SERIES : *SET- TSE*

EXERCICE 1 ---------- [4 points]

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on donne le point A(12 ; 18). On désigne par B un point de l'axe $(O\,;\vec{u})$ et C un point de $(O\,;\vec{v})$ tels que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1°/ Démontrer que le couple $(x\,;y)$ est solution de l'équation :(E) : $2x + 3y = 78$ (*0,5pt*)

2°/ On se propose de trouver tous les couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a°/ Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. (*1pt*)

b°/ A partir de la définition de B et de C trouver une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de (E). (*0,5pt*)

c°/ Démontrer qu'un couple $(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x\,;y) = (12 + 3k\,;18 - 2k)$ où k est un entier relatif. (*1pt*)

d°/ Combien y a-t-il de couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$? (*1pt*)

EXERCICE 2 ---------- [5 points]

1°/ Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On considère l'application affine f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M(x\,;y)$ associe le point $M'(x'\,;y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$$

et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes

1°/a°/ f est-elle bijective ? Justifiez votre réponse (*0,5 pt*)

b°/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f. (*0,5 pt*)

c°/ Quelle est l'image par f de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x + 1$? (*1pt*)

2°/ On désigne par $M(x\,;y)$ le point d'affixe z et par **M'** le point d'affixe z' où z et z' sont deux nombres complexes

a°/ Sachant que $f(M) = M'$, exprimer z' en fonction de z. (*2pts*)

b°/ En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f (*1pt*)

TSVP ☛

PROBLÈME---**[**11 points**]**

A.// Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Unité 2cm

1°/ Déterminer l'ensemble de définition de f. (*0,5pt*)

2°/ Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet deux asymptotes dont on précisera les équations. (*1pt*)

3°/ Calculer $f\,'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f. (*1pt*)

4°/ a°/ Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point I (*1pt*)

b°/ Etudier la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (T) (*0,5pt*)

5°/ Tracer ($\mathcal{C}$) et (T) dans le même repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan. (*1,5pt*)

6°/ a°/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$ (*1pt*)

b°/ Calculer en cm² l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}$), (T) et la droite d'équation

$x = -\dfrac{1}{2}$ (*0,5pt*)

B.// Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}]$

par $h(x) = \dfrac{1}{2} f(\cos x)$ où f est la fonction définie en **A.//**

1°/ Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par

$g(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ (*0,5pt*)

2°/ Calculer l'intégrale K = $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sin x}dx$ (*0,5pt*)

3°/ Soit $(I_n)_{n\in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^n x}{\sin x}dx$

a°/ Calculer I_0 et I_1 (*0,5pt*)

b°/ Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx$ (*0,5pt*)

c°/ En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer I_2, I_3, I_4 et I_5 (*2 pts*)

EXERCICE 1 -- [*4 points*]

1°/ Montrer que pour tout entier relatif n les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux. (*1pt*)

2°/ On considère l'équation (**E**) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs

a°/ Vérifier en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution (x_0 ; y_0) de (**E**). (*1pt*)

b°/ Déterminer l'ensemble des solutions de (**E**) dans $\mathbb{R}^2$ (*1pt*)

c°/ <u>Application</u> : Déterminer les points de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $87x – 31y – 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100 (*1pt*)

<u>Indication</u> : On remarquera que le point M(x ; y) appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si le couple (x ; $–y$) vérifie l'équation (**E**)

EXERCICE 2 -- [*5 points*]

1°/ On veut déterminer trois nombres complexes Z_1, Z_2 et Z_3 ; les modules de ces complexes forment une suite géométrique de raison q = 2 et leurs arguments une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer ces trois nombres sachant que leur produit est $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 4 + 4i\sqrt{3}$ et l'argument de Z_1 appartient à $]0 ; \dfrac{\pi}{2}[$. On donnera les résultats sous forme trigonométrique. (*2pts*)

2°/ Soit f une fonction numérique à variable réelle x dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée f'.

a°/ x_0 étant un réel donné, la fonction qui à tout x réel associe $f(x_0)$ est elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Même question pour la fonction qui à x associe $f(x^2)$ (*1pt*)

b°/ Soit F une primitive de f. Exprimer les primitives des fonctions définies par :

$f_1(x) = f(2x)$; $f_2(x) = x f(x^2)$; $f_3(x) = f(x).F(x)$; $f_4(x) = f(x) + f(x_0)$;

$f_5(x) = x f(x^2).(F(x^2))^n$ où n est un entier naturel non nul.

TSVP ☛

PROBLÈME---**[**11 points**]**

A.// Soit la fonction numérique *f* définie sur ℝ par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Unité 2cm

1°/ Déterminer l'ensemble de définition de *f*. (*0,5pt*)

2°/ Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet deux asymptotes dont on précisera les équations. (*1pt*)

3°/ Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de *f*. (*1pt*)

4°/ a°/ Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point I (*1pt*)

b°/ Etudier la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (T) (*0,5pt*)

5°/ Tracer ($\mathcal{C}$) et (T) dans le même repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan. (*1,5pt*)

6°/ a°/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$ (*1pt*)

b°/ Calculer en cm² l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}$), (T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ (*0,5pt*)

B.// Soit *h* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie sur $]0 ; \frac{\pi}{2}]$ par

$h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x)$ où *f* est la fonction définie en **A.//**

1°/ Vérifier que *h* est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction *g* définie par

$g(x) = \frac{1}{\sin x}$ (*0,5pt*)

2°/ Calculer l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$ (*0,5pt*)

3°/ Soit $(I_n)_{n\in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$

a°/ Calculer I_0 et I_1 (*0,5pt*)

b°/ Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx$ (*0,5pt*)

c°/ En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de *n* puis calculer I_2, I_3, I_4 et I_5 (*2 pts*)