\frac{z'}{3} - \frac{z}{x} = 0 \tag{3}$$

Les solutions qui ne s'annulent pas de l'équation (3) sont de la forme

$$z = \frac{C}{x^3} \tag{4}$$

où C est un nombre réel. Pour obtenir les solutions de l'équation (2) on applique la méthode de variation des constantes ; on obtient

$$z' = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3\,C(x)}{x^4}$$

et en portant dans l'équation (2)

$$-\frac{C'(x)}{3\,x^3} + x^3 = 0$$

soit

$$C'(x) = 3\,x^6$$

et en intégrant on obtient

$$C(x) = \frac{3\,x^7}{7} + K$$

où K est un nombre réel ; il en résulte que la forme générale des solutions de l'équation (2) est

$$\begin{cases} z = \dfrac{3\,x^7 + K_1}{7\,x^3} & \text{si} \quad x \in \left]-\infty, 0\right[\\[2ex] z = \dfrac{3\,x^7 + K_2}{7\,x^3} & \text{si} \quad x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

où K_1, K_2 sont des nombres réels.

Pour que l'on ait $3x^7 + K_1 \neq 0$ pour tout élément x de $]-\infty, 0[$ il faut et suffit que $K_1 \leqslant 0$; de même pour que l'on ait $3x^7 + K_2 \neq 0$ pour tout élément x de $]0, +\infty[$, il faut et suffit que $K_2 \geqslant 0$ donc la forme générale des solutions de l'équation (1) est

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{\dfrac{7x^3}{3x^7 + K_1}} & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\ y = \sqrt[3]{\dfrac{7x^3}{3x^7 + K_2}} & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels tels que $K_1 \leqslant 0$ et $K_2 \geqslant 0$.

7.8

Intégrer les équations différentielles suivantes

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1 \qquad (1)$$
$$y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)\,e^x \qquad (2)$$
$$y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 4x + 4 \qquad (3)$$

Solution 1° L'équation caractéristique associée à l'équation (1) est

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

elle admet les racines 1 et 2 donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 167) l'équation homogène associée à l'équation (1) admet pour solution générale les fonctions de la forme

$$y = A\,e^x + B\,e^{2x}$$

où A et B sont des nombres réels.

Comme le second membre de l'équation (1) est une fonction polynôme du troisième degré en x, cherchons une solution particulière de l'équation (1) sous la forme

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

On a

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{et} \quad y'' = 6ax + 2b$$

d'où en portant dans l'équation (1)

$$(6ax + 2b) - 3(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \\ = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$$

soit

$$2\,ax^3 + (2\,b - 9\,a)\,x^2 + (2\,c - 6\,b + 6\,a)\,x + (2\,b - 3\,c + 2\,d) = \\ = 2\,x^3 - 7\,x^2 + 2\,x - 1$$

par suite on a

$$\begin{cases} 2\,a = 2 \\ 2\,b - 9\,a = -7 \\ 2\,c - 6\,b + 6\,a = 2 \\ 2\,b - 3\,c + 2\,d = -1 \end{cases}$$

d'où $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 0$. La forme générale des solutions de l'équation (1) est donc

$$y = A\,e^x + B\,e^{2x} + x^3 + x^2 + x$$

où A et B sont des nombres réels.

2° L'équation caractéristique associée à l'équation (2) est

$$r^2 - 4\,r + 4 = 0\,.$$

Elle admet une racine double égale à 2 donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 167) la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (2) est

$$y = (Ax + B)\,e^{2x}$$

où A et B sont des nombres réels.

Comme le second membre de l'équation (2) se présente sous la forme de produit par e^x d'une fonction polynôme du premier degré, cherchons une solution particulière sous la forme

$$y = (ax + b)\,e^x$$

On a

$$y' = e^x(ax + b + a), \quad y'' = e^x(ax + b + 2\,a)$$

d'où en portant dans l'équation (2)

$$e^x[ax + b + 2\,a - 4\,ax - 4\,b - 4\,a + 4\,ax + 4\,b] = e^x(2\,x - 4)$$

soit

$$e^x[ax + b - 2\,a] = e^x[2\,x - 4]$$

d'où

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2\,a = -4 \end{cases}$$

soit $a = 2$, $b = 0$ et la forme générale des solutions de l'équation (2) est

$$y = (Ax + B)\,e^{2x} + 2\,x\,e^{x}$$

où A et B sont des nombres réels.

3° L'équation caractéristique associée à l'équation (3) est

$$r^2 - 2\,r + 2 = 0\,.$$

Elle admet les racines complexes $1 + i$ et $1 - i$ donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 167) la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (3) est

$$y = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$$

où A et B sont des nombres réels.

Comme le second membre de l'équation (3) est une fonction polynôme du second degré en x, cherchons une solution particulière sous la forme

$$y = ax^2 + bx + c\,.$$

On a $y' = 2\,ax + b$, $y'' = 2\,a$ d'où en portant dans l'équation (3)

$$2\,a - 4\,ax - 2\,b + 2\,ax^2 + 2\,bx + 2\,c = 2\,x^2 - 4\,x + 4$$

soit

$$2\,ax^2 + 2(b - 2\,a)\,x + 2(a + c - b) = 2\,x^2 - 4\,x + 4$$

on en tire

$$\begin{cases} 2\,a = 2 \\ 2(b - 2\,a) = -\,4 \\ 2(a + c - b) = 4 \end{cases}$$

d'où $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ et la forme générale des solutions de l'équation (3) est

$$y = e^{x}(A\cos x + B\sin x) + x^2 + 1$$

où A et B sont des nombres réels.

7.9 Intégrer les équations différentielles suivantes

$$y'' - 2\,y' + y = 6\,x\,e^{x} \qquad (1)$$
$$y'' + 2\,y' - 8\,y = 4\,e^{2x}(3\,x + 5) \qquad (2)$$
$$y'' - 4\,y' + 13\,y = 10\cos 2\,x + 25\sin 2\,x. \qquad (3)$$

Solution 1° L'équation caractéristique associée à l'équation (1) est

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Elle admet une racine double égale à 1 donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 167) la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$y = (Ax + B)\,e^x$$

où A et B sont des nombres réels.

Comme le second membre de l'équation (1) se présente sous forme de produit par e^x d'une fonction polynôme du premier degré en x et comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, nous devons chercher une solution particulière de l'équation (1) sous forme de produit par e^x d'une fonction polynôme du troisième degré en x. Compte tenu de la forme des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (1), il nous suffira de chercher cette solution particulière sous la forme

$$y = (ax^3 + bx^2)\,e^x$$

On a

$$y' = (3\,ax^2 + 2\,bx + ax^3 + bx^2)\,e^x = \big(ax^3 + (b + 3\,a)\,x^2 + 2\,bx\big)\,e^x$$

et

$$y'' = \big(3\,ax^2 + 2(b + 3\,a)\,x + 2\,b + ax^3 + (b + 3\,a)\,x^2 + 2\,bx\big)\,e^x$$

soit

$$y'' = \big(ax^3 + (b + 6\,a)\,x^2 + 2(2\,b + 3\,a)\,x + 2\,b\big)\,e^x.$$

En portant dans l'équation (1) on trouve

$$\begin{aligned} e^x\big(ax^3 + (b + 6\,a)\,x^2 + 2(2\,b + 3\,a)\,x + 2\,b - 2\,ax^3 - 2(b + 3\,a)\,x^2 \\ - 4\,bx + ax^3 + bx^2\big) = 6\,x\,e^x \end{aligned}$$

soit $e^x(6\,ax + 2\,b) = 6\,x\,e^x$ d'où $a = 1$ et $b = 0$ et la forme générale des solutions de l'équation (1) est

$$y = (Ax + B)\,e^x + x^3$$

où A et B sont des nombres réels.

2° L'équation caractéristique associée à l'équation (2) est

$$r^2 + 2r - 8 = 0.$$

Elle admet les racines -4 et $+2$ donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 161) la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (2) est

$$y = A\,e^{2x} + B\,e^{-4x}$$

où A et B sont des nombres réels.

Comme le second membre de l'équation (2) se présente sous la forme du produit par e^{2x} d'une fonction polynôme du premier degré, comme 2 est racine simple du polynôme caractéristique, compte tenu de la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (2), nous chercherons une solution particulière de l'équation (2) sous la forme

$$y = (ax^2 + bx)\,e^{2x}.$$

On a

$$y' = (2\,ax + b + 2\,ax^2 + 2\,bx)\,e^{2x} = \big(2\,ax^2 + 2(a + b)\,x + b\big)\,e^{2x}$$

et

$$y'' = \big(4\,ax + 2(a + b) + 4\,ax^2 + 4(a + b)\,x + 2\,b\big)\,e^{2x} = \\ = \big(4\,ax^2 + 4(2\,a + b)\,x + 2(a + 2\,b)\big)\,e^{2x}$$

d'où en portant dans l'équation (2)

$$e^{2x}\big[4\,ax^2 + 4(b + 2\,a)\,x + 2(a + 2\,b) + 4\,ax^2 + 4(a + b)\,x + 2\,b - \\ - 8\,ax^2 - 8\,bx\big] = 4\,e^{2x}(3\,x + 5)$$

soit

$$e^{2x}(12\,ax + 2\,a + 6\,b) = 4\,e^{2x}(3\,x + 5)$$

d'où

$$\begin{cases} 12\,a = 12 \\ 2\,a + 6\,b = 20 \end{cases}$$

soit $a = 1$, $b = 3$ et la forme générale des solutions de l'équation (2) est

$$y = (x^2 + 3\,x + A)\,e^{2x} + B\,e^{-4x}$$

où A et B sont des nombres réels.

3° L'équation caractéristique associée à l'équation (3) est

$$r^2 - 4\,r + 13 = 0.$$

Elle admet les racines complexes $2 + 3\,i$ et $2 - 3\,i$ donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 167) la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (3) est

$$y = e^{2x}(A\cos 3\,x + B\sin 3\,x)$$

où A et B sont des nombres réels.

Cherchons une solution particulière de l'équation (3) sous la forme

$$y = a\cos 2\,x + b\sin 2\,x.$$

On a

$$y' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \quad \text{et} \quad y'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$$

d'où en portant dans l'équation (3)

$$(-4a - 8b + 13a)\cos 2x + (-4b + 8a + 13b)\sin 2x = \\ = 10\cos 2x + 25\sin 2x$$

d'où

$$\begin{cases} 9a - 8b = 10 \\ 8a + 9b = 25 \end{cases}$$

donc $a = 2$, $b = 1$ et la forme générale des solutions de l'équation (3) est

$$y = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + 2\cos 2x + \sin 2x$$

où A et B sont des nombres réels.

7.10 Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 3y = 2e^x(4x^2 + 6x + 5) - 6(\cos 3x + 2\sin 3x). \quad (1)$$

Solution L'équation caractéristique associée à l'équation (1) est

$$r^2 + 4r + 3 = 0.$$

Elle admet les racines -1 et -3 donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 167) la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$y = Ae^{-x} + Be^{-3x}$$

où A et B sont des nombres réels.

D'après le principe de superposition des solutions (*loc. cit.*) pour trouver une solution particulière de l'équation (1) il nous suffira de trouver une solution particulière de chacune des équations suivantes

$$y'' + 4y' + 3y = 2e^x(4x^2 + 6x + 5) \quad (2)$$

$$y'' + 4y' + 3y = -6(\cos 3x + 2\sin 3x) \quad (3)$$

et de les additionner.

Cherchons une solution particulière de l'équation (2) sous la forme

$$y = e^x(ax^2 + bx + c)$$

On a

$$y' = e^x(ax^2 + (b + 2a)x + (c + b))$$

et

$$y'' = e^x(ax^2 + (b + 4a)x + (c + 2b + 2a))$$

d'où en portant dans l'équation (2)

$$e^x(ax^2 + (b + 4a)x + (c + 2b + 2a) + 4ax^2 + 4(b + 2a)x + 4(c + b) + \\ + 3ax^2 + 3bx + 3c) = 2e^x(4x^2 + 6x + 5)$$

soit

$$e^x(8ax^2 + (8b + 12a)x + (8c + 6b + 2a)) = e^x(8x^2 + 12x + 10)$$

d'où il vient

$$\begin{cases} 8a = 8 \\ 8b + 12a = 12 \\ 8c + 6b + 2a = 10 \end{cases}$$

donc $a = 1, b = 0,\ c = 1$ et une solution particulière de l'équation (2) est

$$y = e^x(x^2 + 1)\,.$$

A présent cherchons une solution particulière de l'équation (3) sous la forme

$$y = a\cos 3x + b\sin 3x\,.$$

On a

$$y' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x \quad \text{et} \quad y'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x$$

d'où en portant dans l'équation (3)

$$(-9a + 12b + 3a)\cos 3x + (-9b - 12a + 3b)\sin 3x = \\ = -6\cos 3x - 12\sin 3x$$

d'où

$$\begin{cases} -6a + 12b = -6 \\ -12a - 6b = -12 \end{cases}$$

donc $a = 1$ et $b = 0$ et une solution particulière de l'équation (3) est

$$y = \cos 3x\,.$$

On a donc une solution particulière de l'équation (1) en posant

$$y = e^x(x^2 + 1) + \cos 3x$$

et la forme générale des solutions de l'équation (1) est

$$y = A\,e^{-x} + B\,e^{-3x} + e^x(x^2 + 1) + \cos 3x$$

où A et B sont des nombres réels.

7.11 Intégrer l'équation différentielle suivante

$$y'' - 2\,\alpha y' + y = e^{\alpha x}(x + 1) \tag{1}$$

où α est un nombre réel.

Solution L'équation caractéristique associée à l'équation (1) est

$$r^2 - 2\,\alpha r + 1 = 0\,.$$

Son discriminant est $\alpha^2 - 1$. Nous distinguerons donc quatre cas suivant que $\alpha^2 - 1 > 0$, $\alpha^2 - 1 < 0$, $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

a) $\alpha^2 - 1 > 0$. Alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles $r_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ et $r_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n°167) la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$y = A\,e^{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})x} + B\,e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})x}$$

où A et B sont deux nombres réels.

Comme $\alpha^2 - 1 > 0$, α n'est pas racine de l'équation caractéristique par suite nous cherchons une solution particulière de l'équation (1) sous la forme

$$y = e^{\alpha x}(ax + b)\,.$$

On a

$$y' = e^{\alpha x}(\alpha a x + \alpha b + a) \quad \text{et} \quad y'' = e^{\alpha x}(\alpha^2\,ax + \alpha^2\,b + 2\,\alpha a)$$

d'où en portant dans l'équation (1)

$$e^{\alpha x}(\alpha^2\,ax + \alpha^2\,b + 2\,\alpha a - 2\,\alpha^2\,ax - 2\,\alpha^2\,b - 2\,\alpha a + ax + b) = e^{\alpha x}(x + 1)$$

soit

$$e^{\alpha x}(a(1 - \alpha^2)\,x + b(1 - \alpha^2)) = e^{\alpha x}(x + 1)$$

d'où l'on tire $a = b = 1/(1 - \alpha^2)$ et la solution générale de l'équation (1) dans ce cas est de la forme

$$y = A\,e^{(\alpha+\sqrt{1-\alpha^2})x} + B\,e^{(\alpha-\sqrt{1-\alpha^2})x} + e^{\alpha x}\left(\frac{x + 1}{1 - \alpha^2}\right)$$

où A et B sont des nombres réels.

b) $\alpha^2 - 1 < 0$. Dans ce cas l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\sqrt{1-\alpha^2}$ et $r_2 = \alpha - i\sqrt{1-\alpha^2}$ donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, nº 167) la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$y = e^{\alpha x}\left(A\cos\left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)x + B\sin\left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)x\right)$$

où A et B sont des nombres réels.

Comme $1-\alpha^2 > 0$, α n'est pas racine de l'équation caractéristique par suite nous cherchons une solution particulière de l'équation (1) sous la forme

$$y = e^{\alpha x}(ax+b).$$

Les mêmes calculs que dans le cas *a*) fournissent $a = b = 1/(1-\alpha^2)$ et la solution générale de l'équation (1) dans ce cas est

$$y = e^{\alpha x}\left(A\cos\left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)x + B\sin\left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)x + \frac{x+1}{1-\alpha^2}\right)$$

où A et B sont des nombres réels.

c) $\alpha = 1$. L'équation (1) s'écrit dans ce cas

$$y'' - 2y' + y = e^x(x+1).$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Elle admet une racine double égale à 1 donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, nº 167) la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$y = (Ax+B)e^x$$

où A et B sont des nombres réels.

Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique et compte tenu de la forme des solutions de l'équation homogène, nous devons chercher une solution particulière de l'équation (1) sous la forme

$$y = e^x(ax^3 + bx^2).$$

On a

$$y' = e^x(ax^3 + bx^2 + 3ax^2 + 2bx) = e^x(ax^3 + (b+3a)x^2 + 2bx)$$

et

$$y'' = e^x(ax^3 + (b+3a)x^2 + 2bx + 3ax^2 + 2(b+3a)x + 2b) = \\ = e^x(ax^3 + (b+6a)x^2 + 2(2b+3a)x + 2b)$$

d'où en portant dans l'équation (1)

$$e^x(ax^3 + (b + 6\,a)\,x^2 + 2(2\,b + 3\,a)\,x + 2\,b - 2\,ax^3 - 2\,bx^2 - \\ - 6\,ax^2 - 4\,bx + ax^3 + bx^2) = e^x(x + 1)$$

soit

$$e^x(6\,ax + 2\,b) = e^x(x + 1)$$

d'où l'on tire $a = \frac{1}{6}$ et $b = \frac{1}{2}$ et la forme générale des solutions de l'équation (1) dans ce cas est

$$y = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + Ax + B\right)e^x$$

où A et B sont des nombres réels.

d) $\alpha = -1$. L'équation (1) s'écrit dans ce cas

$$y'' + 2\,y' + y = e^{-x}(x + 1)\,.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 + 2\,r + 1 = 0$$

et elle admet une racine double égale à -1 donc (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 167) ; la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$y = (Ax + B)\,e^{-x}$$

où A et B sont des nombres réels.

Comme -1 est racine double de l'équation caractéristique et compte tenu de la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation (1), nous cherchons une solution particulière de l'équation (1) sous la forme

$$y = e^{-x}(ax^3 + bx^2)$$

On a

$$y' = e^{-x}(-\,ax^3 - bx^2 + 3\,ax^2 + 2\,bx) = e^{-x}(-\,ax^3 + (3\,a - b)\,x^2 + 2\,bx)$$

et

$$y'' = e^{-x}(ax^3 - (3\,a - b)\,x^2 - 2\,bx - 3\,ax^2 + 2(3\,a - b)\,x + 2\,b)$$

soit

$$y'' = e^{-x}(ax^3 - (6\,a - b)\,x^2 + 2(3\,a - 2\,b)\,x + 2\,b),$$

d'où en portant dans l'équation (1)

$$e^{-x}(ax^3 - (6\,a - b)\,x^2 + 2(3\,a - 2\,b)\,x + 2\,b - 2\,ax^3 + 2(3\,a - b)\,x^2 \\ + 4\,bx + ax^3 + bx^2) = e^{-x}(x + 1)$$

soit

$$e^{-x}(6\,ax + 2\,b) = e^{-x}(x + 1)$$

d'où l'on tire $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$ et la forme générale des solutions de l'équation (1) est dans ce cas

$$y = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + Ax + B\right)e^{-x}$$

où A et B sont des nombres réels.

7.12 On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des fonctions réelles définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour chaque nombre réel non nul a, on définit une application T_a de E dans lui-même, en posant pour chaque élément y de E

$$T_a(y) = y + axy' .$$

1° Montrer que pour tout nombre réel non nul a, l'application T_a est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

2° Soient a et b deux nombres réels non nuls. Déterminer le noyau de $T_a \circ T_b$ et écrire l'équation différentielle du second ordre que vérifient les éléments de ce noyau.

3° Trouver tous les éléments de E qui sont solution de chacune des équations différentielles suivantes :

a) $$y + 8\,xy' + 4\,x^2\,y'' = 0$$

b) $$y + 2\,xy' + \tfrac{1}{2}\,x^2\,y'' = 0\,.$$

Solution 1° Si y est un élément de E il est clair que $T_a(y) = y + axy'$ est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ donc l'application T_a prend bien ses valeurs dans E. Si y_1, y_2 sont deux éléments de E et α_1, α_2 deux nombres réels, on a

$$\begin{aligned} T_a(\alpha_1\,y_1 + \alpha_2\,y_2) &= (\alpha_1\,y_1 + \alpha_2\,y_2) + ax(\alpha_1\,y_1 + \alpha_2\,y_2)' \\ &= \alpha_1\,y_1 + ax\alpha_1\,y_1' + \alpha_2\,y_2 + ax\alpha_2\,y_2' \\ &= \alpha_1(y_1 + axy_1') + \alpha_2(y_2 + axy_2') \end{aligned}$$

soit

$$T_a(\alpha_1\,y_1 + \alpha_2\,y_2) = \alpha_1\,T_a(y_1) + \alpha_2\,T_a(y_2)\,.$$

Donc T_a est bien un endomorphisme de E.

Pour qu'un élément y de E appartienne à Ker T_a, il faut et suffit que y soit solution de l'équation différentielle

$$y + axy' = 0 . \tag{1}$$

En intégrant cette équation on voit que le noyau de T_a se compose des fonctions de la forme

$$y = Cx^{-1/a}$$

où C est un nombre réel.

2° Pour qu'un élément y de E appartienne au noyau de $T_a \circ T_b$ il faut et suffit que $T_b(y)$ appartienne au noyau de T_a, donc d'après la question précédente, y appartient à Ker $T_a \circ T_b$ si et seulement si il existe un nombre réel C tel que

$$y + bxy' = Cx^{-1/a} . \tag{2}$$

En vertu de la question 1° les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (2) sont de la forme

$$y = C_1 \, x^{-1/b} .$$

Pour trouver la solution générale de l'équation (2) dans $\mathbf{R}_+^*$ appliquons la méthode de variation des constantes ; posons

$$y = C_1(x) \, x^{-1/b} \tag{3}$$

où C_1 est une fonction dérivable de x. Alors en dérivant (3) on obtient

$$y' = C_1'(x) \, x^{-1/b} - \frac{C_1(x)}{b} \, x^{(-1/b)-1}$$

et en portant ce résultat dans l'équation (2) il vient

$$bxC_1'(x) \, x^{-1/b} = Cx^{-1/a}$$

soit

$$C_1'(x) = \frac{C}{b} \, x^{(-1/a)+(1/b)-1} . \tag{4}$$

A présent nous distinguerons deux cas suivant que a et b sont égaux ou non. Si $a = b$ on obtient en intégrant (4)

$$C_1(x) = \frac{C}{b} \operatorname{Log} x + B$$

où B est un nombre réel. Dans ce cas la solution générale de l'équation (2) dans $\mathbf{R}_+^*$ est de la forme

$$y = \left(\frac{C}{b} \operatorname{Log} x + B\right) x^{-1/b}$$

où B est un nombre réel, et le noyau de $T_a \circ T_b$ se compose des éléments y de E de la forme

$$y = (A \operatorname{Log} x + B)\, x^{-1/b}$$

où A et B sont deux nombres réels.

Si $a \neq b$ on obtient en intégrant (4)

$$C_1(x) = \frac{Ca}{a-b}\, x^{(1/b)-(1/a)} + B$$

où B est un nombre réel. Dans ce cas la solution générale de l'équation (2) dans $\mathbf{R}_+^*$ est de la forme

$$y = \frac{Ca}{a-b}\, x^{-1/a} + Bx^{-1/b}$$

où B est un nombre réel et le noyau de $T_a \circ T_b$ se compose des éléments y de E de la forme

$$y = Ax^{-1/a} + Bx^{-1/b}$$

où A et B sont des nombres réels.

A présent soit y un élément de E ; on a

$$T_a \circ T_b(y) = T_a(y + bxy') = y + bxy' + ax(y' + by' + bxy'')$$

soit

$$T_a \circ T_b(y) = y + (a + b + ab)\, xy' + abx^2\, y'' .$$

Par conséquent les éléments du noyau de $T_a \circ T_b$ sont les éléments y de E qui sont solution de l'équation différentielle

$$y + (a + b + ab)\, xy' + abx^2\, y'' = 0 .$$

3° Dans chaque cas cherchons des nombres réels a et b tels que les solutions des équations proposées soient les éléments du noyau de $T_a \circ T_b$.

a) On doit résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + ab = 8 \\ ab = 4 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 4 \end{cases}$$

donc a et b sont les racines de l'équation

$$X^2 - 4X + 4 = 0$$

d'où $a = b = 2$. En se servant du résultat de la question précédente on voit que les éléments y de E qui sont solution de l'équation différentielle

$$y + 8\,xy' + 4\,x^2\,y'' = 0$$

sont les éléments de la forme

$$y = (A \operatorname{Log} x + B)\,x^{-1/2}$$

où A et B sont des nombres réels.

b) En appliquant la même méthode que ci-dessus on trouve $a = 1, b = \frac{1}{2}$ et les éléments y de E qui sont solution de l'équation différentielle

$$y + 2\,xy' + \tfrac{1}{2}\,x^2\,y'' = 0$$

sont les éléments de la forme

$$y = Ax^{-1} + Bx^{-2}$$

où A et B sont des nombres réels.

7.13 On considère l'équation différentielle

$$x^2\,y'' + 4\,xy' + (2 - x^2)\,y = 1\,. \tag{1}$$

1° Trouver son intégrale générale dans $\mathbf{R}_+^*$ et dans $\mathbf{R}_-^*$ en effectuant le changement de variable $u = x^2\,y$.

2° Montrer qu'il existe une fonction f définie et continue sur $\mathbf{R}$, et une seule, qui soit solution de l'équation (1) pour $x \neq 0$. Montrer que cette fonction est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$.

3° Quelles sont les solutions de l'équation (1) qui restent bornées lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$?

Solution 1° En posant $y = u/x^2$ on a

$$y' = \frac{u'}{x^2} - \frac{2\,u}{x^3} \qquad \text{et} \qquad y'' = \frac{u''}{x^2} - \frac{4\,u'}{x^3} + \frac{6\,u}{x^4}\,.$$

L'équation (1) devient alors

$$u'' - u = 1\,. \tag{2}$$

L'équation (2) admet le polynôme caractéristique $r^2 - 1$, donc la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (2) est de la forme

$$u = A\,e^x + B\,e^{-x}$$

où A et B sont des nombres réels.

Comme la fonction constante de valeur -1 est une solution évidente de l'équation (2), cette équation admet pour solution générale

$$u = A\,e^{x} + B\,e^{-x} - 1$$

où A et B sont deux nombres réels ; par suite la solution générale de l'équation (1) est de la forme

$$\begin{cases} y = \dfrac{A_1\,e^{x}}{x^2} + \dfrac{B_1\,e^{-x}}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_-^* \\[2ex] y = \dfrac{A_2\,e^{x}}{x^2} + \dfrac{B_2\,e^{-x}}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_+^* \end{cases}$$

où A_1, B_1, A_2, B_2 sont des nombres réels.

2° Supposons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbf{R}$, continue et dont la restriction à $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ soit solution de l'équation (1), alors en vertu de la question précédente, il existe des nombres réels A_1, B_1, A_2, B_2 tels que

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{A_1\,e^{x}}{x^2} + \dfrac{B_1\,e^{-x}}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_-^* \\[2ex] f(x) = \dfrac{A_2\,e^{x}}{x^2} + \dfrac{B_2\,e^{-x}}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_+^* \end{cases}$$

et

$$f(0) = \lim_{x \to 0-} \left(\frac{A_1\,e^{x}}{x^2} + \frac{B_1\,e^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{A_2\,e^{x}}{x^2} + \frac{B_2\,e^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Or on a au voisinage de 0 les développements limités

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

d'où

$$\frac{A_1\,e^{x}}{x^2} + \frac{B_1\,e^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} = (A_1 + B_1 - 1)\frac{1}{x^2} + (A_1 - B_1)\frac{1}{x} + \frac{A_1 + B_1}{2} + o(x)$$

et

$$\frac{A_2\,e^{x}}{x^2} + \frac{B_2\,e^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} = (A_2 + B_2 - 1)\frac{1}{x^2} + (A_2 - B_2)\frac{1}{x} + \frac{A_2 + B_2}{2} + o(x).$$

Comme f est continue au point 0, $\frac{A_1\,e^x}{x^2} + \frac{B_1\,e^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ possède une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures, donc on a

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 1 \\ A_1 - B_1 = 0 \end{cases}$$

d'où $A_1 = B_1 = \frac{1}{2}$.

De même, $\frac{A_2\,e^x}{x^2} + \frac{B_2\,e^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ possède une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, donc on a

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 1 \\ A_2 - B_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $A_2 = B_2 = \frac{1}{2}$ et on a

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2\,x^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} \qquad \text{si} \qquad x \in \mathbf{R}^* \\[2ex] f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nous venons de démontrer que la seule fonction définie et continue sur $\mathbf{R}$ dont la restriction à $\mathbf{R}^*$ est solution de l'équation (1) est la fonction définie par les formules ci-dessus. Montrons que f est dérivable sur $\mathbf{R}$. En tout point de $\mathbf{R}^*$, la fonction f s'exprime comme produit de fonctions dérivables donc est dérivable ; au voisinage de 0 le développement limité de ch est

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3)$$

par suite

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} = \frac{x}{24} + o(x^2)$$

et

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} = 0$$

donc f est dérivable au point 0 et par suite f est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$.

3° Soit y une solution de l'équation (1) ; alors d'après la première question il existe des nombres réels A_1, B_1, A_2, B_2 tels que l'on ait

$$\begin{cases} y = \dfrac{A_1\,\mathrm{e}^x}{x^2} + \dfrac{B_1\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_-^* \\[2ex] y = \dfrac{A_2\,\mathrm{e}^x}{x^2} + \dfrac{B_2\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}_+^* . \end{cases}$$

Quels que soient les nombres A_1 et B_2 on a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{A_1\,\mathrm{e}^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{B_2\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0 .$$

D'autre part, si $A_2 \neq 0$ on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A_2\,\mathrm{e}^x}{x^2} = \varepsilon\infty$$

où ε est le signe de A_2 et si $B_1 \neq 0$ on a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{B_1\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2} = \varepsilon'\,\infty$$

où ε' est le signe de B_1, donc pour que y soit bornée lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, il faut que $A_2 = B_1 = 0$ et il est clair que cette condition est suffisante.

7.14

On considère l'équation différentielle

$$ay''' + by'' + cy' + dy = 0 \tag{1}$$

où a, b, c, d sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

1° Chercher une solution de l'équation (1) sous la forme $y = \mathrm{e}^{rx}$ où r est un nombre réel. Montrer qu'il existe toujours une telle solution.

2° Si r_1 est une racine réelle de l'équation

$$ar^3 + br^2 + cr + d = 0 .$$

Montrer qu'il existe des nombres réels α et β tels que la fonction

$$z = ay'' + \alpha y' + \beta y$$

vérifie l'équation différentielle

$$z' - r_1 z = 0 . \tag{2}$$

Calculer α et β en fonction de a, b, c et r_1. Montrer que

$$(ar^2 + \alpha r + \beta)(r - r_1) = ar^3 + br^2 + cr + d.$$

3° Montrer que l'équation (1) est équivalente au système

$$\begin{cases} ay'' + \alpha y' + \beta y = z \\ z' - r_1 z = 0 \end{cases} \tag{3}$$

où α et β sont les nombres réels calculés à la question précédente.

4° Donner la forme générale des solutions de l'équation (1)

Solution 1° Si $y = e^{rx}$ on a $y' = r\,e^{rx}$, $y'' = r^2\,e^{rx}$, $y''' = r^3\,e^{rx}$ et l'équation (1) s'écrit

$$e^{rx}(ar^3 + br^2 + cr + d) = 0$$

et ceci n'est possible que si

$$ar^3 + br^2 + cr + d = 0.$$

Or nous savons que tout polynôme du troisième degré à coefficients réels possède au moins une racine réelle, donc il existe toujours une solution de la forme $y = e^{rx}$.

2° Posons $z = ay'' + \alpha y' + \beta y$ où α et β sont deux nombres réels ; alors on a $z' = ay''' + \alpha y'' + \beta y'$ et

$$z' - r_1 z = ay''' + (\alpha - r_1 a)\,y'' + (\beta - r_1 \alpha)\,y' - r_1 \beta y.$$

Pour que la fonction $z' - r_1 z$ soit nulle, il suffit que l'on ait $\alpha - r_1 a = b$, $\beta - r_1 \alpha = c$ et $-\beta r_1 = d$, soit $\alpha = b + ar_1$ et $\beta = c + \alpha r_1 = c + br_1 + ar_1^2$; alors on a bien $-\beta r_1 = -cr_1 - br_1^2 - ar_1^3 = d$ de plus on a

$$\begin{aligned}
(ar^2 + \alpha r + \beta)(r - r_1) &= \\
&= \left[ar^2 + (b + ar_1)\,r + (c + br_1 + ar_1^2)\right](r - r_1) \\
&= ar^3 + (b + ar_1)\,r^2 + (c + br_1 + ar_1^2)\,r - ar^2 r_1 - (b + ar_1)\,r_1 r - \\
&\qquad - (c + br_1 + ar_1^2)\,r_1 \\
&= ar^3 + br^2 + cr - ar_1^3 - br_1^2 - cr_1 = ar^3 + br^2 + cr + d.
\end{aligned}$$

3° Nous savons déjà que si y est solution de l'équation (1) alors y vérifie le système (3). Réciproquement, supposons que y soit solution du système (3), alors on a

$$z = ay'' + \alpha y' + \beta y$$

donc

$$z' = ay''' + \alpha y'' + \beta y'$$

et

$$z' - r_1 z = 0 = ay''' + (\alpha - ar_1) y'' + (\beta - \alpha r_1) y' - \beta r_1 y = \\ = ay''' + by'' + cy' + d$$

donc y est solution de l'équation (1).

4° Les solutions de l'équation (1) sont celles du système (3). La forme générale d'une solution de l'équation $z' - r_1 z = 0$ est $z = K e^{r_1 x}$ où K est un nombre réel. On doit donc résoudre l'équation

$$ay'' + \alpha y' + \beta y = K e^{r_1 x} . \tag{4}$$

Nous distinguerons plusieurs cas suivant que les racines de l'équation

$$ar^3 + br^2 + cr + d = 0$$

sont toutes trois réelles ou pas.

a) Si le polynôme $ar^3 + br^2 + cr + d$ possède trois racines réelles distinctes r_1, r_2, r_3, alors le polynôme $ar^2 + \alpha r + \beta$ possède deux racines réelles distinctes r_2 et r_3 et dans ce cas l'équation homogène associée à l'équation (4) admet pour solution générale les fonctions de la forme

$$y = K_2 e^{r_2 x} + K_3 e^{r_3 x}$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 167). Cherchons une solution particulière de l'équation (4) sous la forme $y = \lambda_1 e^{r_1 x}$ où λ_1 est un nombre réel. On a

$$y' = \lambda_1 r_1 e^{r_1 x}, \quad y'' = \lambda_1 r_1^2 e^{r_1 x}$$

et on doit avoir

$$\lambda_1 e^{r_1 x}(ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta) = K e^{r_1 x} .$$

Comme $ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta \neq 0$ on doit avoir

$$\lambda_1 = \frac{K}{ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta} .$$

Finalement la forme générale des solutions de l'équation (4) est

$$y = \frac{K}{ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta} e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x} + K_3 e^{r_3 x}$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels, et la forme générale des solutions de l'équation (1) dans ce cas est

$$y = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x} + K_3 e^{r_3 x}$$

où K_1, K_2, K_3 sont des nombres réels.

b) Si le polynôme $ar^3 + br^2 + cr + d$ possède une racine réelle r_1 et deux racines complexes conjuguées $\lambda + i\omega$ et $\lambda - i\omega$, alors les racines complexes sont celles du polynôme $ar^2 + \alpha r + \beta$ donc la solution de l'équation homogène associée à l'équation (4) se présente sous la forme

$$y = e^{\lambda x}(K_2 \sin \omega x + K_3 \cos \omega x)$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels (*cf.* C. E., Ch. 11, § II, n° 167). Comme au cas *a*) on vérifie que $y = \lambda_1 e^{r_1 x}$ est une solution particulière de l'équation (4) si

$$\lambda_1 = \frac{K}{ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta}$$

donc la forme générale des solutions de l'équation (4) est

$$y = \frac{K}{ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta} e^{r_1 x} + e^{\lambda x}(K_2 \sin \omega x + K_3 \cos \omega x)$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels, et la forme générale des solutions de l'équation (1) dans ce cas est

$$y = K_1 e^{r_1 x} + e^{\lambda x}(K_2 \sin \omega x + K_3 \cos \omega x)$$

où K_1, K_2, K_3 sont des nombres réels.

c) Si le polynôme $ar^3 + br^2 + cr + d$ admet la racine simple r_1 et la racine double r_2 avec $r_1 \neq r_2$, alors r_2 est racine double du polynôme $ar^2 + \alpha r + \beta$ et la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (4) est de la forme

$$y = e^{r_2 x}(K_2 x + K_3)$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels. Comme dans les deux cas précédents, on voit que

$$y = \frac{K}{ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta} e^{r_1 x}$$

est une solution particulière de l'équation (4), donc la solution générale de l'équation (4) est de la forme

$$y = \frac{K}{ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta} e^{r_1 x} + e^{r_2 x}(K_2 x + K_3)$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels, et la solution générale de l'équation (1) est de la forme

$$y = K_1 e^{r_1 x} + e^{r_2 x}(K_2 x + K_3)$$

où K_1, K_2, K_3 sont des nombres réels.

Le cas où r_1 est racine double du polynôme $ar^3 + br^2 + cr + d$ et r_2 racine simple avec $r_1 \neq r_2$ se traite de manière analogue.

d) Si le polynôme $ar^3 + br^2 + cr + d$ admet la racine triple r_1, la méthode précédente n'est pas valable car $ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta = 0$. Cherchons les solutions sous la forme $y = u(x)\,e^{r_1 x}$ où $u(x)$ est une fonction deux fois dérivable de x ; on a

$$y' = u'(x)\,e^{r_1 x} + r_1\,u(x)\,e^{r_1 x}$$

et

$$y'' = u''(x)\,e^{r_1 x} + 2\,r_1\,u'(x)\,e^{r_1 x} + r_1^2\,u(x)\,e^{r_1 x}\,.$$

L'équation (4) devient alors

$$\left[au'' + (2\,ar_1 + \alpha)\,u' + (ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta)\,u\right]e^{r_1 x} = K\,e^{r_1 x}\,.$$

Mais $ar_1^2 + \alpha r_1 + \beta = 0$ et $2\,ar_1 + \alpha = 0$ donc l'équation (4) devient

$$u''(x) = \frac{K}{a}$$

d'où

$$u'(x) = \frac{K}{a}\,x + K_2$$

et

$$u(x) = \frac{K}{2\,a}\,x^2 + K_2\,x + K_3$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels. La forme générale des solutions de l'équation (4) est donc

$$y = \left(\frac{K}{2\,a}\,x^2 + K_2\,x + K_3\right)e^{r_1 x}$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels et la solution générale de l'équation (1) est de la forme

$$y = (K_1\,x^2 + K_2\,x + K_3)\,e^{r_1 x}$$

où K_1, K_2, K_3 sont des nombres réels.

8

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

8.1 Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et dont la dérivée est strictement négative sur $\mathbf{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$. On suppose de plus que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) .$$

1° Montrer que pour tout élément x de $\mathbf{R}^*$ il existe un élément y de $\mathbf{R}^*$ et un seul tel que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$. Dans la suite du problème on pose

$$y = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0 .$$

2° Démontrer que la fonction φ admet une fonction réciproque et que $\varphi^{-1} = \varphi$. Que peut-on dire du graphe de φ ?

3° Démontrer que la fonction φ est continue sur $\mathbf{R}$.

4° Démontrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et calculer sa dérivée.

5° Etudier les variations de la fonction φ. Calculer

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) .$$

6° Montrer que si le graphe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = a_1 x + a_2$ avec $a_1 \neq 0$ (resp. $y = b_1 x + b_2$ avec $b_1 \neq 0$) lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors le graphe de φ admet des asymptotes lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Déterminer ces asymptotes.

Solution 1° Supposons $x > 0$; comme f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ on ne peut avoir $f(x) = f(x')$ avec $x \neq x'$ et $x' > 0$, et on a

$$f(0) < f(x) < \lim_{t \to +\infty} f(t) .$$

Or

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to -\infty} f(t) \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to -\infty} f(t) = \sup_{t \in \mathbf{R}_-} f(t)$$

donc il existe un élément z de $\mathbf{R}$ tel que

$$f(x) < f(z) < \lim_{t \to -\infty} f(t) .$$

Mais alors $f(x) \in [f(0), f(z)]$; le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un élément y de $\mathbf{R}_-^*$ tel que $f(x) = f(y)$. Cet élément est unique car on ne peut avoir $f(y) = f(y')$ avec $y \neq y'$ et $y' < 0$.

On fait un raisonnement analogue lorsque $x < 0$.

2° Par définition de φ, pour tout nombre réel x non nul on a $\varphi(x) \neq x$; or x est le seul réel différent de $\varphi(x)$ tel que $f(\varphi(x)) = f(x)$, donc $\varphi(\varphi(x)) = x$. Comme $\varphi(\varphi(0)) = \varphi(0) = 0$ on a $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}\mathbf{R}$, par suite φ est une bijection et $\varphi^{-1} = \varphi$. Dans un repère orthonormé le graphe de φ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3° Comme la restriction $f \mid \mathbf{R}_+$ de f à $\mathbf{R}_+$ est injective elle établit une bijection entre $\mathbf{R}_+$ et l'ensemble $\left[f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$; $f \mid \mathbf{R}_+$ admet donc une fonction réciproque g définie sur $\left[f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Nous savons (*cf.* C.E., Ch. 4, § 5, n° 52) que la fonction g est continue et strictement croissante sur $\left[f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$ et que (*cf.* C.E., Ch. 5, § I, n° 62) g est dérivable sur $\left]f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$. De même, $f \mid \mathbf{R}_-$ admet une fonction réciproque h définie, continue et strictement croissante sur le même intervalle que g et dérivable sur $\left]f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$. Remarquons que pour $x \geqslant 0$ nous avons $\varphi(x) = h \circ f(x)$ et pour $x \leqslant 0$, $\varphi(x) = g \circ f(x)$; pour $x = 0$ les deux définitions coïncident car $h \circ f(0) = g \circ f(0) = \varphi(0) = 0$. Il en résulte que la restriction de φ à $\mathbf{R}_+$ ou $\mathbf{R}_-$ est continue comme composée d'applications continues.

4° La dérivabilité de la fonction φ, résulte comme sa continuité du fait que $\varphi \mid \mathbf{R}_+^* = h \circ f$ et $\varphi \mid \mathbf{R}_-^* = g \circ f$. Pour le calcul de φ', rappelons que pour $x > 0$ nous avons

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{et pour } x < 0,\ h'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

(*cf.* C. E., Ch. 5, § I, n° 62). Nous avons donc pour $x > 0$

$$\varphi(x) = h(f(x)) = h(f(\varphi(x))) \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) < 0\,,$$

$$\varphi'(x) = h'[f(\varphi(x)]f'(x) = \frac{f'(x)}{f'(\varphi(x))}$$

et pour $x < 0$, $\varphi(x) = g(f(x)) = g(f(\varphi(x))$ avec $\varphi(x) > 0$, donc

$$\varphi'(x) = g'[f(\varphi(x))]f'(x) = \frac{f'(x)}{f'(\varphi(x))};$$

par suite pour tout élément x de $\mathbf{R}^*$ nous avons :

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f'(\varphi(x))}.$$

5° Nous savons que f' est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbf{R}_-^*$, donc $f'(x)$ et $f'(\varphi(x))$ sont de signes contraires ; par suite $\varphi'(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et φ est une fonction strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$. Soit A un nombre réel strictement négatif. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) > f(A)$ il existe un nombre réel strictement positif B tel que pour $x > B$ nous ayons $f(x) > f(A)$; mais alors $f(\varphi(x)) > f(A)$ et comme f est décroissante sur $\mathbf{R}_-$, $\varphi(x) < A$. Nous venons donc de démontrer que pour tout nombre réel négatif A, il existe un nombre réel positif B tel que pour tout élément x de $]B, +\infty[$, nous ayons $\varphi(x) < A$, par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$. Nous démontrerions de manière analogue que $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$.

6° Comme le graphe de f admet une asymptote lorsque x tend vers $+\infty$, le graphe de g en admet aussi une. Cherchons à déterminer son équation en fonction de a_1 et a_2. Posons $g(x) = m_1 x + m_2 + o(1)$. Nous savons que $g(f(x)) = x$ pour tout $x > 0$; calculons le développement limité de $g(f(x))$ au voisinage de $+\infty$. Nous avons :

$$g(f(x)) = m_1(a_1 x + a_2 + o(1)) + m_2 + o(1) =$$
$$= m_1 a_1 x + (m_1 a_2 + m_2) + o(1)$$

d'où par identification, $m_1 = 1/a_1$ et $m_2 = -a_2/a_1$, par suite

$$g(x) = \frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1} + o(1)\,.$$

Un calcul analogue donne

$$h(x) = \frac{1}{b_1}x - \frac{b_2}{b_1} + o(1)\,.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ nous avons

$$\varphi(x) = h(f(x)) = \frac{1}{b_1}(a_1 x + a_2 + o(1)) - \frac{b_2}{b_1} + o(1)$$

$$= \frac{a_1}{b_1} x + \frac{a_2 - b_2}{b_1} + o(1)\,.$$

Lorsque x tend vers $-\infty$ nous avons

$$\varphi(x) = g(f(x)) = \frac{1}{a_1}(b_1 x + b_2 + o(1)) - \frac{a_2}{a_1} + o(1)\,,$$

d'où

$$\varphi(x) = \frac{b_1}{a_1} x + \frac{b_2 - a_2}{a_1} + o(1)\,.$$

Le graphe de la fonction φ admet la droite d'équation

$$y = \frac{a_1}{b_1} x + \frac{a_2 - b_2}{b_1}\left(\text{resp. } y = \frac{b_1}{a_1} x + \frac{b_2 - a_2}{a_1}\right)$$

pour asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

8.2 Soit f une fonction réelle définie, continue, positive, décroissante sur l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs. Pour chaque entier $n \geqslant 1$ on pose :

$$u_n = \sum_{p=1}^{p=n} f(p) \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1° Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2° Démontrer qu'il existe des nombres réels positifs a et b tels que pour tout entier $n \geqslant 2$ on ait : $I_{n+1} - a \leqslant u_n - b \leqslant I_n$. En déduire que les suites (u_n) et (I_n) convergent ou bien divergent en même temps.

3° Démontrer que la suite $(v_n) = (u_n - I_n)$ est décroissante et convergente et que sa limite l vérifie les inégalités $0 \leqslant l \leqslant f(1)$. Lorsque la suite (I_n) est convergente démontrer que l'on a les inégalités :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant f(1) + \lim_{n\to+\infty} I_n\,.$$

4° Pour chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, définies pour tout nombre réel $x > 0$ par

$f_1(x) = 1/x$
$f_2(x) = 1/x^\alpha$ où α est un nombre réel strictement plus grand que 1
$f_3(x) = e^{-\beta x}$ où β est un nombre réel strictement positif
$f_4(x) = 1/[x + x(\mathrm{Log}\, x)^2]$.

a) Calculer I_n pour $n \geqslant 1$.

b) Déterminer si la suite (I_n) est divergente ou convergente.

c) Dans le cas où la suite (u_n) est convergente, trouver un encadrement de sa limite.

Solution 1° Puisque la fonction f est décroissante, nous avons pour tout élément s de $[n-1, n]$ et tout élément u de $[n, n+1]$:

$$f(u) \leqslant f(n) \leqslant f(s)$$

donc (*cf.* C. E., Ch. 8, § II, n° 118)

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\,dt\,.$$

2° D'après la question précédente nous avons les inégalités

$$\begin{array}{ccccc}
\int_2^3 f(t)\,dt & \leqslant & f(2) & \leqslant & \int_1^2 f(t)\,dt \\
\int_3^4 f(t)\,dt & \leqslant & f(3) & \leqslant & \int_2^3 f(t)\,dt \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\int_n^{n+1} f(t)\,dt & \leqslant & f(n) & \leqslant & \int_{n-1}^n f(t)\,dt
\end{array}$$

d'où en additionnant membre à membre

$$\int_2^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_n - f(1) \leqslant \int_1^n f(t)\,dt\,.$$

Or

$$\int_2^{n+1} f(t)\,dt = I_{n+1} - I_2$$

donc $a = I_2$ et $b = f(1)$ sont deux nombres réels positifs tels que l'on ait pour tout entier $n \geqslant 2$

$$I_{n+1} - a \leqslant u_n - b \leqslant I_n \tag{1}$$

Comme la fonction f est positive, la suite (u_n) est positive et pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n \geqslant 0$ (*cf.* C. E., Ch. 8, § II, n° 118, *c*) ; de plus $u_{n+1} - u_n = f(n+1)$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite (u_n) est croissante ;

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{donc} \qquad I_{n+1} - I_n \geqslant 0$$

et la suite (I_n) est croissante. La double inégalité (1) ci-dessus nous montre que si la suite (u_n) (resp. (I_n)) converge, la suite (I_n) (resp. (u_n)) est majorée, donc converge ; par conséquent les suites (I_n) et (u_n) convergent ou divergent en même temps.

3° Pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) - (I_{n+1} - I_n)$$

donc

$$v_{n+1} - v_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t;$$

or nous avons démontré à la première question que

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{donc} \qquad v_{n+1} - v_n \leqslant 0$$

ce qui prouve que la suite (v_n) est décroissante. Par ailleurs nous avons pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_n = \left[f(1) - \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right] + \left[f(2) - \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t\right] + \cdots +$$
$$+ \left[f(n-1) - \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t\right] + f(n) ;$$

or $f(n) \geqslant 0$ et chacun des $(n-1)$ premiers termes de cette suite est positif d'après la première question, donc $v_n \geqslant 0$; par conséquent la suite (v_n) est positive et décroissante, donc convergente (*cf.* C. E., Ch. 1, § II, n° 14). Posons

$$l = \lim_{n \to +\infty} v_n .$$

De l'inégalité obtenue à la question précédente il résulte que pour tout entier $n \geqslant 1$ nous avons $0 \leqslant v_n \leqslant f(1)$, donc par passage à la limite nous obtenons $0 \leqslant l \leqslant f(1)$.

Si la suite (I_n) converge il en est de même de la suite (u_n) et nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} u_n - \lim_{n \to +\infty} I_n$$

donc

$$0 \leqslant \lim_{n \to +\infty} u_n - \lim_{n \to +\infty} I_n \leqslant f\ (1)$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant f(1) + \lim_{n\to+\infty} I_n .$$

4° *a*) Pour tout entier $n \geqslant 1$ nous avons :

$$I_n(f_1) = \int_1^n \frac{dt}{t} = [\text{Log}\, t]_1^n = \text{Log}\, n$$

$$I_n(f_2) = \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{-1}{(\alpha-1)\, t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{-1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}$$

$$I_n(f_3) = \int_1^n e^{-\beta t}\, dt = \left[\frac{-1}{\beta\, e^{\beta t}}\right]_1^n = -\frac{1}{\beta\, e^{nt}} + \frac{1}{\beta\, e^\beta}$$

$$I_n(f_4) = \int_1^n \frac{dt}{t(1+(\text{Log}\, t)^2)}$$

d'où en faisant le changement de variable $u = \text{Log}\, t$;

$$I_n(f_4) = \int_0^{\text{Log}\, n} \frac{du}{1+u^2} = [\text{Arc tg}\,(\text{Log}\, t)]_1^n = \text{Arc tg}\,(\text{Log}\, n).$$

b) Si n tend vers $+\infty$, Log n tend vers $+\infty$ donc la suite $(I_n(f_1))$ est divergente. Lorsque n tend vers $+\infty$ nous voyons que la suite $(I_n(f_2))$ converge et admet la limite $1/(\alpha-1)$, la suite $(I_n(f_3))$ converge et admet comme limite $1/\beta\, e^\beta$ et la suite $I_n(f_4)$ converge et admet la limite $\pi/2$.

c) Des résultats de la seconde question nous déduisons que la suite $(u_n(f_1))$ est divergente et que les suites $(u_n(f_2))$, $(u_n(f_3))$ et $(u_n(f_4))$ convergent. En utilisant le résultat de la troisième question nous obtenons les encadrements suivants :

$$\frac{1}{\alpha-1} \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n(f_2) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} + 1$$

$$\frac{1}{\beta\, e^\beta} \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n(f_3) \leqslant \frac{1}{\beta\, e^\beta} + \frac{1}{e^\beta}$$

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n(f_4) \leqslant \frac{\pi}{2} + 1 .$$

8.3 Dans tout le problème, f désigne une fonction réelle, définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, dérivable sur $[a, b]$ et dont la dérivée f' est strictement croissante sur $[a, b[$.

1° *a*) Soit x un point de $]a, b]$; démontrer qu'il existe un point unique c de $]a, b[$ tel que $f(x) - f(a) = (x-a) f'(c)$.

b) Pour tout point t de $]a, b]$ on pose

$$g(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Démontrer que l'application g est continue sur $]a, b]$. Démontrer qu'elle se prolonge par continuité au point a.

c) Démontrer que la fonction g est strictement croissante sur $[a, b]$.

2° Soit φ la fonction réelle définie sur $[a, b]$ par $\varphi(a) = a$ et pour tout élément x de $]a, b]$ par $\varphi(x) = c$ où c désigne l'unique point de $]a, b[$ tel que

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(c).$$

a) Démontrer que φ est une application strictement croissante.

b) Soit y un point quelconque de l'intervalle $[a, \varphi(b)]$, démontrer qu'il existe un point unique x de $[a, b]$ tel que $g(x) = f'(y)$.

e) Démontrer que $\varphi([a, b]) = [a, \varphi(b)]$. En déduire que la fonction φ est continue.

3° On suppose de plus dans cette question que l'application f' est continûment dérivable sur $[a, b]$ et que f'' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

a) Démontrer que f' admet une fonction réciproque continûment dérivable. En déduire que l'application φ est continûment dérivable sur $[a, b]$.

b) Calculer l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \varphi'(t) \, dt.$$

c) Calculer $\varphi(t)$ pour $f(t) = e^t$ et $a = 0$, $b = 1$. En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{t\,e^t - e^t + 1}{t^2} \, dt.$$

Solution 1° *a*) Soit x un point de $]a, b]$; alors la fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[a, x]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, x[$. Le théorème des accroissements finis (*cf.* C. E., Ch. 5, § II, n° 65) nous permet d'affirmer qu'il existe un point c de $]a, x[$ tel que nous ayons

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(c)$$

Supposons que c' soit un point de $]a, b[$ tel que $f(x) - f(a) = (x - a) f'(c')$, alors nous avons $(x - a) f'(c) = (x - a) f'(c')$ donc $f'(c) = f'(c')$, or f' est une fonction strictement croissante sur $]a, b[$ donc $c = c'$ d'où l'unicité du point c.

b) La fonction g est le quotient de deux fonctions continues sur $]a, b]$, de plus la fonction qui figure au dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle, donc (*cf.* C. E., Ch. 4, § III, n° 43, *c*) g est continue sur $]a, b]$. Comme la fonction f est dérivable sur $[a, b[$, la fonction g possède une limite à droite au point a égale à $f'(a)$, donc en posant $g(a) = f'(a)$, la fonction g se trouve prolongée par continuité sur $[a, b]$.

c) La fonction g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]a, b]$ et la fonction qui se trouve au dénominateur ne s'annule pas sur $]a, b]$, donc g est dérivable sur $]a, b]$ et pour tout point de ce semi-segment nous avons :

$$g'(t) = \frac{(t-a)f'(t) - (f(t) - f(a))}{(t-a)^2}.$$

D'après (1°, *a*) il existe un point unique u de $]a, t[$ tel que l'on ait

$$f(t) - f(a) = (t-a)f'(u)$$

donc

$$g'(t) = \frac{f'(t) - f'(u)}{t-a}$$

or $u < t$ et f' est strictement croissante, donc $f'(u) < f'(t)$; d'autre part, $t - a > 0$ donc $g'(t) > 0$. Comme ceci est vrai pour tout point de $]a, b]$, la fonction g est strictement croissante sur $]a, b]$. De plus si x est un élément de $]a, b]$, nous savons d'après 1° *a*) qu'il existe un point unique c de $]a, b[$ tel que $g(x) = f'(c)$ et f' est strictement croissante sur $[a, b[$ donc $f'(a) < f'(c)$ soit $g(a) < g(x)$. Il en résulte que la fonction g est strictement croissante sur $[a, b]$.

2° *a*) De la définition de φ il résulte que φ prend ses valeurs dans $[a, b[$ et que pour tout point x de $[a, b]$, $g(x) = f'(\varphi(x))$. Soient x et x' deux éléments de $[a, b]$ tels que $x < x'$; alors comme g est strictement croissante, nous avons $g(x) < g(x')$ soit $f'(\varphi(x)) < f'(\varphi(x'))$. Or f' est strictement croissante sur $[a, b[$ donc $\varphi(x) < \varphi(x')$, ce qui prouve que φ est une fonction strictement croissante.

b) Comme f' est strictement croissante, pour tout élément y de $[a, \varphi(b)]$ nous avons $a \leqslant y \leqslant \varphi(b)$, donc $f'(a) \leqslant f'(y) \leqslant f'(\varphi(b))$; or

$$f'(a) = g(a) \quad \text{et} \quad f'(\varphi(b)) = g(b)$$

et la fonction g est continue, donc pour tout élément y de $[a, \varphi(b)]$ il existe un élément x de $[a, b]$ tel que $f'(y) = g(x)$. Soit x' un élément de $[a, b]$ tel que $g(x) = g(x')$, alors $x = x'$ car g est strictement croissante, d'où le résultat.

c) Comme l'application φ est strictement croissante, pour tout élément x de $[a, b]$ nous avons $a \leqslant x \leqslant b$ donc $\varphi(a) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(b)$ et $\varphi(a) = a$; par suite $\varphi([a, b]) \subset [a, \varphi(b)]$. Réciproquement, si y est un élément de $[a, \varphi(b)]$ il résulte de 2°, *b*) qu'il existe un point x de $[a, b]$ et un seul tel que $g(x) = f'(y)$, donc $f'(y) = f'(\varphi(x))$ et comme f' est strictement croissante, $y = \varphi(x)$, donc

$[a, \varphi(b)] \subset \varphi([a, b])$ d'où $\varphi([a, b]) = [a, \varphi(b)]$. Comme φ est monotone sur $[a, b]$ et vérifie $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$, φ est continue (*cf.* exercice 2.26).

3° *a*) Comme f' est dérivable sur $[a, b]$ elle est continue sur cet intervalle. Comme f' est croissante sur $[a, b[$, nous avons

$$f'(b) = \lim_{x \to b-} f'(x) = \operatorname{Sup}_{x \in [a,b]} f'(x)$$

(*cf.* C. E., Ch. 4, § V, n° 51,*b*) donc pour tout élément x de $[a, b]$, $f'(b) \geqslant f'(x)$. Soit x un point de $[a, b[$ tel que $f'(b) = f'(x)$ alors il existe un élément y de $[a, b[$ tel que $x < y$ donc $f'(b) < f'(y)$ et ceci est impossible ; par suite pour tout élément x de $[a, b[$ nous avons $f'(x) < f'(b)$; il en résulte bien que f' est strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$, donc (*cf.* C. E., Ch. 4, § 5, n° 52) f' admet une fonction réciproque h continue et strictement croissante ; de plus comme f'' ne s'annule pas sur $[a, b]$, la fonction réciproque h de f' est dérivable (*cf.* C. E., Ch. 5, § I, n° 62) et nous avons

$$h'(y) = \frac{1}{f''(h(y))}$$

pour tout élément y de $[f'(a), f'(b)]$. Comme h et f'' sont continues et comme $f'' \circ h$ ne s'annule pas sur $[f'(a), f'(b)]$ nous voyons que h' est une fonction continue et donc que h est continûment dérivable.

b) Nous avons

$$\int_a^b \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b f'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$$

d'où

$$\int_a^b \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = [f(\varphi(t))]_a^b = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

(*cf.* C. E., Ch. 9, § I, n° 131).

c) Si $f(t) = \mathrm{e}^t$, $a = 0$, $b = 1$ et si t est un point de $]0, 1]$ alors

$$f(t) - f(0) = tf'(\varphi(t)) \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^t - 1 = t\, \mathrm{e}^{\varphi(t)}$$

d'où

$$\varphi(t) = \operatorname{Log} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = 0\,.$$

Nous avons alors pour ces fonctions

$$\frac{t\, \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2} = \frac{f(t) - f(0)}{t} \varphi'(t)$$

donc :

$$\int_0^1 \frac{t\, \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2} \mathrm{d}t = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) = \mathrm{e}^{\operatorname{Log}(\mathrm{e}-1)} - 1 = \mathrm{e} - 2\,.$$

8.4 1° Soit f une fonction réelle continûment dérivable sur un intervalle $[a, b]$, fermé borné de $\mathbf{R}$. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0 \qquad (n \text{ étant entier}).$$

2° On considère la fonction

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$$

et on pose

$$F(x) = \int_0^x \varphi(t) \, dt.$$

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties que $|F(x) - F(x')|$ tend vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$.

b) En déduire que F admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$; on note c cette limite.

3° Soient b un nombre réel strictement positif et f une fonction réelle deux fois continûment dérivable sur $[0, b]$.

a) Montrer que la fonction g définie sur $[0, b]$ par

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ g(0) = f'(0) \end{cases}$$

est continûment dérivable sur l'intervalle $[0, b]$.

b) En appliquant le résultat démontré à la question 1° démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin nx}{x} \, dx = c . f(0) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

4° Soit f une fonction réelle deux fois continûment dérivable sur $[0, \pi]$.

a) Montrer que

$$\int_0^\pi f(x) \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} \, dx = \int_0^{\pi/2} (f(x) + f(\pi - x)) \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} \, dx.$$

b) Montrer que la fonction h définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$\begin{cases} h(x) = (f(x) + f(\pi - x)) \dfrac{x}{\sin x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ h(0) = f(0) + f(\pi) \end{cases}$$

est deux fois continûment dérivable.

c) Déduire du résultat de la question 3° que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(x) \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} \, dx = c\big(f(0) + f(\pi)\big).$$

5° *a*) Montrer que

$$\frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos 2nx.$$

b) En déduire la valeur de

$$\int_0^\pi \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} \, dx.$$

c) En déduire la valeur de c.

Solution 1° Comme f' est continue sur $[a, b]$ nous pouvons intégrer par parties

$$\int_a^b f(x) \sin nx \, dx.$$

Nous obtenons ainsi

$$\int_a^b f(x) \sin nx \, dx = \left[-\frac{\cos nx}{n} f(x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{\cos nx}{n} f'(x) \, dx.$$

Or

$$\left| \frac{f(a) \cos na - f(b) \cos nb}{n} \right| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n}$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left[-\frac{\cos nx}{n} f(x) \right]_a^b = 0.$$

D'autre part

$$\left| \int_a^b \frac{\cos nx}{n} f'(x) \, dx \right| \leqslant \frac{1}{n} \int_a^b |f'(x)| \, dx,$$

et en posant

$$M = \int_a^b |f'(x)| \, dx,$$

on trouve

$$\left| \int_a^b \frac{\cos nx}{n} f'(x)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \frac{\cos nx}{n} f'(x)\, \mathrm{d}x = 0\,,$$

d'où le résultat cherché.

2° *a*) Nous avons

$$F(x) - F(x') = \int_{x'}^{x} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_{x'}^{x} - \int_{x'}^{x} \frac{\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t\,,$$

donc

$$| F(x) - F(x') | \leqslant \left| \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos x'}{x'} \right| + \left| \int_{x'}^{x} \frac{|\cos t|}{t^2} \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x'},$$
$$+ \left| \int_{x'}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \right|$$

d'où

$$\left| F(x) - F(x') \right| \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} + \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x} \right| \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} + \frac{1}{x'} + \frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{x} + \frac{2}{x'}.$$

Lorsque x et x' tendent vers $+\infty$, $| F(x) - F(x') |$ tend vers 0.

b) Compte tenu du résultat précédent, le critère de Cauchy (*cf.* C. E. Ch. 4, § II, n° 42, *c*) nous permet d'affirmer que $F(x)$ possède une limite c lorsque x tend vers $+\infty$.

3° *a*) Comme f est continûment dérivable sur $]0, b]$, il est clair que g est continûment dérivable sur $]0, b]$ et sa dérivée est égale à

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2} \qquad \text{si} \qquad x \neq 0\,.$$

Etudions la dérivabilité au point 0. Il s'agit de voir si le rapport

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{[f(x) - f(0)]/x - f'(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2}$$

possède une limite lorsque x tend vers 0 à droite. Or f est deux fois continûment dérivable sur $[0, b]$ donc nous pouvons lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 en 0. Nous obtenons ainsi

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{f''(\theta x)}{2} x^2 \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < 1\,.$$

Il en résulte que

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{f''(\theta x)}{2}.$$

Lorsque x tend vers 0, θx tend vers 0 et comme f'' est continue, nous avons

$$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{f''(0)}{2}.$$

Il nous reste à prouver la continuité de g' au point 0 ; or, pour $x \neq 0$ nous avons

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$$

et nous avons vu que

$$f(x) - f(0) = xf'(0) + x^2 \frac{f''(\theta x)}{2} \qquad (0 < \theta < 1)$$

donc

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - xf'(0) - \frac{f''(\theta x)}{2} x^2}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} - \frac{f''(\theta x)}{2}.$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f', il existe un nombre réel λ tel que

$$0 < \lambda < 1 \quad \text{et} \quad f'(x) - f'(0) = xf''(\lambda x)$$

d'où

$$g'(x) = f''(\lambda x) - \frac{f''(\theta x)}{2}.$$

Lorsque x tend vers 0, comme f'' est continue nous avons

$$\lim_{x \to 0+} g'(x) = \frac{f''(0)}{2}$$

par suite

$$g'(0) = \lim_{x \to 0+} g'(x)$$

ce qui montre que g est continûment dérivable sur $[0, b]$.

Appliquons à g le résultat du 1° nous obtenons

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^b \frac{f(x) - f(0)}{x} \sin nx \, dx = 0,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^b \frac{f(x)}{x} \sin nx \, dx = f(0) \lim_{n\to+\infty} \int_0^b \frac{\sin nx}{x} dx =$$

$$= f(0) \lim_{n\to+\infty} \int_0^{nb} \frac{\sin y}{y} dy = f(0) \,.\, c$$

4° *a*) Nous avons :

$$\int_0^\pi f(x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} f(x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx +$$

$$+ \int_{\pi/2}^\pi f(x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \,.$$

Dans la seconde intégrale faisons le changement de variable $y = \pi - x$; nous obtenons :

$$\int_{\pi/2}^\pi f(x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \int_{\pi/2}^0 - f(\pi - y) \frac{\sin(2n+1)(\pi - y)}{\sin(\pi - y)} dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\pi - y) \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} dy$$

et comme y est une lettre muette dans la dernière intégrale, nous avons en portant dans l'égalité précédente :

$$\int_0^\pi f(x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} (f(x) + f(\pi - x)) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \,.$$

b) Comme $\lim_{x\to 0} x/\sin x = 1$ la fonction h est continue sur $[0, \pi/2]$. D'après les hypothèses, la fonction $x \mapsto [f(x) + f(\pi - x)]$ est une fonction deux fois continûment dérivable sur $[0, \pi/2]$, par suite pour démontrer que h est deux fois continûment dérivable sur $[0, \pi/2]$ il suffit de le démontrer pour la fonction k définie par $k(x) = x/\sin x$. Les fonctions $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ et sinus sont dérivables et ne s'annulent pas sur $]0, \pi/2]$ donc k est dérivable sur $]0, \pi/2]$ et nous avons

$$k'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} \qquad \text{si} \qquad x \neq 0 \,.$$

Au point 0 nous avons $k(0) = 1$ donc

$$\frac{k(x) - k(0)}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \,.$$

En faisant un développement limité au voisinage de 0 de ce rapport nous voyons que

$$\frac{k(x) - k(0)}{x} = \frac{x}{6} + o(x) \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{k(x) - k(0)}{x} = 0$$

soit $k'(0) = 0$. A présent observons que sur $]0, \pi/2]$, k' est un produit de fonctions dérivables donc est dérivable et nous avons

$$k''(x) = \frac{x + x\cos^2 x - \sin 2x}{\sin^3 x} \qquad \text{si} \qquad x \neq 0\,.$$

Par ailleurs $k'(0) = 0$ donc

$$\frac{k'(x) - k'(0)}{x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin^2 x}.$$

En faisant un développement limité au voisinage de 0 de ce rapport nous trouvons

$$\frac{k'(x) - k'(0)}{x} = \frac{1}{3} + o(x) \qquad \text{donc} \qquad k''(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{k'(x) - k'(0)}{x} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi nous venons de démontrer que k est deux fois dérivable sur $[0, \pi/2]$, donc k' est continue sur $[0, \pi/2]$ et nous allons nous assurer de la continuité de k'' sur cet intervalle. Tout d'abord il est clair que k'' est continue sur $]0, \pi/2]$. Calculons la limite de $k''(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. En faisant un développement limité de $k''(x)$ au voisinage de 0, nous trouvons

$$k''(x) = \frac{1}{3} + o(x) \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x \to 0+} k''(x) = k''(0)$$

et la dérivée seconde de k est bien continue.

c) Nous savons d'après 4°, *a*) que :

$$\int_0^\pi f(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} [f(x) + f(\pi - x)]\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$$

or

$$[f(x) + f(\pi - x)]\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{x}$$

donc

$$\int_0^\pi f(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx\,.$$

Comme h est deux fois continûment dérivable nous pouvons appliquer le résultat de 3°, *b*) et nous obtenons :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx = c.h(0) = c\big(f(0) + f(\pi)\big)$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = c\big(f(0) + f(\pi)\big).$$

5° *a*) La formule est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie pour $(n-1)$, alors

$$\frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x} = \frac{2\sin x \cos 2nx}{\sin x} = 2\cos 2nx\,,$$

donc

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} + 2\cos 2nx$$

$$= 1 + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos(2n-1)x + 2\cos 2nx\,.$$

La formule est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

b) Pour tout entier $p \geqslant 1$ nous avons

$$\int_0^\pi \cos 2px\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin 2px}{2p}\right]_0^\pi = 0\,,$$

donc compte tenu de l'égalité trouvée à la question précédente et de la linéarité de l'intégrale nous avons :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

c) Prenons pour f la fonction constante de valeur 1 et appliquons le résultat obtenu au 4°, *c*). Nous avons pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

Mais $f(0) = f(\pi) = 1$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2c \qquad \text{d'où} \qquad c = \frac{\pi}{2}\,.$$

8.5

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'ensemble **R** des nombres réels. A tout élément f de E, on associe la fonction $\varphi = u(f)$ définie pour tout nombre réel x par

$$\varphi(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1° *a*) Démontrer que u est une application linéaire de E dans E.

b) Calculer la fonction φ associée à la fonction f définie par $f(x) = \cos\alpha x$ $(\alpha \neq 0)$; pour α convenablement choisi, la fonction φ peut-elle être nulle quel que soit x ?

2° *a*) Démontrer que pour tout nombre réel x, φ est dérivable et que

$$\varphi'(x) = f(x + 1) - f(x).$$

b) L'application u est-elle surjective ?

c) Trouver le noyau u. L'application u est-elle injective ?

3° *a*) On suppose que f admet une limite finie l lorsque x tend vers $+\infty$; $\varphi = u(f)$ a-t-elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$? Si oui, laquelle ?

b) La réciproque de la propriété que l'on vient de trouver est-elle exacte ? Si elle ne l'est pas, donner un exemple qui la met en défaut.

4° La fonction f, élément de E, est choisie de manière qu'il existe des nombres réels a, b, c tels que l'on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{r(x)}{x} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to \infty} r(x) = 0. \tag{1}$$

Démontrer qu'il existe des nombres réels α, β, γ tels que pour $\varphi = u(f)$ on ait :

$$\varphi(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + \frac{\rho(x)}{x} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to \infty} \rho(x) = 0. \tag{2}$$

5° Dans cette question on pose $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x + 1}$ ou $\sqrt[3]{A}$ désigne l'unique nombre réel dont le cube soit A, et naturellement $\varphi = u(f)$. *On ne cherchera pas à calculer une primitive de f.*

a) Trouver les racines réelles de l'équation $\varphi'(x) = 0$.

b) Etudier les variations de la fonction φ.

c) Indiquer l'allure de la courbe d'équation $y = \varphi(x)$. Déterminer en particulier son asymptote.

N. B. Pour trouver des valeurs approchées du maximum et du minimum de φ, on pourra utiliser la courbe $y = f(x)$. On donne

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}} \simeq 1{,}10 \qquad \text{et} \qquad \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}} \simeq 0{,}85 \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près}.$$

Solution 1° *a*) Soient f, g deux éléments de E et λ un nombre réel ; alors il résulte de la linéarité des intégrales que pour tout nombre réel x nous avons :

$$u(f + g)(x) = \int_x^{x+1} (f + g)(t)\,dt = \int_x^{x+1} (f(t) + g(t))\,dt$$

$$= \int_x^{x+1} f(t)\,dt + \int_x^{x+1} g(t)\,dt$$

d'où

$$u(f+g)(x) = u(f)(x) + u(g)(x)$$

et

$$u(\lambda f)(x) = \int_x^{x+1} (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \lambda u(f)(x)\,.$$

Nous avons donc $u(f+g) = u(f) + u(g)$ et $u(\lambda f) = \lambda u(f)$, ce qui prouve que u est une application linéaire

b) Nous avons

$$\varphi(x) = \int_x^{x+1} \cos \alpha t\,dt = \left[\frac{\sin \alpha t}{\alpha}\right]_x^{x+1} = \frac{\sin(\alpha x + \alpha) - \sin \alpha x}{\alpha}$$

par conséquent si α est de la forme $2\,k\pi$ avec k entier rationnel, nous avons $\sin(\alpha x + \alpha) = \sin \alpha x$ et $\varphi(x) = 0$ pour tout nombre réel x.

2° *a*) Posons

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Comme f est continue sur $\mathbf{R}$, nous savons (*cf.* C. E., Ch. 9, § I, n° 130) que pour tout nombre réel x, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. Or $\varphi(x) = F(x+1) - F(x)$ donc pour tout x de $\mathbf{R}$, φ est dérivable et nous avons :

$$\varphi'(x) = F'(x+1) - F'(x) = f(x+1) - f(x)\,.$$

b) Nous venons de démontrer que pour tout élément f de E, $u(f)$ est une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; comme il existe des applications continues non dérivables, u n'est pas surjective.

c) Soit f un élément du noyau de u ; alors $\varphi = u(f) = 0$ donc $\varphi'(0) = 0$ par suite pour tout nombre réel x nous avons $\varphi'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$. Donc f est périodique admettant 1 pour période et nous avons

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = 0\,.$$

Réciproquement si f est une fonction appartenant à E, admettant 1 pour période, dont l'intégrale est nulle sur $[0, 1]$; alors pour tout élément x de $\mathbf{R}$ nous avons :

$$u(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = 0\,,$$

donc $u(f) = 0$ et f appartient au noyau de u.

Le noyau de u est donc formé des applications continues sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, admettant 1 pour période et dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est nulle. Il a été montré au 1°, *b*) que si k est un entier la fonction non nulle $\cos 2\,k\pi x$ appartient au noyau de u, donc le noyau de u n'est pas réduit à $\{ 0 \}$ et u n'est pas injective.

3° *a*) Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel A tel que pour tout nombre réel $t \geqslant A$ nous ayons $l - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant l + \varepsilon$; alors si $x \geqslant A$, $x + 1 \geqslant A$ donc $l - \varepsilon \leqslant \varphi(x) \leqslant l + \varepsilon$ d'où $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = l$.

b) La réciproque de cette propriété est fausse; ainsi par exemple nous avons vu que si $f(x) = \cos 2\pi x$, $\varphi(x) = 0$ pour tout nombre réel x, donc $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ alors que f ne possède pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

4° Comme la fonction f est continue, il en est de même de la fonction

$$r(x) = xf(x) - ax^2 - bx - c\,.$$

Comme $\lim_{x \to \infty} r(x) = 0$, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $A > 0$ tel que pour tout nombre réel t vérifiant $|t| \geqslant A$, nous ayons

$$|r(t)| < \varepsilon\,.$$

Il en résulte que si $|x| \geqslant A + 1$, pour tout élément t de $[x, x + 1]$ nous avons $|t| \geqslant A$ donc $|r(t)| < \varepsilon$ et $r(t)/t$ est continue dans $[x, x + 1]$ donc intégrable. Si $x \geqslant A + 1$, nous avons :

$$\left| \int_x^{x+1} \frac{r(t)}{t}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^{x+1} \left| \frac{r(t)}{t} \right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{x} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x \to +\infty} x \int_x^{x+1} \frac{r(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Si $x \leqslant -A - 1$, nous avons :

$$\left| \int_x^{x+1} \frac{r(t)}{t}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^{x+1} \left| \frac{r(t)}{t} \right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{|x + 1|}$$

donc

$$\lim_{x \to -\infty} x \int_x^{x+1} \frac{r(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Posons

$$\rho_1(x) = x \int_x^{x+1} \frac{r(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,;$$

alors nous avons

$$\int_x^{x+1} \frac{r(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\rho_1(x)}{x}$$

et nous venons de démontrer que $\lim_{x \to \infty} \rho_1(x) = 0$.

Compte tenu de ce résultat, pour $|x| \geqslant A + 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_x^{x+1} \left(at + b + \frac{c}{t} \right) \mathrm{d}t + \frac{\rho_1(x)}{x} \\ &= ax + \left(\frac{a}{2} + b \right) x + c \operatorname{Log} \left| \frac{x + 1}{x} \right| + \frac{\rho_1(x)}{x}\,.\end{aligned}$$

Or pour $|x| \geqslant A + 1$, nous avons

$$\operatorname{Log}\left|\frac{x+1}{x}\right| = \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{\rho_2(x)}{x} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to\infty} \rho_2(x) = 0\,;$$

par suite

$$\varphi(x) = ax + \left(\frac{a}{2} + b\right) + \frac{c}{x} + \frac{\rho(x)}{x} \qquad \text{avec} \qquad \rho(x) = \rho_1(x) + c\,\rho_2(x)$$

d'où $\lim_{x\to\infty} \rho(x) = 0$. Par suite $\alpha = a$, $\beta = (a/2) + b$ et $\gamma = c$.

5° La fonction réelle f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x + 1}$, pour tout nombre réel x, est continue donc appartient à E. D'après la question 2°, *a*) la fonction $\varphi = u(f)$ est dérivable pour tout x de $\mathbf{R}$ et nous avons

$$\varphi'(x) = f(x+1) - f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^3 - (x+1) + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x + 1}\,.$$

Si a et b sont deux nombres réels, il est clair que $a^3 - b^3$ et $a - b$ sont de même signe donc le signe de $\varphi'(x)$ est celui de :

$$\psi(x) = (x+1)^3 - x - x^3 + x - 1 = 3\,x^2 + 3\,x = 3\,x(x+1)\,.$$

Les racines de l'équation $\varphi'(x) = 0$ sont donc $x = 0$ et $x = -1$.

b) Du résultat de la question précédente on déduit le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(-1)$	$\searrow$	$\varphi(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\varphi(-1) = \int_{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est un maximum ; $\varphi(0) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est un minimum.

c) Pour calculer les valeurs approchées de $\varphi(-1)$ et $\varphi(0)$, étudions l'application f dans l'intervalle $[-1, 1]$. Cette application se comporte comme l'application $P(x) = x^3 - x + 1$ qui est dérivable de dérivée $3\,x^2 - 1$ donc f est croissante dans $[-1, -1/\sqrt{3}]$ décroissante dans $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ et croissante dans $[1/\sqrt{3}, 1]$. De plus on a

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}} \simeq 0{,}85\,;$$

de même

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}} \simeq 1{,}10\,,$$

le graphe de f dans $[-1, 1]$ est donc le suivant

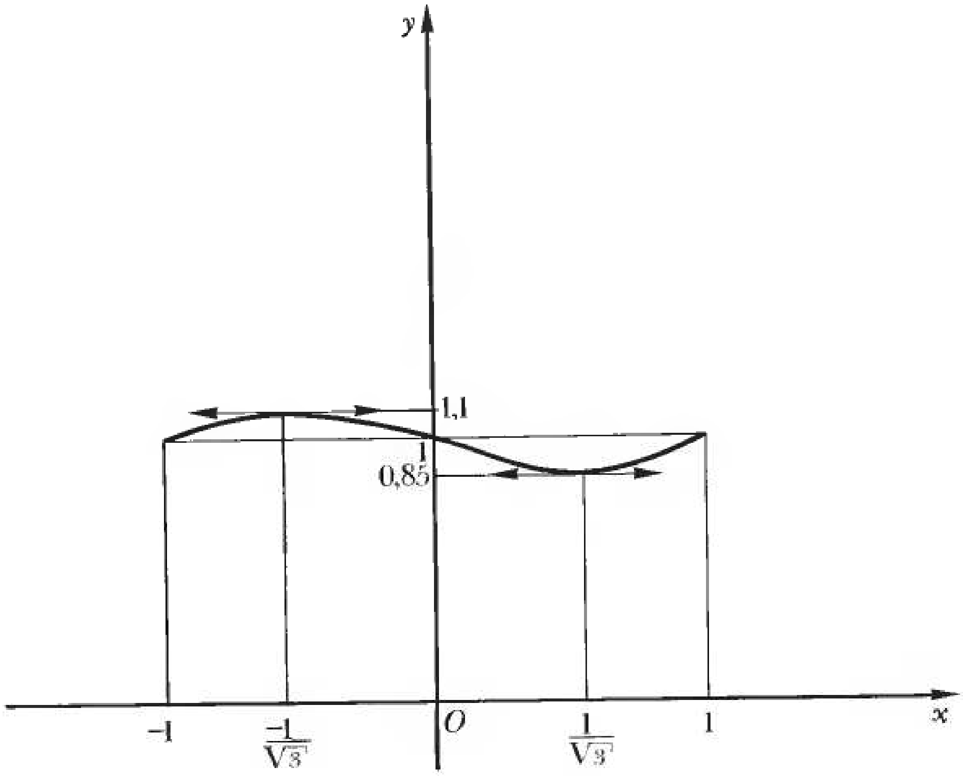

FIG. 8.5.1

Par suite $1 \leqslant \varphi(-1) \leqslant 1{,}10$ et $0{,}85 \leqslant \varphi(1) \leqslant 1$.

c) En faisant un développement limité de f au voisinage de l'infini nous trouvons

$$f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^{1/3} = x - \frac{1}{3\,x} + \frac{r(x)}{x} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to \infty} r(x) = 0\,.$$

De la question 4° il résulte que

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3\,x} + \frac{\rho(x)}{x} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to \infty} \rho(x) = 0\,.$$

Par conséquent le graphe de φ admet comme asymptote la droite $y = x + \frac{1}{2}$.

Il se trouve au-dessus de l'asymptote lorsque x tend vers $-\infty$ et au-dessous lorsque x tend vers $+\infty$. Le graphe de φ est donc :

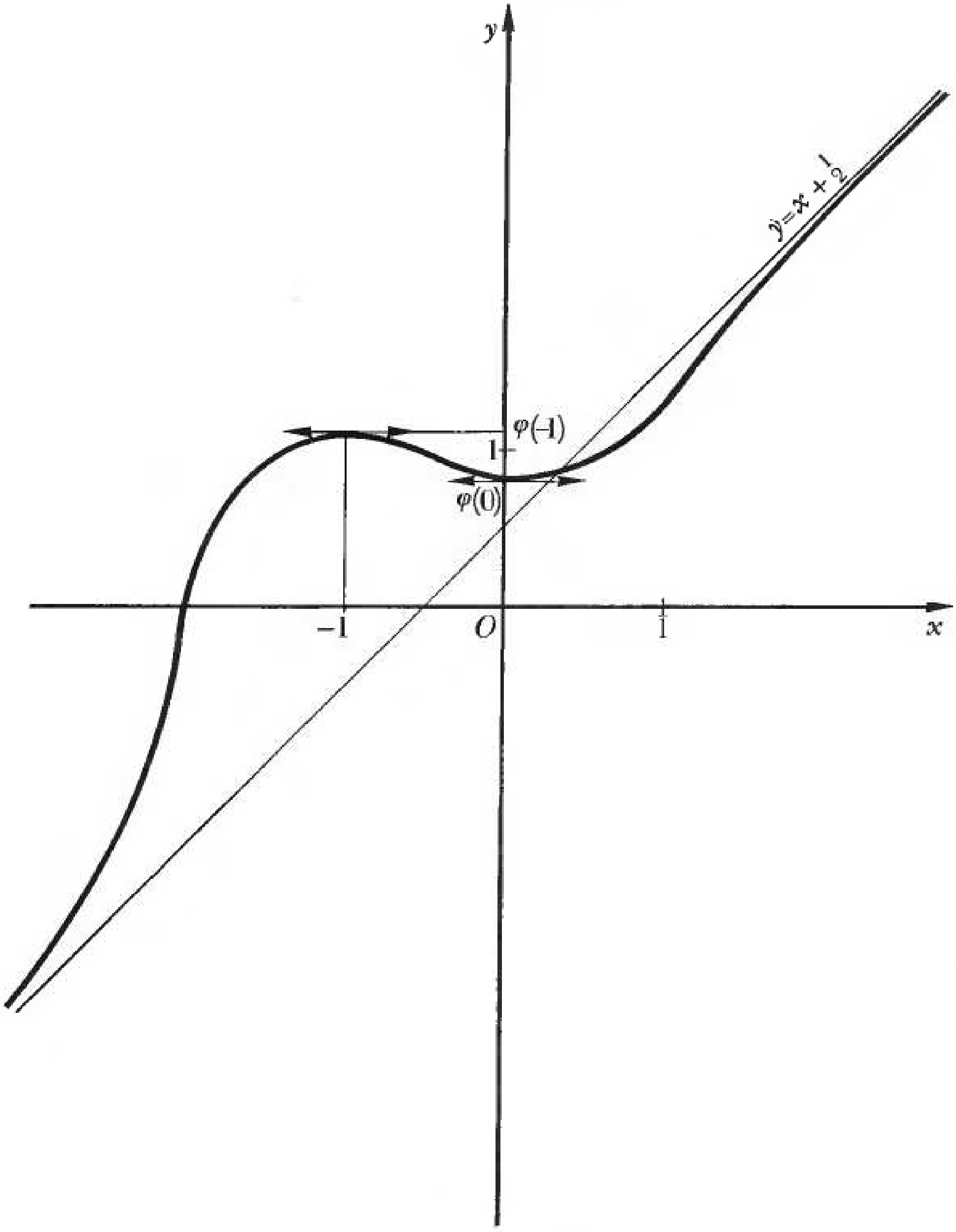

FIG. 8.5.2

8.6 Dans tout le problème on étudie des fonctions d'une variable réelle qui prennent, selon le cas, des valeurs positives ou strictement positives. On désigne par a un nombre réel.

1° Soit g_a la fonction définie en posant pour tout nombre réel x strictement positif,

$$g_a(x) = x^a \, e^{-1/x} .$$

Démontrer que $g_a(x)$ a une limite lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

On suppose désormais que g_a a été prolongée par continuité en 0 et on définit la fonction f_a en posant pour tout nombre réel x positif,

$$f_a(x) = \int_0^x t^a \, e^{-1/t} \, dt .$$

2° Démontrer que pour tout entier naturel n, la dérivée n-ième de la fonction g_a est de la forme

$$g_a^{(n)}(x) = x^{a-2n} \, e^{-1/x} \, P_{a,n}(x)$$

où $P_{a,n}$ est un polynôme de degré inférieur à n.

Calculer $P_{a,n}(x)$ pour $n = 0, 1, 2$ et écrire la relation permettant de calculer $P_{a,n}$ en fonction de $P_{a,n-1}$ et de sa dérivée.

3° Démontrer la relation

$$f_a(x) = x^{a+2} \, e^{-1/x} - (a+2) f_{a+1}(x)$$

4° Démontrer qu'il existe une suite de nombres $(C_{a,i})_{i \in \mathbf{N}}$ telle que

$$f_a(x) = x^{a+2} \, e^{-1/x} \sum_{i=0}^{k} C_{a,i} \, x^i + C_{a,k+1} \, f_{a+k+1}(x) ,$$

pour tout entier naturel k, et calculer les nombres $C_{a,i}$ ($i \in \mathbf{N}$).

5° Démontrer que pour tout nombre réel positif x, on a

$$0 \leqslant f_{a+1}(x) \leqslant x f_a(x)$$

6° Les fonctions f_a et $x \mapsto h_a(x) = x^{a+2} \, e^{-1/x}$ sont-elles équivalentes quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives ?

7° Résoudre l'équation différentielle

$$y' = 1 - x^{-2} y \qquad (E)$$

où y est une fonction de la variable x, qui ne prend que des valeurs strictement positives (on utilisera la fonction f_0).

Solution 1° Si $a > 0$,

$$\lim_{x \to 0+} x^a = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0+} e^{-1/x} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x \to 0+} g_a(x) = 0 .$$

Si $a \leqslant 0$ en posant $y = 1/x$ on a

$$g_a(x) = \frac{y^{-a}}{e^y} ,$$

or

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y^{-a}}{e^y} = 0$$

(*cf.* C. E., Ch. 6, § VIII, n° 93) donc

$$\lim_{x \to 0+} g_a(x) = 0 .$$

Par suite nous voyons que pour tout nombre réel a, on a

$$\lim_{x \to 0+} g_a(x) = 0$$

et nous poserons dans la suite $g_a(0) = 0$.

2° On a pour tout nombre réel x strictement positif,

$$g_a'(x) = ax^{a-1} e^{-1/x} + x^{a-2} e^{-1/x} = x^{a-2} e^{-1/x}(ax + 1)$$
$$g_a''(x) = ax^{a-2} e^{-1/x} + (ax + 1)\left[(a - 2) x^{a-3} e^{-1/x} + x^{a-4} e^{-1/x}\right]$$

soit

$$g_a''(x) = x^{a-4} e^{-1/x}[a(a - 1) x^2 + 2(a - 1) x + 1].$$

La proposition énoncée est donc vraie pour $n = 0, 1, 2$, et on a

$$\begin{aligned} P_{a,0}(x) &= 1 \\ P_{a,1}(x) &= ax + 1 \\ P_{a,2}(x) &= a(a - 1) x^2 + 2(a - 1) x + 1 . \end{aligned}$$

Pour démontrer le résultat général nous allons procéder par récurrence. Supposons que la dérivée $(n - 1)$-ième de g_a soit de la forme

$$g_a^{(n-1)}(x) = x^{a-2n+2} e^{-1/x} P_{a,n-1}(x)$$

où $P_{a,n-1}$ est un polynôme de degré $(n - 1)$ au plus. Alors on a

$$g_a^{(n)}(x) = x^{a-2n+2} e^{-1/x} P'_{a,n-1}(x) + x^{a-2n} e^{-1/x} P_{a,n-1}(x) + \\ + (a - 2n + 2) x^{a-2n+1} e^{-1/x} P_{a,n-1}(x)$$

soit

$$g_a^{(n)}(x) = x^{a-2n} e^{-1/x}[P_{a,n-1}(x) + x^2 P'_{a,n-1}(x) + (a + 2 - 2n) xP_{a,n-1}(x)] .$$

Posons

$$P_{a,n}(x) = x^2 P'_{a,n-1}(x) + (a + 2 - 2n) xP_{a,n-1}(x) + P_{a,n-1}(x) .$$

Alors on a

$$g_a^{(n)}(x) = x^{a-2n} e^{-1/x} P_{a,n}(x)$$

et comme le degré du polynôme $P_{a,n-1}$ est inférieur à $(n - 1)$, celui du polynôme $P_{a,n}$ est inférieur à n, d'où le résultat.

3° En intégrant par parties $\int_0^x t^{a+1}\,\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t$ on obtient

$$f_{a+1}(x) = \left[\frac{t^{a+2}}{a+2}\,\mathrm{e}^{-1/t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^a}{a+2}\,\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{a+2}}{a+2}\,\mathrm{e}^{-1/x} - \frac{1}{a+2} f_a(x)$$

d'où

$$f_a(x) = x^{a+2}\,\mathrm{e}^{-1/x} - (a+2) f_{a+1}(x)\,.$$

4° La relation démontrée à la question précédente fournit des nombres

$$C_{a,0} = 1,\ C_{a,1} = -(a+2)$$

tels que l'on ait

$$f_a(x) = x^{a+2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\,C_{a,0} + C_{a,1} f_{a+1}(x)\,.$$

Supposons trouvés des nombres $C_{a,0}, C_{a,1}, \dots, C_{a,k}$ tels que

$$f_a(x) = x^{a+2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\sum_{i=0}^{k-1} C_{a,i}\,x^i + C_{a,k} f_{a+k}(x)$$

alors en remplaçant $f_{a+k}(x)$ par $x^{a+k+2}\,\mathrm{e}^{-1/x} - (a+k+2) f_{a+k+1}(x)$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$f_a(x) = x^{a+2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\left[\sum_{i=0}^{k-1} C_{a,i}\,x^i + C_{a,k}\,x^k\right] - C_{a,k}(a+k+2) f_{a+k+1}(x)$$

donc en posant $C_{a,k+1} = -C_{a,k}(a+k+2)$ on a

$$f_a(x) = x^{a+2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\left(\sum_{=0}^{k} C_{a,i}\,x^i\right) + C_{a,k+1} f_{a+k+1}(x)\,.$$

Ceci démontre qu'il existe une suite $(C_{a,i})_{i\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telle que, pour tout entier naturel k, l'égalité ci-dessus soit satisfaite. Cette suite est définie de manière récurrente par $C_{a,0} = 1$ et $C_{a,k+1} = -C_{a,k}(a+k+2)$; on a donc $C_{a,1} = -(a+2)$, $C_{a,2} = (a+2)(a+3)$ et pour tout entier k,

$$C_{a,k} = (-1)^k (a+2)(a+3)\dots(a+k+1)\,.$$

5° $f_{a+1}(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0, x]$ donc

$$f_{a+1}(x) \geqslant 0$$

(*cf.* C. E., Ch. 8, § II, n° 118, *c*). Par ailleurs pour tout nombre réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant x$ on a $t^a\,\mathrm{e}^{-1/t} \geqslant 0$ donc $t^{a+1}\,\mathrm{e}^{-1/t} \leqslant x t^a\,\mathrm{e}^{-1/t}$ et on a (*loc. cit.*)

$$\int_0^x t^{a+1}\,\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t \leqslant x\int_0^x t^a\,\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t$$

soit

$$f_{a+1}(x) \leqslant x f_a(x)\,.$$

Par suite on a bien pour tout nombre réel x positif

$$0 \leqslant f_{a+1}(x) \leqslant x f_a(x) .$$

6° On a

$$\left| f_a(x) - x^{a+2} \, e^{-1/x} \right| = \left| (a+2) f_{a+1}(x) \right| \leqslant (a+2) \, x f_a(x)$$

or $x f_a(x) = o\big(f_a(x)\big)$ donc $f_a(x)$ est équivalente à $h_a(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

7° Pour les valeurs strictement positives de x, l'équation différentielle (E) s'écrit aussi

$$y' + \frac{1}{x^2} y = 1 .$$

L'équation homogène associée à l'équation (E) est

$$y' + \frac{1}{x^2} y = 0 . \tag{1}$$

Les solutions de l'équation (1) qui ne s'annulent pas sont celles de l'équation

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}$$

donc en intégrant

$$y = C e^{1/x}$$

où C est un nombre réel. Pour trouver les solutions de l'équation (E) appliquons la méthode de variation des constantes ; posons

$$y = C(x) \, e^{1/x} \tag{2}$$

où C est une fonction dérivable de x ; alors en dérivant (2) on obtient

$$y' = C'(x) \, e^{1/x} - \frac{C(x)}{x^2} \, e^{1/x}$$

et en portant dans l'équation (E) il vient

$$C'(x) \, e^{1/x} = 1$$

soit

$$C'(x) = e^{-1/x} . \tag{3}$$

En intégrant (3) on obtient alors

$$C(x) = f_0(x) + K$$

où K est un nombre réel, donc la forme générale des solutions de l'équation (E) est

$$y = \left(f_0(x) + K\right) \mathrm{e}^{1/x}$$

où K est un nombre réel.

8.7 On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et on associe à chaque fonction f de $\mathscr{C}$ la suite des nombres

$$C_k(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, x^k \, \mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbf{N}) .$$

I. 1° On désigne par f une fonction de $\mathscr{C}$ et par F la primitive de f qui s'annule pour la valeur $-\frac{1}{2}$. Calculer les nombres $C_k(F)$ en fonction des nombres $C_k(f)$.

2° Montrer que si P est un polynôme à coefficients réels et f une fonction de $\mathscr{C}$, l'intégrale

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) P(x) \, \mathrm{d}x$$

s'exprime simplement en fonction des nombres $C_k(f)$.

II. Dans cette partie a et h sont deux nombres réels tels que

$$0 < h \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ et } h \leqslant a \leqslant 1 - h$$

et on définit la fonction Φ_h sur $[-1, +1]$ par

$$\Phi_h(t) = \frac{1 - t^2}{1 - h^2} .$$

1° Etudier rapidement les variations de Φ_h et tracer son graphe.

2° Déterminer pour tout nombre t de $[-1, +1]$ la limite de la suite de terme général

$$u_n(t) = [\Phi_h(t)]^n .$$

3° Montrer sans calculer l'intégrale que la suite de terme général

$$v_n = \int_{a-1}^{a} [\Phi_h(t)]^n \, \mathrm{d}t$$

a pour limite $+\infty$ (On pourra considérer l'intégrale de la fonction Φ_h^n dans l'intervalle $[-h/2, h/2]$).

4° On désigne par g une fonction à valeurs réelles définie et continue dans l'intervalle $[a-1, a]$ et minorée dans $[-h, +h]$ par un nombre m strictement positif. Montrer que l'intégrale

$$\int_{a-1}^{a} g(t)\,[\Phi_h(t)]^n\,dt$$

est strictement positive dès que n est assez grand.

III 1° Montrer que si f est une fonction de $\mathscr{C}$ et si $f(0)$ n'est pas nul, les nombres $C_k(f)$ ne sont pas tous nuls. On pourra étudier pour une valeur convenable du paramètre réel h, l'intégrale

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,[\Phi_h(x)]^n\,dt\,.$$

2° Montrer que si la fonction f de $\mathscr{C}$ n'est pas nulle pour une valeur x_0 de l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, les nombres $C_k(f)$ ne sont pas tous nuls.

En déduire que l'application qui à toute fonction f de $\mathscr{C}$ associe la suite $(C_k(f))_{k\in\mathbf{N}}$ est injective.

Solution I. 1° Soit k un entier naturel. Calculons l'intégrale

$$C_k(F) = \int_{-1/2}^{1/2} F(x)\,x^k\,dx$$

au moyen d'une intégration par parties ; on obtient

$$C_k(F) = \left[\frac{F(x)\,x^{k+1}}{k+1}\right]_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,\frac{x^{k+1}}{k+1}\,dx$$

donc

$$C_k(F) = \frac{F(1/2)}{(k+1)\,2^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,x^{k+1}\,dx\,.$$

Or,

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx = C_0(f)$$

et

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,x^{k+1}\,dx = C_{k+1}(f)$$

donc

$$C_k(F) = \frac{1}{k+1}\left[\frac{C_0(f)}{2^{k+1}} - C_{k+1}(f)\right].$$

2° Posons

$$P(X) = \sum_{k=0} a_k X^k .$$

Alors on a

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, P(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=0}^{n} a_k f(x)\, x^k \,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, x^k \;\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k\, C_k(f) .$$

II. 1° $\Phi_h(t)$ est un trinôme du second degré en t qui atteint son maximum pour $t = 0$ et s'annule pour $t = -1$ et $t = +1$. L'ordonnée de son maximum est $\Phi_h(0) = 1/(1 - h^2)$ et son graphe est la parabole suivante

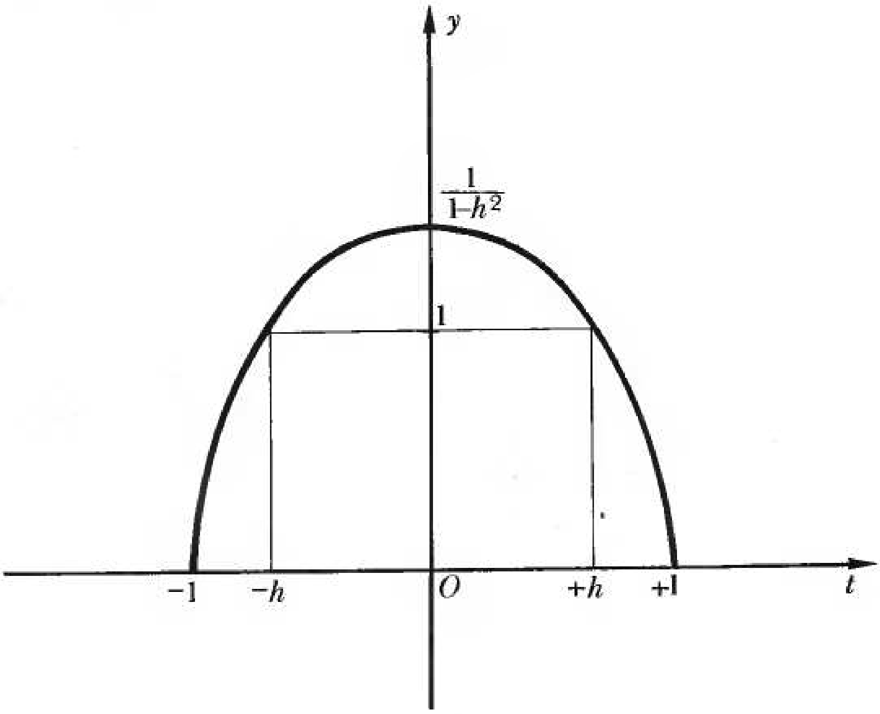

FIG. 8.7

2° On voit sur le graphe précédent que si t est un élément de $[-1, +1]$, on a

$$\begin{array}{lll} |\Phi_h(t)| < 1 & \text{si} & t \in [-1, -h[\, \cup\,]h, +1] \\ \Phi_h(t) = 1 & \text{si} & t = h \quad \text{ou} \quad t = -h \\ |\Phi_h(t)| > 1 & \text{si} & t \in]-h, +h[\end{array}$$

Par conséquent

$$\text{si} \quad t \in [-1, -h[\cup]h, +1], \ \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = 0$$

$$\text{si} \quad t = h \quad \text{ou} \quad t = -h, \ \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = 1$$

$$\text{si} \quad t \in]-h, +h[, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = +\infty .$$

3° On a les inégalités

$$-1 \leqslant a - 1 \leqslant -\frac{h}{2} \leqslant \frac{h}{2} \leqslant a \leqslant 1 ,$$

donc

$$v_n = \int_{a-1}^{-h/2} [\Phi_h(t)]^n \, dt + \int_{-h/2}^{+h/2} [\Phi_h(t)]^n \, dt + \int_{h/2}^{a} [\Phi_h(t)]^n \, dt .$$

Comme la fonction $[\Phi_h(t)]^n$ ne prend que des valeurs positives dans $[-1, +1]$ les trois intégrales ci-dessus sont positives, donc

$$v_n \geqslant \int_{-h/2}^{h/2} [\Phi_h(t)]^n \, dt .$$

Or

$$\int_{-h/2}^{h/2} [\Phi_h(t)]^n \, dt \geqslant h \inf_{t\in[-h/2,\, h/2]} [\Phi_h(t)]^n \qquad (cf., \text{C. E., Ch. 8, § II, n° 119})$$

et

$$\inf_{t\in[-h/2,\, h/2]} [\Phi_h(t)]^n = \left[\Phi_h\left(\frac{h}{2}\right)\right]^n = u_n\left(\frac{h}{2}\right).$$

Mais on a vu à la question précédente que la suite $u_n(h/2)$ tend vers $+\infty$. Il en est donc de même de la suite de terme général $w_n = hu_n(h/2)$ et la suite (v_n) qui majore la suite (w_n) tend aussi vers $+\infty$.

4° On a les inégalités $a - 1 \leqslant -h \leqslant h \leqslant a$ donc on a

$$\int_{a-1}^{a} g(t)\,[\Phi_h(t)]^n \, dt = \int_{a-1}^{-h} g(t)\,[\Phi_h(t)]^n \, dt + \int_{-h}^{+h} g(t)\,[\Phi_h(t)]^n \, dt + \\ + \int_{h}^{a} g(t)\,[\Phi_h(t)]^n \, dt .$$

Observons que l'on a aussi

$$\left| \int_{a-1}^{-h} g(t)\,[\Phi_h(t)]^n \, dt \right| \leqslant \int_{a-1}^{-h} |g(t)|\,[\Phi_h(t)]^n \, dt \leqslant \left[\sup_{t\in[a-1,\,-h]} [\Phi_h(t)]^n \right] \times \\ \times \int_{a-1}^{-h} |g(t)| \, dt$$

soit en posant $M = \int_{a-1}^{-h} |g(t)|\, dt$ et en remarquant que

$$\operatorname*{Sup}_{t \in [a-1,\, -h]} [\Phi_h(t)]^n = [\Phi_h(-h)]^n = 1$$

on obtient

$$\left| \int_{a-1}^{-h} g(t)\, [\Phi_h(t)]^n\, dt \right| \leqslant M\, .$$

On démontre de la même manière que

$$\left| \int_{h}^{a} g(t)\, [\Phi_h(t)]^n\, dt \right| \leqslant N$$

avec $N = \int_h^a |g(t)|\, dt\, .$ Par suite on a

$$-(M+N) \leqslant \int_{a-1}^{-h} g(t)\, [\Phi_h(t)]^n\, dt + \int_h^a g(t)\, [\Phi_h(t)]^n\, dt \leqslant (M+N)\, .$$

D'autre part compte tenu des hypothèses on a

$$\int_{-h}^{+h} g(t)\, [\Phi_h(t)]^n\, dt \geqslant m \int_{-h}^{+h} [\Phi_h(t)]^n\, dt \geqslant m \int_{-h/2}^{+h/2} [\Phi_h(t)]^n\, dt$$

et on a vu à la question précédente que $\int_{-h/2}^{+h/2} [\Phi_h(t)]^n\, dt$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\int_{-h}^{+h} g(t)\, [\Phi_h(t)]^n\, dt$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ et il existe un entier P tel que pour tout entier $n \geqslant P$ on ait

$$\int_{-h}^{+h} g(t)\, [\Phi_h(t)]^n\, dt > (M+N)\, .$$

Alors, pour tout entier $n \geqslant P$ l'intégrale

$$\int_{a-1}^{a} g(t)\, [\Phi_h(t)]^n\, dt$$

est strictement positive.

III. 1° Pour appliquer le résultat précédent, il faut montrer que f est minorée sur un intervalle de la forme $[-h, +h]$.

Comme $f(0) \neq 0$ on peut supposer $f(0) > 0$. Posons $f(0)/2 = m$; comme f est continue en 0 il existe un nombre réel $h > 0$ tel que pour tout élément x de $[-h, +h]$ on ait $f(x) \geqslant m$.

D'après la question II.4 appliquée avec $a = \frac{1}{2}$, il existe un entier P tel que pour tout entier $n \geqslant P$ on ait

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,[\Phi_h(x)]^n\,dx > 0\,.$$

Or $[\Phi_h(x)]^n$ est une fonction polynôme en x de degré $2\,n$; soient $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ ses coefficients ; alors en appliquant le résultat de la question I.2 on obtient

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,[\Phi_h(x)]^n\,dx = \sum_{k=0}^{2n} a_k\,C_k(f)$$

par suite, l'un au moins des nombres $C_k(f)$ $(0 \leqslant k \leqslant 2\,n)$ est non nul.

2° On se ramène au cas précédent au moyen du changement de variable $y = x - x_0$,

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,[\Phi_h(x)]^n\,dx = \int_{-1/2-x_0}^{1/2-x_0} f(y)\,[\Phi_h(y)]^n\,dy\,.$$

On applique le même résultat avec $a = \frac{1}{2} - x_0$ et la fonction polynôme $P(x) = [\Phi_h(x - x_0)]^n$.

Soit A l'application de l'espace vectoriel réel $\mathscr{C}$ dans l'espace vectoriel réel des suites de nombres réels, définie en posant pour chaque élément f de $\mathscr{C}$,

$$A(f) = (C_k(f))_{k \in \mathbf{N}}\,.$$

Cette application est linéaire ; en effet, si f, g sont deux éléments de $\mathscr{C}$ et λ, μ deux nombres réels, alors pour tout entier naturel k on a

$$\begin{aligned} C_k(\lambda f + \mu g) &= \int_{-1/2}^{1/2} (\lambda f + \mu g)(x)\,dx \\ &= \lambda \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx + \mu \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\,dx = \lambda C_k(f) + \mu C_k(g) \end{aligned}$$

par suite on a

$$A(\lambda f + \mu g) = \lambda A(f) + \mu A(g)\,.$$

Le noyau de A se compose des applications f de $\mathscr{C}$ telles que l'on ait pour tout entier naturel k, $C_k(f) = 0$; or on a vu que si $f \neq 0$ il existe un entier k tel que $C_k(f) \neq 0$, donc $\operatorname{Ker} A = \{\,0\,\}$ et l'application A est injective.

8.8 I. *a*) Si f est une fonction réelle de variable réelle, montrer en utilisant le critère de Cauchy que si $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x |\,f(t)\,|\,dt$ existe, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)dt$ existe.

b) Démontrer que si α est un nombre réel strictement positif, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^\alpha} \, dt$$

existe.

c) Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x \cos x^2$ et f' sa dérivée. Les quantités

$$\int_0^x e^{-t} f(t) \, dt \quad \text{et} \quad \int_0^x e^{-t} f'(t) \, dt$$

admettent-elles des limites quand x tend vers $+\infty$?

II. *a*) Soit g une fonction continue de variable réelle, à valeurs réelles et telle que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$.

Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y' + y = g(x) . \tag{1}$$

b) Montrer que pour tout nombre réel strictement positif ε il existe des nombres réels X et X_1 tels que $0 < X < X_1$ et pour tout $x > X_1$ on ait

$$\left| \int_X^x g(t) \, e^{-(x-t)} \, dt - L \right| < \varepsilon .$$

En déduire que si la fonction y est solution de l'équation (1) alors

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = L .$$

III. *a*) Soit h une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ admettant une fonction dérivée continue ; vérifier l'égalité

$$\int_0^x e^{-t} h'(t) \, dt = e^{-x} h(x) - h(0) + \int_0^x e^{-t} h(t) \, dt .$$

b) On suppose que $\int_0^x e^{-t} h'(t) \, dt$ tend vers une limite finie L_1 lorsque x tend vers $+\infty$. Déterminer une fonction réelle de variable réelle g, continue et ayant une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, telle que

$$\int_0^x e^{-t} h(t) \, dt$$

soit solution de l'équation différentielle (1).

c) Montrer que l'existence d'une limite L_1 pour

$$\int_0^x e^{-t} h'(t) \, dt$$

lorsque x tend vers $+\infty$, entraîne l'existence d'une limite pour

$$\int_0^x e^{-t}\, h(t)\,dt \qquad \text{et pour} \qquad e^{-x}\, h(x)\,.$$

d) Réciproquement, le fait que $\int_0^x e^{-t}\, h(t)\,dt$ possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$ entraîne-t-il l'existence d'une limite pour

$$\int_0^x e^{-t}\, h'(t)\,dt$$

lorsque x tend vers $+\infty$?

Solution I. *a*) Posons

$$F(x) = \int_1^x |f(t)|\,dt \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_1^x f(t)\,dt\,.$$

Dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe est équivalent d'après le critère de Cauchy à

$$(\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*)\,(\exists X\in\mathbf{R})\,(\forall x\in\,]X,+\infty[)\,(\forall x'\in\,]X,+\infty[)\,[|F(x)-F(x')|<\varepsilon]\,.$$

Montrons que G satisfait aussi au critère de Cauchy ; on a

$$|G(x)-G(x')| = \left|\int_x^{x'} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x'} |f(t)|\,dt\right| = |F(x)-F(x')|\,.$$

Donc

$$(\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*)\,(\exists X\in\mathbf{R})\,(\forall x\in\,]X,+\infty[)\,(\forall x'\in\,]X,+\infty[)\,[|G(x)-G(x')|<\varepsilon]$$

d'où on déduit que $G(x)$ possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Une intégration par parties donne

$$\int_1^x \frac{\cos t}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{\sin t}{t^\alpha}\right]_1^x + \alpha\int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

$$= \frac{\sin x}{x^\alpha} - \sin 1 + \alpha\int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\,dt\,.$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} = 0$$

et d'après la question précédente pour que $\int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ ait une limite lorsque x tend vers $+\infty$, il suffit que $\int_1^x \frac{|\sin t|}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ en ait une. Comme

$$\frac{|\sin t|}{t^{\alpha+1}} \geqslant 0$$

la fonction $H(x) = \int_1^x \frac{|\sin t|}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ est croissante. Montrons qu'elle est majorée. On a

$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) < \frac{1}{\alpha}$$

car $x > 1$ et $\alpha > 0$. La fonction H est croissante et majorée ; elle possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$, par suite $\int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ en possède une aussi.

c) On a

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t\,.$$

En faisant le changement de variable $u = t^2$ et en posant

$$A = \int_0^1 \cos t^2\,\mathrm{d}t\,,$$

on trouve

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = A + \int_1^x \cos t^2\,\mathrm{d}t = A + \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

D'après *b*), $\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ existe donc $\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

On a

$$f'(t) = \mathrm{e}^t(\cos t^2 - 2\,t \sin t^2)$$

d'où

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f'(t)\,\mathrm{d}t = -\,2\int_0^x t \sin t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Nous savons déjà que $\int_0^x \cos t^2 \, dt$ possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$. D'autre part on a

$$\int_0^x - 2t \sin t^2 \, dt = \cos x^2 - 1$$

donc $\int_0^x - 2t \sin t^2 \, dt$ ne possède pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$; par suite

$$\int_0^x e^{-t} f'(t) \, dt$$

n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

II. *a*) L'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$y' + y = 0\,. \tag{2}$$

Les solutions de l'équation (2) qui ne s'annulent pas sont celles de l'équation

$$\frac{y'}{y} = -1 \tag{3}$$

d'où en intégrant

$$y = C e^{-x}$$

où C est un nombre réel.

Pour trouver la solution générale de l'équation (1) appliquons la méthode de variation des constantes ; posons

$$y = C(x) e^{-x} \tag{4}$$

où C est une fonction dérivable de x ; en dérivant (4) on obtient

$$y' = C'(x) e^{-x} - C(x) e^{-x}$$

d'où en portant dans l'équation (1)

$$C'(x) e^{-x} = g(x)$$

soit

$$C'(x) = g(x) e^{x}$$

et

$$C(x) = \int_0^x e^t g(t) \, dt + \lambda$$

où λ est un nombre réel. La solution générale de l'équation (1) est donc

$$y = e^{-x}\left(\int_0^x e^t g(t)\,dt + \lambda\right)$$

où λ est un nombre réel.

b) Si X et x sont deux nombres réels tels que $X < x$ on a

$$\begin{aligned}\int_X^x g(t)\,e^{-(x-t)}\,dt - L &= e^{-x}\int_X^x g(t)\,e^t\,dt - e^{-x}\int_X^x L\,e^t\,dt + \\ &\qquad\qquad + e^{-x}\int_X^x L\,e^t\,dt - L \\ &= e^{-x}\int_X^x (g(t) - L)\,e^t\,dt + L\,e^{-x}[e^t]_X^x - L \\ &= e^{-x}\int_X^x (g(t) - L)\,e^t\,dt - L\,e^{X-x}\,.\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = L$ pour tout nombre réel α strictement positif, il existe un nombre réel X tel que pour tout $x \geqslant X$ on ait $|g(t) - L| < \alpha$. Pour cet X nous obtenons la majoration

$$\left|\int_X^x g(t)\,e^{-(x-t)}\,dt - L\right| \leqslant \alpha\,e^{-x}\int_X^x e^t\,dt + |L|\,e^{X-x};$$

or

$$\alpha\,e^{-x}\int_X^x e^t\,dt + |L|\,e^{X-x} \leqslant \alpha(1 - e^{X-x}) + |L|\,e^{X-x} \leqslant \alpha + (|L| - \alpha)\,e^{X-x}$$

donc

$$\left|\int_X^x g(t)\,e^{-(x-t)}\,dt - L\right| \leqslant \alpha + (|L| - \alpha)\,e^{X-x}\,.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ il existe un nombre réel X_1 que l'on peut choisir supérieur à X, tel que pour tout $x > X_1$ on ait $(|L| - \alpha)\,e^{X-x} \leqslant \alpha$. On a alors pour $x > X_1$

$$\left|\int_X^x g(t)\,e^{-(x-t)}\,dt - L\right| \leqslant 2\,\alpha$$

ce qui démontre l'inégalité cherchée en prenant pour tout nombre réel ε strictement positif, $\alpha = \varepsilon/2$.

Si y est une solution de l'équation (1) nous savons que

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t\, g(t)\, \mathrm{d}t + \lambda\right).$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. Nous savons qu'il existe deux nombres réels X et X_1 tels que $0 < X < X_1$ et tels que pour tout $x \geqslant X_1$ on ait

$$\left| \int_X^x g(t)\, \mathrm{e}^{-(x-t)}\, \mathrm{d}t - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors

$$| y(x) - L | = \left| \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t\, g(t)\, \mathrm{d}t + \lambda\, \mathrm{e}^{-x} - L \right| \leqslant \mathrm{e}^{-x} \left| \int_0^X \mathrm{e}^t\, g(t)\, \mathrm{d}t + \lambda \right| +$$
$$+ \left| \int_X^x \mathrm{e}^{-(x-t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t - L \right| .$$

Comme $\left| \int_0^X \mathrm{e}^t\, g(t)\, \mathrm{d}t + \lambda \right|$ est une constante et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, il existe un nombre réel X_2 tel que pour tout $x \geqslant X_2$ on ait

$$\mathrm{e}^{-x} \left| \int_0^X \mathrm{e}^t\, g(t)\, \mathrm{d}t + \lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour $x \geqslant \sup(X_1, X_2)$ on a

$$| y(x) - L | \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui prouve que

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = L .$$

III. *a*) En effectuant une intégration par parties on trouve

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-}\ h'(t)\, \mathrm{d}t = [\mathrm{e}^{-t}\, h(t)]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\, h(t)\, \mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{e}^{-x}\, h(x) - h(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\, h(t)\, \mathrm{d}t .$$

b) Pour que $\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\, h(t)\, \mathrm{d}t$ soit solution de l'équation (1) il faut et suffit que l'on ait

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\, h(t)\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t\, g(t)\, \mathrm{d}t + \lambda\right)$$

d'où on tire

$$e^x \int_0^x e^{-t} h(t)\,dt = \int_0^x e^t g(t)\,dt + \lambda .$$

En dérivant par rapport à x les deux membres on trouve

$$e^x \left[e^{-x} h(x) + \int_0^x e^{-t} h(t)\,dt \right] = e^x g(x) .$$

La fonction g est donc nécessairement définie par

$$g(x) = e^{-x} h(x) + \int_0^x e^{-t} h(t)\,dt .$$

La fonction g ainsi définie est évidemment continue ; il reste à montrer qu'elle admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. D'après l'égalité de III, *a*, on a

$$g(x) = \int_0^x e^{-t} h'(t)\,dt + h(0) \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = L_1 + h(0) .$$

c) D'après la question III, *b*, $\int_0^x e^{-t} h(t)\,dt$ est solution de l'équation (1) où figure une fonction g telle que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = L_1 + h(0) .$$

Mais d'après la question II, *b* nous savons que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t} h(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} g(x) = L_1 + h(0) .$$

En reportant ce résultat dans l'égalité III, *a* on trouve

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\int_0^x e^{-t} h'(t)\,dt + h(0) - \int_0^x e^{-t} h(t)\,dt \right) = 0 .$$

d) $\int_0^x e^{-} h(t)\,dt$ peut avoir une limite quand x tend vers $+\infty$ sans que

$$\int_0^x e^{-t} h'(t)\,dt$$

en ait une. La fonction $x \mapsto f(x) = e^x \cos x^2$ étudiée dans la question I, *c* fournit un exemple de cette situation.

8.9 1° Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue, deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit x_0 un élément de $]a, b[$; montrer qu'il existe un nombre réel $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(x_0) = \frac{f''(\xi)}{2}(x_0 - a)(x_0 - b).$$

(On pourra étudier la fonction $x \mapsto f_1(x) = f(x) - (A/2)(x - a)(x - b)$ où

$$A = \frac{2f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}\Bigg).$$

2° Soit g une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle qu'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout élément x de $[a, b]$ on ait

$$m \leqslant g''(x) \leqslant M.$$

Démontrer que l'on a pour tout élément x de $[a, b]$

$$M\frac{(x - a)(x - b)}{2} \leqslant g(x) - g(a)\frac{x - b}{a - b} - g(b)\frac{x - a}{b - a} \leqslant m\frac{(x - a)(x - b)}{2}$$

En déduire les relations

$$-M\frac{(b - a)^3}{12} \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b - a}{2}(g(a) + g(b)) \leqslant -m\frac{(b - a)^3}{12}. \qquad (1)$$

3° En appliquant la double inégalité (1) à la fonction Log sur l'intervalle $[n, n + 1]$ (où $n \in \mathbf{N}^*$), démontrer la relation

$$\frac{1}{12(n + 1)^2} \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)(\mathrm{Log}\,(n + 1) - \mathrm{Log}\,n) - 1 \leqslant \frac{1}{12\,n^2}.$$

4° On pose pour tout entier n non nul,

$$u_n = \mathrm{Log}\,(n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}) - \mathrm{Log}\,(n\,!)$$

et pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$v_n = u_n + \frac{1}{12(n - 1)}.$$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite C et que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$

$$C - \frac{1}{12(n - 1)} < u_n < C \qquad (2)$$

5° On pose pour tout entier $n \in \mathbf{N}$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

Démontrer les relations : $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$,

$$I_0 > I_1 > \cdots > I_n > I_{n+1} > \cdots$$

et

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \text{pour tout entier} \qquad n \geqslant 2 .$$

En déduire les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1}.

6° Démontrer la relation

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{4n}(n\,!)^4}{((2\,n)\,!)^2\, n}$$

et en déduire que

$$C = -\tfrac{1}{2} \operatorname{Log} 2\,\pi .$$

Solution 1° On a $f_1(a) = f(a) = 0, f_1(b) = f(b) = 0, f_1(x_0) = 0$. D'après le théorème de Rolle il existe un nombre réel $\eta \in]a, x_0[$ et un nombre réel $\eta' \in]x_0, b[$ tels que $f_1'(\eta) = f_1'(\eta') = 0$. En appliquant à nouveau le théorème de Rolle on trouve un nombre réel $\xi \in]\eta, \eta'[$ tel que $f''_1(\xi) = 0$. Mais

$$f_1'(x) = f'(x) - Ax + \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad f_1''(x) = f''(x) - A ;$$

donc

$$f_1''(\xi) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad A = f''(\xi)$$

et on obtient l'égalité cherchée.

2° Considérons la fonction h définie par

$$h(x) = g(x) - g(a)\frac{x-b}{a-b} - g(b)\frac{x-a}{b-a} .$$

On a $h(a) = h(b) = 0$ et h est deux fois dérivable sur $[a, b]$. En appliquant le résultat précédent à la fonction h on trouve pour tout élément x de $]a, b[$ un nombre réel $\xi \in]a, b[$ tel que

$$h(x) = \frac{h''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) .$$

Mais $h''(\xi) = g''(\xi)$. Tenant compte du fait que $(x-a)(x-b)$ est négatif on obtient

$$M\frac{(x-a)(x-b)}{2} \leqslant h(x) \leqslant m\frac{(x-a)(x-b)}{2} .$$

Comme les inégalités, sont évidemment vraies pour $x = a$ et $x = b$, on a bien démontré l'inégalité demandée pour tout élément x de $[a, b]$. L'intégrale conservant les inégalités, on en déduit

$$\frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{m}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x\,.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \int_a^b [x^2-(a+b)\,x+ab]\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx\right]_a^b \\
&\quad = \frac{b^3}{3} - \frac{(a+b)\,b^2}{2} + ab^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{(a+b)\,a^2}{2} - a^2\,b \\
&\quad = \frac{2\,b^3-3\,ab^2-3\,b^3+6\,ab^2-2\,a^3+3\,a^3+3\,a^2\,b-6\,a^2\,b}{6} = -\frac{(b-a)^3}{6}\,.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{g(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)\,\mathrm{d}x - \frac{g(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{g(a)\,(a-b)^2}{2(a-b)} - \frac{g(b)\,(b-a)^2}{2(b-a)} \\
&= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\,(g(a)+g(b))\,.
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$-M\frac{(b-a)^3}{12} \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{(b-a)}{2}\,(g(a)+g(b)) \leqslant -m\frac{(b-a)^3}{12}\,. \qquad (1)$$

3° On a

$$\int_n^{n+1} \operatorname{Log} x\,\mathrm{d}x = [x \operatorname{Log} x - x]_n^{n+1} = (n+1)\operatorname{Log}(n+1) - n\operatorname{Log} n - 1\,.$$

La dérivée seconde de Log x étant $-1/x^2$ on a

$$M = -\frac{1}{(n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad m = -\frac{1}{n^2}\,.$$

L'inégalité (1) devient

$$\frac{1}{12(n+1)^2} \leqslant (n+1)\operatorname{Log}(n+1) - n\operatorname{Log} n - 1 - \frac{\operatorname{Log} n}{2} - \frac{\operatorname{Log}(n+1)}{2} \leqslant \frac{1}{12\,n^2}.$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{12(n+1)^2} \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)[\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n] - 1 \leqslant \frac{1}{12\,n^2}.$$

4° Calculons d'abord $u_{n+1} - u_n$. On obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \operatorname{Log}\left((n+1)^{n+(3/2)}\,e^{-n-1}\right) - \operatorname{Log}(n+1)\,! - \\ &\qquad - \operatorname{Log}(n^{n+(1/2)}\,e^{-n}) + \operatorname{Log}(n\,!) \\ &= \left(n+\frac{3}{2}\right)\operatorname{Log}(n+1) - n - 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} n + \\ &\qquad + n - \operatorname{Log}\frac{(n+1)\,!}{n\,!} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)[\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n] - 1\,. \end{aligned}$$

Comme

$$u_{n+1} - u_n \geqslant \frac{1}{12(n+1)^2} > 0$$

la suite (u_n) est strictement croissante. D'autre part

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{12\,n} - \frac{1}{12(n-1)} \\ &= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{12\,n(n-1)} < u_{n+1} - u_n - \frac{1}{12\,n^2} \leqslant 0 \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (1). Donc (v_n) est une suite strictement décroissante, de plus il est clair que pour tout entier $n > 2$ on a $u_n < v_n$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite elles convergent vers une limite commune C. La suite (u_n) étant croissante on a pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n < C$ et la suite (v_n) étant décroissante on a pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = v_n - \frac{1}{12(n-1)} > C - \frac{1}{12(n-1)},$$

d'où l'inégalité (2).

5° $$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}; \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1\,.$$

On a

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} (\sin x - 1) \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}x < 0$$

donc la suite (I_n) est strictement décroissante.

Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x . \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} [\sin^{n-1} x . \cos x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1} I_n \end{aligned}$$

d'où

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n\,.$$

On obtient donc bien

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}\,.$$

On a alors

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \cdot \pi$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

6° Nous savons que $I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$. On a donc

$$\frac{2^{2(n-1)}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} > \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} > \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

En multipliant par $\dfrac{n(2\,n)\,!}{2^{2n-1}(n\,!)^2}$ on trouve

$$1 = \frac{n.2\,n}{2\,n^2} > \frac{((2\,n)\,!)^2\,n}{2^{4n}(n\,!)^4}\,\pi > \frac{2\,n}{2\,n+1}\,.$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\,n}{2\,n+1} = 1\,,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n\,!)^4}{((2\,n)\,!)^2\,n} = \pi\,.$$

D'après 4° nous savons que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{Log}\,(n^{n+(1/2)}\,\mathrm{e}^{-n}) - \mathrm{Log}\,n\,!\right) = C;$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+(1/2)}\,\mathrm{e}^{-n}}{n\,!} = \mathrm{e}^{C}\,.$$

Par suite, lorsque n tend vers $+\infty$ on a

$$n\,! \sim n^{n+(1/2)}\,\mathrm{e}^{-n-C} \qquad \text{et} \qquad (2\,n)\,! \sim (2\,n)^{2n+(1/2)}\,\mathrm{e}^{-2n-C}$$

et par suite

$$\frac{2^{4n}(n\,!)^4}{((2\,n)\,!)^2\,n} \sim \frac{2^{4n}\,n^{4n+2}\,\mathrm{e}^{-4n-4C}}{(2\,n)^{4n+1}\,n\,\mathrm{e}^{-4n-2C}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2C}$$

mais nous savons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n\,!)^4}{((2\,n)\,!)^2\,n} = \pi\,,$$

donc on a $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2C} = \pi$ d'où $C = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,2\,\pi$.

8.10 Soient f et g des fonctions continues à valeurs réelles, définies sur l'intervalle $[-1, +1]$. Soit M la fonction définie pour tout nombre réel u par

$$M(u) = \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} (f + ug)(x)\,.$$

Pour tout nombre réel u, on désigne par $E(u)$ l'ensemble des points x de l'intervalle $[-1, +1]$ tels que

$$(f + ug)(x) = M(u).$$

I. 1° Déterminer explicitement la fonction M et l'ensemble $E(u)$ pour tout nombre réel u dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad g(x) = x$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2, \qquad g(x) = 4x^2.$

On montrera que dans le cas (*b*) la fonction M n'est pas dérivable au point $\frac{1}{4}$.

2° On suppose que $g(x) = x$ pour tout élément x de $[-1, +1]$. Démontrer qu'il existe une fonction f et une seule, dérivable sur $]-1, +1[$, telle que $f(0) = 0$ et telle que pour tout élément u de l'intervalle $]-\pi/2, +\pi/2[$, $\sin u$ appartienne à $E(u)$. Déterminer la fonction M associée. Déterminer $E(u)$ pour tout nombre réel u.

II. On revient au cas général.

1° Soient u et v des nombres réels, x un point de $E(u)$, y un point de $E(v)$. Montrer que l'on a

$$(v - u)\,g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v - u)\,g(y).$$

2° Montrer que la fonction M est continue.

3° Soit φ une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $[-1, +1]$ telle que pour tout u de $\mathbf{R}$, $\varphi(u)$ appartienne à $E(u)$; on pose $h = g \circ \varphi$. Montrer que si $u < v < w$ et si y est un élément de $E(v)$, alors $h(u) \leqslant g(y) \leqslant h(w)$.

4° Montrer que pour tout nombre réel v, h admet une limite à droite et une limite à gauche au point v et qu'on a

$$\lim_{u \to v-} h(u) \leqslant \operatorname*{Inf}_{y \in E(v)} g(y) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y \in E(v)} g(y) \leqslant \lim_{u \to v+} h(u).$$

5° Soit v un nombre réel ; montrer qu'on peut extraire de la suite

$$\left(v + \frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$$

une suite (w_k) telle que la suite $(\varphi(w_k))$ admette une limite finie y. Montrer que y appartient à $E(v)$ et en déduire que

$$\lim_{u \to v+} h(u) = \operatorname*{Sup}_{x \in E(v)} g(x).$$

Indiquer comment on démontrerait que

$$\lim_{u \to v-} h(u) = \operatorname*{Inf}_{x \in E(v)} g(x).$$

6° Démontrer l'équivalence des trois conditions suivantes :

(α) h est continue au point v.

(β) g est constante sur l'ensemble $E(v)$.

(γ) M est dérivable au point v.

Solution 1° *a*) Nous avons $(f + ug)(x) = \sqrt{1 - x^2} + ux$. Etudions la fonction $f + ug$ sur l'intervalle $[-1, +1]$; on a

$$(f + ug)(-1) = -u$$
$$(f + ug)(1) = u$$

et si $x \in]-1, +1[$

$$(f + ug)'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} + u = \frac{-x + u\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

La fonction dérivée s'annule si et seulement si $x = u\sqrt{1 - x^2}$ soit

$$x^2 = u^2(1 - x^2) \qquad \text{soit encore} \qquad x = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}$$

car x est du même signe que u. On a

$$(f + ug)\left(\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\right) = \sqrt{1 - \frac{u^2}{1 + u^2}} + \frac{u^2}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 + u^2}} = \sqrt{1 + u^2}.$$

Or on a $(f + ug)(1) = u$, $(f + ug)(-1) = -u$, et $|t| \leqslant \sqrt{1 + t^2}$ pour tout nombre réel t, donc nécessairement $M(u) = \sqrt{1 + u^2}$. L'ensemble $E(u)$ est l'ensemble des points x de $[-1, +1]$ tels que $(f + ug)(x) = M(u)$, mais l'étude de la fonction prouve que $f + ug$ présente un et un seul maximum local sur $[-1, +1]$ donc la valeur $M(u)$ est prise une seule fois d'où

$$E(u) = \left\{\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\right\}.$$

b) Nous avons $(f + ug)(x) = x^4 + (4u - 2)x^2$. Etudions la fonction $f + ug$ sur l'intervalle $[-1, +1]$; on a

$$(f + ug)(-1) = (f + ug)(1) = 4u - 1$$
$$(f + ug)'(x) = 4x^3 - 4x(1 - 2u) = 4x(x^2 + 2u - 1).$$

Nous devons donc distinguer les cas $2u - 1 \geqslant 0$ et $2u - 1 < 0$.

Si $2u - 1 < 0$, $f + ug$ admet un maximum local au point 0 et des minimums locaux aux points $\sqrt{1 - 2u}$ et $-\sqrt{1 - 2u}$; nous devons donc comparer $(f + ug)(0) = 0$ et $(f + ug)(1) = 4u - 1$.

Si $4u - 1 > 0$, $M(u) = 4u - 1$ et si $4u - 1 \leqslant 0$, $M(u) = 0$. La fonction M est donc définie par $M(u) = 4u - 1$ si $u \geqslant \frac{1}{4}$ et $M(u) = 0$ si $u < \frac{1}{4}$. Il est clair que M est continue, qu'elle admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche au point $\frac{1}{4}$ et que celles-ci sont différentes puisque

$$M'_d(\tfrac{1}{4}) = 4 \qquad \text{et} \qquad M'_g(\tfrac{1}{4}) = 0\,.$$

De l'étude déjà faite on déduit immédiatement que si $u > \frac{1}{4}, E(u) = \{-1, +1\}$;

$$E(\tfrac{1}{4}) = \{-1, 0, +1\}\ ; \quad \text{et si} \quad u < \tfrac{1}{4}, E(u) = \{0\}\,.$$

2° Nous cherchons une fonction f telle que la fonction $F(x) = f(x) + ux$ admette un maximum au point $\sin u$. Il faut avoir pour cela $F'(\sin u) = 0$ c'est-à-dire $f'(\sin u) = -u$, ce qui pour $-\pi/2 < u < \pi/2$ équivaut à

$$f'(x) = -\operatorname{Arc\,sin} x \quad \text{avec} \quad -1 < x < 1\,.$$

Comme $f(0) = 0$, on a nécessairement

$$f(x) = -\int_0^x \operatorname{Arc\,sin} t\,.\mathrm{d}t\,.$$

Cette intégrale se calcule par parties et on trouve

$$f(x) = [-t \operatorname{Arc\,sin} t]_0^x + \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} = -x \operatorname{Arc\,sin} x - \sqrt{1 - x^2} + 1\,.$$

Il est clair que pour obtenir une fonction continue sur $[-1, +1]$ il faut définir la fonction f aux points -1 et $+1$ par la même formule. Nous venons de démontrer que si le problème admet une solution, c'est nécessairement la fonction f définie sur $[-1, +1]$ par

$$f(x) = -x \operatorname{Arc\,sin} x - \sqrt{1 - x^2} + 1\,.$$

Vérifions maintenant que cette fonction convient ; on a bien $f(0) = 0$ et f est dérivable sur $]-1, +1[$. La dérivée $(f + ug)'(x) = -\operatorname{Arc\,sin} x + u$ s'annule une seule fois au point $\sin u$ si $u \in\,]-\pi/2, +\pi/2[$. Comme la fonction Arc sin est croissante, $(f + ug)'(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant \sin u$ et $(f + ug)'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant \sin u$, donc la fonction $f + ug$ admet un maximum et un seul au point $\sin u$. On a

$$(f + ug)(\sin u) = -u \sin u - \sqrt{1 - \sin^2 u} + 1 + u \sin u = 1 - \cos u$$

car $\cos u \geqslant 0$ pour $u \in\,]-\pi/2, +\pi/2[$.

Par suite on a pour $-\pi/2 < u < \pi/2$, $M(u) = 1 - \cos u$ et $\sin u \in E(u)$; si $u \geqslant \pi/2$ ou $u \leqslant -\pi/2$ la dérivée de $f + ug$ ne s'annule pas donc $M(u)$ est égal au plus grand des nombres $(f + ug)(1) = 1 - \pi/2 + u$ et $(f + ug)(-1) = 1 - (\pi/2) - u$.

Finalement on a

$$\begin{cases} M(u) = 1 - (\pi/2) - u & \text{si} \quad u \leqslant -\pi/2 \\ M(u) = 1 - \cos u & \text{si} \quad -\pi/2 < u < \pi/2 . \\ M(u) = 1 - (\pi/2) + u & \text{si} \quad u \geqslant \pi/2 \end{cases}$$

La fonction M est partout dérivable sauf peut-être aux points $-\pi/2$ et $\pi/2$ où toutefois elle admet des dérivées à droite et à gauche. Or on a $M'_d(\pi/2) = 1$ et $M'_g(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$, donc M est dérivable au point $\pi/2$; par ailleurs on a $M'_g(-\pi/2) = -1$ et $M'_d(-\pi/2) = \sin(-\pi/2) = -1$, donc M est dérivable au point $-\pi/2$, et par suite partout dérivable.

On a :

$$\begin{cases} E(u) = \{-1\} & \text{si} \quad u \leqslant -\pi/2 \\ E(u) = \{\sin u\} & \text{si} \quad -\pi/2 < u < \pi/2 . \\ E(u) = \{+1\} & \text{si} \quad u \geqslant \pi/2 \end{cases}$$

II. 1° D'après les hypothèses on a

$$M(u) = f(x) + ug(x)$$

et

$$M(v) = f(y) + vg(y) .$$

Comme $f(x) + vg(x) \leqslant M(v)$ on a

$$f(x) + vg(x) - [f(x) + ug(x)] \leqslant M(v) - M(u)$$

donc

$$(v - u)\,g(x) \leqslant M(v) - M(u) .$$

De même $f(y) + ug(y) \leqslant M(u)$ et par suite

$$f(y) + ug(y) - [f(y) + vg(y)] \leqslant M(u) - M(v)$$

donc $M(v) - M(u) \leqslant (v - u)\,g(y)$ ce qui démontre la double inégalité

$$(v - u)\,g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v - u)\,g(y) . \tag{1}$$

2° La fonction g étant continue sur $[-1, +1]$, elle est bornée sur cet intervalle. Posons

$$a = \sup_{x \in [-1,+1]} |g(x)| .$$

Si $a = 0$, la fonction g est la fonction nulle et la double inégalité (1) montre que M est constante donc continue.

Supposons $a \neq 0$ et montrons que M est continue au point u. La double inégalité (1) entraîne

$$|M(v) - M(u)| \leqslant a\,|v - u| ;$$

si ε est un nombre réel strictement positif, il suffit de prendre $|v - u| < \varepsilon/a$ pour avoir $|M(u) - M(v)| < \varepsilon$ ce qui prouve que M est continue.

3° La double inégalité (1) montre que si $u < v$, si x est un point de $E(u)$ et y un point de $E(v)$, alors $g(x) \leqslant g(y)$; mais par définition $\varphi(u)$ est dans $E(u)$ donc

$$h(u) = g[\varphi(u)] \leqslant g(y).$$

On démontre de la même manière que $g(y) \leqslant h(w)$ en remarquant que $\varphi(w)$ est un élément de $E(w)$.

4° Nous venons de démontrer que h est une fonction croissante ; or nous savons (C. E., Ch. 4, § V, n° 51) qu'une fonction croissante admet des limites à droite et à gauche en tout point et plus précisément que

$$\lim_{u \to v-} h(u) = \operatorname{Sup}_{u<v} h(u) \quad \text{et} \quad \lim_{u \to v+} h(u) = \operatorname{Inf}_{u>v} h(u).$$

On vient de voir que si y est dans $E(v)$ alors $g(y) \leqslant h(w)$ pour tout $w < v$, donc

$$g(y) \leqslant \operatorname{Inf}_{u>v} h(u);$$

comme cette inégalité est vraie pour tout élément y de $E(v)$ on a bien

$$\operatorname{Sup}_{y \in E(v)} g(y) \leqslant \lim_{u \to v+} h(u).$$

On démontre de manière analogue que

$$\lim_{u \to v-} h(u) \leqslant \operatorname{Inf}_{y \in E(v)} g(y)$$

et on trouve bien

$$\lim_{u \to v-} h(u) \leqslant \operatorname{Inf}_{y \in E(v)} g(y) \leqslant \operatorname{Sup}_{y \in E(v)} g(y) \leqslant \lim_{u \to v+} h(u).$$

5° La suite $\left(\varphi\left(v + \frac{1}{n}\right)\right)_{n \geqslant 1}$ est minorée par -1 et majorée par $+1$. On peut donc (*cf.* exercice 1.20) en extraire une suite convergente $(\varphi(w_k))$.

Posons

$$y = \lim_{k \to +\infty} \varphi(w_k).$$

Nous savons que

$$M(w_k) = f(\varphi(w_k)) + w_k\, g(\varphi(w_k));$$

pour tout élément x de $[-1, +1]$ on a

$$f(x) + w_k\, g(x) \leqslant M(w_k).$$

Sachant que

$$\lim_{k \to +\infty} w_k = v \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} \varphi(w_k) = y,$$

en utilisant la continuité de f et g on obtient par passage à la limite

$$f(x) + vg(x) \leqslant f(y) + vg(y).$$

Cette inégalité étant vraie pour tout élément x de $[-1, +1]$, elle prouve que y est un élément de $E(v)$. Or

$$\lim_{u \to v+} h(u) = \lim_{k \to +\infty} h(w_k) = \lim_{k \to +\infty} g(\varphi(w_k)) = g(y) .$$

Ce résultat joint à la formule (2) prouve que

$$\lim_{u \to v+} h(u) = \operatorname*{Sup}_{y \in E(v)} g(y) .$$

Pour montrer que

$$\lim_{u \to v-} h(u) = \operatorname*{Inf}_{y \in E(v)} g(y) ,$$

il suffit de montrer qu'il existe une suite (w'_k) extraite de la suite

$$\left(v - \frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$$

telle que $(\varphi(w'_k))$ converge vers un élément de $E(v)$.

La formule (2) devient

$$\lim_{u \to v-} h(u) = \operatorname*{Inf}_{y \in E(v)} g(y) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y \in E(v)} g(y) = \lim_{u \to v+} h(u) .$$

6° La fonction h est continue au point v si et seulement si

$$\lim_{u \to v-} h(u) = \lim_{u \to v+} h(u) ,$$

ce qui d'après la formule (3) est vrai si et seulement si

$$\operatorname*{Inf}_{y \in E(v)} g(y) = \operatorname*{Sup}_{y \in E(v)} g(y) ,$$

c'est-à-dire si et seulement si g est constante sur $E(v)$. Nous avons donc démontré que les conditions (α) et (β) sont équivalentes.

Montrons que la condition (α) implique la condition (γ). Si u est un nombre réel, nous savons que $\varphi(u)$ appartient à $E(u)$, et $\varphi(v)$ appartient à $E(v)$. La double inégalité (1) s'écrit alors

$$(v - u)\, g(\varphi(u)) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v - u)\, g(\varphi(v))$$

et pour $v \neq u$ on a

$$h(u) \leqslant \frac{M(v) - M(u)}{v - u} \leqslant h(v) ,$$

on a donc

$$\left| \frac{M(u) - M(v)}{u - v} - h(v) \right| \leqslant | h(u) - h(v) | .$$

La fonction h étant continue au point v,

$$\lim_{u \to v} | h(u) - h(v) | = 0 ,$$

et par suite

$$\lim_{u \to v} \frac{M(u) - M(v)}{u - v} = h(v)$$

ce qui prouve que M est dérivable au point v et que

$$M'(v) = h(v) = g(\varphi(v)) .$$

Remarquons que ce résultat est indépendant du choix de φ ; en effet, si la condition (α) est satisfaite, la condition (β) l'est aussi et g est constante sur $E(v)$.

Montrons maintenant que la condition (γ) entraîne la condition (β). Supposons M dérivable au point v et posons $D = M'(v)$. Si $v > u$ et si y est un élément de $E(v)$, la double inégalité (1) donne

$$\frac{M(v) - M(u)}{v - u} \leqslant g(y)$$

d'où

$$D = \lim_{u \to v-} \frac{M(v) - M(u)}{v - u} \leqslant g(y) .$$

De la même formule on déduit que si $v < u$, alors

$$\frac{M(v) - M(u)}{v - u} \geqslant g(y)$$

donc

$$D = \lim_{u \to v+} \frac{M(v) - M(u)}{v - u} \geqslant g(y) .$$

On a donc pour tout élément y de $E(v)$, $g(y) = D$ ce qui prouve que g est constante sur $E(v)$.

Notons que ces résultats permettent d'affirmer directement que la fonction M trouvée à la question $I(1)$ (b) n'est pas dérivable au point $\frac{1}{4}$, et que les fonctions M trouvées au $I(1)$ (a) et au $I(2)$ sont partout dérivables.

Imprimé en France — JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS
N° 11413. Dépôt légal : Mai 1983 — 7e édition — N° Armand Colin : 8.525