GÉOMÉTRIE

Michel CARRAL

ellipses

GÉOMÉTRIE

Cours et plus de 300 exercices avec solutions

Michel CARRAL
Professeur d'Université
IUFM Toulouse

Préface de Rudolf BKOUCHE
Professeur d'Université
Université des Sciences et des Technologies de Lille

ellipses

EDITION MARKETING
EDITEUR DES PREPARATIONS
GRANDES ECOLES MEDECINE
32, rue Bargue 75015 PARIS

ISBN 2-7298-9540-X

PRÉFACE

Pourquoi écrire aujourd'hui un ouvrage de géométrie élémentaire "à l'ancienne" ? Quel est l'intérêt de revenir, dans l'enseignement des mathématiques, à ces "vieilleries" que semblent être pour certains les traités de géométrie façon Legendre ou Lacroix dont on dit, depuis la réforme des *mathématiques modernes*, qu'ils s'appuient sur des évidences mal contrôlées, sur des raisonnements mal définis et qu'ils donnent une idée fausse de la *mathématique vivante* comme on disait à l'époque des *mathématiques modernes* triomphantes ?

Quelle qu'ait pu être la valeur de la construction euclidienne, faut-il encore l'enseigner ? Le rôle d'un enseignement scientifique est-il d'entretenir respectueusement une tradition ? n'est-il pas plutôt de permettre aux nouvelles générations d'accéder le plus rapidement possible aux connaissances de leur époque ?

Plutôt que de continuer les vaines querelles des Anciens et des Modernes qui ont fleuri lors de la réforme des *mathématiques modernes*, je poserai la question de la façon suivante : pourquoi faudrait-il enseigner aux élèves des collèges et des lycées la géométrie d'Euclide alors que l'on n'enseigne pas à ces mêmes élèves la physique d'Aristote ? autrement dit, pourquoi la question est-elle posée en mathématiques et non en physique ?

Il est clair qu'on ne peut répondre à une telle question en se plaçant du seul point de vue de l'opposition entre la tradition et la modernité ; les arguments se situent moins dans la volonté de défendre une tradition ou la volonté d'être moderne que dans une réflexion sur la signification d'un corpus de connaissances, sur la façon dont ce corpus s'est transformé au cours de l'histoire, sur les enjeux qu'ils représentent aujourd'hui.

On oublie trop souvent aujourd'hui que la Science a une histoire (à moins que l'on ne retienne de cette histoire que l'anecdote ou la mythologie) et que la compréhension de la Science se construit à travers des cheminements dont l'histoire, autant sinon plus que les théories dites de l'apprentissage, peut nous enseigner comment ils s'élaborent.

Non que l'enseignement ait à reconstituer les cheminements historiques, mais l'histoire nous enseigne l'existence de passages obligés(1) qui expliquent comment la connaissance se construit à travers des problématiques, nous enseigne aussi comment on répond à de telles problématiques.

Cela implique, dans l'enseignement lui-même, que l'on s'appuie sur de telles problématiques, quitte à les redéfinir, si besoin est, en tenant compte d'une part des connaissances de *ceux qui sont enseignés*, d'autre part des objectifs de l'enseignement lui-même, objectifs eux-mêmes liés aux raisons, multiples, qui conduisent à enseigner un domaine donné de la connaissance.

Si nous ne pouvons, dans cette préface, aborder la question dans sa généralité, nous nous proposons d'expliquer en quoi la construction euclidienne participe des problématiques que se posent les mathématiciens d'aujourd'hui, et en quoi elle constitue, sous les diverses formes

---

(1) Il importe de remarquer que ces passages obligés ne sont pas nécessairement les mêmes aux différents moments de l'histoire ; un des problèmes de l'enseignement consiste justement à expliciter de tels passages obligés. C'est le danger d'un certain mimétisme historique que cette façon de penser les obstacles épistémologiques rencontrés dans l'enseignement comme une simple répétition des obstacles épistémologiques rencontrés au cours de l'histoire.

que lui ont donné les grands traités classiques de géométrie élémentaire[2], une propédeutique à l'étude de la géométrie d'aujourd'hui, propédeutique sans laquelle la géométrie, et plus généralement les mathématiques d'aujourd'hui, risquent de n'apparaître que comme un discours purement technique dont la seule utilité serait d'être "appliqué", sans que l'on comprenne la signification de cette application, sans que l'on comprenne même la possibilité d'une telle application.

C'est donc à travers les problématiques sur lesquelles se construit la géométrie élémentaire que nous proposons de définir la place d'icelle dans l'enseignement.

Si la géométrie élémentaire répond d'abord à une problématique de mesure des grandeurs, celle-ci se définit à travers deux types de problèmes, l'égalité des grandeurs et la comparaison des grandeurs.

Mais si les deux problématiques de l'égalité et de la comparaison des grandeurs constituent le socle sur lequel se construit la géométrie, ce qui marque la naissance de la rationalité, c'est moins l'énoncé des conditions qui déterminent l'égalité et les relations de comparaison que la méthode qui conduit à l'établissement et à la validation de ces conditions.

Si la construction de la géométrie grecque est apparue, et apparaît encore pour qui se donne la peine et le plaisir de l'étudier, comme le modèle d'une construction rationnelle, c'est bien parce qu'elle s'est donnée pour tâche, moins de construire un monde idéel étranger à toute réalité sensible, que de mettre en relation ce monde idéel qui ressortit des seules règles du raisonnement et le monde de la réalité sensible. C'est peut-être la grande leçon de la rationalité grecque que cette volonté de retrouver le monde réel derrière les constructions idéelles, c'est à travers elles que le monde réel devient intelligible, non par la seule observation contingente, mais par une reconstruction du réel qui en permette la compréhension, c'est-à-dire l'explicitation, lorsque cela est possible, des raisons qui font que le monde est tel qu'il est.

On ne peut mieux mettre en valeur la signification de cette rationalité qu'en revenant à deux points de la construction euclidienne aujourd'hui négligés dans un enseignement qui se veut "moderne" et qui, au nom d'une modernité quelque peu aveugle, est incapable d'en voir la richesse (et la modernité !), je veux parler des cas d'égalité et des cas de similitudes des triangles.

La problématique de la mesure implique d'abord de connaître les conditions de l'égalité des grandeurs. Mais ces conditions se peuvent définir de deux façons. La première, empirique, consiste à définir les moyens de reconnaître, à chaque fois que cela se présente, que deux grandeurs sont égales ; parmi ces conditions, du moins lorsqu'il s'agit de grandeurs géométriques, la superposition tient une place essentielle.

Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales.[3]

tel est l'énoncé de ce que l'on peut considérer comme le principe fondamental de la géométrie euclidienne. La coïncidence renvoie ici au mouvement, et de façon précise au mouvement des corps solides. C'est la prise de conscience de l'existence de corps rigides qui a permis de penser la géométrie telle que nous la connaissons, et c'est cette propriété fondamentale qui relie le mouvement et les corps solides qu'Euclide énonce au début de ses *Eléments*, reliant ainsi une notion générale d'égalité, dont les propriétés sont énoncées dans les premiers axiomes, et la notion de grandeur géométrique.

---

(2) Nous pourrions citer ici les *Elémens de Géometrie* de Legendre et ceux de Lacroix, ou plus proches, le *Traité de Géométrie* de Rouché-Comberousse et les *Leçons de Géométrie* de Hadamard.

(3) Nous donnons ici la traduction de Jules Hoüel publiée dans son *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (Paris 1867).

Le génie des inventeurs de la rationalité géométrique apparaît lorsque, au lieu de se contenter d'un tel énoncé, ils se proposent de définir des conditions garantissant *a priori* que la superposition est effectivement réalisée. Ce sont les énoncés de ces conditions qui deviendront les classiques cas d'égalité des triangles; en ce sens ces cas d'égalité marquent, de toute leur force, la naissance de la rationalité géométrique. C'est là cette seconde façon annoncée ci-dessus.

C'est dans cette recherche d'une connaissance *a priori* qu'il faut comprendre la signification de la démonstration (laquelle semble aujourd'hui poser tant de problèmes à des pédagogues qui ont oublié les raisons d'icelle et qui cherchent trop souvent comment enseigner le discours de la démonstration tout en laissant ignorer aux élèves, quand ils ne les ignorent pas eux-mêmes, les raisons de la pensée démonstrative). Les cas d'égalité des triangles restent ainsi l'un des premiers lieux où se met en place la rationalité géométrique.

Continuant notre chemin à travers la problématique de la mesure, nous rencontrons le problème de la comparaison des grandeurs. Ici encore, la force du génie grec aura été de relier ce problème à la problématique de la forme. Que signifie que deux figures géométriques ont même forme? Cette vague notion de même forme se précise avec la notion de figures semblables, laquelle est au coeur de la géométrie élémentaire comme l'explique Emile Borel lorsqu'il déclare :

> *Il convient, dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première : c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie, il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de géométrie.*[(4)]

C'est alors la fonction des cas de similitude des triangles que d'énoncer des conditions pour que deux triangles aient même forme.

Il nous faut distinguer ici le point de vue relationnel du point de vue des transformations, point de vue qui, avec le *Programme d'Erlangen* de Felix Klein, s'est affirmé comme central dans la construction de la géométrie.

C'est avec le point de vue relationnel que s'est constituée la rationalité géométrique. Que ce soit avec la problématique de l'égalité ou avec la problématique de la similitude, on y retrouve un point commun, celui de la détermination du "même" (on parlerait aujourd'hui des invariants), d'un "même" indépendant des conditions dans lesquelles il se réalise. L'occultation du mouvement qui caractérise la géométrie grecque, et qu'on peut à bon droit lui reprocher aujourd'hui[(5)], était peut-être la condition *sine qua non* de la constitution de la rationalité. C'est peut-être là qu'il faut voir, d'une part la réussite de la géométrie d'Euclide, d'autre part l'échec de la physique d'Aristote, en ce sens que celle-ci se heurtait à l'impossibilité d'une reconstruction rationnelle du mouvement; c'est peut-être ainsi que l'on peut comprendre pourquoi la géométrie grecque participe encore de la modernité et par conséquent de l'enseignement scientifique d'aujourd'hui, alors que la physique d'Aristote ne participe plus de la science

---

(4) Cette déclaration d'Emile Borel fut dite lors d'un débat de la Société Française de Philosophie sur l'enseignement de la géométrie, après la réforme de 1902/1905, réforme qui suscita de nombreuses polémiques (*Bulletin de la Société Française de Philosophie*, tome VII, 1907). Si Borel critiquait un enseignement de la géométrie trop proche des *Eléments d'Euclide* (en fait, il s'agissait d'Euclide revu par Legendre et Lacroix), en particulier le refus grec de l'utilisation explicite du mouvement, il gardait leur place aux deux problématiques de l'égalité et de la similitude comme fondatrice de la pensée géométrique.

(5) Ce fut le cas, après les réflexions de Hoüel et de Méray, et les tentatives de ce dernier d'introduire explicitement le mouvement dans la géométrie élémentaire, des réformateurs de 1902/1905 parmi lesquels nous citerons encore une fois Emile Borel.

d'aujourd'hui (il s'agit évidemment de la seule physique, tant la pensée aristotélicienne a marqué et marque encore la pensée scientifique).

Imaginer que le point de vue relationnel est aujourd'hui dépassé par le point de vue transformationnel (et en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie élémentaire, que les cas d'égalité ou de similitude doivent être remplacés par les transformations) relève d'une fausse appréciation de la notion de transformation. L'apport du point de vue des transformations est moins dans son aspect dynamique que dans la notion d'invariant. Cette notion, qui se situe au coeur de toute construction scientifique, marque moins ce qui ne change pas lors d'une transformation que le "même" qui apparaît dans plusieurs situations, ce "même" qui faisait dire à Felix Klein :

> *La géométrie projective n'a pris naissance que quand on s'est accoutumé à considérer comme entièrement identiques la figure primitive et toutes celles qui s'en peuvent déduire par projection, et à énoncer les propriétés projectives de façon à mettre en évidence leur indépendance vis-à-vis des modifications apportées par la projection.*[6]

Un tel discours nous renvoie à "la seule et même énonciation" de Desargues pour qui la méthode des projections permet de reconnaître les mêmes propriétés dans diverses situations *a priori* distinctes.

La notion de transformation se présente ainsi comme le moyen de "statifier" les notions géométriques ; le groupe de transformations qui structure une géométrie selon les principes du *Programme d'Erlangen* marque moins une dynamisation de la géométrie qu'une volonté et une méthode de stabilisation de la connaissance en précisant les conditions de la reconnaissance du "même". On retrouve ici le même fondement de la rationalité que dans la géométrie élaborée par les Grecs et leurs successeurs.

Il y a évidemment un autre point de vue, celui de la cinématique et de la mécanique, point de vue dans lequel le mouvement est premier. Mais ici encore, quelle est la part de rupture avec la géométrie grecque et quelle est la part de continuité ? Si la physique moderne a réussi là où Aristote avait échoué, c'est moins par l'introduction de ce nouveau venu au monde de la connaissance scientifique qu'était le mouvement que par une "statification" de ce mouvement. Le temps de la physique moderne n'est plus qu'un simple paramètre qui permet de régler l'évolution des phénomènes. Et si la physique, *via* le principe de relativité et la théorie des groupes, a pu se couler dans le cadre du *Programme d'Erlangen*, c'est bien parce qu'elle s'inscrit dans ce mouvement de "statification" qui caractérise le développement de la science moderne.

On peut ici remarquer que les réformateurs de 1902/1905, en introduisant le mouvement dans l'enseignement de la géométrie élémentaire, s'appuyaient sur cette géométrie cinématique que Mannheim définissait comme l'étude du mouvement indépendamment du temps. S'il y a une différence entre la géométrie cinématique et la géométrie euclidienne, elle se situe moins dans une opposition du statique et du dynamique[7] que dans le fait que la géométrie cinématique prend en charge l'ensemble des positions d'une figure, alors que la géométrie grecque se débarrasse du mouvement en ne considérant que l'état initial et l'état final, indépendamment du mouvement qui a amené le premier état sur le second état.

---

(6) Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen* (1872), traduction française Padé, Gauthier-Villars, Paris 1974.

(7) Même si les réformateurs se sont réclamés d'une telle opposition, ainsi Borel comparant imprudemment la notion de transformation géométrique et la notion d'évolution (cf. la préface de sa *Géométrie*, Armand Colin, Paris 1910).

C'est alors un double contre-sens que de réduire les cas d'égalité à des cas d'isométries ; si l'on veut dire que certaines grandeurs ont même mesure, on oublie que la notion même de mesure se construit *via* l'égalité (cf. ci-dessus), si l'on veut mettre l'accent sur les isométries comme transformations, on réduit une notion essentiellement relationnelle à sa formulation transformationnelle en s'appuyant sur une bien pâle interprétation du *Programme d'Erlangen*.

On peut aussi remarquer que l'on occulte ainsi une des plus belles propriétés de la théorie des isométries du plan, que l'on pourrait énoncer ainsi :

> *Etant donnés deux triangles égaux dans le plan, il existe une et une seule isométrie (au sens des transformations) qui transforme le premier en le second.*

propriété qui marque justement la liaison entre les deux points de vue, le relationnel et le transformationnel.

On peut de même énoncer la proposition suivante qui relie la similitude comme relation et la similitude comme transformation :

> *Etant donnés deux triangles semblables dans le plan, il existe une et une seule similitude (au sens des transformations) qui transforme le premier en le second.*

Les remarques précédentes sur les problématiques de l'égalité et de la forme nous montrent la place de la construction euclidienne dans l'élaboration de la connaissance rationnelle. Si la méthode euclidienne a été critiquée par ceux qui voulaient en dépasser la sécheresse du discours, en particulier dans l'enseignement[8], ces critiques n'ont remis en question ni les problématiques originelles, ni le caractère de la géométrie comme reconstruction rationnelle du réel (au sens où la géométrie permet la connaissance *a priori* du réel[9]), caractère qui est la marque de ce qu'on appelle les sciences exactes et qui reste (y compris dans les égarements de la modélisation *à tout va* si caractéristiques du scientisme contemporain) la marque de la scientificité telle que nous la pensons.

On peut débattre longtemps de la forme que peut prendre l'enseignement de la géométrie élémentaire. Que ce soit sous la forme euclidienne (plus ou moins revue par Legendre ou Lacroix) ou que ce soit avec l'introduction explicite du mouvement comme le proposaient les réformateurs de 1902/1905[10], on rencontre les mêmes problèmes d'une construction conjointe de la rationalité géométrique d'une part et du lien entre la géométrie rationnelle et le monde sensible d'autre part. Comme nous le rappelle longuement Ferdinand Gonseth, la connaissance géométrique s'appuie sur trois aspects, l'intuitif qui représente la place du sujet connaissant, l'expérimental qui représente le rapport avec le monde sensible, le théorique qui représente la construction de la rationalité ; ces trois aspects, s'ils sont identifiables, ne sont pas autonomes et toute activité géométrique implique ces trois aspects.

---

(8) Nous pourrions citer ici autant les philosophes de Port-Royal que les empiristes du XVIIIème siècle, ainsi que les réformateurs du début de ce siècle qui, avec Carlo Bourlet et Emile Borel, mettaient l'accent sur un certain caractère expérimental de la science géométrique.

(9) Pour éviter toute ambiguïté, précisons que cet *a priori*, loin d'être un donné, est une construction ; cette construction des conditions de la connaissance *a priori* constituerait ainsi l'un des points essentiels de la rationalité ; à l'opposé de l'apriorisme kantien, c'est le concept gonséthien de "doctrine préalable" qui est en jeu (cf. Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neûchatel 1945/1955).

(10) Je ne parle pas ici de la réforme dite des *mathématiques modernes* dans la mesure où elle oubliait, pour aller au plus près des mathématiques d'aujourd'hui, les cheminements de la construction de la rationalité, espérant que la seule présentation du discours rationnel d'aujourd'hui permettrait de le comprendre. Je parlerai encore moins des "ersatz" d'enseignement des mathématiques que l'on nous propose depuis la fin des *mathématiques modernes*.

Ces considérations nous ramènent au caractère propédeutique de la géométrie élémentaire, que ce soit sous la forme développée par Euclide ou que ce soit sous l'une des formes proposées par ceux qui, parfois au prix d'une remise en question de la forme euclidienne, ont continué l'oeuvre des géomètres grecs.

Ce caractère propédeutique peut être abordé de plusieurs points de vue. Nous noterons d'abord le point de vue de la géométrie élémentaire en tant qu'elle étudie les grandeurs géométriques et leurs relations : la géométrie élémentaire participe alors d'une étude générale des divers domaines de la connaissance où interviennent ce que l'on peut appeler les situations spatiales(11) ; nous noterons ensuite le point de vue de la géométrisation : la géométrie intervient alors comme lieu de construction d'un mode de représentation de phénomènes qui *a priori* ne relèvent pas de la géométrie (au sens ou celle-ci est l'étude des situations spatiales)(12).

Mais nous mettrons aussi l'accent sur un autre point de vue, celui du caractère exemplaire de la géométrie élémentaire dans cette part essentielle de l'activité scientifique qui se propose la reconstruction rationnelle du réel. C'est ce caractère exemplaire que l'on voit apparaître dans les grandes synthèses scientifiques telles les *Principia* de Newton et, plus proches de nous, la théorie électromagnétique de Maxwell ou les théories relativistes d'Einstein, lors même que ces synthèses remettent en question la construction euclidienne. Mais ce caractère exemplaire de la méthode géométrique ne peut apparaître qu'à travers le contenu même sur lequel elle se constitue, c'est dire que le caractère propédeutique de la géométrie élémentaire exige la prise en charge à la fois de la méthode et du contenu de la géométrie élémentaire.

On voit ainsi quelle est la place de la géométrie élémentaire dans la formation scientifique, à la fois du point de vue de l'étude des situations spatiales et du point de vue de la constitution de la rationalité scientifique.

C'est cette place de la géométrie élémentaire, injustement rejetée à l'époque des mathématiques modernes lorsque l'on a cru que le seul discours de la modernité mathématique permettrait l'accès à cette modernité, qu'un ouvrage comme celui de Michel Carral nous rappelle ; l'accès à la modernité nécessite des passages obligés et la géométrie élémentaire reste l'un de ces passages obligés, c'est cela qui fait l'actualité de l'ouvrage de Carral.

Rudolf Bkouche

(11) Nous distinguerons ici la géométrie comme lieu d'étude des situations spatiales de l'étude de l'espace proprement dit dans la mesure où c'est l'étude des situations spatiales qui a conduit à définir le concept géométrique d'espace.

(12) Rudolf Bkouche, "Enseigner la géométrie, pourquoi ?" *Repères-IREM* n° 1, octobre 1990.

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Cet ouvrage a été écrit pour un "lecteur voulant apprendre les mathématiques" et non pour satisfaire *stricto sensu* à un programme momentané bien qu'il traite de la majorité des thèmes abordés dans les collèges et les lycées : c'est un livre de permanence construit sur une problématique de formation et d'utilisation.

Ce texte propose une axiomatique du plan présentée d'un point de vue naïf (les axiomes sont énoncés comme propriétés évidentes par elles-mêmes) se dégageant de l'étude des figures. De ce fait, elle est proche du sensible et apparait "naturelle", à l'encontre de celle des mathématiques dites "modernes" et, si justification il y a, c'est pour sa relation avec le monde sensible et non pour forcer l'acceptation par le lecteur de telle ou telle règle du jeu paraissant obscure.

C'est une rationalisation du monde qui nous entoure et non une vue de l'esprit donnée *a priori* et qu'il faudrait justifier à tout moment, sous peine de paraitre irréelle ou comme un exercice de style : le plan se construit et se structure au fur et à mesure des besoins.

La Géométrie élémentaire est une science expérimentale répondant aux problématiques de la mesure des grandeurs (à travers leur égalité et leur comparaison) et de la forme des figures. Ainsi, les cas d'égalités et les cas de similitudes jouent un rôle essentiel créateur de savoir permettant de trouver les "lignes de force" d'une configuration donnée ; dans un langage moderne, ce sont des invariants permettant de dire si certaine transformation existe et ce, sans avoir besoin de l'expliciter si ce n'est nécessaire. On a souvent, à tort, opposé les cas d'égalité des triangles et les isométries, ou les cas de similitude et les similitudes ; sans rentrer dans cette querelle stérile je dirai que, pour un apprenant, de par leur point de vue local, les cas d'égalité ou de similitude participent plus, pour une configuration donnée, d'une action d'apprentissage et d'analyse (de compréhension première de cette configuration) et de création de savoir, et les isométries ou les similitudes, de par leur point de vue global, d'une solidarité entre tous les points du plan (d'une relecture de cette configuration) et de mise en forme de ce savoir. La différence essentielle entre ces deux points de vue est que l'un est relationnel, et l'autre transformationnel. La géométrie grecque pose le problème des relations entre figures (relations de grandeur et de forme) sans se soucier de la façon dont elles se réalisent, d'autant que pour des raisons qui relèvent plus d'une problématique métaphysique que d'une problématique scientifique, les géomètres grecs refusent tout usage du mouvement dans la construction de la géométrie. Dans cet ouvrage on essaie de répondre à cette double sensibilité en explicitant leurs liens réciproques.

Les exercices proposés ont été choisis plus pour la difficulté qu'il y a de voir une figure que pour des difficultés techniques de résolution : on ne voit dans une figure que ce que l'on sait y voir et tout dépend de la culture du lecteur. Autrement dit, une image ne parle pas d'elle-même : elle ne livre que ce que l'on sait et les découvertes que l'on peut y faire ne se font qu'avec le temps et la réflexion. Aussi il est nécessaire, bien que les figures soient faites, de les effectuer soi-même au fil de la lecture avant, comme disaient nos anciens maîtres, de les faire "dans sa tête". Parfois on a donné des démonstrations multiples, et il est intéressant de les rechercher : on peut voir ainsi une figure de plusieurs manières et elles éclairent le lecteur sur les sens possibles qu'on peut lui donner.

Pour terminer, j'aimerai remercier Rudolf Bkouche qui m'a fortement encouragé à écrire cet ouvrage et pour sa préface que je trouve trés belle. S'il était besoin de la compléter, ce dont je doute quant à moi, je citerai les lignes suivantes de Douglas R. Hofstadter, texte où il faisait référence à un certain avant-gardisme de quelques commentateurs musicaux proclamant "Il n'y a plus rien de nouveau à dire dans l'idiome tonal", pour expliquer sa conception de la géométrie euclidienne, et pourquoi il était nécessaire de l'enseigner :

> *Les gens qui émettent des revendications aussi sèches ne font rien d'autre que révéler la pauvreté de leur imagination... Que serait-il advenu si un physicien émettait la même revendication sur l'épuisement de la mécanique classique (qui fut au summun au dix-huitième et au dix-neuvième siècles, mais a été supplantée par la mécanique quantique durant le premier quart de siècle) ? Un argument apparemment en faveur d'une telle revendication serait que la mécanique classique s'est avérée fausse. Ainsi comment pourrait-il y avoir quelque chose de sensé à travailler encore dans ce domaine ? La faille dans ce raisonnement stupide est que la mécanique classique est un système conséquent interne tout comme un cas limite canonique de la mécanique quantique ; en fait, on ne peut pas espérer comprendre la mécanique quantique sans avoir d'abord absorbé et maîtrisé la mécanique classique. Ceci parce que les humains pensent naturellement en termes classiques...*
>
> *La géométrie euclidienne est un système conséquent interne tout comme un cas limite canonique de la géométrie non euclidienne ; en fait, on ne peut pas espérer comprendre la géométrie non euclidienne sans avoir d'abord absorbé et maîtrisé la géométrie euclidienne. Ceci parce que les humains pensent naturellement en termes euclidiens.*
>
> *La géométrie euclidienne, qu'elle soit applicable ou non à notre univers physique, joue donc un rôle central en mathématiques, et il en sera toujours ainsi. (†)*

Dans ces remerciements j'associerai Roger Cuppens et Françoise Grébille, qui ont bien voulu relire cet ouvrage et me faire part de leurs critiques et de leurs judicieux commentaires, ce qui fut une lourde tâche ; en outre, Roger Cuppens m'a aidé dans la réalisation des figures et Françoise Grébille a refait les exercices. Je n'oublierai pas Jean Pierre Zanotti pour sa précieuse et efficace assistance technique. Merci à tous ces amis, ainsi qu'à tous ceux qui m'ont encouragé et soutenu et que je ne nommerais pas pour ne pas en oublier. Qu'ils sachent combien j'ai apprécié leur collaboration !

Michel CARRAL

(†) "There is nothing fresh left to say in the tonal idiom"... People who make such bald claims do nothing but reveal the poverty of their imagination... What if a physicist made the same claim of exhaustion about classical mechanics (which had its heyday in the eighteenth and nineteenth centuries, but was supplanted by quantum mechanics in the first quarter of this century) ? One argument seemingly in favor of such a claim would be that classical mechanics was shown to be wrong. So how could it be at all meaningful to work in that field any more ? The flaw in this silly argument is thaht classical mechanics is an internally consistent system as well as a canonical limiting case of quantum mechanics ; in fact, one can't hope to understand quantum mechanics without first having absorved and mastered classical mechanics. This is because humans naturaly think in classical terms...

Euclidian geometry is an internally consistent system as well as a canonical limiting case of non-Euclidian geometry ; in fact, one can't hope to understand non-Euclidian geometry without first having absorved Euclidian geometry. This is because humans naturally think in Euclidian terms. Therefore Euclidian geometry, whether applicable or not to our physical universe, plays a central role in mathematics, and always will. — From Euler to Ulam : Discovery and Dissection of a Geometric Gem —.

Sommaire

CHAPITRE I

«A travers les images l'homme découvre à la fois l'Univers et son besoin de l'organiser.»

P. FRANCASTEL Art et Technique.

La Géométrie Elémentaire doit être considérée comme une Science Physique et son apprentissage doit se faire comme une Science expérimentale, où le commençant doit découvrir les principes de cette Science par degrés successifs selon l'avancement de son initiation.

L'étude de la Géométrie a été essentiellement le moyen que s'est donné l'Homme pour découvrir son rapport avec son environnement spatial en fonction de ses besoins, puis de sa curiosité. Le mot Géométrie signifie "mesure des terrains" et l'on peut penser que les premières propositions de Géométrie ont dû naître des méthodes pour mesurer et partager des terres[1]. Outre ces problèmes liés à la mesure, la Géométrie s'est développée à travers les problèmes de constructions : construction de deux surfaces de même aire, puis des problèmes de construction plus généraux redéfinissant en cela le rapport exact de toutes sortes de grandeurs.

La Géométrie étudie la forme des corps et leur étendue ainsi que leurs positions relatives dans l'espace supposé indéfini. La notion géométrique d'espace est récente : elle n'existe pas chez les Géomètres Grecs et apparaît au XVII *ième* siècle. Ainsi Pascal définit la Géométrie comme l'étude de l'espace ; il semble que ce soit le premier qui l'ait fait. Comme l'écrit Léon Brunschvicg *"Ce que nous voyons est dans l'espace, mais nous ne voyons pas l'espace... L'espace a sa racine dans l'expérience, il a son achèvement dans la raison".* C'est en examinant les corps matériels, en particulier les corps solides et leur déplacement que l'on acquiert les notions de forme, de situation et d'étendue.

1. On appelle *volume* une portion de l'espace limitée en tous sens, c'est à dire l'étendue du lieu qu'occupe la portion de cet espace. La Géométrie ne considère que l'étendue des corps, leur empreinte, et fait abstraction de toute autre propriété comme porosité, élasticité, pesanteur, etc, ... De Comberouse écrit *"La Géométrie ne raisonne que sur cette empreinte à laquelle elle suppose une continuité et une régularité que le corps correspondant est, en général, bien loin de présenter. C'est ainsi qu'une perfection idéale est toujours imposée d'abord, comme moyen de simplification, aux sujets de nos investigations".*

2. On nomme *surface* la partie commune à deux régions contiguës de l'espace, c'est à dire leur frontière commune ; une feuille de papier donne la notion de ce qu'est une surface, mais

---

[1] Les historiens des Sciences cherchent depuis longtemps à préciser l'affirmation d'Hérodote "Ce roi, m'ont dit les prêtres, partagea la terre entre tous les Egyptiens par lots carrés d'égale superficie, il assura par là ses revenus, en imposant à leurs possesseurs une redevance annuelle. Tout homme à qui le fleuve enlevait une parcelle de son lot allait signaler la chose au roi ; Sésostris envoyait alors des gens inspecter le terrain et en mesurer la diminution pour accorder dorénavant à l'homme une réduction proportionnelle à sa redevance. Voilà, je pense, l'origine de la géométrie qui passa plus tard en Grèce" HERODOTE, Livre II, §CIX.

ce n'est pas une surface, ceci à cause de l'épaisseur de la feuille. Pour cela il faudrait que cette feuille soit sans épaisseur ou physiquement que cette épaisseur soit négligeable, c'est à dire *aussi petite que l'on veut*. Ainsi les volumes des corps sont séparés de l'espace environnant par des surfaces.

3. De même, en prenant cette feuille de papier et en réduisant autant que faire ce peut la largeur de la feuille, on arrive à la notion de *ligne*, notion qu'on peut aussi voir comme un trait que l'on ferait sur une feuille de papier à l'aide d'un crayon ayant une mine *aussi petite que l'on veut* : on aurait un trait de largeur négligeable. Ainsi les surfaces sont séparées par des lignes comme les volumes le sont par des surfaces.

4. Enfin si on prend une ligne et si sa longueur devient *aussi petite que l'on veut* c'est à dire qu'elle n'a ni épaisseur, ni largeur, ni longueur, on arrive à la notion de *point* . Un point représente seulement une position dans l'espace : il n'a aucune dimension. On peut le voir comme ce qui est commun à deux portions de lignes contiguës.

5. On nomme *figure* tout ensemble formé de points, de lignes, de surfaces, de volumes, et la Géométrie élémentaire est l'étude des figures, c'est à dire des positions spatiales respectives de ces éléments entre eux et de leur mesure.

6. On peut remarquer qu'un point, dans son mouvement, engendre ou trace une ligne, une ligne une surface, une surface un volume ; mais comme on l'a précisé, on ne regarde que leurs empreintes, la trace qu'ils laisseraient dans une atmosphère suffisamment dense : la notion de temps, au contraire de la mécanique, n'intervient pas.

Le *lieu géométrique* d'un point est la figure formée par l'ensemble des positions que peut occuper ce point.

7. Egalité. La notion d'égalité des figures se conçoit avec le mouvement : deux figures sont égales si et seulement si on peut transporter l'une sur l'autre de telle façon qu'elles coïncident exactement en toutes leurs parties, c'est à dire si et seulement si elles ont la même empreinte (**1**). Autrement dit deux figures sont égales si et seulement si elles représentent la même figure en deux endroits différents ; en conséquence un mouvement ne déforme en aucune manière une figure.

Ce principe d'*égalité par superposition* est essentiel et comme le dit d'Alembert dans son *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759) :

> *Ce dernier principe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, une méthode de démontrer peu exacte et purement mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaines parties des deux figures, la coïncidence du reste : d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures entières. Cette manière de démontrer a donc l'avantage, non seulement de rendre les vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux.*

Note : Certains ouvrages de Géométrie élémentaire donnent pour égalité de deux figures, deux figures de même aire. Cependant il faut distinguer l'égalité par superposition et l'égalité de grandeur : le principe de l'égalité par superposition est, chez Euclide, un critère de l'égalité de grandeur. L'égalité de grandeur n'implique pas l'égalité par superposition comme nous le montre la lecture d'Euclide. Il reste cependant qu'Euclide admet implicitement (et ses successeurs ont fait de même) que l'égalité de grandeurs est équivalente à l'égalité par superposition dans le cas des droites (des segments de droites dirait-on aujourd'hui) et des angles.

D'où la nécessité et l'importance de définir le mot “égalité”.

8. Ceci nous amène à *l'Art de persuader* comme l'écrit Pascal dans son opuscule *De l'Esprit Géométrique* : *l'art de persuader a un rapport nécessaire à la manière dont les hommes consentent à ce qu'on leur propose, et aux conditions des choses qu'on veut faire croire.* Pour cela il définit huit règles dont il juge les cinq que l'on reprend ici d'une nécessité absolue si on ne veut pas commettre de défaut essentiel et d'erreur :

Règles nécessaires pour les définitions.—

N'admettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques sans définitions.
N'employer dans les définitions que des termes parfaitement connus ou déjà expliqués.

Règles nécessaires pour les axiomes.—

Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes.

Règles nécessaires pour les démonstrations.—

Prouver toutes les propositions, en n'employant à leur preuve que des axiomes très évidents d'eux mêmes, ou des propositions déjà montrées ou accordées.
N'abuser jamais de l'équivoque des termes, en manquant de substituer mentalement les définitions qui les restreignent ou les expliquent.

9. Ainsi une *proposition* consiste en une hypothèse et une conclusion ; le mot *axiome* signifie une proposition évidente par elle même. Les axiomes se justifient pour Pascal par le “bon sens” : dans (**7**) c'est le mouvement qui définit l'égalité. De même un *théorème* est une proposition qui doit être démontrée, un *lemme* est une proposition préliminaire dont la démonstration facilite celle d'un théorème subséquent, un *corollaire* est une conséquence immédiate d'un theorème. La *scolie* est une remarque sur un ou plusieurs théorèmes.

Note : On énonce la proposition réciproque en prenant la conclusion de la proposition directe pour hypothèse et son hypothèse pour conclusion.

De Comberousse met en garde le lecteur : *La proposition réciproque est souvent fausse car la conclusion de la proposition directe peut se vérifier pour un plus grand nombre de cas que son hypothèse.*

——— — - — ——— — - — ——— — - — ———

§1. DE LA LIGNE DROITE ET DES DISTANCES.

La ligne la plus simple et la plus naturelle qui nous est donnée par l'expérience est la ligne droite dont on a la notion, entre autre, par les deux constations suivantes :

i) Une personne voulant rejoindre le plus rapidement possible, ou avec le moindre effort, un lieu déterminé sur un terrain de sport par exemple, prendra un chemin qui tendra constamment vers ce lieu.
   C'est la même constatation qui est à la base d'un des premiers principes d'optique quant à la trajectoire des rayons lumineux.
ii) Si on prend un fil entre deux points A et B, la position du fil qui nécessitera le moins de longueur est celle où le fil sera tendu.

Ainsi on a la notion de segment de droite AB, ou de distance AB, car tout autre chemin allant de A à B sera plus long ; il va de soi d'appeler *distance entre deux points* le chemin le plus court reliant ces deux points. Par suite la distance AB est égale à la distance BA (7).

10. La définition intuitive que l'on prendra pour la *ligne droite* est celle qui nous est donnée par le fil tendu, ou le rayon de lumière. C'est une ligne non limitée dans un sens comme dans un autre. Cette approche empirique de la Géométrie, approche qui nous vient d'Archimède et prise par Legendre, est voisine de la propriété de "chemin plus court" ; dans notre démarche nous montrerons cette propriété.

11. *Note* : Ainsi deux points suffisent pour déterminer une droite. C'est la définition prise par Leibniz qui utilise la remarque suivante pour la justifier : quand un corps solide se déplace en laissant deux points fixes, tous les points fixes sont situés sur une droite.

Réciproquement, deux droites distinctes n'ont au plus qu'un point en commun, ou par deux points distincts passe une et une seule droite. Par suite deux droites ayant deux points distincts en commun coïncident en toute leur partie et sont confondues : on peut faire glisser une droite sur elle même sans modifier en aucune manière la figure initiale.

12. En conclusion : *Toute figure égale (superposable) à une ligne droite est une ligne droite et, réciproquement, deux lignes droites sont égales.*

Etant donnés deux droites d et d', A et B deux points situés sur d et A' un point situé sur d', on peut toujours par un déplacement amener le point A sur le point A', et le point B sur un point B' de d'.

Note : Rouché et De Comberousse considèrent que la définition de la droite pour laquelle nous avons opté est en accord avec celle d'Euclide dans ses *Eléments* (285 avant J. C.) :

La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

13. Comme on l'a dit, un segment de droite AB est la portion de ligne droite comprise entre les deux points A et B ; une *demi-droite* est la portion de droite indéfinie dans un sens et limitée dans l'autre par un point.

Il est clair que deux segments AB et $A'B'$ sont égaux s'il existe un mouvement qui amène le point A sur le point A' et le point B sur le point B' ; ainsi les deux segments coïncideront sur toute leur étendue. De même :

13 bis. Toute figure égale à une droite (resp. à une demi-droite) est une droite (resp. une demi-droite) et, réciproquement, deux lignes droites (resp. deux demi-droites) sont égales.

14. Soient trois points A, B, C situés sur une même droite et dans cet ordre. On appelle *somme des segments AB* et *BC* le segment AC. Il est clair que la somme de deux ou plusieurs segments est indépendante de l'ordre des parties. Dans le cas présent on dit que *le segment AC est plus grand* que le segment AB et, aussi que le *segment BC* est la *différence du segment AC avec le segment AB* (si B et C coïncident, les segments AB et AC sont égaux).

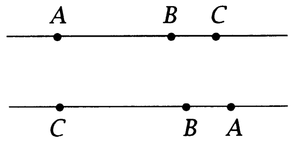


Fig. 1.

15. Prenons A et B deux points situés sur une droite d et faisons glisser le segment AB sur la droite d de telle sorte que A vienne en B. Alors B va en un point C tel que B soit situé à égale distance de A et de C. On dit que le point B est le *milieu* du segment AC.

Dans la suite du texte, on admettra que tout segment AB admet un milieu et, plus généralement, qu'il peut être divisé en un nombre quelconque de parties égales. La réalisation effective de ces opérations sera abordée ultérieurement (335).

16. Une *ligne brisée* est une ligne formée d'une succession de segments et (ou) de demi-droites ; on peut la considérer comme engendrée par un point qui dans son mouvement change de temps en temps de direction ; ce point décrit des segments de droite et (ou) des demi-droites. On appelle *sommet* d'une ligne brisée le point de rencontre de deux segments, ou de demi-droite(s) consécutifs, et les points extrémités s'ils existent ; ainsi le changement de direction s'effectue aux sommets A, B, C, ... , de la ligne.

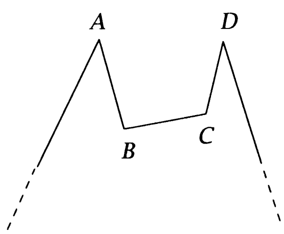


Fig. 2.

17. Une *ligne courbe* est une ligne qui n'est ni droite ni brisée ; on peut la considérer comme engendrée par un point qui, dans son mouvement, change à chaque instant de direction. Il est intéressant de la regarder comme une ligne brisée composée d'éléments rectilignes infiniment petits ; en ce sens, avec Leibniz, cela permet d'étendre les propriétés des lignes brisées aux lignes courbes lorsque celles-ci ne dépendent ni de la grandeur ni du nombre de côtés de la ligne brisée.

Plus généralement on considérera qu'une ligne est une ligne courbe si elle est composée de portions de lignes courbes au sens ci-dessus et (ou) de portions de lignes brisées. C'est une conception souvent utilisée en Analyse ou en Théorie de l'Approximation.

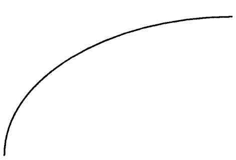


Fig. 3.

18. Un *plan* est une surface indéfinie telle que toute droite joignant deux points de cette surface y est entièrement contenue.

Nous admettrons ici qu'un plan est déterminé par trois points non alignés ; autrement dit par trois points non alignés passe un et seulement un plan, proposition qu'on ne démontrera pas.

On peut aussi engendrer un plan avec une droite d et un point A non situé sur la droite de la manière suivante : on considère l'ensemble des droites ∂ passant par A et s'appuyant sur d, ainsi que la droite ∂_0, position limite des droites ∂ quand le point d'appui s'éloigne aussi loin que l'on veut (Fig. 4).

Dans un certain sens un plan est pour les autres surfaces ce que la ligne droite est pour les autres lignes.

Une droite divise un plan en deux régions, chacune située de part et d'autre de la droite, régions que l'on nommera *demi-plans* et nous admettrons que si deux points A et B sont, respectivement, dans les deux demi-plans déterminés par la droite d, alors le segment AB et la droite d ont un point commun.

Dans cet ouvrage nous ne traiterons que des figures situées dans un plan, c'est ce que l'on appelle la *Géométrie plane.*

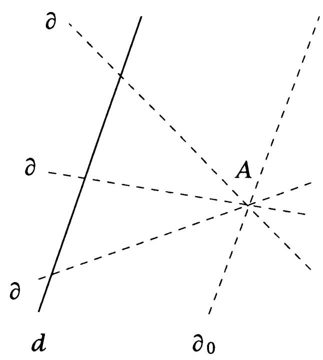


Fig. 4.

MESURE.

19. La notion de mesure relie la géométrie au numérique. Quand on a des grandeurs de même type, par exemple des longueurs, des poids, . . . , on peut essayer d'établir leur rapport, c'est à dire de donner le nombre qui exprime combien de fois l'une des grandeurs contient l'autre, ou bien une partie aliquote étant donnée (*), le rapport qui exprime combien de fois cette partie commune est contenue dans ces deux grandeurs.

Par exemple prenons A, B, C, trois points situés sur une même droite. Si, en divisant le segment AB en cinq parties égales, l'une de ces parties, qui est le cinquième de AB, est contenue exactement trois fois dans le segment BC, le rapport de BC à AB est dit égal à $\frac{3}{5}$.

Si, au contraire, le cinquième de AB n'est pas contenu un nombre exact de fois dans BC, par exemple s'il y est contenu plus de deux fois et moins de trois fois, $\frac{2}{5}$ est une valeur approchée du rapport BC/AB par défaut et $\frac{3}{5}$ en est une valeur approchée par excès : ce sont les valeurs du rapport à $\frac{1}{5}^{ième}$ près. Si le segment est divisé en n parties égales on obtient, pour une situation similaire, des valeurs à $\frac{1}{n}^{ième}$ près par excés ou par défaut.

20. Ainsi comparer deux segments sur une même droite revient à chercher si ces segments contiennent un nombre de fois exact un même segment de droite. Dans ce cas il est possible de prendre ce dernier segment pour unité et on dit que les deux segments comparés sont *commensurables* : leur rapport est un nombre rationnel.

Deux segments d'une même droite étant donnés, on peut trouver leur plus grande commune mesure en opérant sur ces segments comme on opère sur deux nombres entiers pour trouver leur plus grand commun diviseur :

On porte le plus petit segment sur le plus grand autant de fois que possible, le reste obtenu sur le plus petit segment, le second reste sur le premier reste et ainsi de suite. L'opération se termine si l'on arrive à un reste contenu exactement dans le reste précédent. Ce dernier reste est la plus grande commune mesure cherchée.

Note : L'expression fractionnaire obtenue par ce procédé est irréductible.

21. Il se peut que l'opération algorithmique précédente ne finisse jamais, du moins théoriquement (les restes successifs forment une suite décroissante et de par la petitesse des restes nos moyens d'appréciation ne nous permettent plus de faire la distinction avec un reste non nul). Dans ce cas on dit que les deux segments sont *incommensurables* .

(*) Partie qui est contenue un nombre entier de fois dans un tout.—Larousse lexis—

Le grand problème mathématico-philosophique de la Grèce antique fut l'incommensurabilité entre la diagonale et le côté du carré (ou l'existence de la racine carrée de 2) : c'est la grande découverte pythagoricienne et Théodore de Cyrène (fin V^{ième} siècle avant J. C.) étudia, sans doute par des procédés géométriques les racines carrées des nombres de 3 à 7. Son élève Théétète (415-369 environ avant J. C.) est considéré comme le fondateur de la théorie des incommensurables telle qu'elle est proposée dans le livre V d'Euclide (cf. exercice n° 297 pour une idée des méthodes utilisées).

On peut tourner la difficulté de l'incommensurabilité de deux segments en donnant leur rapport par excés ou par défaut, et en précisant l'approximation désirée. Dans le cas où le rapport est incommensurable, on dit que le nombre qui représente ce rapport est un irrationnel.

22. Plus généralement le rapport de deux grandeurs de même espèce a, b, est égal au rapport de deux grandeurs de la même espèce a', b', si quel que soit l'entier n, la valeur à $\frac{1}{n}$ près du premier rapport est égale à la valeur à $\frac{1}{n}$ près du second rapport. Cette correspondance entre grandeurs conservant les rapports définit la propriété de *proportionnalité* .

23. Définition. — *Mesurer des grandeurs de même espèce c'est les comparer (en faire le rapport) avec une grandeur de cette espèce que l'on prend pour unité.*

La notion d'égalité entre ces grandeurs s'exprime en terme de mesure, et on a :

1°) Deux grandeurs ayant même mesure, relativement à la même unité, sont égales ;

2°) Le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui leur servent de mesure respective, relativement à une même unité ;

3°) Le rapport de deux nombres est égal au quotient de ces deux nombres, etc...

24. *Note* : La propriété classique suivante, démontrée dans le cours d'arithmétique de Tannery (*Leçons d'Arithmétique théorique et pratique, Armand Colin, première édition 1894*), assure la proportionnalité entre grandeurs.

Deux grandeurs sont proportionnelles si :

1°) A une même valeur en correspondance de la première correspond toujours une même valeur de la seconde, et

2°) A la somme de deux valeurs avec la première correspond toujours la somme des valeurs correspondantes de la seconde.

Ceci étant précisé pour des grandeurs qui ne sont pas de la même espèce mais qui peuvent, dans un certain sens, se comparer comme on le verra avec les angles et les arcs.

§2. DES ANGLES ET DES ARCS.

25. On appelle *circonférence* l'ensemble des points d'un plan équidistants à un point donné appelé *centre*. Le *rayon* est un segment d'extrémités le centre et un point de la circonférence, et le *diamètre* est un segment passant par le centre d'extrémités deux points de la circonférence[(2)] ; tous les rayons sont égaux (parfois on considère un rayon comme une longueur) et on désigne une circonférence par son centre et son rayon.

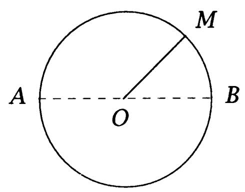


Fig. 5.

Remarque : Il est plus aisé de tracer une circonférence qu'une ligne droite (cf. la technique du compas). Une circonférence quelconque divise le plan en deux parties : l'une intérieure, l'autre extérieure à la circonférence. La partie intérieure, formée des points situés à une distance du centre inférieure au rayon s'appelle *cercle*. Il est limité en tous sens et on le désigne de la même manière que la circonférence.

26. *Deux circonférences de rayon ou de diamètre égaux sont deux figures égales.*

Il suffit de déplacer le centre de l'une sur le centre de l'autre ; les rayons étant égaux, les deux figures coïncideront.

Note : Une circonférence étant donnée, un mouvement de rotation autour de son centre ne modifie en aucune manière la figure initiale ; deux circonférences égales sont égales d'une infinité de manière.

27. On appelle *corde* un segment de droite d'extrémités deux points d'une même circonférence, et *arc de cercle* la portion de circonférence comprise dans un des deux demi-plans déterminés par la droite définie par la corde ; on dit que la *corde sous-tend* l'arc de cercle. Un arc de cercle se désigne par ses extrémités, ou par ses extrémités et un autre de ses points ; en effet deux points d'une circonférence définissent deux arcs de cercles. Si A et B sont les extrémités d'un arc de cercle, on le note $\overset{\frown}{AB}$. La possibilité de mettre sur une circonférence, bout à bout, deux de ses arcs de cercle (**26**) permet de définir leur somme et leur différence : $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AB}$. Pour ce faire ici, les points B et C sont confondus, et les points A, B, D sont dans le même ordre.

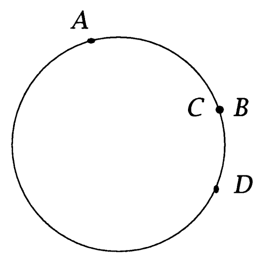


Fig. 6.

Note : Pour que la somme de deux arcs de cercle, ou leur différence, soit toujours définie, il est nécessaire d'étendre la notion d'arc : un point parcourant un arc de cercle peut faire plus d'un tour. Dans ce cas on regarde le chemin parcouru ainsi que le sens de parcours ; cette notion sera précisée avec les "angles orientés".

(2) Dans cette présentation, nous admettons que toute demi-droite d'origine le centre intersecte la circonférence en un point, et un seul, ce qui n'aurait pas été nécessaire si nous n'avions pas désiré montrer immédiatement les liens existants entre les arcs et les angles.

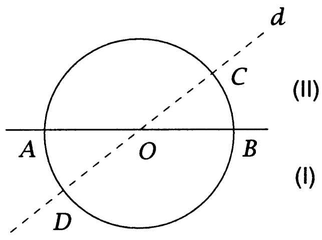


Fig. 7.

28. De même que pour un segment de droite, on admettra qu'on peut diviser un arc de cercle en deux ou plusieurs parties égales ; la division effective sera traitée ultérieurement.

29. Soient C une circonférence de centre O et AB une droite passant par O ; alors toute droite d, autre que AB, passant par O coupe C en deux points C et D chacun situés dans un des demi-plans définis par la droite AB (**25**). Ce sont les points de la droite d situés à une distance du point O égale au rayon.

30. *Un diamètre divise une circonférence en deux arcs égaux.*

On fait coïncider le demi-plan I avec le demi-plan II (cf Fig. 7) en faisant pivoter le demi-plan I autour de la droite définie par le diamètre AB comme charnière. Le point O reste fixe et tout point N de la circonférence situé dans le demi-plan I va se porter sur un point N' du demi-plan II tel que ON' égale ON, c'est à dire sur un point de la circonférence et, réciproquement, les deux arcs se superposent : ils sont égaux.

Une droite passant par le centre d'un cercle définit ainsi deux demi-circonférences.

31. Proposition. — *Sur une circonférence, ou sur des circonférences égales, des arcs de cercle moindres qu'une demi-circonférence sont égaux si et seulement si les cordes qui les sous-tendent sont égales.*

En effet deux arcs d'un même cercle, moindres qu'une demi-circonférence, sont égaux si et seulement si dans un même mouvement on peut faire coïncider leurs extrémités, et il en est de même pour des segments de droite.

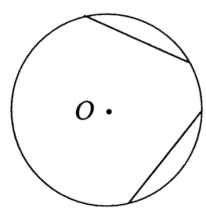


Fig. 8.

ANGLES.

La notion d'angle, bien que des plus naturelles, est l'une des notions les plus difficiles à définir mathématiquement. Afin de pouvoir la manipuler, il est nécessaire, du moins dans un premier temps, de lui garder son caractère intuitif.

32. On appelle *angle* la portion de plan définie par l'intersection de deux demi-plans, ou s'il n'y a pas d'ambiguïté par deux demi-droites Ax et Ay concourantes ; dans ce dernier cas on regarde la portion de plan balayée par la demi-droite Ax lorsque celle-ci pivote autour du point A pour se juxtaposer sur la demi-droite Ay. Le point A s'appelle le *sommet* et les demi-droites les *côtés de l'angle.*

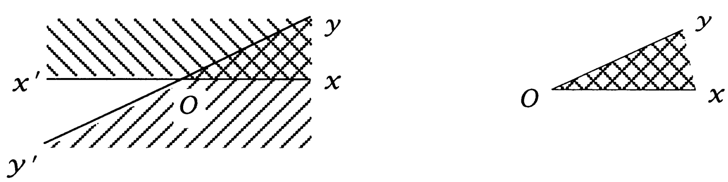


Fig. 9.

L'angle formé par les demi-droites Ax et Ay se note $\widehat{xAy}$ ou $\hat{A}$, s'il n'y a pas risque de confusion. On le note aussi (Ax, Ay), le côté Ax s'appelle alors le *côté origine* et le côté Ay le *côté extrémité.* Cette dernière notation sera réservée aux angles orientés.

L'égalité de deux angles est définie par superposition ; les côtés d'un angle étant illimités, celle-ci ne dépendra que de l'*écartement* ou de l'*ouverture* des dits côtés.

33. Deux *angles* ayant même sommet, un côté commun et étant situés de part et d'autre de ce côté commun sont dits *adjacents.* Deux angles dont les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre sont appelés *angles opposés par le sommet.*

Un *angle plat* est un angle dont les côtés sont dans l'alignement l'un de l'autre : deux angles plats sont égaux.

34. La *somme de deux angles adjacents* $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ est définie comme étant l'angle $\widehat{AOC}$; on dit aussi que l' *angle* $\widehat{AOC}$ est *plus grand* que l'angle $\widehat{AOB}$ ou que l'angle $\widehat{BOC}$ et, de même, que l' *angle* $\widehat{AOB}$ est *plus petit* que l'angle $\widehat{AOC}$.

Ces notions se prolongent à deux angles quelconques par déplacement et superposition ; mais il est clair, comme pour les arcs, qu'il faudra étendre la notion d'angle dans le cas où, par exemple, on devra sommer deux angles plus grands qu'un angle plat.

Pour sommer les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'A'y'}$, on porte, par exemple, l'angle $\widehat{zAy}$ égal à l'angle $\widehat{x'A'y'}$ et adjacent à l'angle $\widehat{xAy}$.

On dit que deux *angles* sont *supplémentaires* si leur somme est égale à un angle plat.

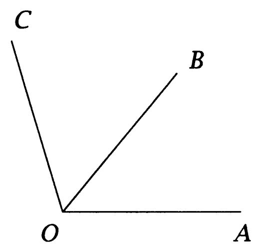


Fig. 10.

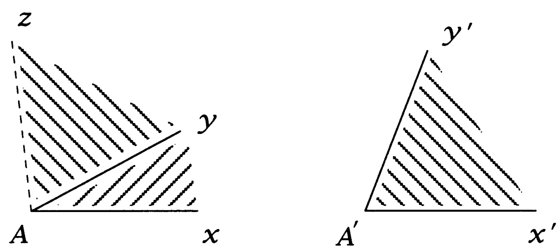


Fig. 11.

35. Théorème. — *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

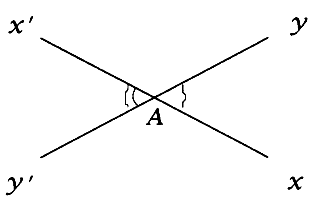


Fig. 12.

Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'A'y'}$ sont opposés par le sommet. Ils ont même supplément à savoir l'angle $\widehat{xAy'}$: ils sont égaux.

Note : On peut superposer l'angle $\widehat{xAy}$ sur l'angle $\widehat{x'Ay'}$ par un mouvement de rotation autour du point A, amenant la demi-droite Ax sur la demi-droite Ax'.

ANGLES et ARCS.

36. On sait qu'une demi-droite d'origine le centre coupe la circonférence en un seul point (**25**). Un angle de sommet le centre du cercle, qu'on appelle *angle au centre*, intersecte la circonférence en un arc de cercle. Inversement un arc de cercle détermine un angle au centre.

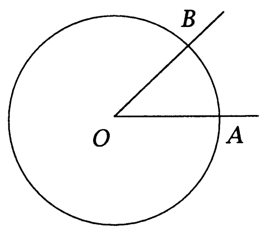


Fig. 13.

37. Théorème. — *Sur une circonférence, ou sur des circonférences égales :*

1º) *A des arcs égaux correspondent des angles au centre égaux;*
2º) *A des arcs inégaux correspondent des angles au centre inégaux et au plus grand arc correspond le plus grand angle au centre;*
3º) *Si un arc, plus petit que la circonférence, est la somme de deux autres arcs, l'angle au centre correspondant est la somme des angles au centre correspondants à ces arcs.*

1º) Soient $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ deux arcs égaux d'une circonférence C de centre O. Par un mouvement de rotation autour du point O on amène l'arc $\widehat{CD}$ sur l'arc $\widehat{AB}$, le point C allant en A et le point D en B (**7**); ainsi les demi-droites OA et OC, respectivement OB et OD, coïncident et les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont égaux.

2º) De même si l'arc $\widehat{AB}$ est plus grand que l'arc $\widehat{CD}$, on considère un mouvement de rotation autour du point O amenant, par exemple, le point C en A et le point D en un point D' situé du même côté que le point B par rapport au point A. Alors les demi-droites OA, OD', OB se trouvent dans le même ordre que les points A, D', B sur la circonférence et l'angle $\widehat{AOB}$ est plus grand que l'angle $\widehat{AOD'}$, lui même égal à l'angle $\widehat{COD}$.

3º) La somme de deux angles se fait en considérant des angles adjacents (**34**) et la somme de deux arcs d'un même cercle, en les mettant bout à bout (**27**); l'angle au centre correspondant à la somme de deux arcs est donc la somme des angles au centre définis par ces arcs.

38. Ayant admis que l'on peut diviser un arc de cercle en deux ou plusieurs parties égales (**28**), le théorème précédent permet de faire de même pour les angles; la demi-droite issue du sommet d'un angle partageant cet angle en deux angles égaux s'appelle *bissectrice* de l'angle.

Note : Physiquement on peut obtenir la bissectrice d'un angle par pliage.

DROITES PERPENDICULAIRES ET ANGLE DROIT.

39. La notion d'angle droit ou de droites perpendiculaires, est une des notions clefs de la géométrie euclidienne. On définit un *angle droit* comme étant la moitié d'un angle plat : les points A, O, C étant alignés, l'angle $\widehat{AOB}$ est droit si et seulement si les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont égaux (Fig. 14).

Un *angle aigu* est un angle plus petit qu'un angle droit, et un *angle obtus* est un angle plus grand; deux *angles* dont la somme vaut un angle droit sont dits *complémentaires*. Il est clair que, si deux droites forment un angle droit, elles forment quatre angles droits : deux angles consécutifs sont supplémentaires. On dit alors que ces *droites* sont *perpendiculaires*.

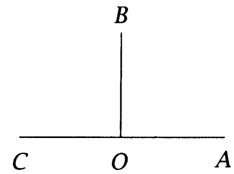


Fig. 14.

40. *Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires.*

Soient $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ deux angles adjacents supplémentaires et OD et OE leur bissectrice respective. L'angle $\widehat{DOB}$ est la moitié de l'angle $\widehat{AOB}$ et l'angle $\widehat{BOE}$ est la moitié de l'angle $\widehat{BOC}$, d'où l'angle $\widehat{DOE}$ est la moitié de l'angle $\widehat{AOC}$ qui est plat.

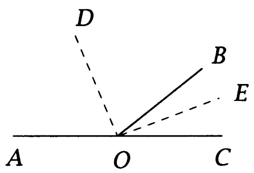


Fig. 15.

41. *Note* : Dans une approche empirique (le mot empirique étant pris dans son sens positif) Clairaut prend la définition suivante : *"Une ligne qui tombe sur une autre, sans pencher sur elle d'aucun côté, est perpendiculaire à cette ligne".* Cette définition a l'avantage de contenir en sus les propriétés de la médiatrice d'un segment et les relations entre les obliques que nous serons obligés de démontrer.

Physiquement on peut fabriquer un angle droit de la manière suivante :

Plions en deux une feuille de papier selon une droite d ; replions à nouveau cette feuille de sorte que la droite d se superpose à elle-même. On forme ainsi une deuxième droite d' : les droites d et d' sont perpendiculaires. En effet déplions la feuille : les angles adjacents formés par ces droites sont égaux par superposition (**7**).

Si on note O le point d'intersection des droites d et d', on voit que la droite d' est la seule droite perpendiculaire à la droite d passant par le point O :

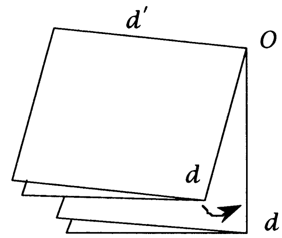


Fig. 16.

42. Théorème. — *Dans un plan donné, par un point pris sur une droite on peut toujours élever une perpendiculaire, mais une seule.*

Soit O un point d'une droite d; notons A et B l'intersection de la droite d avec une circonférence de centre O et M le milieu d'une des demi-circonférences $\widehat{AB}$. L'angle $\widehat{AOM}$ est un angle droit, comme angle moitié de l'angle $\widehat{AOB}$ (**37**) qui est plat : la droite OM est perpendiculaire à la droite d et, de par l'unicité du milieu, c'est la seule.

43. *Remarque* : Dans une circonférence un angle au centre droit intercepte le quart de cette circonférence, autrement dit un droit correspond à un quart de tour.

44. Théorème. — *Par un point pris hors d'une droite on peut toujours abaisser une perpendiculaire, mais une seule.*

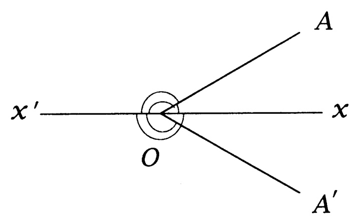


Fig. 17.

Considérons A un point non situé sur une droite $x'x$. Faisons pivoter le demi-plan contenant A autour de la droite $x'x$ prise comme charnière : le point A se porte sur un point A'. Pour tout point O de $x'x$ les angles $\widehat{x'OA}$ et $\widehat{x'OA'}$ (resp. $\widehat{AOx}$ et $\widehat{A'Ox}$) sont égaux par superposition. La droite AO est perpendiculaire à la droite $x'x$ si et seulement si ces quatre angles sont égaux. Pour que l'angle $\widehat{AOx}$ égale l'angle $\widehat{A'Ox'}$, il faut et il suffit que leurs côtés respectifs OA et OA' soient alignés (**35**). Par suite la droite AA' est perpendiculaire à la droite $x'x$ et c'est la seule.

45. *De l'art de porter un angle égal à un angle donné.*

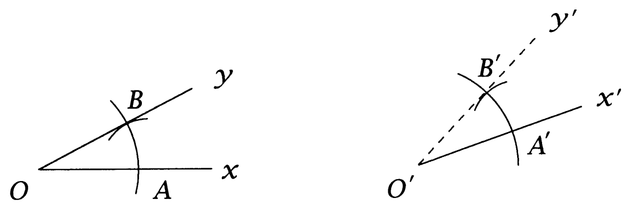


Fig. 18.

Soit $\widehat{xOy}$ un angle donné et $O'x'$ une demi-droite. Du point O et d'un rayon quelconque on trace un arc de cercle ; l'angle donné détermine l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Du point O' comme centre avec le même rayon on décrit un arc de cercle coupant $O'x'$ en un point A'. Sur cet arc de cercle à partir du point A', on porte une ouverture de compas égale à la corde AB : on obtient un point B'. Les arcs de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{A'B'}$ sont égaux (**31**) et l'angle $\widehat{A'O'B'}$ égale l'angle $\widehat{AOB}$ (**37**).

EXERCICES.

1. Soit M le milieu d'un segment de droite AB ; la distance CM est égale à la demi-différence de CA et de CB si C est un point intérieur au segment, et à la demi-somme de CA et de CB si C est pris sur l'un des prolongements de AB.

2. Si les bissectrices de deux angles adjacents sont perpendiculaires entre elles, les angles sont supplémentaires.

3. Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet sont dans le prolongement l'une de l'autre.

4. Soient AB une droite et O un point de cette droite situé entre A et B. On mène deux demi-droites OC et OD de part et d'autre de AB telles que les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ soient égaux. Montrer que les côtés OC et OD sont dans le prolongement l'un de l'autre.

5. Soient OM la bissectrice d'un angle $\widehat{AOB}$; alors l'angle $\widehat{COM}$ est égal à la demi-différence des angles $\widehat{COA}$ et $\widehat{COB}$ si la demi-droite OC est à l'intérieur de l'angle $\widehat{AOB}$ et au supplément de cette demi-différence si la demi-droite OC est dans l'angle $\widehat{A'OB'}$ opposé par le sommet à l'angle $\widehat{AOB}$. Il est égal à la demi-somme des angles $\widehat{COA}$ et $\widehat{COB}$ si cette demi-droite est dans un des deux autres angles formés par les droites AA' et BB'.

6. Soient quatre demi-droites OA, OB, OC, OD, se suivant dans cet ordre, issues d'un même point O telles que l'angle $\widehat{AOB}$ soit égal à l'angle $\widehat{COD}$ et l'angle $\widehat{BOC}$ à l'angle $\widehat{DOA}$. Démontrer que les demi-droites OA et OC (resp. OB et OD) sont dans le même prolongement. Si les quatre demi-droites consécutives OA, OB, OC, OD sont telles que les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont en ligne droite, ainsi que les bissectrices des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOD}$, alors les demi-droites OA, OC d'une part et OB, OD d'autre part sont dans le même prolongement.

§3. DES TRIANGLES.

46. Dans la pratique les figures qu'un géomètre a eu à mesurer sont souvent déterminées par une ligne brisée fermée, ligne formée de sommets en nombre suffisant afin d'éviter une erreur trop importante (Fig. 19) ; ces figures sont appelées *polygones*, le segment de droite joignant deux sommets consécutifs *côté*, et l'angle formé par deux côtés consécutifs *angle du polygone*. Un *polygone* est dit *convexe* lorsqu'il se situe d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés indéfiniment prolongés, et on appelle *diagonale* d'un polygone convexe un segment joignant deux sommets non consécutifs. La plus élémentaire de ces lignes est le *triangle*, c'est à dire celle déterminée par trois sommets non alignés.

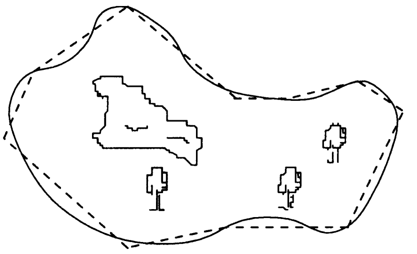


Fig. 19.

Il est clair que tout polygone se décompose en triangles, la décomposition n'étant pas unique : par exemple prendre un point I intérieur au polygone ou sur sa frontière et joindre ce point aux sommets ; on obtient une telle décomposition.

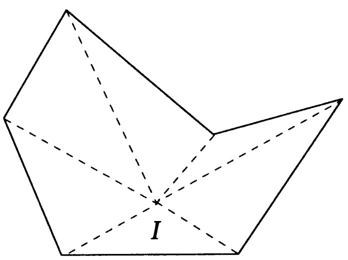


Fig. 20.

Par suite l'étude des polygones peut se ramener à l'étude des triangles par découpage ou triangulation.

Note : Si trois points (ou trois sommets) sont alignés on parle parfois de *triangle aplati*, mais la figure formée est un segment de droite, ce n'est pas à proprement parler un triangle.

DES CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES.

47. Les cas d'égalité des triangles énoncent des critères permettant de dire *a priori* si deux triangles sont égaux (ou superposables) sans avoir besoin de les déplacer : ils permettent d'éviter l'expérience, expérience qu'il nous faudra faire pour les obtenir et que nous n'aurons plus besoin de réitérer car reproductible. Remarquons qu'ils n'explicitent en aucune manière le mouvement permettant cette superposition et qu'ils ne supposent pas que les triangles soient dans un même plan.

Remarque : Si deux triangles sont égaux leurs éléments correspondants sont égaux, c'est à dire superposables.

48. Théorème (premier cas d'égalité) . — *Deux triangles sont égaux si et seulement si ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun.*

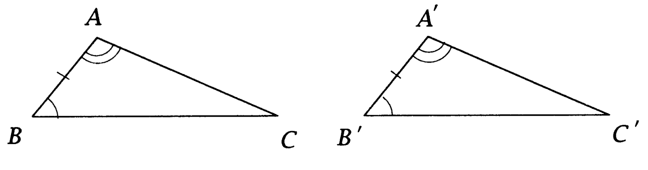


Fig. 21.

Considérons deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$ d'une part, $\widehat{B}$ et $\widehat{B'}$ d'autre part, et les côtés AB et $A'B'$ soient égaux.

Puisque les côtés AB et $A'B'$ sont égaux, on peut déplacer le triangle $A'B'C'$ sur le triangle ABC de manière que $A'B'$ coïncide avec AB, le point A' allant en A, le point B' en B et le point C' en un point C_1 situé du même côté que le point C par rapport à la droite AB.

Comme l'angle $\widehat{A}$ égale l'angle $\widehat{A'}$ le point C_1 est situé sur la demi-droite AC ; de même l'angle $\widehat{B}$ égalant l'angle $\widehat{B'}$, le point C_1 est situé sur la demi-droite BC. L'intersection de ces deux demi-droites étant le point C, le point C_1 est en C. Les sommets des triangles coïncidant, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont superposables : ils sont égaux.

49. Théorème (deuxième cas d'égalité) . — *Deux triangles sont égaux si et seulement si ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

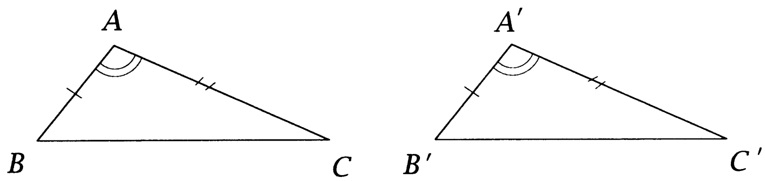


Fig. 22.

Considérons deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que l'angle $\widehat{A}$ égale l'angle $\widehat{A'}$ et les côtés AB et $A'B'$ d'une part, et les côtés AC et $A'C'$ d'autre part, soient égaux.

Déplaçons le triangle $A'B'C'$ sur le triangle ABC de telle sorte que A' se porte en A, le point B' en un point B_1 situé sur la demi-droite AB et le point C' en un point C_1 situé sur la demi-droite AC (les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$ sont égaux). Comme AB égale $A'B'$ le point B_1 n'est autre que le point B ; de même AC égalant $A'C'$ le point C_1 est le point C. Les sommets des triangles coïncidant, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont superposables : ils sont égaux.

Note : La démonstration de ces deux cas d'égalité, tout comme celle du troisième cas et celles des cas de similitude (Chap III §2), ne suppose pas que les deux triangles soient dans un même plan : ils sont utilisables en toute intégralité en géométrie de l'espace.

50. Lemme. — *Si un triangle possède deux côtés égaux, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Considérons un triangle ABC ayant les côtés AB et AC égaux. Notons C' le sommet B et B' le sommet C. Les triangles ABC et $AB'C'$ ont l'angle $\widehat{A}$ égal et les côtés AB, AB' d'une part et AC, AC' d'autre part égaux : ils sont égaux (**49**). Par suite l'angle $\widehat{B}$ égale l'angle $\widehat{B'}$, c'est à dire l'angle $\widehat{C}$.

Note : Le mouvement qui consiste à faire superposer les triangles ABC et $AB'C'$ est un pivotement, ou un mouvement de rotation, autour d'une droite du plan prise comme charnière.

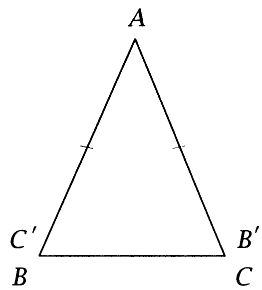


Fig. 23.

51. Théorème (troisième cas d'égalité) . — *Deux triangles sont égaux si et seulement si ils possèdent leurs trois côtés égaux chacun à chacun.*

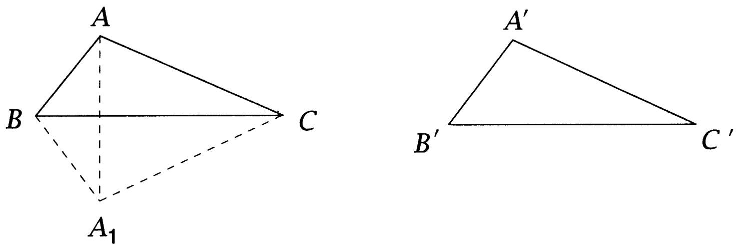


Fig. 24.

On se ramène au deuxième cas d'égalité pour montrer cette assertion, bien qu'elle soit plus naturelle dans une présentation "empirique" (cf. Clairaut).

Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que AB égale $A'B'$, AC égale $A'C'$ et BC égale $B'C'$: déplaçons le triangle $A'B'C'$ sur le triangle ABC de telle sorte que le point B' se porte en le point B, le point C' en le point C et le point A' en un point A_1 situé du côté opposé au point A par rapport à la droite BC. Le triangle ABA_1 a deux côtés égaux, ainsi que le triangle ACA_1 : les angles $\widehat{BAA_1}$ et $\widehat{BA_1A}$, respectivement $\widehat{CAA_1}$ et $\widehat{CA_1A}$, sont égaux (**50**). Par suite les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA_1C}$ sont égaux et les triangles ABC et A_1BC, c'est à dire ABC et $A'B'C'$, sont égaux (**49**).

52. *Note* : Des démonstrations précédentes, on déduit que, dans deux triangles égaux, les angles égaux sont toujours opposés aux côtés égaux et réciproquement.

DES TRIANGLES ISOCÈLES.

53. Par suite de l'usage du compas, les triangles isocèles jouent un rôle important quant à la construction des figures. Un *triangle* est dit *isocèle* si deux de ses côtés sont égaux, le troisième côté est appelé *base* du triangle et le sommet opposé à la base, *sommet principal.*

54. Théorème. — *Un triangle est isocèle si et seulement si il possède deux angles égaux.*

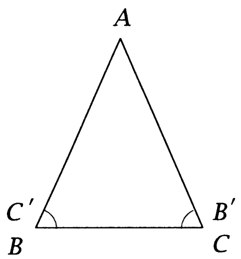


Fig. 25.

Il suffit de montrer la proposition réciproque, la proposition directe n'étant autre que (**50**). Considérons un triangle ABC ayant les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ égaux. De même que pour (**50**) notons B' le sommet C et C' le sommet B. Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont les côtés BC et $B'C'$ égaux et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{B'}$ d'une part, et les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ d'autre part, égaux : ils sont égaux (**48**). Ainsi le côté AB égale le côté AB', c'est à dire AB égale AC et le triangle ABC est isocèle.

Des démonstrations (**50**)(**54**) on constate qu'un triangle isocèle ABC est superposable à lui-même par pivotement. On en déduit expérimentalement, que si, I est le milieu de la base BC, la droite AI est bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et est perpendiculaire à la droite BC : les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{CAI}$, respectivement $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIC}$, sont égaux par superposition. C'est à dire :

55. Corollaire. — *Dans un triangle isocèle la droite qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire à la base et est bissectrice de l'angle au sommet.*

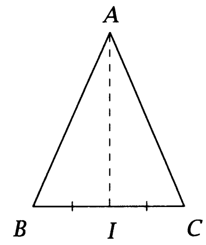


Fig. 26.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A, et I le milieu de la base BC. Les triangles ABI et ACI sont égaux (**51**) ; par suite les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{CAI}$, respectivement $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIC}$, sont égaux. La droite AI est bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et est perpendiculaire à la base BC.

Ainsi, par pliage autour de la droite AI, le point B tombe sur le point C : la droite AI est perpendiculaire à la base BC et passe par son milieu.

56. Définition. — *On appelle médiatrice d'un segment la droite perpendiculaire au segment passant par son milieu.*

57. Théorème. — *La médiatrice d'un segment est le lieu des points du plan équidistants des extrémités de ce segment.*

Si un point A est équidistant des extrémités d'un segment BC, le triangle ABC est isocèle et le point A est situé sur la médiatrice du segment BC (**55**).

Réciproquement, soient I le milieu d'un segment BC et A un point situé sur sa médiatrice (Fig. 26). Les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIC}$ étant des angles droits, donc égaux, les triangles AIB et AIC sont égaux (**49**) et AB égale AC : le point A est équidistant des extrémités du segment BC.

Note : C'est la propriété prise par Clairaut pour la définition de la perpendiculaire (**41**).

58. Définition. — *Une médiane d'un triangle est le segment de droite joignant un sommet du triangle au milieu du côté opposé et une hauteur d'un triangle est la perpendiculaire abaissée d'un des sommets du triangle sur le côté opposé considéré comme base.*

59. Proposition. — *Dans un triangle considérons la bissectrice de l'angle au sommet, la médiane, la hauteur passant par ce sommet et la médiatrice du côté opposé. Si deux de ces droites coïncident, le triangle est isocèle.*

De par les propriétés de la médiatrice, il suffit de montrer le théorème dans le cas où la bissectrice et la hauteur, ou la bissectrice et la médiane coïncident.

• *La bissectrice et la hauteur coïncident :*

Considérons ABC un triangle dans lequel la hauteur AI coïncide avec la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. Les triangles AIC et AIB sont égaux (**48**) et AB égale AC ; le triangle ABC est isocèle (**53**).

• *La bissectrice et la médiane coïncident :*

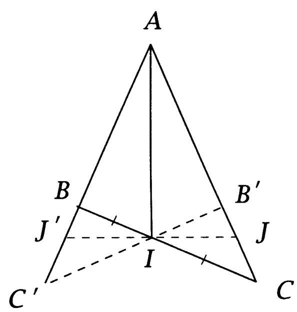


Fig. 27.

Soit un triangle ABC dans lequel la médiane AI coïncide avec la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. Supposons que le triangle ABC ne soit pas isocèle et que, par exemple, le côté AB soit plus petit que le côté AC. Sur le côté AC portons le point B' tel que AB' égale AB et sur le côté AB portons le point C' tel que AC' égale AC. Les triangles ABI et $AB'I$, respectivement ACI et $AC'I$, sont égaux (**49**) ; par suite les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIB'}$ d'une part et $\widehat{AIC}$ et $\widehat{AIC'}$ d'autre part sont égaux ; comme l'angle $\widehat{BIC}$ est plat il en est de même de l'angle $\widehat{B'IC'}$ et les points B', I, C' sont alignés.

De plus les segments IB et IB', respectivement IC et IC', sont égaux; comme le point I est situé au milieu de BC, ces quatre segments sont égaux et les triangles $IB'C$ et IBC' sont isocèles. Leurs médianes respectives IJ et IJ' sont bissectrices des angles opposés par le sommet $\widehat{BIC'}$ et $\widehat{B'IC}$ (**55**) : elles sont dans le prolongement l'une de l'autre et la droite JIJ' est perpendiculaire aux droites AJ et AJ' (**55**). Ceci est absurde si le triangle ABC n'est pas un triangle aplati (**44**) [(3)].

60. Définition. — *Un triangle est dit équilatéral lorsque ses trois côtés sont égaux et équiangle lorsque ses trois angles sont égaux.*

Un triangle est équilatéral si et seulement si il est équiangle.

APPLICATIONS.

Afin de pouvoir introduire rapidement les *constructions premières* (de base) dites *à la règle et au compas*, on admettra que, si deux cercles, ou une droite et un cercle, sont sécants, ils s'intersectent en un point ou deux points; résultat que nous justifierons par la suite. Dans une approche empirique de la géométrie, c'est une évidence, ou comme dirait Clairaut "de bon sens".

61. *Par un point hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire à cette droite.*

Du point C donné on décrit un arc de cercle coupant la droite d en deux points B et B'. Des points B et B' comme centres, avec la même ouverture de compas, on décrit deux arcs de cercle du côté opposé au point C par rapport à la droite d. Ces arcs se coupent en un point C'.

Par construction les triangles CBB' et $C'BB'$ sont isocèles et les points C et C' sont situés sur la médiatrice du segment BB' : la droite CC' est la droite cherchée (**56**)(**57**).

Note : Pour des raisons de commodités, pour construire le point C', on peut changer l'ouverture de compas et ce faisant prendre aussi ce point du même côté que le point C par rapport à la droite d. En pratique, plus les points sont éloignés, plus le tracé est précis.

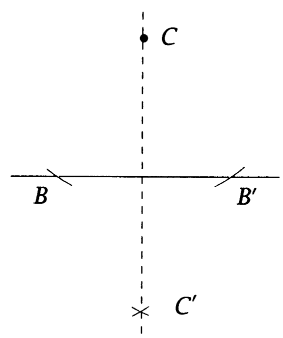


Fig. 28.

---

(3) Le chanoine Antoine Arnauld, un proche de Port-Royal, exigeait la démonstration directe et repoussait celle par l'absurde, puisque "*si elles peuvent convaincre l'esprit en le mettant hors d'état de pouvoir douter qu'une chose soit, elles ne le satisfont pas pleinement en lui donnant toute la clarté qu'il peut raisonnablement désirer*". Ce à quoi répondait son adversaire l'abbé De la Chapelle : "*Le principe de la réduction à l'absurde est fort proportionné à la nature de l'esprit humain, plus capable d'être convaincu que d'être véritablement éclairé. Tous les hommes se rendent sans aucune réplique à ce raisonnement : - il est impossible que cela ne soit pas, donc cela est. - Par conséquent, puisqu'une démonstration est uniquement faite pour ceux à qui l'on parle, pourquoi ne ferait-on pas valoir un principe qui est si fort à leur portée ?... Peu de gens sont capables de goûter les raffinements d'une démonstration, mais tous se laissent emporter à la force de la conviction. Comme il est plus facile de dompter les hommes que de les rendre justes, il est plus aisé de les convaincre que de les éclairer*".

Actuellement ces propos devraient être modifiés : les développements de la logique moderne ont montré que certaines propriétés étaient indécidables !

62. *Par un point pris sur une droite élever, une perpendiculaire à cette droite.*

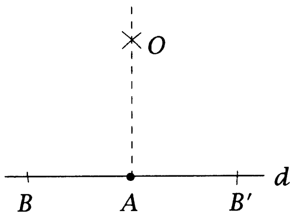


Fig. 29.

Soit A un point situé sur une droite d ; à l'aide d'un compas dont la pointe est positionnée sur le point A, on trace un cercle intersectant la droite d aux points B et B'. A partir des points B et B' pris comme centres, on trace deux arcs de cercle (ou deux cercles) de même rayon, rayon plus grand que le rayon AB ; ces arcs se coupent en un point O.

Le triangle BOB' est isocèle de sommet principal O et le segment OA est médiane : la droite OA est perpendiculaire à la droite d (**55**).

63. *Tracer la médiatrice d'un segment, ou marquer son milieu.*

Des extrémités A et B d'un segment donné on mène deux arcs de cercle de même rayon se coupant en C et C' respectivement. La droite CC' est médiatrice du segment AB (**57**) et le milieu I de AB se situe à l'intersection de AB avec cette droite.

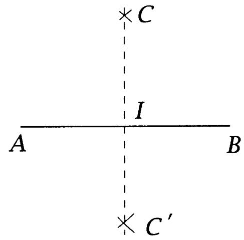


Fig. 30.

64. *Tracer la bissectrice d'un angle.*

Soit $\widehat{xOy}$ l'angle considéré. Du point O pris comme centre, on décrit un arc de cercle coupant les côtés de l'angle aux points B et B'. Des points B et B', comme centres, on trace deux arcs de cercle de même rayon se coupant en un point O' autre que le point O. Les triangles OBO' et $OB'O'$ sont égaux (**51**) ; par suite l'angle $\widehat{BOO'}$ égale l'angle $\widehat{B'OO'}$ et OO' est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

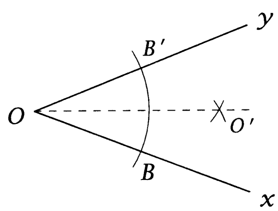


Fig. 31.

65. *Déterminer le milieu d'un arc de cercle d'un cercle donné.*

On se ramène à la construction précédente : le centre O du cercle étant donné, le milieu d'un arc $\widehat{AB}$ s'obtient comme l'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ avec l'arc considéré (**37**).

EXERCICES.

7. Construire un triangle connaissant les trois côtés.

8. Construire un triangle connaissant deux côtés et un angle.

9. Sur le côté Ox d'un angle, on porte deux longueurs OA et OB et sur le côté Ox' deux autres longueurs OA' et OB' respectivement égales aux premières ; on joint en croix AB' et $A'B$. Démontrer que le point I où se coupent ces deux droites est situé sur la bissectrice de l'angle. Application : construction de la bissectrice d'un angle.

10. Trouver sur une droite donnée un point équidistant de deux points donnés.

§4. DES CAS D'INÉGALITÉ DES TRIANGLES.

Dans un triangle il y a six éléments importants, à savoir les trois angles et les trois côtés, d'où l'intérêt de connaître leurs relations réciproques et aussi de savoir comment deux triangles inégaux diffèrent entre eux. Une des conséquences sera de montrer, comme nous l'avons dit dans l'introduction, que le plus court chemin entre deux points est la ligne droite.

66. Théorème. — *Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle et réciproquement.*

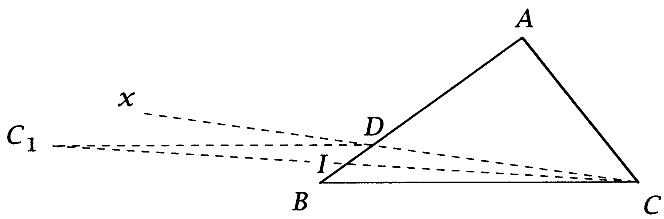


Fig. 32.

Prenons ABC un triangle dans lequel le côté AB est plus grand que le côté AC. Notons D le point de la droite AB situé entre les points A et B tel que les segments AD et AC soient égaux. Le triangle ADC étant isocèle, les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux ; comme le point D est situé dans l'angle $\widehat{ACB}$, ils sont plus petits que ce dernier angle.

Maintenant comparons l'angle $\hat{B}$ avec l'angle $\widehat{ADC}$, ou plutôt avec son angle opposé par le sommet $\widehat{BDx}$: prenons I le milieu du segment BD et C_1 tel que le point I soit aussi le milieu du segment CC_1.

Les triangles IBC et IDC_1 sont égaux (**49**) et l'angle $\hat{B}$ est égal à l'angle $\widehat{BDC_1}$. Par construction, le point C_1 est situé dans l'angle $\widehat{BDx}$, d'où l'angle $\widehat{BDC_1}$ est plus petit que l'angle $\widehat{BDx}$.

Ainsi l'angle $\hat{B}$ du triangle ABC est plus petit que l'angle $\hat{C}$.

Réciproque : Il suffit de remarquer que l'assertion réciproque est logiquement équivalente à la proposition démontrée, c'est à dire : si, dans un triangle ABC, l'angle $\hat{C}$ est supérieur à l'angle $\hat{B}$, alors le côté AB est supérieur au côté AC. Dans le cas contraire on aurait AB inférieur ou égal à AC et l'angle $\hat{C}$ serait plus petit ((**66**) proposition directe) ou égal (**54**) à l'angle $\hat{B}$, ce qui contredirait l'hypothèse.

67. Théorème. — *Dans tout triangle la longueur d'un côté est comprise entre la somme et la différence des longueurs des deux autres côtés.*

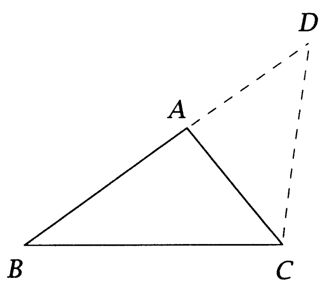


Fig. 33.

Pour un triangle ABC, il suffit, pour la somme, de montrer l'assertion relativement au plus grand côté ; quant à la différence, c'est une application directe de la somme : $AB + AC \geq BC$ et $AB + BC \geq AC$ implique $AB \geq BC - AC$ si $BC \geq AC$ et $AB \geq AC - BC$ si $AC \geq BC$.

Supposons que les côtés BC, AB, AC du triangle soient rangés par ordre de grandeur décroissant. Prolongeons le côté AB d'une longueur égale à AC ; ainsi le segment BD est la somme des côtés AB et AC.

Le triangle ADC est isocèle et l'angle $\hat{D}$ égale l'angle $\widehat{ACD}$ (**54**) qui est moindre que l'angle $\widehat{BCD}$. Par suite le côté BC est plus petit que le côté BD (**66**).

La somme des mesures de deux côtés d'un triangle est plus grande que la mesure du troisième côté.

68. Corollaire. — *Un segment de droite est moindre que toute ligne brisée ayant mêmes extrémités.*

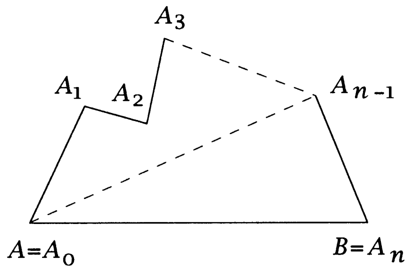


Fig. 34.

Soit une ligne brisée d'extrémités $A = A_0$, $B = A_n$ et de sommets $A_1, \dots, A_{n-1}$.

Pour $n = 2$, la proposition vient d'être démontrée. Supposons que l'on sache démontrer la proposition jusqu'à l'ordre r égal à $n-1$, c'est à dire supposons que la longueur de toute ligne brisée d'extrémités $A = A_0$, $B' = A_r$, de sommets $A_1, \dots, A_{r-1}$, avec $r \leq n-1$, est supérieure à la longueur du segment A_0A_r.

Considérons le triangle $A_0A_{n-1}A_n$. Par hypothèse de récurrence le segment A_0A_{n-1} est plus court que la ligne brisée d'extrémités A_0, A_{n-1}, et de sommets $A_1, \dots, A_{n-2}$. Comme la longueur du segment A_0A_n est moindre que celle de la somme des segments A_0A_{n-1}, $A_{n-1}A_n$, on en déduit le corollaire.

Note : Le corollaire et le théorème précédents ne sont autres que la propriété de la ligne droite d'être le plus court chemin d'un point à un autre (cf. par exemple, le livre de Legendre).

69. On nomme *périmètre* d'un polygone ou d'une ligne brisée quelconque, la somme de ses côtés.

70. Théorème. — *Le périmètre d'une ligne brisée convexe est moindre que celui de toute ligne brisée enveloppante terminée aux mêmes extrémités.*

On se ramène à une ligne brisée enveloppante moindre que la ligne brisée donnée, et de comparaison plus aisée avec la ligne brisée convexe donnée. Soient $A_1, A_2, \dots, A_m$ une ligne brisée convexe et $B_1, B_2, \dots, B_n$ une ligne brisée enveloppante où les points A_1 et B_1, respectivement A_m et B_n, sont confondus. Le prolongement du segment A_1A_2 coupe la ligne enveloppante en un point C situé sur le segment B_iB_{i+1} pour un certain i.

Comme précédemment on suppose que le périmètre de toute ligne brisée convexe d'extrémités A_1, A_r, de sommets $A_2, \dots, A_{r-1}$ est moindre que celui de toute ligne brisée enveloppante terminée aux mêmes extrémités pourvu que $r \leq m-1$, le cas $m = 2$ étant le corollaire précédent.

Par hypothèse de récurrence, la longueur de la ligne brisée $A_2, A_3, \dots, A_m$ est moindre que celle de la ligne enveloppante $A_2, C, B_{i+1}, \dots, B_n$; par suite la longueur de la ligne brisée $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ est moindre que celle de la ligne enveloppante A_1, C, $B_{i+1}, \dots, B_n$.

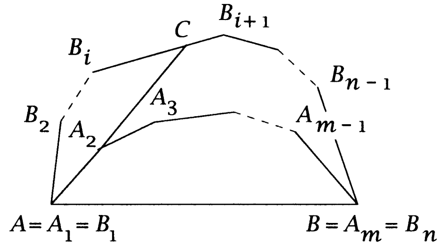


Fig. 35.

Comme la longueur du segment B_1C (ou A_1C) est moindre que celle de la ligne brisée $B_1, \dots, B_i, C$, la longueur de la ligne brisée $A_1, C, B_{i+1}, \dots, B_n$ est moindre que celle de la ligne enveloppante donnée $B_1, \dots, B_i, C, B_{i+1}, \dots, B_n$, et on en déduit le théorème.

71. Corollaire. — *Le périmètre d'un polygone convexe est moindre que le périmètre d'une ligne brisée fermée qui l'enveloppe de toutes parts.*

La droite définie par un côté AB du polygone convexe coupe la ligne brisée fermée donnée en au moins deux points E et F situés de part et d'autre de ce côté. On considère, d'une part les lignes brisées d'extrémités A et B, et d'autre part la ligne brisée d'extrémités E et F et le segment EF ; on est ramené au théorème précédent.

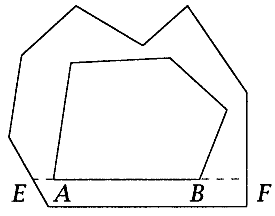


Fig. 36.

72. *Note* : Si on considère une ligne courbe comme étant une ligne brisée avec une infinité de sommets (**17**), on en déduit que toute ligne courbe est plus longue que la ligne droite ayant mêmes extrémités.

73. Théorème. — *Si deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, les troisièmes côtés sont inégaux et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

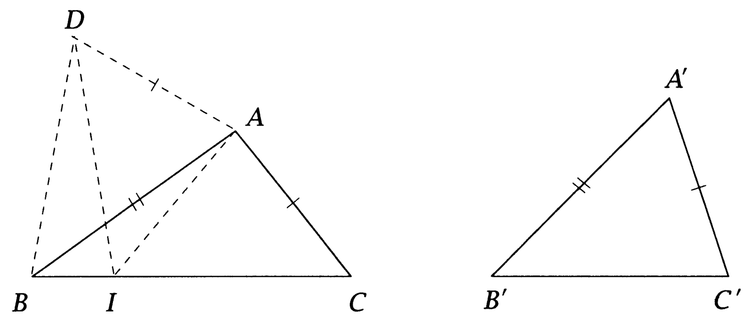


Fig. 37.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que le côté AB égale le côté $A'B'$, le côté AC égale le côté $A'C'$, et l'angle $\widehat{A}$ soit plus grand que l'angle $\widehat{A'}$.

Portons le triangle $A'B'C'$ sur le triangle ABD (fig. 37) où AD égale $A'C'$, le point A' allant en A, le point B' en B et le point C' en D, le point D étant situé du côté opposé au point C par rapport à la droite AB.

L'angle $\widehat{BAC}$ étant plus grand que l'angle $\widehat{BAD}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{DAC}$ est située dans l'angle $\widehat{BAC}$ et coupe le segment BC au point I. Les triangles ADI et AIC sont égaux (**49**) et les segments ID et IC sont égaux. De l'inégalité triangulaire (**67**), on a $BD < DI + IB$ ou $BD < BI + IC$. Ainsi $B'C'$, étant égal à BD, est plus petit que BC.

De même on a l'énoncé logiquement équivalent :

74. Théorème. — *Si, dans deux triangles, deux côtés sont égaux chacun à chacun et les troisièmes inégaux, les angles opposés aux côtés inégaux sont inégaux et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

75. *Note* : De Comberousse écrit "*Lorsqu'en démontrant une ou plusieurs propositions on a fait toutes les hypothèses admissibles, et qu'elles ont conduit respectivement à des conclusions essentiellement distinctes, les réciproques des propositions considérées sont toutes vraies. C'est ce qu'on appelle la loi des réciproques*".

Pour les réciproques il suffit alors, si on veut les montrer, de procéder par la méthode de réduction à l'absurde comme dans le théorème (**66**).

APPLICATIONS.

76. *Un problème de minimum* :

Soient A et B deux points du plan situés d'un même côté par rapport à une droite d et C un point sur la droite d. Où doit être positionné le point C pour que la distance $AC+BC$ soit minimum ?

Considérons A' le point obtenu à partir du point A par pliage autour de la droite d prise comme charnière, c'est à dire d est la médiatrice du segment AA'. Notons C le point d'intersection des droites d et $A'B$; on a $AC + BC = A'C+BC = A'B$.

Pour tout point M situé sur la droite d, distinct de C, on a $AM+MB = A'M+MB > A'B$.

Le point C est le point cherché.

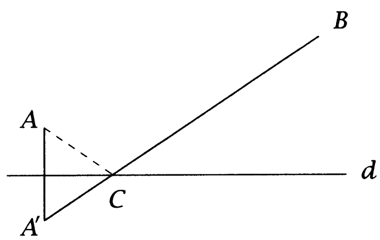


Fig. 38.

77. *Un problème de position* :

Pour qu'un point M du plan soit situé d'un même côté qu'un point A par rapport à la médiatrice d d'un segment AB il faut et il suffit que le segment MA soit moindre que le segment MB.

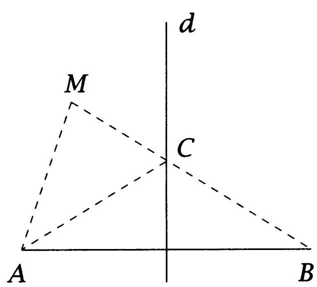


Fig. 39.

Considérons un point M du plan situé d'un même côté que le point A par rapport à la droite d et notons C l'intersection de BM avec la médiatrice du segment AB, on a : $AM < AC+MC$. Comme AC égale BC, le segment MA est moindre que le segment MB. Si le point M est situé du même côté que le point B par rapport à la droite d, on a de même $MB < MA$; si le point M est situé sur la droite d, alors MA égale MB (**57**).

EXERCICES.

11. Soit un point I intérieur à un triangle ABC. Montrer que $AB+AC$ est supérieur à $IB+IC$.

12. Si l'on joint un point pris à l'intérieur d'un triangle aux trois sommets, la somme des lignes de jonction est plus grande que le demi-périmètre du triangle et plus petite que le périmètre entier.

13. Si l'on joint un point pris à l'intérieur d'un polygone aux différents sommets, la somme des lignes de jonction est plus grande que le demi-périmètre du polygone.

14. Quand deux triangles ont un côté commun et deux côtés qui se croisent, la somme des côtés qui se croisent est plus grande que la somme des côtés qui ne se croisent pas.

15. Montrer que :

1º La somme des diagonales d'un quadrilatère convexe est comprise entre le demi-périmètre et le périmètre entier ;

2º Le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère convexe est le point du plan dont les distances aux quatre sommets ont la plus petite somme possible.

16. La médiane d'un triangle est plus petite que la demi-somme des côtés qui la comprennent et plus grande que la différence entre cette demi-somme et la moitié du troisième côté.

17. La somme des médianes d'un triangle est plus grande que le demi-périmètre et plus petite que le périmètre entier.

18. Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, la médiane qu'ils comprennent fait avec le plus petit des deux un angle plus grand qu'avec l'autre.

19. Trouver sur une droite d un point tel que la différence de ses distances à deux points donnés soit la plus grande possible.

§5. DES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES.

CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES.

78. Théorème. — *Si d'un point O, extérieur à une droite d, on mène la perpendiculaire OA et plusieurs obliques OB, OC, ... deux obliques dont les pieds sont situés de part et d'autre et à égale distance du pied de la perpendiculaire sont égales. La perpendiculaire est moindre que toute oblique et la longueur d'une oblique croît à mesure que son pied sur la droite d s'éloigne de celui de la perpendiculaire.*

Si les pieds B et B' sont situés à égale distance du pied A de la perpendiculaire à la droite d menée par le point O, le point O se trouve sur la médiatrice du segment BB' et le segment OB est égal au segment OB' (**57**).

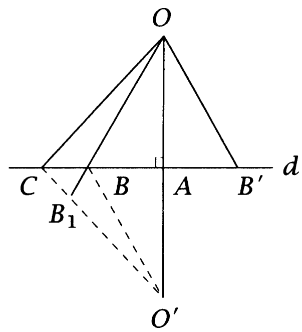


Fig. 40.

Supposons que les pieds B et C des obliques sur la droite d soient situés du même côté que le point A, le point C étant plus éloigné que le point B par rapport au point A.

Prolongeons OA d'une longueur AO' égale à OA ; le point A est situé au milieu du segment OO' et la droite d est médiatrice du segment OO' (**56**). Notons B_1 le point intersection de la droite OB avec la droite $O'C$, on a $OB + BB_1 < OC + CB_1$ et $O'B < BB_1 + B_1O'$ (**67**). En additionnant membre à membre ces deux inégalités on a $OB + O'B < OC + O'C$. Comme les segments OB et $O'B$, respectivement OC et $O'C$, sont égaux (**57**), on en déduit que OB est moindre que OC.

79. Le segment le plus court joignant un point O à un point d'une droite donnée est celui qui a pour extrémité le pied de la perpendiculaire menée par O à cette droite. On appelle ce segment *distance* du point O à la droite considérée.

80. Un *triangle* avec un angle droit est dit *rectangle*. Le côté opposé à l'angle droit est appelé *hypoténuse*.

81. *Note* : Les deux autres angles d'un triangle rectangle sont aigus.

Si un triangle ABC est rectangle en A, alors :

$$CA < CB \ (\mathbf{78}) \quad \text{implique} \quad \hat{B} < \hat{A} \ (\mathbf{66})$$
$$BA < BC \ (\mathbf{78}) \quad \text{implique} \quad \hat{C} < \hat{A} \ (\mathbf{66})$$

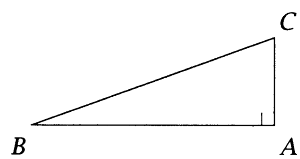


Fig. 41.

82. Théorème (cas d'égalité des triangles rectangles). — *Deux triangles rectangles sont égaux :*

1º *Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal ;*

2º *Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

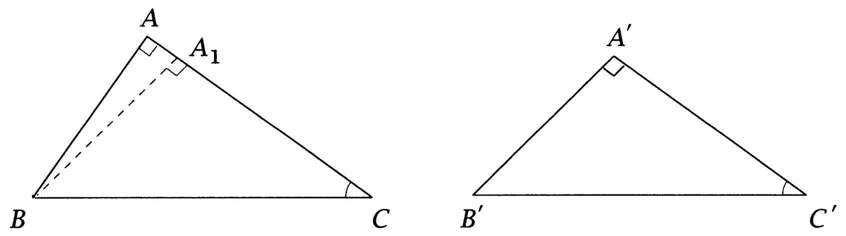


Fig. 42.

1º cas : Soient deux triangles rectangles ABC et $A'B'C'$ ayant leurs hypoténuses BC et $B'C'$ égales et les angles aigus $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ égaux. Sur le côté CA, du même côté que le point A par rapport au point C, portons le point A_1 tel que les segments A_1C et $A'C'$ soient égaux. Les triangles BA_1C et $B'A'C'$ sont égaux (**49**) et la droite BA_1 est perpendiculaire à la droite AC. Comme la droite BA est perpendiculaire à la droite AC, les points A et A_1 sont confondus (**44**) et les triangles rectangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux.

2º cas : soient deux triangles rectangles ABC et $A'B'C'$ ayant leurs hypoténuses BC et $B'C'$ égales et les côtés AC et $A'C'$ égaux.

Sur le côté AB, du même côté que le point B par rapport au point A, portons le point B_1 tel que les segments AB_1 et $A'B'$ soient égaux. Les triangles AB_1C et $A'B'C'$ sont égaux (**49**) et les segments B_1C et BC sont égaux ; les points B et B_1 sont confondus (**78**). Les triangles sont égaux.

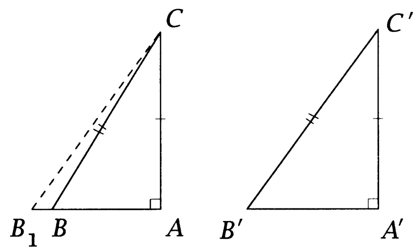


Fig. 43.

83. Théorème. — *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points du plan qui sont (intérieurement) équidistants des côtés de l'angle.*

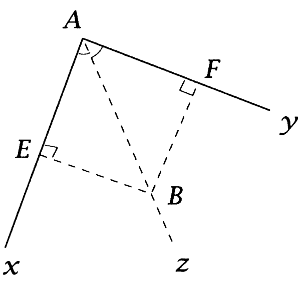


Fig. 44.

Soient $\widehat{xAy}$ un angle et B un point de sa bissectrice Az. Notons E et F les pieds des perpendiculaires abaissées du point B sur les côtés de l'angle.

Les triangles rectangles AEB et AFB sont égaux (**82**), le segment BE égale le segment BF : le point B est équidistant des côtés de l'angle.

Réciproquement soit B un point du plan équidistant des côtés d'un angle $\widehat{xAy}$; si E et F sont les pieds des perpendiculaires abaissées du point B sur les côtés de cet angle, les segments BE et BF sont égaux (**79**) ; les triangles rectangles AEB et AFB sont égaux (**82**). Par suite les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{FAB}$ sont égaux et le point B est situé sur la bissectrice Az de l'angle $\widehat{xAy}$.

84. *Note* : Pour établir la réalité d'un lieu géométrique, il faut toujours employer une double démonstration : montrer que les points du lieu considéré vérifient la ou les propriétés en question, et ensuite montrer que les points vérifiant la ou les propriétés appartiennent à ce lieu.

EXERCICES.

20. Si, dans un triangle rectangle, l'un des angles aigus est double de l'autre, l'un des côtés de l'angle droit est la moitié de l'hypoténuse.

21. Si deux triangles rectangles sont tels que les côtés de l'angle droit du premier sont respectivement plus petits que ceux du second, l'hypoténuse du premier est plus petite que l'hypoténuse du second.

22. Un triangle ayant deux hauteurs égales est isocèle.

23. Si les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ d'un triangle sont aigus et les côtés AB et AC inégaux, l'ordre dans lequel se suivent les droites issues de A est : plus grand côté, médiane, bissectrice, hauteur, plus petit côté.

24. La médiane d'un triangle isocèle est plus grande que la bissectrice de l'angle formé par les côtés qui la comprennent, limitée au troisième côté.

§6. DES PARALLÈLES.

85. Deux *droites* situées dans un même plan sont dites *parallèles*, si aussi loin qu'on les prolonge, elles ne se rencontrent pas.

L'existence de droites parallèles résulte du théorème suivant :

86. Théorème. — *Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.*

Soient L et L' deux droites distinctes perpendiculaires à une même troisième droite d ; elles ont au plus un point en commun (**11**). Si les droites L et L' sont sécantes en un point O, on pourrait de ce point mener deux perpendiculaires à la droite d, ce qui est absurde (**42**)(**44**).

87. Corollaire. — *Par un point extérieur à une droite on peut toujours mener une parallèle à une droite.*

88. Deux droites quelconques AB et CD étant données, une sécante commune EF forme avec ces droites huit angles que l'on dénomme de la manière suivante :

les angles compris entre les droites AB et CD sont des *angles internes*, les angles extérieurs sont des *angles externes.* Les angles internes non adjacents situés de part et d'autre de la sécante commune sont des *angles alternes-internes* ; par exemple $\widehat{AEF}$ et $\widehat{DFE}$. Les angles externes non adjacents situés de part et d'autre de la sécante sont des *angles alternes-externes* ; par exemple $\widehat{AEH}$ et $\widehat{DFG}$. Les angles situés d'un même côté de la sécante, l'un interne l'autre externe, mais non adjacents sont des *angles internes-externes* ou *angles correspondants* ; par exemple $\widehat{BEF}$ et $\widehat{DFG}$.

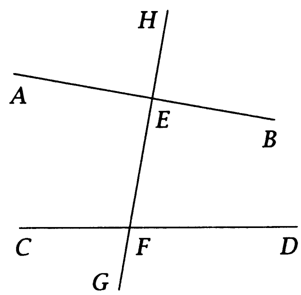


Fig. 45.

89. Théorème. — *Lorsque deux droites coupées par une même sécante forment avec celle-ci des angles alternes-internes égaux, ces deux droites sont parallèles.*

Des angles opposés par le sommet étant égaux, on obtient des critères similaires avec des angles égaux (resp. supplémentaires) en considérant des angles correspondants (resp. alternes-externes).

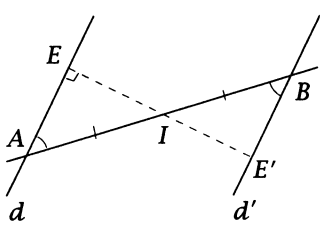


Fig. 46.

Considérons d et d' deux droites coupées par une sécante AB et formant avec celle-ci des angles alternes-internes égaux.

Par le milieu I du segment AB, abaissons IE la perpendiculaire à la droite d et notons E' le point intersection des droites IE et d'. Les triangles EAI et $E'BI$ sont égaux (**48**), et l'angle $\widehat{E'}$ est égal à l'angle $\widehat{E}$ qui est droit : les droites d et d' sont parallèles (**86**).

L'échec, constaté par Euclide, de pouvoir montrer la réciproque l'a amené à énoncer le postulat suivant :

90. Postulat d' Euclide :

Par un point pris hors d'une droite on ne peut lui mener qu'une seule parallèle.

Ce postulat considéré comme vrai se vérifie par la vérité de ses conséquences, vérité au sens que les Géomètres donnèrent jusqu'à la mise en place des géométries non-euclidiennes et de la méthode hypothético-déductive. Les tentatives de démonstration de ce postulat furent au cœur du développement de la géométrie pendant près de 20 siècles : l'acceptation de toute autre vérité était inconcevable. En posant le postulat des parallèles, postulat qui n'était autre qu'un énoncé d'attente devant l'échec d'une tentative de démonstration d'une propriété qui ne pouvait qu'être vraie puisque la puissante méthode des aires en découle, Euclide ne se doutait pas qu'il posait un problème d'une toute autre nature, ce que révéla la découverte des Géométries non-euclidiennes. Au XIX^{ième} siècle les mathématiciens Bolyai et Lobatschevski montrèrent qu'il existait des Géométries refusant ce postulat, ce qui posa des problèmes philosophiques quant à la nature même de cette discipline et de sa véracité : *"Ce qui fait problème, c'est (donc) moins la vérité ou la non vérité du postulat des parallèles que l'absence de démonstration d'un énoncé non évident mais dont on ne peut pas ne pas reconnaître la vérité"* écrit R. Bkouche ; c'est là que réside *le scandale* de la géométrie d'aprés l'expression de d'Alembert.

91. Ainsi, si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre et, si deux droites font avec une même droite des angles correspondants égaux (elles ont la même inclinaison par rapport à cette droite), elles sont paralléles.

On traduira ces propriétés en disant que deux droites parallèles ont même *direction* et que deux droites sécantes ont des *directions distinctes*. Pour la cohérence, on dira que deux droites confondues sont *parallèles*.

92. Théorème. — *Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Soient L et L' deux droites parallèles et d une perpendiculaire à la droite L' coupant la droite L au point E (**91**). Par le point E, élevons la perpendiculaire à la droite d ; elle est parallèle à la droite L' (**86**) et par suite est confondue avec la droite L (**90**).

Maintenant on peut montrer le théorème réciproque du théorème (89) :

93. Théorème. — *Deux droites parallèles forment avec une sécante commune des angles alternes-internes égaux.*

Comme précédemment, on a des résultats similaires avec des angles correspondants ou alternes-externes.

Soient d et d' deux droites parallèles et AB une sécante commune (Fig. 46). Par le milieu I du segment AB menons IE la perpendiculaire à la droite d ; elle coupe la droite d' en un point E' et les angles $\hat{E}$ et $\widehat{E'}$ sont droits (**92**). Les triangles rectangles IEA et $IE'B$ sont égaux (**82**) et il en est de même des angles alternes-internes $\widehat{EAI}$ et $\widehat{E'BI}$.

94. On peut énoncer la propriété suivante :

Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites prolongées indéfiniment, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Cette proposition est en fait le postulat énoncé par Euclide, postulat équivalent à celui que nous avons formulé.

APPLICATIONS.

95. Théorème. — *La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.*

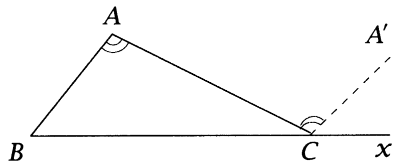


Fig. 47.

Soient ABC un triangle quelconque, et CA' la droite parallèle à la droite BA et Cx le prolongement de la droite BC. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACA'}$ sont égaux comme angles alternes-internes, ainsi que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'Cx}$ comme angles correspondants (**93**).

Note : Ce théorème est équivalent au postulat d'Euclide (cf exercices n$^{\text{o}}$ 292 et 293). Le mathématicien Legendre, dans ses tentatives pour montrer le postulat d'Euclide, a montré que, si la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, la somme des angles de tout triangle est égale à deux droits. Il a montré de plus que la somme des angles d'un triangle ne peut excéder deux droits, mais il n'a pu montrer qu'elle ne peut être moindre que deux droits ce qui aurait impliqué le postulat d'Euclide.

Un *angle extérieur* d'un triangle est un angle défini par un de ses côtés et le prolongement d'un autre.

96. Corollaire. — *On a les propriétés suivantes :*

1$^{\text{o}}$ *Un angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents : il est égal à leur somme ;*
2$^{\text{o}}$ *Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ou obtus ;*
3$^{\text{o}}$ *Dans un triangle équilatéral, chaque angle vaut un tiers d'angle plat ;*
4$^{\text{o}}$ *Deux triangles ayant deux angles égaux chacun à chacun ont leurs troisièmes angles égaux ;*
5$^{\text{o}}$ *Dans un triangle isocèle on connait les trois angles lorsqu'on en connait un.*
6$^{\text{o}}$ *Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.*

97. Si on conçoit que deux droites parallèles forment un angle, c'est un angle nul. Ceci est le cas lorsqu'on considère, pour des problèmes de continuité (de cas "limite"), que deux droites parallèles se coupent à l'infini. Par exemple, une droite est fixe, l'autre est sécante et le point d'intersection s'éloigne indéfiniment : l'angle formé par ces deux droites devient *aussi petit que l'on veut*. C'est ce que nous ferons lorsque nous considèrerons des angles de droites.

98. Théorème. — *Deux angles à côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires.*

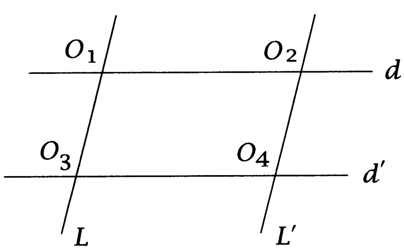


Fig. 48.

Il suffit de remarquer que, si quatre droites L et L' d'une part, d et d' d'autre part sont parallèles deux à deux, elles forment des angles alternes-internes ou correspondants égaux et des angles alternes-externes supplémentaires.

En fait, les deux angles sont égaux si les côtés de ces angles sont dirigés tous deux de même sens ou tous deux de sens contraire, et ils sont supplémentaires si deux côtés sont dirigés de même sens et les deux autres de sens contraires.

99. Théorème. — *Deux angles à côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.*

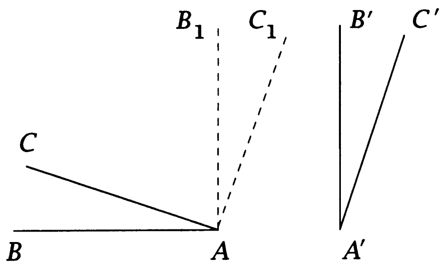


Fig. 49.

Il suffit de montrer le théorème pour deux angles aigus : si ce n'est pas le cas, on considère le ou les angles adjacents supplémentaires.

Soient $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ deux tels angles. En menant les demi-droites AB_1 et AC_1 respectivement parallèles aux demi-droites $A'B'$ et $A'C'$, on se ramène au cas où ces angles ont même sommet (**98**) à savoir A.

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B_1AC_1}$ sont égaux comme angles complémentaires du même angle $\widehat{B_1AC}$; les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont égaux.

100. *L'art de mener une parallèle à une droite donnée passant par un point donné.*

Soit O un point non situé sur une droite donnée $x'x$. On trace une sécante OA à la droite $x'x$; puis on porte sur la demi-droite AO l'angle $\widehat{AOB}$ (ou son angle opposé par le sommet) égal à l'angle $\widehat{OAx}$ (**45**). Les angles alternes-internes (ou correspondants) étant égaux, la droite OB est parallèle à la droite $x'x$ (**89**).

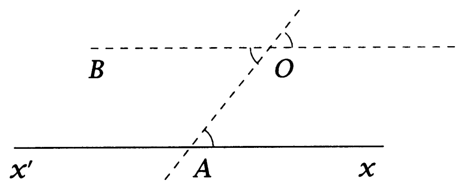


Fig. 50.

EXERCICES.

25. Etant donné un triangle quelconque ABC, on mène du point A au côté BC deux droites AD et AE dont la première fait avec AB un angle égal à l'angle $\hat{C}$ et la deuxième fait avec AC un angle égal à l'angle $\hat{B}$. Montrer que le triangle ADE est isocèle.

26. Dans tout triangle ABC :

1º La bissectrice de l'angle $\hat{A}$ fait avec la hauteur issue de A un angle égal à la demi-différence des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$;

2º Les bissectrices des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ font entre elles un angle égal à un angle droit augmenté de la moitié de l'angle $\hat{A}$;

3º Les bissectrices des angles extérieurs en B et C font entre elles un angle égal à un angle droit diminué de la moitié de l'angle $\hat{A}$.

27. Dans un quadrilatère convexe :

1º Les bissectrices de deux angles consécutifs font entre elles un angle égal à la demi-somme des deux autres angles ;

2º Les bissectrices de deux angles opposés font entre elles un angle supplémentaire de la différence des deux autres angles.

28. Deux triangles isocèles sont égaux si et seulement si ils ont un angle égal et deux côtés égaux chacun à chacun.

29. Deux triangles isocèles sont égaux si et seulement si ils ont leur base et un angle égaux.

30. Un angle d'un triangle est aigu, droit ou obtus selon que la médiane issue du sommet de cet angle est supérieure, égale ou inférieure à la moitié du côté opposé.

31. Par un point P situé prés du bord d'une feuille de papier, mener une perpendiculaire à une droite donnée d (Utiliser l'exercice précédent).

Cette construction peut se substituer à la construction usuelle, construction difficilement réalisable dans ces conditions.

32. Si deux triangles de même périmètre ont deux angles égaux chacun à chacun, ils sont égaux.

33. Sur la perpendiculaire menée en C au côté AC d'un triangle rectangle ABC, on porte deux segments CD et CE égaux à l'hypoténuse BC ; montrer que les droites BD et BE sont les bissectrices interne et externe de l'angle $\widehat{B}$.

34. Que peut-on dire d'un triangle pour lequel une bissectrice extérieure d'un angle est parallèle au côté opposé ?

35. Dans un triangle ABC si, par le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, on mène une parallèle MN à BC, limitée en M et N aux côtés AB et AC cette parallèle est égale à la somme des segments BM et CN. Que devient cet énoncé lorsqu'on mène la parallèle à BC :

i) Par le point de rencontre des bissectrices des angles extérieurs en B et C ;

ii) Par le point de rencontre de la bissectrice de l'angle en $\widehat{B}$ avec la bissectrice de l'angle extérieur en C.

36. Dans un triangle rectangle ABC, la perpendiculaire CE (menée du même côté que A par rapport à BC) à l'hypoténuse BC est égale au côté AC. On prolonge CB d'une longueur BD égale à BA. Montrer que les points D, A, E sont alignés.

37. Dans tout triangle, à un plus grand côté correspond une plus petite hauteur.

38. A partir d'un sommet A d'un triangle ABC on porte sur la droite AC les longueurs AE' du côté de C et AE à l'opposé de C égales toutes deux à AB. Alors :

1º Les droites BE et BE' sont respectivement parallèles à la bissectrice intérieure et à la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$;

2º Le triangle EBE' est un triangle rectangle.

39. Soient un angle $\widehat{xOy}$ aigu et l une longueur donnée. Trouver sur Oy un point M tel que $OM + MP$ égale l, MP étant la perpendiculaire abaissée de M sur Ox. Même question si on donne $OM - MP$, ou $OP + MP$, ou $MP - OP$ égal à l.

§7. DES POLYGONES ET DES QUADRILATÈRES.

101. Un polygone de quatre côtés s'appelle *quadrilatère*, de cinq côtés *pentagone*, de six côtés *hexagone*, de sept côtés *heptagone*, de huit côtés *octogone*, etc...

102. Théorème. — *La somme des angles d'un quadrilatère convexe est égal à quatre angles droits. Plus généralement la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Considérons $A_1A_2\dots A_n$ un polygone convexe de n côtés. Du point A_1 joignons les sommets de ce polygone. On forme $(n-2)$ triangles : $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$. La somme des angles intérieurs du polygone est égale à la somme des angles de ces triangles, c'est à dire à $(n-2)$ fois deux angles droits (**95**).

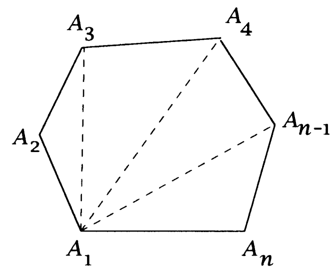


Fig. 51.

103. Définition. — *Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.*

Remarque : un parallélogramme est un quadrilatère convexe.

104. Théorème. — *Un quadrilatère convexe est un parallélogramme si et seulement si ses angles opposés sont égaux.*

Soit $ABCD$ un parallélogramme ; alors ses angles opposés sont à côtés parallèles et de sens contraire (**98**).

Réciproque : Considérons un quadrilatère convexe $ABCD$ ayant ses angles opposés par le sommet égaux, c'est à dire l'angle $\hat{A}$ égale l'angle $\hat{C}$ et l'angle $\hat{B}$ égale l'angle $\hat{D}$. Par suite les angles $\hat{C}$ et $\hat{D}$ sont supplémentaires ainsi que les angles $\hat{D}$ et $\hat{A}$ (**102**). Les côtés AD et BC d'une part et AB et CD d'autre part sont parallèles (**89**). Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

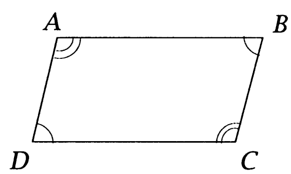


Fig. 52.

105. Corollaire. — *Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires et, réciproquement, si deux angles consécutifs d'un quadrilatère convexe sont supplémentaires, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

106. Théorème. — *Un quadrilatère convexe est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont égaux.*

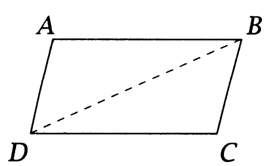


Fig. 53.

Soit $ABCD$ un parallélogramme. La diagonale BD détermine des angles alternes-internes $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$ d'une part et $\widehat{ADB}$ et $\widehat{DBC}$ d'autre part égaux (**93**). Les triangles ABD et CDB sont égaux (**48**) et le côté AB (resp. le côté AD) égale le côté CD (resp. le côté BC).

Réciproque : Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe ayant ses côtés égaux (Fig. 53). Les triangles ABD et CDB sont égaux (**51**) et les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$ d'une part, et $\widehat{ADB}$ et $\widehat{DBC}$ d'autre part sont égaux. Les droites AB et DC sont parallèles ainsi que les droites AD et BC (**89**). Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (**103**).

107. Théorème. — *Un quadrilatère convexe est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en son milieu.*

Soit I le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme $ABCD$. Les angles $\widehat{ABI}$ et $\widehat{IDC}$, respectivement $\widehat{BAI}$ et $\widehat{ICD}$, sont égaux (**93**). Comme le côté AB égale le côté DC (**106**) les triangles IAB et ICD sont égaux (**48**) et IA égale IC et ID égale IB : les diagonales se coupent en leur milieu.

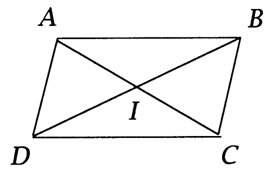


Fig. 54.

Réciproque : Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en leur milieu. Les notations étant celles de la figure 54, les triangles IAB et ICD sont égaux (**49**) ainsi que les triangles IAD et IBC. Les angles $\widehat{IAB}$ et $\widehat{ICD}$, respectivement $\widehat{IBC}$ et $\widehat{IDA}$, sont égaux. Les droites AB et DC d'une part et AD et BC d'autre part sont parallèles (**89**) : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (**103**).

108. Théorème. — *Un quadrilatère convexe est un parallélogramme si et seulement si deux côtés opposés sont à la fois égaux et parallèles.*

Considérons $ABCD$ un quadrilatère convexe ayant ses côtés AD et BC égaux et parallèles. Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ sont égaux (**93**), par suite les triangles ABD et CDB sont égaux (**49**). D'où $AB = CD$ et le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (**106**).

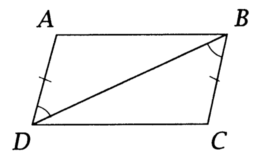


Fig. 55.

109. Un *losange* est un quadrilatère ayant tous ses côtés égaux ; ainsi un losange est un parallélogramme (**106**), ses diagonales se coupent en leur milieu (**107**), elles sont perpendiculaires et bissectrices des angles opposés (**55**). Réciproquement :

110. Théorème. — *Un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires est un losange.*

Considérons $ABCD$ un parallélogramme tel que ses diagonales AC et BD soient perpendiculaires. Les diagonales se coupent en leur milieu (**107**), elles sont médiatrices des segments qu'elles forment (**56**) et les côtés BC, CD, AD et BA sont égaux (**57**). Le parallélogramme $ABCD$ est un losange.

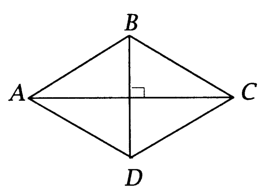


Fig. 56.

111. Un *rectangle* est un quadrilatère possédant quatre angles droits ; trois suffisent (**102**). Par suite un rectangle est un parallélogramme (**104**). Réciproquement :

112. Théorème. — *Un parallélogramme est un rectangle lorsqu'un de ses angles est droit.*

Considérons $ABCD$ un parallélogramme ayant un angle droit. De (**104**)(**105**) tous ses angles sont droits : c'est un rectangle.

113. Théorème. — *Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont égales.*

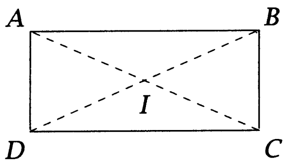


Fig. 57.

Soit $ABCD$ un rectangle ; les triangles ABC et DCB sont égaux (**49**) et les diagonales AC et BD sont égales.

Réciproque : Soit $ABCD$ un parallélogramme ayant ses diagonales AC et BD égales. Notons I leur point d'intersection. Les triangles ICD et ICB sont isocèles (**107**) et l'angle $\widehat{ICD}$ (resp. l'angle $\widehat{ICB}$) égale l'angle $\widehat{IDC}$ (resp. l'angle $\widehat{IBC}$) (**54**).

L'angle $\hat{C}$ est droit (**95**), le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle (**112**).

Note : Ainsi *"l'écart"* entre deux droites parallèles est constant : les côtés opposés d'un rectangle sont égaux. C'est une des propriétés fondamentales de la Géométrie Elémentaire plane ou de l'espace (ou Géométrie Euclidienne), ce qui n'est pas le cas pour les Géométries non Euclidiennes.

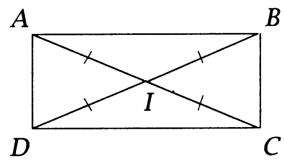


Fig. 58.

L'existence du rectangle en géométrie euclidienne peut faire dire, dans un certain sens, que c'est une des propriétés qui a permis le développement de la technologie du chemin de fer...

114. Un *carré* est un quadrilatère dont les côtés et les angles sont égaux. Il réunit les propriétés du rectangle et du losange.

Un *trapèze* est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles ; on dit qu'il est *rectangle* si un côté est perpendiculaire aux côtés parallèles, et *isocèle* si ses côtés non parallèles sont égaux.

115. Ainsi dans un trapèze deux angles consécutifs formés par les côtés parallèles et un troisième côté sont supplémentaires (**93**) ; et dans un trapèze isocèle les angles consécutifs (à la base) formés par les côtés non parallèles et un troisième côté sont égaux (Fig. 59).

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle. On mène la parallèle AE au côté BC :

l'angle $\widehat{AED}$ égale l'angle $\widehat{BCE}$ (**93**) et AE égale BC (**106**). Le triangle ADE est isocèle (**53**) et les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux (**54**). Les angles consécutifs à la base d'un trapèze isocèle $ABCD$ sont égaux.

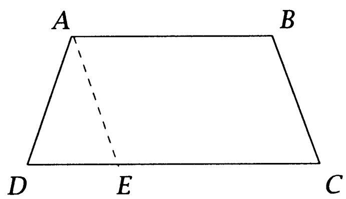


Fig. 59.

116. Réciproquement : *Si, dans un trapèze, les angles à la base sont égaux, le trapèze est isocèle.*

De même que précédemment (Fig. 59) on trace la parallèle AE au côté BC. Le côté AE égale le côté BC (**106**). De plus l'angle $\widehat{AED}$ égale l'angle $\widehat{BCD}$ (**93**) qui est égal par hypothèse à l'angle $\widehat{ADE}$. Le triangle AED est isocèle (**54**) et AD égale AE. Par suite BC égale AD et le trapèze est isocèle.

117. *Remarques* : Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; deux rectangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés adjacents égaux chacun à chacun ; deux losanges sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et un angle égal ; deux carrés sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal.

EXERCICES.

Les côtés opposés d'un parallélogramme déterminent sur toute droite passant par le point d'intersection des diagonales des segments égaux (**48**) : on appelle *centre d'un parallélogramme* ce point d'intersection.

40. Deux parallélogrammes inscrits l'un dans l'autre, c'est à dire tels que les quatre sommets du premier soient respectivement sur les quatre côtés du second, ont même centre.

41. Soit $A'B'C'D'$ un quadrilatère convexe inscrit dans un parallélogramme $ABCD$ de centre I. Si les diagonales de ce quadrilatère passent par le point I, ce quadrilatère est un parallélogramme.

42. Soient ABC un triangle isocèle et M un point variable de la base BC. Par ce point on mène deux parallèles aux côtés égaux. Montrer que le périmètre du parallélogramme ainsi construit reste constant quand le point M varie sur le côté BC.

43. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que les côtés AB et DC soient parallèles et les côtés AD et BC aient même mesure. Montrer que ce quadrilatère est soit un parallélogramme, soit un trapèze isocèle.

44. Soient deux droites parallèles d et d' et M un point de leur plan. Mener une droite passant par ce point tel que le segment intercepté par ces droites ait une longueur donnée.

45. Par un point pris à l'intérieur d'un angle, mener une droite qui, limitée aux deux côtés, ait pour milieu ce point.

46. Par un point pris à l'extérieur d'un angle, mener une droite qui ait pour milieu le point d'intersection avec le côté le plus rapproché.

47. Sur les côtés d'un carré $ABCD$, ou sur leurs prolongements, et dans le même sens, on porte les longueurs égales AA', BB', CC', DD'. Montrer que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré.

§8. LES LIGNES D'UN TRIANGLE.

118. Théorème. — *Les médiatrices des côtés d'un triangle concourent en un même point.*

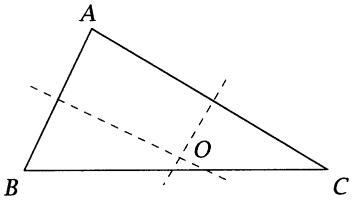


Fig. 60.

Soit ABC un triangle. Si les médiatrices de deux côtés, par exemple celles de AB et de AC sont paralléles, alors ces côtés sont paralléles **(92)(86)**. Le triangle est un triangle aplati. Ainsi les médiatrices de ces côtés sont sécantes en un point O[4]. Par suite OA égale OB et OA égale OC : le point O est situé sur la médiatrice du côté BC.

Le point d'intersection des médiatrices d'un triangle est équidistant des sommets du triangle, c'est le centre d'un cercle passant par les sommets du triangle que l'on appelle *cercle circonscrit* au triangle. On verra que tout cercle passant par les sommets du triangle est confondu avec le cercle circonscrit **(150)** : son centre est équidistant des sommets et est donc le point où concourent les médiatrices du triangle. Son rayon est alors déterminé de manière unique.

119. Théorème. — *Les hauteurs d'un triangle concourent en un même point.*

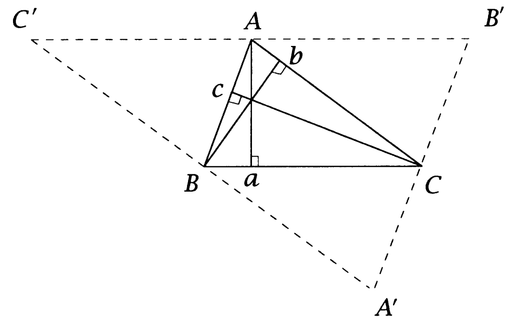


Fig. 61.

Soient ABC un triangle et Aa, Bb, Cc ses hauteurs. On se ramène à la démonstration précédente comme suit :

Par le point A on mène la parallèle au côté BC, par le point B la parallèle au côté AC et par le point C la parallèle au côté AB. On définit ainsi un triangle $A'B'C'$ et les médiatrices des côtés de ce triangle sont les hauteurs du triangle ABC.

En effet les quadrilatères convexes $C'ACB$ et $AB'CB$ sont des parallélogrammes **(103)**, d'où AC' égale BC et AB' égale BC **(106)**. La droite Aa est médiatrice du segment $B'C'$ **(56)**. Il en est de même des droites Bb et Cc.

Les hauteurs du triangle ABC concourent en un même point.

Note : Ce point de concours s'appelle *orthocentre* du triangle.

120. Théorème. — *Les bissectrices des angles d'un triangle concourent en un même point.*

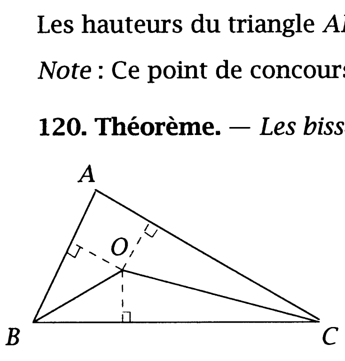


Fig. 62.

La somme de deux angles d'un triangle étant moindre que deux droits **(95)** les bissectrices de ses angles se coupent **(94)**[5]. Notons O le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ d'un triangle ABC. Le point O, étant situé à égale distance des côtés BA, BC, CA, appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ **(83)**.

Pour les mêmes raisons :

---

[4] En Géométrie de Lobatchevski il existe des triangles dont les médiatrices des côtés n'ont aucun point commun.

[5] Pour les bissectrices, ou les médianes d'un triangle, on n'a pas besoin du postulat des parallèles : c'est une propriété topologique (de position) définie par l'*axiome de* Pasch qui énonce que toute droite qui est sécante à un côté d'un triangle est sécante à un autre : par cet axiome, la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ coupe le côté BC au point I, et la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ coupe le côté AI du triangle ABI au point O.

121. Théorème. — *Les bissectrices de deux angles extérieurs à un triangle et la bissectrice intérieure du troisième angle concourent en un même point.*

122. *Note* : La bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure d'un angle d'un triangle sont perpendiculaires (**40**).

123. Théorème. — *Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égal à sa moitié.*

Soient ABC un triangle et I et J les milieux respectifs des côtés AB et AC. Prolongeons le segment IJ d'une longueur égale à elle même JE. Le quadrilatère $AICE$ est un parallélogramme (**107**). Par suite CE est égal et paralléle à IA et donc à BI : le quadrilatére $IBCE$ est un parallélogramme (**108**).

Ainsi IJ est paralléle à BC et égal à sa moitié (IE est égal à BC).

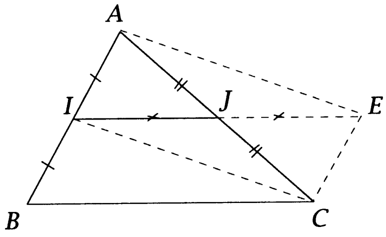


Fig. 63.

124. Théorème. — *Les médianes d'un triangle concourent en un même point situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté opposé.*

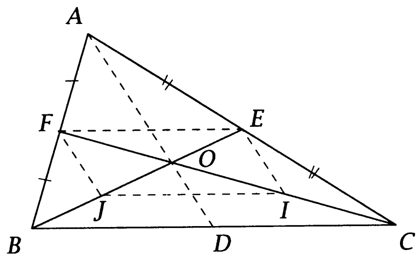


Fig. 64.

Considérons ABC un triangle et BE et CF les médianes issues des sommets B et C respectivement. Elles se coupent en un point O (**95**)(**94**).

Il suffit de montrer que le point O est situé au tiers à partir du côté AC, ou du côté AB : la médiane AD coupant la médiane BE en un point O' situé au tiers à partir du côté AC, les points O et O' sont confondus.

Soient I et J les milieux respectifs des segments OC et OB. Alors les segments IE et FJ sont parallèles au segment AO et égaux à sa moitié (**123**) ; le quadrilatère convexe $EFJI$ est un parallélogramme (**108**) et le point O est situé au milieu des segments FI et EJ (**107**). Ainsi OF est égal au tiers de CF et les médianes d'un triangle concourent en un même point situé au tiers à partir du côté opposé.

Note : Ce point de concours est appelé *centre de gravité* du triangle.

EXERCICES.

48. Dans un parallélogramme $ABCD$, on joint le point A au milieu de BC et le point C au milieu de AD. Montrer que les droites obtenues divisent la diagonale BD en trois parties égales.

49. Dans un trapèze, les milieux des côtés non paralléles et les milieux des diagonales sont quatre points en ligne droite. Le segment joignant les milieux de ces côtés est parallèle aux bases et égal à leur demi-somme.

50. Par un point donné, tracer une droite intersectant deux côtés d'un angle de manière à former des angles égaux.

51. Les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque sont les sommets d'un parallélogramme, et les droites joignant les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère convexe et la droite qui joint les milieux des diagonales concourent en un même point.

52. Les droites joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque forment un parallélogramme. Pour quelles conditions est-il un rectangle, un losange, un carré ?

53. On considère un point E situé sur la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ d'un triangle ABC, tel que l'angle $\widehat{BEC}$ soit égal à $\frac{1}{2}(\hat{A} + \pi)$. Que peut-on dire de ce point pour le triangle ABC ?

54. On considère un angle $\widehat{AOB}$ et un point C situé sur le segment OA ou sur son prolongement. Trouver sur la droite OA un point D équidistant du point C et de la droite AB.

§9. DES SYMÉTRIES ET DES TRANSLATIONS.

Lorsqu'on superpose deux figures, il est parfois utile d'expliciter le mouvement réalisant cette superposition ; les symétries **(131)(136)** et la translation **(141)** sont de tels mouvements et leur utilisation s'avère souvent d'un usage précieux quant à la construction d'une figure ou la recherche d'un lieu géométrique.

125. On appelle *transformation du plan* ou d'une figure, toute application qui à tout point du plan fait correspondre un point de ce plan ; on étudiera essentiellement celle qui sont biunivoques, c'est à dire une à une. Un point et son point image sont dits *points correspondants* ou *points homologues*. Un mouvement glissant du plan sur lui-même, ou un retournement du plan sur lui-même autour d'une droite prise comme charnière réalisent une transformation.

126. Lemme. — *Deux figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont égales si et seulement si, quels que soient trois points A, B, C, de l'une et les points correspondants A', B', C', de l'autre, les triangles, ou triangles aplatis, qu'ils forment sont égaux.*

Il suffit de montrer la proposition réciproque :

1º cas : Il existe trois points A, B, C de $\mathcal{F}$ non alignés.
On sait que les points A', B', C' ne sont pas alignés **(68)**.
Soit D un point quelconque de $\mathcal{F}$ et D' son point correspondant ; dans le mouvement superposant le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$, le point A allant en A', le point B en B', et le point C en C', le point D se porte en un point D_1.
Supposons que les points D_1 et D' soient distincts : les triangles $A'C'D_1$ et $A'C'D'$ sont égaux comme égaux au triangle ACD. De même les triangles $B'C'D_1$ et $B'C'D'$ sont égaux au triangle BCD. Par suite $A'D'$ égale $A'D_1$, $B'D'$ égale $B'D_1$, et $C'D'$ égale $C'D_1$. Les points A', B', et C' sont situés sur la médiatrice de $D'D_1$ **(57)** : ils sont alignés, ce qui est absurde.

Les figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont superposables : elles sont égales **(7)**.

2º cas : La figure $\mathcal{F}$ est contenue dans une droite d.
Remplaçons la condition *"triangles aplatis égaux"* par la condition plus faible *a priori*, suivante : quels que soient les points distincts A et B de $\mathcal{F}$ et A', B' les points correspondants de $\mathcal{F}'$, les segments AB et $A'B'$ sont égaux.
Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{F}$ pris dans cet ordre et A', B', C' les points correspondants de $\mathcal{F}'$. La distance AC égale la distance $AB + BC$, par suite la distance $A'C'$ égale la distance $A'B' + B'C'$ et les points A', B', C' sont alignés, sinon $A'C'$ serait strictement moindre que $A'B' + B'C'$ **(67)**. D'où la figure $\mathcal{F}'$ est contenue dans une droite d'.
Le mouvement amenant le segment AB sur le segment $A'B'$, le point A allant en A', le point B allant en B', porte le point C sur un point C_1 situé sur la droite d'. Les segments $A'C'$ et $A'C_1$ d'une part et $B'C'$ et $B'C_1$ d'autre part sont égaux comme segments respectivement égaux aux segments AC et BC. Par suite les points C_1 et C' sont confondus, sinon A' et B' seraient deux milieux distincts du segment $C'C_1$.
Les figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont superposables : elles sont égales.

127. *Note* : Pour faire coïncider entre elles deux figures égales, il suffit de faire coïncider trois points non alignés de l'une avec les trois points correspondants de l'autre. Si les figures sont contenues dans une droite, deux points suffisent.

Du troisième cas d'égalité des triangles (**51**) on obtient :

128. Corollaire. — *Deux figures sont égales si et seulement si les distances entre deux points quelconques de l'une et les points correspondants de l'autre sont égales.*

129. Une transformation du plan conservant les distances est appelée *isométrie* . Tout glissement du plan sur lui-même, tout retournement autour d'une droite prise comme charnière réalisent une isométrie. Réciproquement, on montrera (**238**) que toute isométrie du plan provient d'un mouvement, ce qui n'est pas toujours le cas dans l'espace.

130. *Remarques* : L'image d'une droite par une isométrie est une droite, l'image de deux droites perpendiculaires est deux droites perpendiculaires, l'image de deux droites parallèles est deux droites parallèles (**128**), et l'image d'un cercle ou d'une circonférence est un cercle ou une circonférence (**25**).

131. *Définition* : On appelle *symétrie orthogonale* par rapport à une droite d, l'application qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que la droite d soit la médiatrice du segment MM'. Si le point M est situé sur la droite d, alors les points M et M' sont confondus. On appelle *axe de la symétrie orthogonale* la droite d et on représente cette application par le symbole $\mathcal{S}_d$.

132. Si on compose deux fois de suite la symétrie orthogonale relativement à une même droite d, on obtient la transformation identique du plan.

133. Théorème. — *La symétrie orthogonale est une isométrie.*

Soient A et B deux points du plan ; notons A' et B' les points correspondants par rapport à une symétrie orthogonale d'axe d.

Si le point A est situé sur la droite d il est évident que la distance $A'B'$ égale la distance AB : les points A et A' sont confondus, et le triangle ABB' est isocèle (**59**), ou les points B et B' coïncident.

Considérons le cas où les points A et B sont pris hors de la droite d.

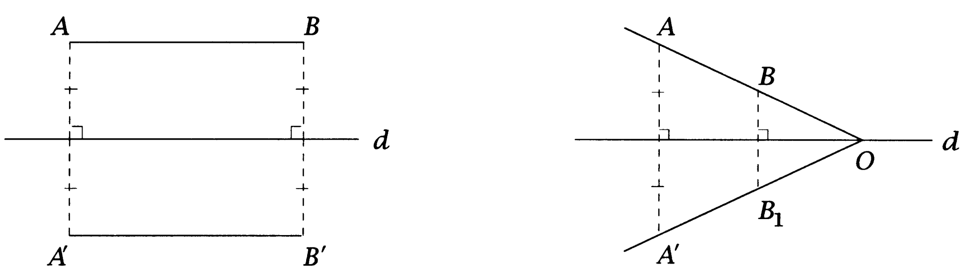


Fig. 65.

i) La droite AB est parallèle à la droite d :
Les segments AA' et BB' sont parallèles (**86**) et égaux (**106**). Le quadrilatère convexe $ABB'A'$ est un parallélogramme (**108**) et les distances AB et $A'B'$ sont égales (**106**).

ii) La droite AB est sécante à la droite d en un point O :

Soit B_1 le point intersection de la droite OA' avec la parallèle à la droite AA' passant par le point B.

Le triangle AOA' est isocèle (**57**) et la droite d est bissectrice de l'angle $\hat{O}$ (**55**) ; elle est aussi hauteur du triangle BOB_1 (**92**). Le triangle BOB_1 est isocèle (**59**) et la droite d est médiatrice du segment BB_1 : les points B_1 et B' sont confondus et les distances $A'B'$ et AB sont égales.

La symétrie orthogonale est une isométrie.

134. *Note* : La symétrie orthogonale par rapport à une droite d correspond au pivotenement (au pliage) du plan sur lui-même autour de la droite d prise comme charnière (**30**)(**44**) ou (**54**).

135. On dit qu'une droite d est *axe de symétrie d'une figure $\mathcal{F}$* si cette figure est globalement invariante par la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_d$.

La bissectrice de l'angle au sommet d'un triangle isocèle est axe de symétrie de ce triangle (**55**), une droite passant par le centre d'une circonférence est axe de symétrie de la circonférence (**30**), ...

136. Définition. — *La symétrie centrale par rapport à un point O est l'application qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que O soit le milieu du segment MM'. On représente cette application par le symbole $\mathcal{S}_O$ et on dit que le point O est le centre de la symétrie.*

137. Si on compose deux fois de suite la symétrie centrale relativement à un même point O, on obtient la transformation identique du plan.

138. Théorème. — *La symétrie centrale est une isométrie.*

Considérons un point O centre d'une symétrie centrale, A et B deux points du plan et A' et B' les points correspondants.

Les triangles OAB et $OA'B'$ sont égaux (**49**) et les distances $A'B'$ et AB sont égales. La symétrie centrale est une isométrie.

Note : La symétrie centrale dans le plan s'obtient en effectuant un certain mouvement rotatoire du plan autour du point fixe centre de la symétrie ; dans l'espace cette transformation est d'une toute autre nature.

139. Définition. — *Un segment de droite orienté ou vecteur lié est un segment dont on a distingué l'origine et l'extrémité : il a une longueur, un sens, et une direction donnés.*

On note $\overrightarrow{AB}$ le segment de droite orienté défini par ses extrémités A et B, le point A étant l'*origine*, le point B l'*extrémité*, sa direction étant celle de la droite AB, et son sens celui du chemin allant de l'origine A vers l'extrémité B. Il est clair que le glissement d'un vecteur sur sa droite support ne change pas son sens.

On généralise cette notion aux vecteurs du plan en disant que deux *vecteurs* de supports parallèles sont de *même sens* si les points extrémités sont situés dans un même demi-plan défini par les points origine. Ainsi si trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A''B''}$ sont tels que $\overrightarrow{AB}$ est de même sens que $\overrightarrow{A'B'}$, et $\overrightarrow{A'B'}$ est de même sens que $\overrightarrow{A''B''}$, alors $\overrightarrow{AB}$ est de même sens que $\overrightarrow{A''B''}$: si les trois points origines A, A', A'' sont alignés, c'est évident ; dans le cas contraire, il suffit de faire glisser le vecteur $\overrightarrow{A''B''}$ sur sa droite support.

140. Définition. — *Deux segments de droites, ou deux vecteurs liés sont égaux (équipollents) si et seulement si ils ont même longueur, même direction, et même sens.*

Si on appelle *parallélogramme généralisé* un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu (**107**), ceci afin de pouvoir considérer le cas ou les sommets de ce quadrilatère sont situés sur une même droite, on a :

140 bis. Théorème-Définition. — *Deux segments de droites orientés sont égaux (équipollents) si et seulement si ils forment un parallélogramme généralisé.*

Si les segments de droites sont égaux, ils forment un parallélogramme (**108**), et dans le cas où leurs extrémités sont situées sur une même droite, les diagonales du quadrilatère qu'ils forment ont même milieu.

Réciproquement s'ils forment un parallélogramme généralisé ils sont égaux (**107**)(**103**).

Un *vecteur*, ou *vecteur libre*, est une classe de vecteurs équipollents. Un vecteur (libre) peut être représenté par un segment de droite orienté pour lequel on n'a pas fixé d'origine et d'extrémité.

141. Définition. — *La translation de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, est la relation qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que les segments de droites orientés $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient égaux. On représente cette application par le symbole $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$.*

142. Théorème. — *La translation de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ est une isométrie.*

Tout d'abord montrons que c'est une application, c'est à dire qu'elle ne dépend pas du représentant $\overrightarrow{AB}$ choisi. Soient un vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ égal à $\overrightarrow{AB}$ et M un point du plan ; notons M' et M_1' ses images par $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ et $\mathcal{T}_{\overrightarrow{A_1B_1}}$.

Le segment de droite orienté $\overrightarrow{MM'}$ est égal au segment de droite $\overrightarrow{MM_1'}$, comme égaux respectivement aux segments de droites égaux $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A_1B_1}$. Ils sont de même longueur, de même sens et de même direction : les points M' et M_1' sont confondus et la translation ne dépend pas du représentant choisi. C'est une application.

Cette application conserve les distances : soient M et N deux points du plan et M' et N' leurs images respectives par une translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux comme égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ils forment un parallélogramme généralisé ; ses côtés MN et $M'N'$ sont égaux (**106**) (si le parallélogramme est aplati, les diagonales ont même milieu et la propriété est immédiate à vérifier). Toute translation est une isométrie.

L'image d'une droite par une isométrie étant une droite (**130**), on a :

143. Corollaire. —

i) L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle à la droite donnée ;

ii) Le lieu des points situés d'un même côté d'une droite, à une distance donnée de cette droite est une droite parallèle à cette droite ;

iii) Le lieu des points équidistants de deux droites parallèles est une droite parallèle aux droites données.

144. *Notes* :

i) Si on considère que deux droites parallèles sont deux droites dont le point d'intersection a été rejeté à l'infini (**97**), l'assertion iii) montre une analogie entre droites parallèles et droites concourantes si on fait référence à la propriété caractéristique de la bissectrice d'un angle (**83**).

ii) La translation correspond à un glissement du plan sur lui-même selon une direction donnée.

145. Théorème. — *La composition de deux translations est une translation.*

Soient A et A_1 deux points du plan et $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ deux segments de droites orientés. On note B et B_1 les points correspondants à A et A_1 par la translation $\mathcal{T}_{\vec{V_1}}$ et C et C_1 les points correspondants à B et B_1 par la translation $\mathcal{T}_{\vec{V_2}}$ respectivement. Les quadrilatères ABB_1A_1 et BCC_1B_1 étant des parallélogrammes ou des parallélogrammes généralisés (**140**), les segments AA_1, BB_1, CC_1 sont égaux et parallèles. Par suite le quadrilatère AA_1C_1C est un parallélogramme, ou un parallélogramme généralisé, et les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A_1C_1}$ sont égaux; notons $\vec{V}$ ce vecteur. Alors les points C et C_1 sont les points correspondant aux points A et A_1 par la translation $\mathcal{T}_{\vec{V}}$.

La transformation composée de deux translations est une translation. Pour cela on doit considérer que la transformation "identité du plan" est la translation de vecteur directeur nul (**146**).

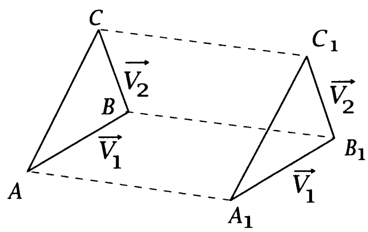


Fig. 66.

146. On définit la *somme* des deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ comme étant le vecteur $\vec{V}$, c'est à dire le vecteur correspondant à la composition des translations $\mathcal{T}_{\vec{V_1}}$ et $\mathcal{T}_{\vec{V_2}}$.

Il est clair que cette composition est commutative : par suite l'addition de deux vecteurs est une opération commutative. Ainsi on peut écrire $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$.

Il est clair que, si on compose les deux translations $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ et $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$, on obtient comme transformation l'identité du plan. Le vecteur correspondant sera dit *vecteur nul* et, si $\mathcal{T}$ est la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, on note $\mathcal{T}^{-1}$ la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$ qui est dite *translation inverse* de la translation $\mathcal{T}$.

Note : Quand on compose des forces s'exerçant en un même point, il est d'usage de représenter ces forces par des segments de droites orientés, la direction et le sens de ces segments étant la direction et le sens de ces forces, et la longueur de ces segments leur intensité. La force résultante correspond alors à la somme des segments de droites orientés que nous venons de définir.

EXERCICES.

55. Dans un triangle isocèle, la somme des distances d'un point de la base aux deux autres côtés est constante. Que devient cet énoncé lorsque l'on considère un point pris sur un des prolongements de la base ?

56. Dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point intérieur aux trois côtés est constante. Que devient cet énoncé lorsque le point considéré est extérieur ?

57. Soient l une longueur donnée et d et d' deux droites. Quel est le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances aux droites d et d' est égale à l ? Même question si au lieu de considérer la somme on considère la différence.

58. Soient deux points A et B situés de part et d'autre de deux droites parallèles d et d' et ∂ une direction donnée. Quel est le plus court chemin allant de A en B sachant qu'entre les droites d et d' le chemin parcouru est de direction ∂ ?

EXERCICES SUR LE CHAPITRE I.

59. On considère un point P intérieur au triangle ABC tel que CP égale CB. Montrer que AP est moindre que AB.

60. Par un point M extérieur à une circonférence C de centre O et de rayon R, mener une droite sécante aux points N et N' telle que N' soit milieu du segment MN.

61. Dans un triangle ABC rectangle en A, l'angle $\widehat{B}$ vaut 30° ($\frac{1}{3}$ d'angle droit) ; on trace la hauteur AH et la médiane AM, et de B on mène BE perpendiculaire sur le prolongement de AM ; on trace EH. Démontrer que les segments BE, EH et AH sont égaux.

62. Deux circonférences de centre O et O' se coupent en A ; on joint A au milieu de M de OO' et l'on trace la perpendiculaire à AM en A ; elle rencontre la circonférence de centre O en B et celle de centre O' en C. Démontrer que les segments AB et AC sont égaux.

63. Soient ABC un triangle rectangle et M un point de l'hypothénuse BC. Montrer que si, les segments AM et BM sont égaux, le point M est le milieu de BC.

64. On mène, dans une circonférence de centre O, un diamètre AB et une corde CD quelconque ; de A et de B, on trace les cordes AE et BF perpendiculaires à la droite CD ; les droites AE et BF prolongées rencontrent la droite CD en G et H respectivement. Démontrer que $EG = BH$ et $HC = DG$.

65. On donne deux points A et B à l'intérieur d'un angle $\widehat{xOy}$; trouver le plus court chemin allant de A à B en touchant les côtés de l'angle dans un ordre donné.

66. Dans un parallélogramme $ABCD$, on prolonge AB d'une longueur BE égale à BC, et AD d'une longueur DF égale à DC. Démontrer que les angles $\widehat{DCF}$ et $\widehat{BCE}$ sont égaux, et que les points F, C, E sont alignés.

67. Sur les côtés AB et AC d'un triangle ABC, et à l'extérieur du triangle, on mène des perpendiculaires MH et NG, égales à la moitié du côté qu'elles rencontrent, M étant le milieu de AB et N celui de AC. On joint H et G au milieu P de BC. Démontrer que l'angle $\widehat{HPG}$ est un angle droit.

68. Sur une droite AB, on prend un point C, puis on trace deux droites parallèles passant par les points A et B sur lesquelles on porte, d'un même côté par rapport à AB, $AM = AC$ et $BN = BC$; on désigne par D le milieu de MN. Montrer que le triangle ADB est rectangle.

69. On prend sur les côtés AD et DC d'un carré $ABCD$ des longueurs égales AG et DF ; on trace AF et BG, qui se coupent en H. Démontrer que la droite qui joint le milieu de BF au milieu de GF est perpendiculaire à AF.

70. Lorsque deux angles opposés d'un quadrilatère sont droits, les bissectrices des deux autres sont parallèles.

71. Dans un triangle ABC, on trace les médianes AM et BN et par N la parallèle à BC, et par C la parallèle à BN ; ces deux droites se coupent en P ; on désigne par D le milieu de PN. Démontrer que CD est parallèle à MN.

72. On donne un trapèze isocèle $ABCD$, $AD = BC$, et l'on trace les diagonales AC et BD. Les bissectrices des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DBA}$ se coupent en F, celles des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{CAB}$ en G. Démontrer que les droites AB et FG sont parallèles.

73. Un triangle ABC est inscrit dans une demi-circonférence de centre O de diamètre AB ; de O on mène OF et OG perpendiculaires à AC et BC respectivement. Démontrer que FG est parallèle à AB.

74. Du sommet A d'un triangle ABC, on mène des perpendiculaires AM et AN aux bissectrices extérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$; ces perpendiculaires rencontrent les bissectrices aux points M et N. Démontrer que la droite MN passe par les milieux de AB et AC et qu'elle est parallèle à BC.

75. Sur les côtés AB et AC d'un triangle isocèle de sommet A, on construit, à l'extérieur du triangle, les carrés $ABDF$ et $ACGH$; on mène DG et FH. Démontrer que ces droites sont parallèles.

76. Un triangle ABC est inscrit dans une circonférence C de centre O ; ses hauteurs se coupent en H. Démontrer que la droite qui joint le milieu N de AH au milieu P de AB est parallèle à la droite qui joint O au milieu Q de AC. En déduire que le quadrilatère $OPNQ$ est un parallélogramme.

77. On trace les médianes AM, BN et CP d'un triangle ABC. La parallèle à CP passant par le point N coupe BC en F. Par F on trace la parallèle à BN, et par B la parallèle à CP ; ces parallèles se coupent en D. Démontrer que les segments DN et AM sont égaux et parallèles et que les points D, M et P sont alignés.

78. Dans un rectangle $ABCD$, on prend un point quelconque P sur la diagonale BD. On trace CP que l'on prolonge d'une longueur $PM = CP$ et on mène ME et MF perpendiculaires à AD et AB respectivement. Montrer les propriétés suivantes :
1º Les droites AM et BD sont parallèles ;
2º Les droites EF et AC sont parallèles ;
3º Les points E, F et P sont alignés.

79. Démontrer que les droites qui joignent les points d'intersection des bissectrices d'un parallèlogramme sont parallèles aux côtés.

80. Démontrer que, si un triangle possède deux médianes égales, ce triangle est isocèle.

81. Soient ABC un triangle rectangle, I le milieu de l'hypothénuse BC, et AH la hauteur. Si P et Q sont les intersections des perpendiculaires menées du point H aux côtés AB et AC, montrer que les droites AI et PQ sont perpendiculaires.

82. Par un point quelconque P de la base BC d'un triangle isocèle, on élève une perpendiculaire PNM qui coupe les côtés BA et CA aux points M et N. Montrer que la somme $PM + PN$ est constante.

83. La droite qui passe par le sommet d'un triangle et le milieu d'une des médianes des deux autres sommets divise le côté opposé au tiers.

84. Dans un triangle, deux sommets sont équidistants de la médiane relative au troisième sommet.

85. Par le point de concours G des médianes d'un triangle ABC, on mène une droite quelconque d. Montrer que la somme des distances des deux sommets situés du même côté de la droite d est égale à la distance du troisième sommet à cette même droite.

86. De tous les triangles qui ont un même angle au sommet et dont la somme des côtés qui comprennent cet angle est constante, quel est celui qui a la plus petite base ?

87. On considère un point D sur la bissectrice d'un angle $\widehat{xAy}$. Une droite passant par ce point coupe les côtés de l'angle en B et C. Quel est le triangle ABC de périmètre minimum ?

88. Montrer que la projection d'un sommet d'un triangle sur les bissectrices des deux autres angles sont quatre points alignés.

89. Quel est le lieu géométrique du milieu M d'un segment AB dont les extrémités glissent sur les côtés d'un angle droit ?

90. Construire un triangle connaissant les longueurs des trois médianes.

91. Avec les médianes d'un triangle prises pour côtés, on construit un nouveau triangle. Montrer que les médianes de ce nouveau triangle sont les $\frac{3}{4}$ des côtés du triangle initial (*Indication* : Soient AI, BJ et CK les médianes d'un triangle ABC. La parallèle au côté AC passant par B coupe la parallèle à la médiane BJ passant par C au point E : le triangle CEK est un triangle construit avec les médianes du triangle ABC).

CHAPITRE II

§1. DU CERCLE.

Rappelons que toute droite passant par le centre d'un cercle est axe de symétrie du cercle (**30**)(**135**), et que deux angles au centre d'un même cercle sont égaux si et seulement si les arcs qu'ils définissent sont égaux (**37**). Il en est de même pour les arcs, moindres qu'une demi-circonférence, et les cordes qui les sous-tendent (**31**).

147. Lorsque la droite coupe la circonférence en deux points A et B, tous les points du segment AB sont intérieurs au cercle : si O est le centre du cercle, le triangle OAB est isocèle, le pied de la hauteur issue de O est sur le segment AB et pour tout point M de ce segment on a OM moindre que OA (**78**). De même on montre que tout point de la droite AB, non situé entre A et B, est extérieur à la circonférence.

Plus généralement, on voit que la circonférence est une *courbe convexe*, c'est à dire, si les extrémités d'un segment sont situées à l'intérieur de la circonférence, tous les points du segment sont intérieurs à la circonférence.

Les critères d'intersection, ou de non intersection, d'une droite et d'une circonférence seront donnés en (**156**) : lorsqu'une droite et une circonférence se coupent, elles se coupent en un ou deux points.

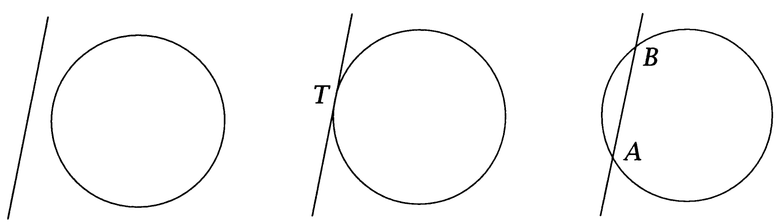


Fig. 67.

148. Théorème. — *Le diamètre perpendiculaire à une corde passe par le milieu de cette corde et des arcs qu'elle sous-tend.*

Ce théorème n'est qu'une autre formulation de la construction de la bissectrice d'un angle (**64**) ; en effet, soit AB une corde d'une circonférence C de centre O et d le diamètre perpendiculaire à AB. Le triangle OAB est isocèle et la droite d est médiatrice du segment AB et bissectrice de l'angle au sommet $\widehat{AOB}$ (**55**). Elle passe par le milieu de la corde AB (**56**) et de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (**37**).

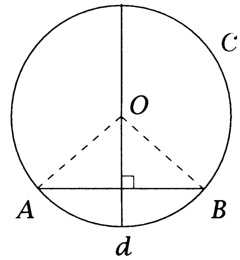


Fig. 68.

149. *Note* : Une droite étant déterminée par deux points, tout diamètre passant par le milieu d'une corde, ou d'un arc, est perpendiculaire à cette corde ; c'est un axe de symétrie de la corde et de l'arc. Réciproquement toute médiatrice d'une corde passe par le centre de la circonférence.

150. Théorème. — *Par trois points non alignés passe une et une seule circonférence.*

Trois points non alignés forment un triangle et les médiatrices concourent en un même point (**118**) : c'est le centre d'une circonférence passant par les sommets de ce triangle. Il suffit de vérifier l'unicité, unicité qui provient du fait qu'une circonférence ne peut avoir deux centres différents. Sinon soient O et O' deux centres distincts ; la droite passant par ces deux points coupe la circonférence en A et B. On a les égalités suivantes :

$AB = AO + OB = AO' + O'B$ et $AO = OB$ et $AO' = O'B$.

Par suite $OB = O'B$ et, si par exemple O' est entre O et B, on a $OB = OO' + O'B$; d'où OO' est de mesure nulle et les points O et O' sont confondus.

151. Dans un même cercle, ou dans deux cercles égaux, à un plus grand arc moindre qu'une demi-circonférence correspond une plus grande corde et réciproquement.

Dans un cercle C de centre O considérons un arc $\overset{\frown}{AB}$, moindre qu'une demi-circonférence, plus grand qu'un arc $\overset{\frown}{CD}$. L'angle $\widehat{AOB}$ est plus grand que l'angle $\widehat{COD}$ (**37**). Les triangles AOB et COD ayant les côtés OA, OB, OC, OD égaux, le côté AB est plus grand que le côté CD (**73**).

Réciproquement, si la corde AB est plus grande que la corde CD, l'angle $\widehat{AOB}$ est plus grand que l'angle $\widehat{COD}$ (**74**) et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est plus grand que l'arc $\overset{\frown}{CD}$.

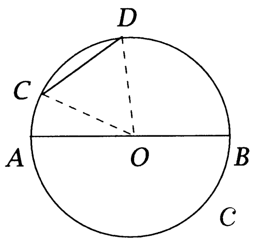


Fig. 69.

152. Théorème. — *La plus grande corde qu'on puisse mener dans une circonférence est un diamètre.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent si on considère un diamètre comme une position limite d'une corde. On peut le montrer directement comme suit :

Soient AB un diamètre d'un cercle C de centre O et CD une corde qui ne soit pas diamètre. On a $CD < OC + OD$ (**67**) et $AB = OC + OD$. La corde CD est plus petite que le diamètre AB.

153. *Note* : Le rapport de deux arcs n'est pas égal à celui des cordes qui les sous-tendent :

Soit C un point d'un arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$; alors $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$ égale $\overset{\frown}{AB}$ et $AC + CB$ est strictement plus grand que AB (**67**).

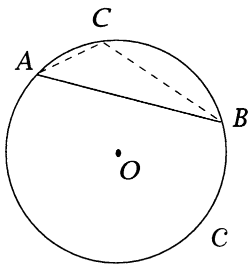


Fig. 70.

154. Corollaire. — *Deux cordes égales sont également éloignées du centre et, de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre.*

Soient AB et CD deux cordes d'un cercle C de centre O et H et H' les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de O à ces cordes.

Si la corde AB égale la corde CD les triangles OAB et OCD sont égaux (**51**) et OH égale OH'. Les cordes considérées sont également éloignées du centre.

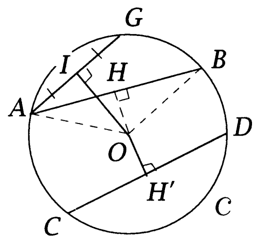


Fig. 71.

Si la corde CD est plus petite que la corde AB, il existe un point G de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ tel que la corde AG égale la corde CD (**151**). Le point I milieu de la corde AG est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur AG (**148**). Les points I et O sont situés de part et d'autre de la droite AB et OI est oblique relativement à cette droite : la distance OH est plus petite que la distance OI (**78**) qui est la distance de O à la droite AG, distance égale à OH'. La corde CD est plus éloignée du centre que la corde AB.

Par la loi des réciproques on a :

155. Théorème. — *Deux cordes également éloignées du centre sont égales et, de deux cordes inégales, la plus éloignée est la plus petite.*

On peut maintenant préciser les intersections possibles d'une droite avec une circonférence :

156. Théorème. — *Une droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points :*

1º) *Si la distance du centre du cercle à la droite est plus grande que le rayon, la circonférence et la droite n'ont pas de point commun ;*
2º) *Si la distance du centre du cercle à la droite est égale au rayon, la circonférence et la droite ont un seul point commun ;*
3º) *Si la distance du centre du cercle à la droite est inférieure au rayon, la circonférence et la droite ont deux points communs ; ils sont situés symétriquement par rapport au diamètre perpendiculaire à la droite donnée.*

Soient C une circonférence de centre O et de rayon r, et $\triangle$ une droite. Notons H le pied de la perpendiculaire à $\triangle$ issue du point O.

1º *et* 2º *cas :* $OH \geq r$

Pour tout point M de $\triangle$ distinct de H on a $OM > OH$ (**78**). Si la distance OH est supérieure à r, la droite $\triangle$ et le cercle C n'ont aucun point commun ; si la distance OH est égale à r, la droite $\triangle$ et le cercle C ont le point H en commun et c'est le seul.

3º *cas :* $OH < r$

Le point H est situé à l'intérieur de la circonférence. Il ne peut y avoir plus de deux points d'intersection et dans ce cas, s'il y en a un, il y en a deux situés symétriquement par rapport à la droite OH (**78**).

Il existe sur $\triangle$ un point M tel que le segment HM soit de mesure $2r$, d'où $OM > MH - OH$ (**67**) et OM est plus grand que r. Un point N allant du point H au point M verra sa distance par rapport au point O passer de OH à OM. Par continuité on déduit qu'il existe un point N de $\triangle$ situé à une distance du point O égale au rayon du cercle, c'est à dire un point N de $\triangle$ situé sur C.

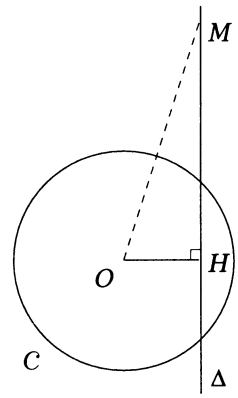


Fig. 72.

157. Définition. — *On nomme tangente à une circonférence toute droite qui n'a qu'un seul point commun avec la circonférence. Ce point commun est appelé point de contact.*

158. Corollaire. — *Par un point d'une circonférence passe une et seulement une tangente, à savoir la droite perpendiculaire au rayon qui aboutit à ce point.*

159. *Note* : Une droite d est tangente à une circonférence C si et seulement si elle a un point commun avec C et si les points de la circonférence sont situés d'un même côté par rapport à la droite d.

160. Corollaire. — *La plus courte et la plus longue distance d'un point à une circonférence s'obtiennent en joignant ce point aux intersections de la circonférence avec la droite passant par ce point et par le centre du cercle.*

Soient A un point extérieur et A' un point intérieur à une circonférence C de centre O. La droite OA, respectivement OA', coupe la circonférence C aux points B et C.

Considérons un point D de la circonférence C; les inégalités triangulaires relatives au triangle OAD (**67**) donnent :

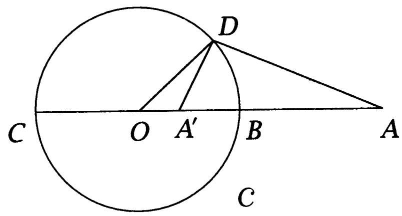


Fig. 73.

◇ $OA<OD+AD$, soit en retranchant les rayons OB et OD, l'inégalité $AB<AD$;

◇ $AD<OA+OD$ soit l'inégalité $AD<AC$.

Et les inégalités triangulaires relatives au triangle $OA'D$ (**67**) donnent :

◇ $A'D>OD-OA'$, et comme OD égale OB, on obtient $A'D>A'B$;

◇ $A'D<OD+OA'$, et comme OD égale OC, on obtient $A'D<A'C$.

161. Théorème. — *Deux parallèles interceptent sur une même circonférence des arcs de cercles égaux.*

Soient AB et $A'B'$ deux droites parallèles et T une tangente parallèle à ces droites (**159**), le point de contact étant H.

Les triangles OAB et $OA'B'$ sont isocèles (**53**) et OH est perpendiculaire aux bases AB et $A'B'$ (**159**). D'où OH est bissectrice des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ (**55**) et H est milieu des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{A'B'}$ (**38**)(**37**). Les arcs $\overset{\frown}{AA'}$ et $\overset{\frown}{BB'}$ sont égaux (**37**).

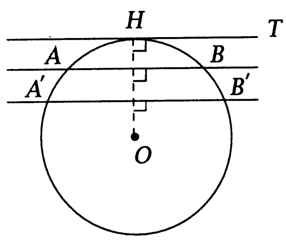


Fig. 74.

162. Théorème. — *L'angle formé par une tangente et une corde est égal à la moitié de l'angle au centre défini par cette corde.*

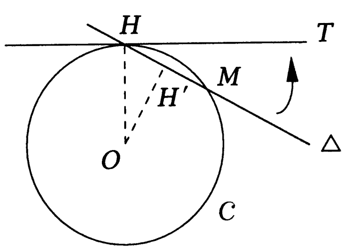


Fig. 75.

Considérons H et M deux points d'une circonférence C de centre O, H' le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur HM et T la tangente à la circonférence passant par le point H.

Les angles $\widehat{THM}$ et $\widehat{HOH'}$ sont égaux, comme angles complémentaires du même angle, et OH' est bissectrice de l'angle $\widehat{HOM}$ (**55**) : l'angle $\widehat{MHT}$ est la moitié de l'angle $\widehat{MOH}$.

163. *Note* : On peut voir une tangente comme la position limite :

La droite $\triangle$ pivote autour du point H pour se juxtaposer avec la droite HT, qui est la droite tangente au cercle C au point H (cf. Fig. 75). C'est à dire le point M tend vers le point H en restant sur la circonférence; les angles $\widehat{MHT}$ et $\widehat{HOH'}$ sont égaux (**99**) et tendent vers l'angle nul lorsque le point M tend vers le point H. De voir une tangente comme position limite permet de généraliser la notion de tangente à d'autres courbes, *"mais outre sa généralité elle offre l'avantage de mettre en lumière l'intime corrélation de certains théorèmes qui sembleraient sans cela tout à fait distincts"* écrit De Comberousse.

164. On définit ainsi l'*angle de deux courbes* en un point qu'elles ont en commun comme l'angle formé par les tangentes (ou les demi-droites tangentes) aux deux courbes en ce point, tangentes considérées comme "positions limites" afin de lever toute ambiguïté (Pour le cas des cercles on peut aussi considérer l'angle défini comme "angle de droite" (**225**).

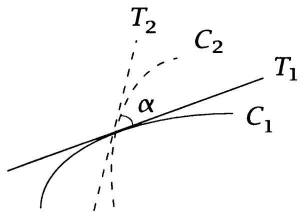


Fig. 76.

165. Théorème. — *L'angle de deux circonférences sécantes est égal à l'angle des rayons qui aboutissent au point commun ou à son supplémentaire.*

On considère deux cercles C et C' de centre O et O' respectivement, sécants en un point M et MT et MT' leurs tangentes respectives en ce point. Les angles $\widehat{TMT'}$ et $\widehat{OMO'}$ sont égaux ou supplémentaires (**99**).

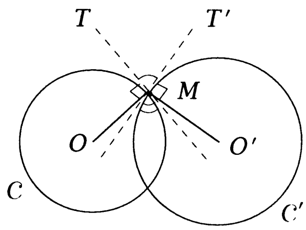


Fig. 77.

166. Définition. — *On appelle normale à une courbe la perpendiculaire élevée à la tangente en son point de contact avec la courbe.*

Toute normale à une circonférence en un de ses points est dirigée suivant le rayon qui passe par ce point : elle passe par son centre.

167. Théorème. — *Deux circonférences distinctes ont au plus deux points en commun. Si elles se coupent en deux points, la droite joignant ces deux points est perpendiculaire à la droite joignant les centres ; si elles ont un seul point commun, ce point est situé sur la ligne des centres et réciproquement.*

Par trois points non alignés passe une et une seule circonférence (**150**) ; par suite deux circonférences distinctes ne peuvent avoir plus de deux points en commun. Considérons C et C' deux circonférences distinctes de centre O et O', de rayons r et r' respectifs où le rayon r est supérieur ou égal au rayon r'.

La droite OO' est axe de symétrie de la figure formée par les deux circonférences (**135**).

1º cas : *La distance des centres est plus grande que la somme des rayons* ($OO' > r + r'$).

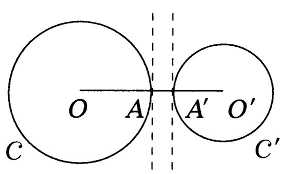


Fig. 78.

Sur le segment OO' on considère les points A et A' intersections du segment avec les circonférences C et C respectivement. Les points A et A' sont distincts et les tangentes en A et A' aux circonférences C et C' respectivement sont parallèles (**158**) ; les circonférences C et C' ne peuvent avoir de points en commun (**159**) (*Démonstration indirecte* : Si A est un point commun, on a $OO' \leqslant OA + O'A$, soit $OO' \leqslant r + r'$).

2º cas : *La distance des centres est égale à la somme des rayons.*

Le point A intersection du segment OO' avec la circonférence C est tel que $O'A$ égale r' ; il est situé sur la circonférence C'. La perpendiculaire à la droite OO' élevée du point A est tangente commune à ces circonférences (**158**) ; ces circonférences n'ont pas d'autre point en commun (**159**).

On dit que ces *circonférences* sont *tangentes extérieurement* au point A.

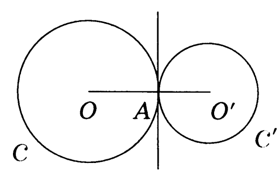


Fig. 79.

3º cas : *La distance des centres est comprise entre la somme et la différence des rayons* $(r - r' < OO' < r + r')$:

Le point A situé sur le segment OO' tel que OA égale r est intérieur au cercle C' ($O'A = OO' - r < r'$), et le point B, diamétralement opposé au point A, est extérieur ($O'B = OO' + r > r'$).

Une circonférence est une ligne continue, et la circonférence C, étant une ligne allant du point A au point B, rencontre la circonférence C' en un point autre que A et B, c'est à dire en un point non situé sur la ligne des centres.

La droite OO' étant axe de symétrie de la figure, les deux circonférences sont sécantes en deux points et la droite joignant ces deux points est perpendiculaire à la droite joignant les centres (**131**). On dit que les circonférences sont sécantes.

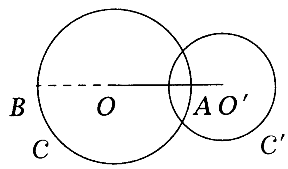


Fig. 80.

4º cas : *La distance des centres est égale à la différence des rayons* $(OO' = r - r')$:

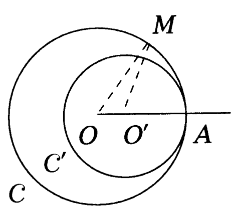


Fig. 81.

Les cercles étant distincts, on a r strictement plus grand que r'. La demi-droite OO' d'origine O coupe la circonférence C en un point A tel que $O'A$ égale r' ; le point A est commun aux deux circonférences.

Pour tout point M situé sur la circonférence C, distinct du point A, on a $O'M > OM - OO'$ (**67**) ; d'où la distance $O'M$ est supérieure à r' et le point M est extérieur à la circonférence C'.

Le point A est l'unique point d'intersection de ces circonférences et la tangente en ce point à ces courbes est commune ; on dit que les *circonférences* sont *tangentes intérieurement* au point A.

5º cas : *La distance des centres est plus petite que la différence des rayons* $(OO' < r - r')$:

Pour tout point M situé sur la circonférence C, on a $O'M > OM - OO'$ (**67**) ; par suite la distance $O'M$ est supérieure à r' et le point M est extérieur à la circonférence C'. Les circonférences C et C' n'ont aucun point en commun.

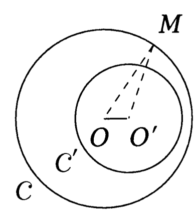


Fig. 82.

Ayant énuméré tous les cas possibles, il résulte que les réciproques des conclusions précédentes sont vérifiées et le théorème est démontré.

EXERCICES.

92. Soient deux droites parallèles T et T' tangentes en A et B à une circonférence C de centre O. Une droite T'' tangente à cette circonférence en un point C coupe les droites T et T' en P et Q respectivement. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{POQ}$?

93. Si deux cordes d'une même circonférence sont égales et non parallèles, et qu'on les prolonge s'il y a lieu jusqu'à leur point d'intersection, les segments compris entre ce point et les extrémités des deux cordes sont égaux chacun à chacun.

94. Quel est le lieu géométrique des milieux des segments de droite joignant un point fixe aux différents points d'une circonférence ?

95. En divisant une corde en trois parties égales et en joignant au centre les points de division, on ne divise pas l'angle au centre correspondant en trois parties égales. Quel est le plus grand des trois angles ainsi obtenus ?

Généraliser à un plus grand nombre de divisions cet énoncé (Indication : séparer les cas où le nombre de divisions est pair ou impair).

96. Une circonférence C passe par deux points fixes A et B. Soit C l'un des points où cette circonférence rencontre une droite fixe L perpendiculaire à AB. Trouver le lieu géométrique du point diamétralement opposé à C lorsque la circonférence varie sans cesser de passer par les points A et B.

§2. MESURE DES ANGLES.

Comme pour les segments, mesurer un angle, c'est le comparer à un autre angle pris pour unité **(23)(24)**; on a les mêmes notions de commensurabilité ou d'incommensurabilité. Une conséquence immédiate de **(37)** est :

168. Théorème. — *Le rapport de deux angles quelconques est égal à celui des arcs compris entre leurs côtés, décrits de leurs sommets comme centre avec un même rayon.*

Mesurer un angle revient donc à mesurer un arc.

Considérons les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{A'OC'}$ tels que les arcs $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{A'C'}$ soient situés sur deux circonférences égales de centre O et O' respectivement.

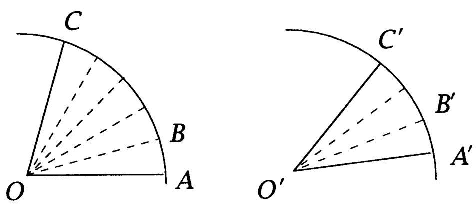


Fig. 83.

1º cas : Supposons que ces arcs aient une commune mesure ; par exemple, l'arc $\overset{\frown}{AB}$, ou l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$, est contenu p fois dans l'arc $\overset{\frown}{AC}$ et q fois dans l'arc $\overset{\frown}{A'C'}$. On aura $\frac{\overset{\frown}{AC}}{\overset{\frown}{A'C'}} = \frac{p}{q}$.

Si on joint tous les points de division des arcs $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{A'C'}$ à leur centre respectif O et O', on décompose l'angle $\widehat{AOC}$ en p angles partiels égaux à l'angle $\widehat{AOB}$ et l'angle $\widehat{A'O'C'}$ en q angles partiels égaux à l'angle $\widehat{A'O'B'}$.

Ces angles partiels étant tous égaux, l'un d'eux pourra être pris pour commune mesure et on aura $\frac{\widehat{AOC}}{\widehat{A'O'C'}} = \frac{p}{q}$. Le rapport des deux angles est égal à celui des arcs interceptés.

2º cas : Supposons que les deux arcs n'aient pas de commune mesure.

Divisons l'arc $\overset{\frown}{A'C'}$ en un certain nombre m de parties égales et soit $\overset{\frown}{a}$ une de ces parties. On aura $\overset{\frown}{A'C'} = m\overset{\frown}{a}$; portons l'arc $\overset{\frown}{a}$ sur l'arc $\overset{\frown}{AC}$ autant de fois que possible. Supposons que $\overset{\frown}{AC}$ contienne p fois $\overset{\frown}{a}$ plus un reste $\overset{\frown}{r}$, inférieur à $\overset{\frown}{a}$ et nécessairement incommensurable avec $\overset{\frown}{a}$ (Dans le cas contraire, les deux arcs considérés auraient une commune mesure). Ainsi $\overset{\frown}{AC} = p\overset{\frown}{a} + \overset{\frown}{r}$ et $\frac{\overset{\frown}{AC}}{\overset{\frown}{A'C'}} = \frac{p\overset{\frown}{a} + \overset{\frown}{r}}{m\overset{\frown}{a}} = \frac{p}{m} + \frac{\overset{\frown}{r}}{m\overset{\frown}{a}}$. Comme l'arc $\overset{\frown}{r}$ est plus petit que l'arc $\overset{\frown}{a}$ le rapport $\frac{\overset{\frown}{r}}{m\overset{\frown}{a}}$ est inférieur à $\frac{1}{m}$ et $\frac{p}{m}$ représente le rapport $\frac{\overset{\frown}{AC}}{\overset{\frown}{A'C'}}$ avec une approximation par défaut égale à $\frac{1}{m}$.

Comme précédemment joignons tous les points de division des arcs $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{A'C'}$ aux centres O et O'. L'angle $\widehat{A'O'C'}$ se décompose en m angles partiels égaux entre eux ; on désigne l'un de ces angles par $\hat{A}$. L'angle $\widehat{AOC}$ se décompose en p angles partiels égaux à $\hat{A}$ plus un reste $\hat{R}$ inférieur à l'angle $\hat{A}$ (37). On peut écrire $\widehat{A'O'C'} = m\hat{A}$ et $\widehat{AOC} = p\hat{A} + \hat{R}$. Ainsi $\frac{\widehat{AOC}}{\widehat{A'O'C'}} = \frac{p\hat{A} + \hat{R}}{m\hat{A}}$ et $\frac{\widehat{AOC}}{\widehat{A'O'C'}} = \frac{p}{m} + \frac{\hat{R}}{m\hat{A}}$. Comme l'angle $\hat{R}$ est plus petit que l'angle $\hat{A}$, le rapport $\frac{\hat{R}}{m\hat{A}}$ est inférieur à $\frac{1}{m}$ et $\frac{p}{m}$ représente le rapport $\frac{\widehat{AOC}}{\widehat{A'O'C'}}$ avec une approximation par défaut égale à $\frac{1}{m}$.

La valeur de m étant arbitraire, les deux rapports $\frac{\overset{\frown}{AC}}{\overset{\frown}{A'C'}}$ et $\frac{\widehat{AOC}}{\widehat{A'O'C'}}$ sont égaux (Ils sont égaux à la même approximation prés $\frac{1}{m}$, quelque soit m).

169. Corollaire. — *Si on a pris pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte entre ses côtés l'unité d'arc, tout angle au centre a même mesure que l'arc compris entre ses côtés.*

C'est ce que l'usage convient de faire, et le corollaire précédent s'énonce sous la forme :

"L'angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés".

Ceci nous permet, selon Hadamard, d'établir la convention importante suivante :

170. *On peut supposer que toutes les grandeurs sur lesquelles on raisonnera ont été mesurées, une unité déterminée ayant été choisie pour chaque espèce de grandeur ; et dans toutes les égalités que l'on écrira, les quantités qui figureront dans les deux membres ne représenterons plus les grandeurs elles-mêmes, mais bien leurs mesures.*

Par exemple on pourra égaler entre elles des grandeurs d'espèce différente, puisqu'il s'agira de l'égalité de deux nombres qui les mesurent, égalité dont le sens est parfaitement clair. On pourra faire le produit de deux grandeurs quelconques, puisqu'on a défini le produit de deux nombres, etc. . .

Par exemple si $\widehat{AB}$ est un arc de circonférence de centre O on pourra écrire $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$, étant sous-entendu que cette égalité suppose essentiellement l'unité d'angle et l'unité d'arc choisies de manière à vérifier la condition ci-dessus (**169**).

QUELQUES UNITÉS DE GRANDEURS.

171. i) La circonférence a été primitivement divisée en 360 parties égales appelées *degrés*, dont chacune comprend 60 *minutes*, elles mêmes divisées en 60 *secondes*[(6)]. Un angle, ou un arc est mesuré en degrés, minutes, secondes. Un angle droit mesure 90 degrés, noté 90°, et un angle plat 180 degrés ou 180°.

Il en résulte que la mesure d'un angle au centre ne dépend pas du rayon de la circonférence sur laquelle on a compté les arcs : l'unité d'angle choisie, ici le degré, a une valeur indépendante du rayon.

ii) L'introduction du système décimal dans toutes les autres espèces de mesure a conduit à définir un autre mode de division dans lequel la circonférence a été divisée en 400 parties égales appelées *grades*. Un angle droit mesure 100 grades.

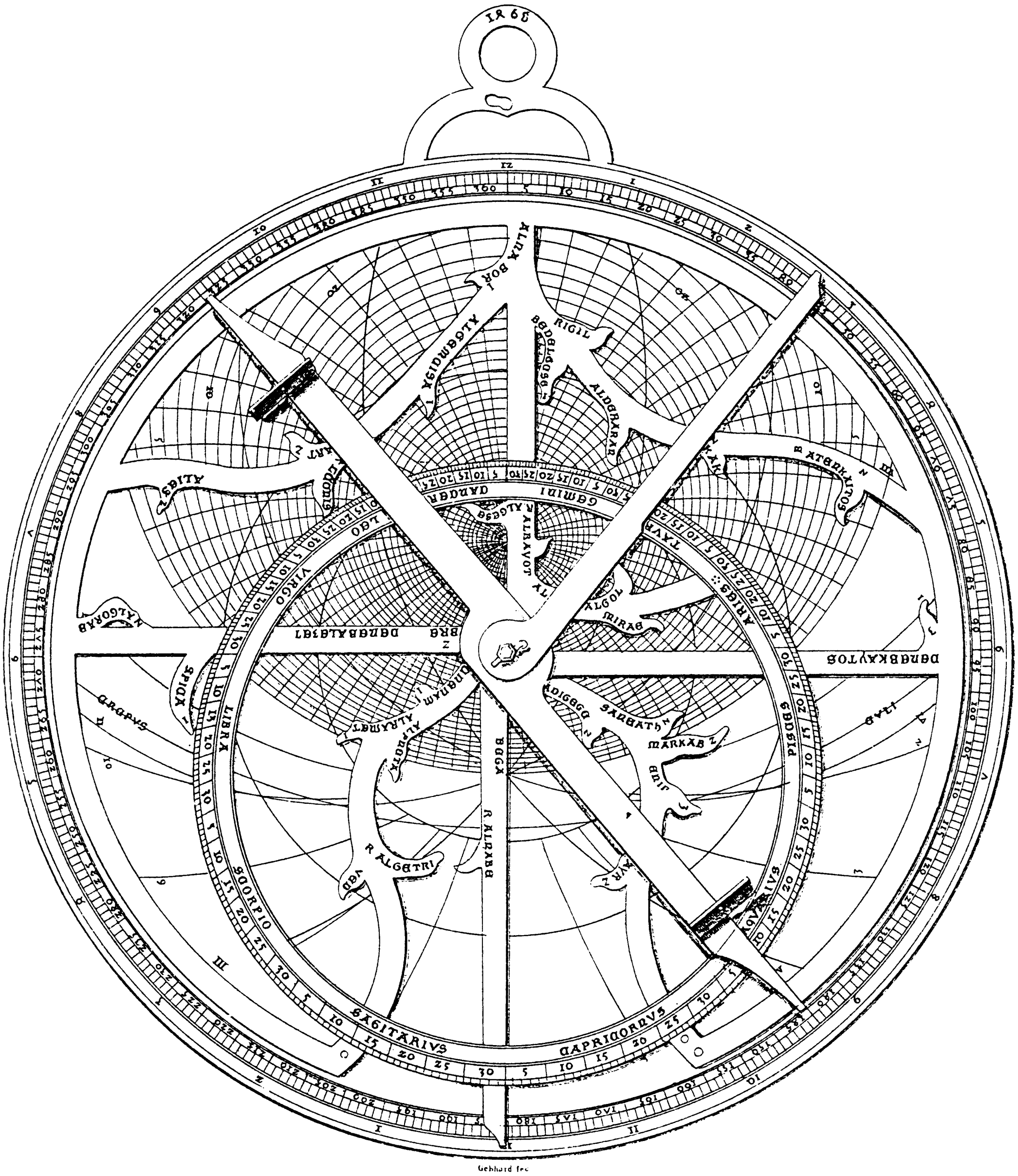
Un grade se subdivise décimalement et il n'est pas de dénomination spéciale pour les subdivisions qui s'écrivent avec les règles ordinaires de la numération décimale. Toutefois, on donne parfois le nom de *minute centésimale* pour le centième de grade et de *seconde centésimale* pour le dix-millième de grade, c'est à dire le centième de la minute centésimale.

Note : Bien qu'il existe d'autres unités de mesure (cf. Chapitre III § 9) il est clair que l'unité d'angle exprimée en grade est plus pratique dans notre système décimal que l'unité d'angle exprimée en degré. Malgré cela c'est l'unité "degré" qui est presque toujours utilisée. Une des raisons est peut être qu'il est difficile de changer les habitudes, mais surtout qu'il aurait fallu refaire toutes les tables de calculs, en particulier les éphémérides, ce qui n'aurait pas été une banalité au moment où le système décimal s'est imposé. Il y a aussi le fait que 60, comme 12, possède beaucoup de diviseurs (C'est un nombre *"maximalement divisible"*, $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$), et il en est de même de 360.

---

(6) Ceci est dû au fait que les Babyloniens utilisaient un système numérique en base 60 et qu'ils étaient de bons calculateurs.

Cela tient peut être aussi du fait que le système sexagésimal est lié à la notion de temps d'une certaine manière (Cela est parfois la trame des romans de science fiction), et dans ce cas on peut le considérer comme inhérent à notre structure : quel temps faut-il à la grande aiguille de l'horloge de l'église ou de la mairie pour parcourir une minute d'angle ?



L'astrolabe.
Repsold, Astronomische Meßwerkzeuge.

§3. DES ANGLES INSCRITS.

172. Un *angle inscrit* dans une circonférence est un angle formé par deux cordes qui ont une extrémité commune.

173. Théorème. — *La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'arc compris entre ses côtés.*

On distingue plusieurs cas (Fig. 84) :

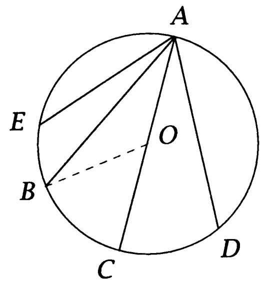


Fig. 84.

i) *Un des côtés de l'angle inscrit passe par le centre, par exemple l'angle* $\widehat{BAC}$:

L'angle $\widehat{BOC}$ est égal à la somme des angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{BAO}$ (**96**). Ces angles sont égaux (**54**) : l'angle $\widehat{BOC}$ est le double de l'angle $\widehat{BAC}$. L'angle $\widehat{BOC}$ ayant même mesure que l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (**169**), la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est égale à la moitié de celle de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

ii) *Le centre du cercle est à l'extérieur de l'angle inscrit, par exemple l'angle* $\widehat{EAB}$:

L'angle $\widehat{BOC}$ est le double de l'angle $\widehat{BAC}$ et l'angle $\widehat{EOC}$ est le double de l'angle $\widehat{EAC}$. Par différence, l'angle $\widehat{EOB}$ est double de l'angle $\widehat{EAB}$: la mesure de l'angle $\widehat{EAB}$ est égale à la moitié de celle de l'arc $\overset{\frown}{EB}$.

iii) *Le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle inscrit, par exemple l'angle* $\widehat{BAD}$:

L'angle $\widehat{BOC}$ est double de l'angle $\widehat{BAC}$ et l'angle $\widehat{COD}$ est double de l'angle $\widehat{CAD}$. Par addition l'angle $\widehat{BOD}$ est double de l'angle $\widehat{BAD}$, et la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$ est égale à la moitié de celle de l'arc $\overset{\frown}{BD}$.

174. Corollaire. — *Deux angles inscrits qui interceptent une même corde et dont les sommets sont situés d'un même côté par rapport à la corde ont même mesure, et par suite sont égaux.*

175. Corollaire. — *Deux angles inscrits qui interceptent une même corde et dont les sommets sont situés de part et d'autre de la corde sont supplémentaires.*

176. Corollaire. — *La mesure de l'angle formé par une tangente et une corde issue du point de contact est égale à la moitié de la mesure de l'arc sous-tendu par la corde.*

C'est une conséquence immédiate de (**162**).

177. Théorème. — *La mesure de l'angle formé par deux demi-droites se coupant à l'intérieur d'une circonférence est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et leurs prolongements.*

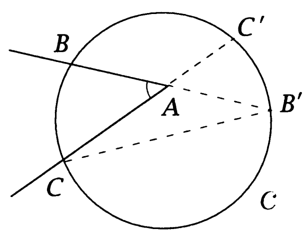


Fig. 85.

Considérons un angle $\widehat{BAC}$ dont le sommet est intérieur à une circonférence C ; ses côtés interceptent l'arc $\overset{\frown}{BC}$ et ses côtés prolongés l'arc $\overset{\frown}{B'C'}$.

L'angle $\widehat{BAC}$ est un angle extérieur au triangle $B'AC$ et est égal à la somme des angles $\widehat{ACB'}$ et $\widehat{AB'C}$ (**96**). La mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est égale à la demi-somme des mesures des arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{B'C'}$.

178. Théorème. — *La mesure de l'angle formé par deux demi-droites se coupant hors d'une circonférence est égale à la demi-différence des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle.*

Considérons un angle $\widehat{BAC}$ dont le sommet est extérieur à une circonférence C; ses côtés interceptent les arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{B'C'}$. L'angle $\widehat{BC'C}$ est égal à la somme des angles $\widehat{C'BA}$ et $\widehat{C'AB}$ comme angle extérieur au triangle ABC' (**96**). Par suite la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est égale à la demi-différence des mesures des arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{B'C'}$.

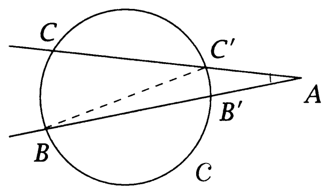


Fig. 86.

179. *Note* : Le théorème subsiste si l'une des sécantes, ou toutes les deux deviennent tangentes : on peut considérer une tangente comme position limite d'une sécante, ou refaire la démonstration comme précédemment.

180. Théorème. — *Le lieu géométrique des points situés d'un même côté d'une droite et d'où l'on voit un segment donné de cette droite sous un angle donné, est un arc de cercle terminé aux extrémités de ce segment.*

181. Cet arc de cercle s'appelle *arc capable* de l'angle donné, ou parfois *segment de cercle capable* de l'angle.

182. *Notes* : 1º Si on ne se préoccupe pas de savoir si les points sont situés d'un même côté de la droite, le lieu géométrique est formé de deux arcs de cercle se déduisant l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe cette droite.

2º Le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment donné sous un angle droit est la circonférence ayant ce segment comme diamètre.

183. Corollaire. — *Un triangle est rectangle si et seulement si une médiane est égale à la moitié du côté correspondant.*

184. Quatre points pris au hasard dans le plan ne sont pas en général sur une circonférence (**150**) ; on dira que *quatre points*, ou plus, sont *cocycliques* s'ils sont situés sur une même circonférence. De même un *polygone* est dit *inscrit* dans un cercle, ou une circonférence, si ses sommets sont situés sur cette circonférence ; le cercle est le *cercle circonscrit* au polygone.

185. Théorème. — *Un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle si et seulement si il a deux angles opposés supplémentaires.*

Si un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle ses angles opposés sont supplémentaires (**175**).

Réciproquement si les angles opposés $\hat{A}$ et $\hat{C}$ d'un quadrilatère convexe $ABCD$ sont supplémentaires, on considère le cercle circonscrit C_1 au triangle ABD. Le point C est situé sur l'arc $\overset{\frown}{BD}$ du côté opposé au point A par rapport à la droite BD (**175**)(**180**). Le quadrilatère convexe est inscriptible.

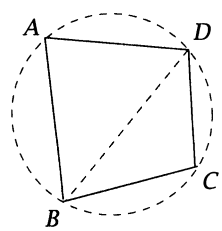


Fig. 87.

186. *Remarque* : On peut donner une nouvelle définition de la circonférence, si on *oriente* les angles, à savoir :

La circonférence est le lieu géométrique des sommets des angles égaux et de même sens dont les côtés, prolongés s'il y a lieu, passent par deux points donnés.

Cette définition donne une vision différente de la circonférence d'une grande portée, bien que d'un emploi délicat dans un premier temps. Elle trouve sa plénitude lorsque l'on considère les angles de droites (cf. §7).

EXERCICES.

97. Soient A, B, C trois points d'une circonférence. On joint les milieux des arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$. Montrer que la droite de jonction intersecte sur les cordes AB et AC, à partir du point A, des segments égaux.

98. Si par les points d'intersection A et B de deux circonférences on mène deux sécantes quelconques, les cordes qui joignent les nouvelles intersections de ces droites avec les deux circonférences sont parallèles.

99. Par le milieu C d'un arc de cercle $\widehat{AB}$ on mène deux droites quelconques qui coupent la circonférence en D et E et la corde AB en F et G. Démontrer que le quadrilatère $DEGF$ est inscriptible.

100. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère quelconque forment un quadrilatère inscriptible. Il en est de même des bissectrices extérieures.

101. Soient AB un diamètre d'une circonférence $\mathcal{C}$ de centre O et C un point pris sur le prolongement de ce diamètre de B vers A. Considérons CDE une sécante issue du point C coupant la circonférence $\mathcal{C}$ aux points D et E respectivement. Si la partie extérieure CD est de longueur égale au rayon, montrer que l'angle $\widehat{EOB}$ est le triple de l'angle $\widehat{DOA}$.

102. Sur chaque rayon d'un cercle $\mathcal{C}$, on prend à partir du centre une longueur égale à la distance de l'extrémité de ce rayon à un diamètre fixe. Trouver le lieu géométrique du point ainsi défini.

103. Sur les côtés d'un triangle quelconque et à l'extérieur de celui-ci on construit des triangles tels que la somme des trois angles opposés aux côtés pris comme base soit égale à un angle plat. Montrer que les cercles circonscrits à ces triangles ont un point commun.

104. Quel est le lieu géométrique des milieux des cordes d'une circonférence, passant par un point fixe ?

105. On donne une circonférence $\mathcal{C}$ et sur cette circonférence un point fixe P, une droite d et sur cette droite un point fixe Q. Par les points P et Q on fait passer une circonférence variable qui recoupe la circonférence donnée en un point R et la droite donnée en un point S. Démontrer que la droite RS coupe la circonférence donnée en un point fixe.

106. Soient A et B deux points fixes d'une circonférence $\mathcal{C}$ de centre O et M un point variable de cette courbe. On prolonge MA d'une longueur MN (de M vers A) égale à MB. Trouver le lieu géométrique du point N lorsque le point M varie.

§4. CONSTRUCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

Pour les constructions géométriques on ne doit faire usage que de la ligne droite et de la circonférence car jusqu'à maintenant on a seulement défini comme lignes la droite et la circonférence, lignes se traçant avec une règle et un compas. Dire qu'un *problème de construction* est *résoluble à la règle et au compas*, c'est dire qu'il se ramène à des intersections de cercles et de droites. Avec ces deux instruments on doit dessiner, ou construire, des figures satisfaisant à des conditions données et l'exactitude de ces constructions ne doit dépendre que de l'exactitude de ces instruments.

Dans la pratique, afin de réduire les erreurs dues au dessin il est recommandé de ne pas faire des figures trop petites ou de faire couper des droites sous un angle trop aigu, l'épaisseur des traits donnant une incertitude sur la position des points cherchés.

Les solutions données doivent être toujours justifiées et suivies, si nécessaire, d'une discussion donnant le nombre de solutions distinctes et leur possibilité de réalisation. En ce sens une analyse de la construction demandée précédant cette construction (par exemple *"supposer le problème résolu..."*) permet de déduire les informations nécessaires à la réalisation de la figure.

Pour mémoire citons quelques constructions déjà rencontrées **(45)(61)(64)(100)**.

187. *Retrouver le centre d'une circonférence, ou d'un arc de cercle.*

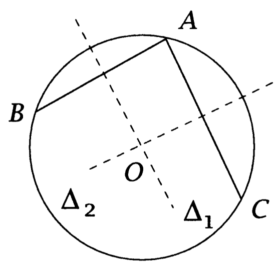


Fig. 88.

• *Analyse* : La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle **(148)**.

• *Construction* : Prenons trois points A, B, C sur la circonférence et menons Δ_1 et Δ_2 les médiatrices des cordes AB et AC respectivement **(63)**. Les trois points A, B, C n'étant pas alignés elles se coupent en un point O **(92)** : c'est le centre de la circonférence.

188. *Par un point situé à l'extérieur d'une circonférence mener une tangente à la circonférence.*

• *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit AB une tangente à la circonférence C de centre O. La droite OB est perpendiculaire à la droite AB **(158)**.

• *Construction* : On détermine le milieu J de OA **(63)**. Le cercle de centre J de diamètre OA coupe la circonférence en un point B ; la droite AB est tangente au cercle C **(183)(158)**.

• *Discussion* : Les deux cercles sont toujours sécants et il y a deux solutions symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite joignant le centre du cercle au point considéré.

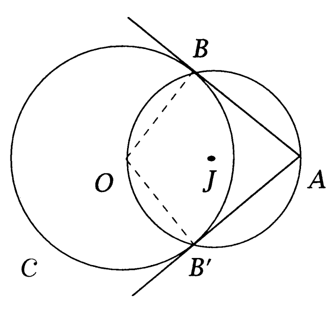


Fig. 89.

189. *Mener une tangente commune à deux circonférences données.*

1º *cas* : La tangente est extérieure, c'est à dire les deux cercles sont situés d'un même côté par rapport à la tangente commune.

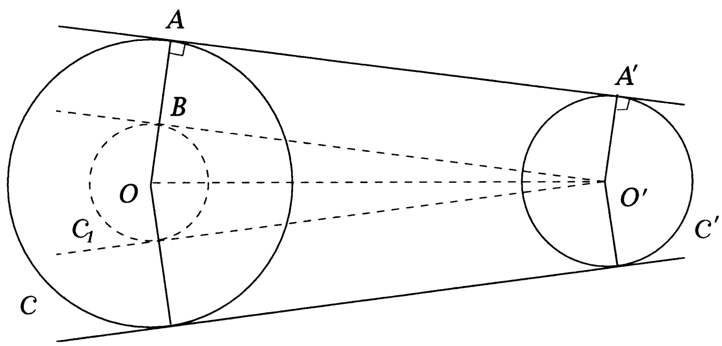


Fig. 90.

- *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit AA' la tangente extérieure aux deux circonférences C et C' de centres respectifs O et O' et de rayons r et r', où r est supérieur ou égal à r'.

  La droite parallèle à AA' menée par le point O' coupe le segment OA en B. Le quadrilatère convexe $ABO'A'$ est un rectangle **(158)(92)** et $O'B$ est tangente à la circonférence de rayon $r - r'$ de centre O ; si r égale r', le point B est en O.
- *Construction* : On trace la circonférence C_1 de centre O de rayon $r - r'$, et on mène du point O' la tangente à la circonférence C_1 **(188)** ; soit B le point de contact. La demi-droite OB coupe la circonférence en un point A. Par O' on mène la parallèle à la droite OA **(100)** : elle coupe la circonférence C' en un point A'. La droite AA' est tangente aux circonférences C et C' **(158)**.
- *Discussion* : La construction n'est possible que si le point O' est situé à l'extérieur de la circonférence C_1, c'est à dire si $OO' \geq r - r'$. Par **(167)** :
  - ◇ Si $OO' < r - r'$, le cercle C' est intérieur au cercle C, il n'y a pas de solutions ;
  - ◇ Si $OO' = r - r'$, les circonférences sont tangentes intérieurement et il existe une et une seule tangente, elle passe par le point de contact des deux circonférences et est perpendiculaire à la ligne des centres (les rayons r et r' sont différents, sinon les circonférences C et C' seraient confondues).
  - ◇ Si $OO' > r - r'$, il existe deux tangentes extérieures aux deux circonférences situées symétriquement par rapport à la droite des centres. Ces tangentes sont égales et se coupent sur cette droite si les rayons sont différents, sinon elles sont parallèles.

2º *cas* : La tangente est intérieure, c'est à dire les deux circonférences sont situées de part et d'autre de la tangente commune.

- *Analyse* : supposons le problème résolu et soit AA' la tangente intérieure aux circonférences C et C' de centre O et O' et de rayon r et r' respectivement.

  La droite parallèle à la droite AA' passant par O' coupe la droite OA en un point B et le quadrilatère convexe $O'A'AB$ est un rectangle **(158)(92)**. La droite $O'B$ est tangente à la circonférence C_1 de centre O de rayon $r + r'$ **(158)**.

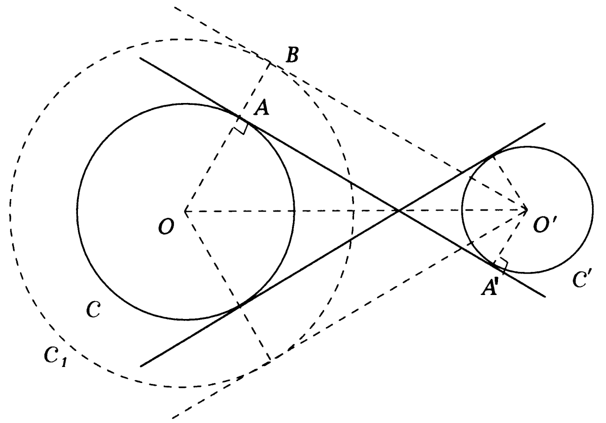


Fig. 91.

- *Construction* : On mène la tangente à la circonférence C_1 de centre O et de rayon $r+r'$ passant par O' (**188**). La droite joignant le point de contact au centre O coupe la circonférence C en un point A. On trace la parallèle passant par A à la droite $O'B$ (**100**) : on a une tangente intérieure commune aux circonférences C et C'.
- *Discussion* : La construction n'est possible que si le point O' est situé à l'extérieur de la circonférence C_1, c'est à dire si $OO' \geq r + r'$ (**167**).
  - ◇ Si $OO' < r + r'$, il n'existe pas de solution;
  - ◇ Si $OO' = r+r'$, les circonférences sont tangentes extérieurement. Il existe une et une seule tangente intérieure commune; elle passe par le point de contact de ces deux circonférences et est perpendiculaire à la droite joignant les centres;
  - ◇ Si $OO' > r+r'$, il existe deux tangentes intérieures situées symétriquement par rapport à la droite joignant les centres; ces tangentes sont égales et se coupent sur cette droite.

190. *Tracer une circonférence tangente à trois sécantes formant un triangle.*

- *Analyse* : Supposons le problème résolu. Les trois droites $\triangle_1$, $\triangle_2$, et $\triangle_3$ forment un triangle ABC. Si C est une circonférence de centre O tangente aux trois droites, le point O est équidistant de ces droites (**158**); il se situe sur les bissectrices des angles qu'elles forment (**83**).
- *Construction* : On trace les bissectrices intérieures et extérieures des angles du triangle ABC (**64**). Les bissectrices intérieures sont concourantes (**120**) et les bissectrices de deux angles extérieurs et la bissectrice intérieure du troisième angle aussi (**121**). On détermine ainsi quatre points O_1, O_2, O_3, O_4 centres des circonférences cherchées. La perpendiculaire abaissée d'un de ces points à une des droites (**61**) détermine le rayon d'une de ces circonférences.
- *Discussion* : Il existe quatre circonférences tangentes à ces droites.

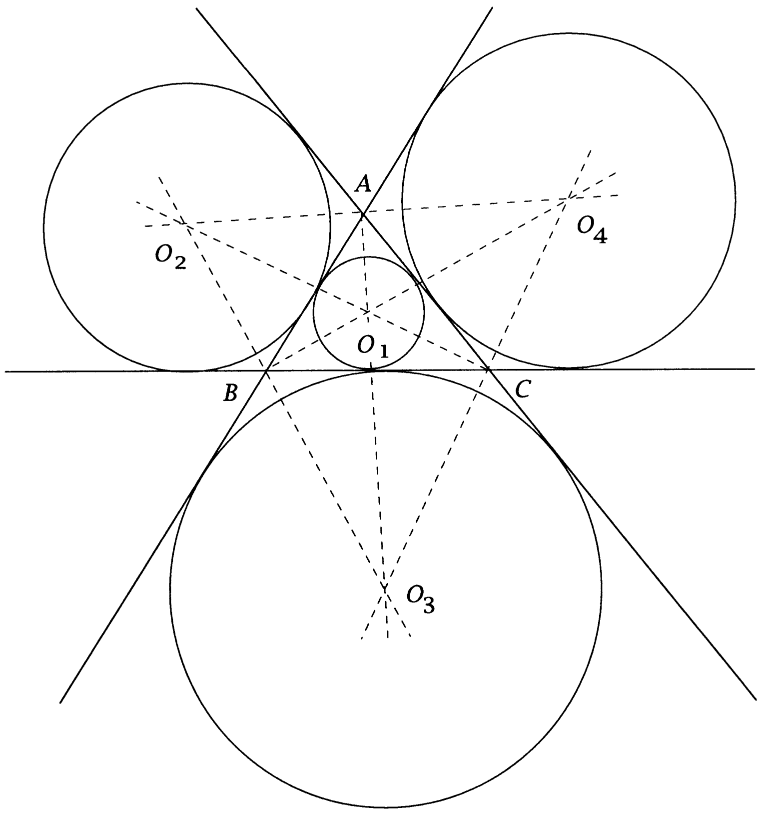


Fig. 92.

191. Le cercle tangent aux trois droites, intérieur au triangle qu'elles forment, s'appelle *cercle inscrit* au triangle, et le *triangle* est dit *circonscrit* au cercle. Les trois autres cercles sont appelés *cercles exinscrits.*

192. *Tracer, sur un segment donné comme corde, un arc capable d'un angle donné.*

• *Analyse* : Soient α un angle et AB une corde donnés. Le cercle définissant l'arc capable cherché passe par le point A, et la tangente en ce point forme avec la droite AB un angle égal à l'angle donné (**162**).

• *Construction* : Sur AB on porte un angle $\widehat{BAT}$ égal à l'angle donné (**45**); puis du point A on élève la perpendiculaire à la droite AT (**62**). Elle coupe la médiatrice du segment AB en un point O. La circonférence de centre O et de rayon OA détermine l'arc capable cherché.

• *Discussion* : On ne peut déterminer le point O que si les deux droites sont sécantes, c'est à dire si l'angle donné n'est pas un angle nul ou un angle plat.

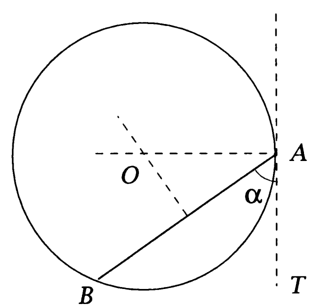


Fig. 93.

EXERCICES.

107. Construire un cercle de rayon donné passant par deux points donnés.

108. Connaissant deux angles d'un triangle, trouver le troisième.

109. Construire un triangle isocèle connaissant :
1º L'angle au sommet et la base ;
2º Un angle à la base et un côté ;
3º La base et la hauteur relative à la base.

110. Construire un cercle tangent à deux droites données.

111. Construire un cercle de rayon donné r passant par un point A et tangent à une droite donnée d.

112. Construire un cercle de rayon donné r, tangent à deux droites données.

113. Construire un cercle tangent à trois droites données (quatre cas).

114. Mener à une circonférence donnée une tangente sur laquelle une droite donnée détermine un segment donné.

115. On considère ABC un triangle et on note a, b, c les mesures de ses côtés BC, AC, AB respectivement et $2p$ son périmètre.

Si D est le point de contact du cercle inscrit au triangle sur le côté BC, montrer que $DB = (p - b)$ et $DC = (p - c)$.

Si E est le point de contact sur le côté AB du cercle exinscrit au triangle situé dans l'angle $\widehat{A}$, montrer que $EA = p$ et $EB = (p - c)$.

116. Par un point donné, tracer une droite qui détermine sur un angle donné un triangle de périmètre donné.

117. Construire un cercle de rayon donné tangent à une droite donnée et à une circonférence donnée.

§5. DES DÉPLACEMENTS.

193. Comme nous l'avons dit, la Géométrie ne s'occupait à son début que des figures, les cas d'égalité des triangles indiquant les bonnes mesures à effectuer afin d'éviter, autant que faire se pouvait, les mouvements réalisant leurs superpositions pour pouvoir déduire leur égalité ou leur inégalité (7).

Cependant l'égalité se définit avec le mouvement, et le mouvement se caractérise avec la *notion de temps*, temps nécessaire à sa réalisation et en considérant la suite des différentes positions occupées par la figure dans son mouvement du moment initial au moment final. Ceci est l'objet de la *Cinématique*; en Géométrie, on ne considère que la "position initiale" et la "position finale" et on fait abstraction du mouvement et du temps[7], c'est ce que l'on appelle un *déplacement*. Toutefois l'étude des mouvements possibles amenant une figure d'une position initiale à une position finale, et leurs classifications, donne un éclairage nouveau à la Géométrie en lui ôtant un "côté statique"; cette vision est très féconde et, selon les situations envisagées, elle peut apporter des clarifications ou soulever des difficultés supplémentaires.

Pour marquer la différence entre mouvement et déplacement, rappelons le passage suivant de Raoul Bricard, Cinématique et Mécanique, Collection Armand Colin :

> *On appelle corps solide un ensemble de points dont les distances sont invariables. Un corps solide peut occuper une infinité de positions dans l'espace. On appelle déplacement toute opération qui fait passer un corps (solide) d'une position à une autre. Un déplacement résulte toujours, dans la pratique, d'un mouvement, au cours duquel le corps occupe une série continue de positions, depuis la position initiale jusqu'à la position finale. Un mouvement demande un certain temps pour être effectué et, pour le caractériser, il faut non seulement définir géométriquement la suite des positions occupées par le corps, mais en outre la loi du temps qui fait connaître l'instant auquel chacune de ces positions a été occupée. Un déplacement donné peut être réalisé par une infinité de mouvements différents entre eux, soit par leurs définitions géométriques, soit par leurs lois du temps.*

La notion de transformation est liée au plan tout entier et non aux seules configurations; ceci est lié au fait que, pour étudier une figure plane, il peut être avantageux de considérer comme faisant partie de la figure l'ensemble des points de son plan (florsqu'on considère que deux figures égales, c'est la considération de tous les points du plan qui permet de définir le centre de rotation qui amène la première sur la seconde). On parvient ainsi à la notion de *plan se mouvant sur un plan fixe*; ainsi tout mouvement est une isométrie, et on montrera que toute isométrie plane est réalisée par un mouvement[8] conçu dans le plan ou dans l'espace.

194. Une isométrie est particulièrement simple lorsque le mouvement la réalisant impose au plan superposable de rester sur le plan fixe; on obtient ainsi la notion de *glissement d'un plan mobile sur un plan fixe*, notion donnée par l'expérience d'une plaque métallique plane se déplaçant sur une table en restant en contact avec elle en tous ses points à tout moment. On appelle *déplacement du plan*, ou par abus de langage *déplacement* (en géométrie plane) un tel mouvement, et des *figures* égales (superposables) dans un déplacement du plan, sont dites *directement égales*; une isométrie qui n'est pas un déplacement du plan est appelée *antidéplacement* ou *retournement* , et deux *figures* égales (superposables) par un

---

[7] Il existe une Géométrie du mouvement faisant abstraction de toute loi de temps, Géométrie qui s'est développée tout au long du xix^{ième} siècle avec les travaux de Chasles, Mannheim, Schoenflies... Le mouvement, en Géométrie élémentaire, a été utilisé par Méray et les réformateurs de 1905 (Bourlet, Borel, ...)

[8] Il est à signaler que ce résultat est faux dans l'espace.

retournement sont dites *indirectement égales*. Un point est dit *point fixe*[9] s'il est laissé fixe par le mouvement amenant le plan superposable sur le plan fixe. On voit que :

195. Théorème. — *Le composé de deux déplacements est un déplacement.*

Pour superposer par glissement un plan mobile $(\mathcal{P})$ sur un plan fixe $(\mathcal{P}_0)$, il faut d'abord amener un de ses points A en coïncidence avec un point A_0 donné du plan $(\mathcal{P}_0)$. Une fois les points A et A_0 en coïncidence, le plan $(\mathcal{P})$ peut encore tourner autour du point A_0 ; pour achever de fixer le plan mobile $(\mathcal{P})$ il suffit de faire coïncider une demi-droite du plan $(\mathcal{P})$ d'origine A avec une demi-droite du plan $(\mathcal{P}_0)$ d'origine A_0. Ainsi :

196. Théorème. — *Un déplacement est défini lorsqu'on se donne deux points A et B et leurs transformés A′ et B′, autrement dit lorsqu'on se donne une demi-droite et son image.*

Il est à noter que les segments AB et $A'B'$ sont égaux.

197. Corollaire. — *Un déplacement qui n'est pas l'identité du plan ne peut avoir plus d'un point fixe.*

198. Théorème. — *Une translation est un déplacement.*

Nous avons vu **(142)** qu'une translation est une isométrie telle que les vecteurs ayant pour origine les positions initiales et pour extrémités les positions finales des points du plan mobile sont équipollents. Ainsi l'image de trois points alignés A, B, C est trois points alignés A', B', C' respectivement et, si on prend les points dans cet ordre, leurs transformés se trouvent dans le même ordre. De plus, les points B, C et B', C' sont situés d'un même côté par rapport à la droite AA' (Deux points et leurs transformés forment un parallélogramme généralisé).

199. *Note* : Une translation qui n'est pas l'identité du plan ne possède aucun point fixe.

SENS DE ROTATION.

Il est bien connu que, dans un plan, existent des figures inversement égales ne pouvant être superposées que par un mouvement fait en dehors du plan : telles sont une figure et son empreinte laissée sur un papier buvard ou d'une certaine manière une figure et son image reflétée dans un miroir.

200. Parmi les retournements, il en est un particulièrement simple qui joue un rôle fondamental : la symétrie orthogonale.

Regardons la représentation expérimentale que nous avons d'une symétrie orthogonale : c'est un pivotement du plan sur lui-même autour d'une droite prise comme charnière **(134)**. C'est à dire, pour superposer une figure $\mathcal{F}$ sur une figure symétrique $\mathcal{F}'$, il faut exécuter un mouvement faisant sortir la figure de son plan ; il est important de noter qu'on ne peut rétablir la coïncidence avec la position initiale qu'en effectuant un mouvement similaire, c'est à dire en la faisant sortir à nouveau de son plan.

Remarquons d'abord que le plan divise l'espace en deux régions ; pour abréger on dira que l'une est située au-dessus et l'autre au-dessous par référence à un observateur "couché dans le plan". Découpons sur une feuille de papier une figure asymétrique par exemple, un triangle non isocèle ABC et colorions une face en rouge et l'autre face en bleue. Posons ce patron sur

[9] On parle aussi de point double, mais actuellement la dénomination de "point fixe" est plus usitée.

le plan, la face colorée en rouge vers nous, et marquons sa trace. Effectuons une symétrie orthogonale par rapport à une droite du plan prise comme charnière. Le patron a pour image une figure égale et on ne peut le juxtaposer à sa trace qu'en le retournant, c'est à dire qu'en effectuant un mouvement qui le sort de son plan : la face qui se trouve dirigée vers nous est bleue. Effectuons une autre symétrie orthogonale avec une droite quelconque du plan prise comme charnière ; la face dirigée vers nous est rouge et on peut faire coïncider par glissement le patron sur sa position initiale, position qui correspondait à la face rouge tournée vers nous.

201. En conclusion une symétrie orthogonale ne permet pas de passer du patron à son image par glissement sur le plan, il faut faire un mouvement qui le sort de celui-ci : autrement dit, la symétrie orthogonale est un antidéplacement. Un produit de deux symétries orthogonales permet de passer du patron à son image par glissement sur le plan : c'est la face rouge ou la face bleue qui est tournée vers nous, c'est à dire "le dessus ou le dessous". C'est ce qu'on exprime en disant que *les sens de rotation sont inverses l'un de l'autre* ; encore faut-il expliquer ce qu'il faut entendre par cette locution :

202. Regardons un angle $\widehat{BAC}$ avec le mouvement qui amène le côté AB sur le côté AC, c'est à dire qu'on le considère comme décrit par une demi-droite mobile, balayant l'intérieur de l'angle, allant de la position AB à la position AC. Cet angle *vu d'en dessus* sera dit avoir le *sens rétrograde* ou le *sens direct* selon que la demi-droite qui décrit l'angle paraîtra tourner dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse.

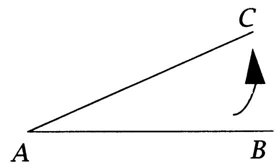


Fig. 94.

Il est clair que si on le regarde *d'en dessous* on inverse le sens[10].

203. Pour conclure, reprenons l'explication suivante donnée par Hadamard, explication se trouvant dans nombre de manuels de Physique :

> Si l'angle se déplace de façon quelconque dans son plan sans jamais le quitter un observateur couché le long de AB, les pieds en A, la tête dans la direction de B et regardant le dessous du plan (resp. le dessus) entraîné par le mouvement ne changera pas de situation par rapport au-dessous (resp. au-dessus) du plan respectivement au côté AC. C'est à dire, *le sens de rotation reste inaltéré par tout déplacement qui ne fait pas sortir la figure du plan.*

204. *Note* : Ainsi un déplacement, au contraire d'un antidéplacement, n'inverse pas le sens de rotation.

205. *Note* : La notion de "dessus-dessous" tient au fait que le plan est une surface orientable, ce qui n'est pas toujours le cas comme le montre la bande de Möbius. Une idée physique et artistique de cette bande nous est donnée dans "Le miroir magique d'Escher", idée reprise par certains sculpteurs modernes.

206. *Remarque* : Reprenons la manipulation (**200**) ; on voit que, si on effectue un nombre pair de symétries orthogonales, la face du triangle tournée vers nous est toujours de la même couleur, alors que, si on effectue un nombre impair de symétries orthogonales, la face du triangle tournée vers nous est de couleur différente. En d'autres termes un produit pair de symétries orthogonales n'affecte pas le sens de rotation et est un déplacement, un produit impair l'inverse et est un antidéplacement.

---

(10) Notons qu'il est nécessaire de tenir compte de l'ordre des côtés pour définir le sens de rotation, c'est à dire l'angle $\widehat{BAC}$ est de sens contraire à l'angle $\widehat{CAB}$; pour éviter toute confusion on convient d'utiliser la notation (AB, AC) pour un angle orienté, où AB désigne le côté origine et AC le côté extrémité.

ROTATIONS.

207. Définition. — *Une rotation est un déplacement possédant un point fixe. Ce point fixe est appelé centre de la rotation.*

Une rotation de centre O est donc une isométrie, par suite :

Si A et A' sont les positions initiale et finale d'un point, les segments OA et OA' sont égaux (**129**). De plus l'angle (OA, OA') a une valeur indépendante du point A considéré : c'est l'*angle de la rotation.* En effet si B est un autre point initial et B' son point correspondant, les triangles OAB et $OA'B'$ sont égaux (**51**) : l'angle $\widehat{AOB}$ égale l'angle $\widehat{A'OB'}$ et les angles (OA, OA') et (OB, OB') sont égaux.

Une rotation est définie par son centre O et son angle θ, angle vu avec son sens de rotation (**202**) ; on la représente par le symbole $\mathcal{R}(O, \theta)$. Notons qu'une rotation d'angle plat est une symétrie centrale.

Le composé de deux déplacements $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est un déplacement (**195**) mais, en général, le composé $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2$ est distinct du composé $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ (rappelons que la composition de deux translations est une opération commutative (**146**)) : *la composition de deux déplacements n'est pas en général une opération commutative.* Cependant :

208. Théorème. — *Le composé d'une rotation et d'une translation, respectivement d'une translation et d'une rotation, est une rotation.*

Soient $\mathcal{R}$ une rotation de centre O d'angle θ avec son sens de rotation et $\mathcal{T}$ une translation de vecteur directeur $\vec{V}$. Il existe un seul triangle isocèle d'angle au sommet θ et de base égale à la longueur du vecteur $\vec{V}$. Par suite, il existe une unique position pour ce triangle isocèle OAA' d'angle au sommet (OA', OA) et de base AA' telle que $\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$.

Ainsi le point A' est un point fixe pour le déplacement $\mathcal{T}_{\vec{V}} \circ \mathcal{R}$. Si le point A' est le seul point fixe, ce déplacement est une rotation de centre A' (**207**) ; sinon c'est la transformation identique (**197**) : dans ce dernier cas, la rotation $\mathcal{R}$ est la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{A'A}}$. Ceci ne peut être que si les points A et A' coïncident, c'est à dire si l'angle θ de la rotation est un angle nul ; alors la rotation $\mathcal{R}$ et la translation $\mathcal{T}_{\vec{V}}$ ne sont autres que la transformation identique du plan.

Pour le déplacement $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}_{\vec{V}}$, on fait de même en remarquant que, pour ce déplacement, c'est le point A qui est un point fixe.

209. Théorème. — *Tout déplacement est soit une rotation, soit une translation.*

On sait que, si un déplacement possède deux points fixes, c'est la transformation identique (**197**) et, s'il possède un unique point fixe, c'est une rotation (**207**).

Soient un déplacement $\mathcal{D}$ ne possédant aucun point fixe, A un point du plan et A' son homologue par $\mathcal{D}$. Le point A est un point fixe pour le déplacement $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AA'}} \circ \mathcal{D}$; par suite, ce déplacement est soit une rotation $\mathcal{R}$, soit la transformation identique du plan.

Ce ne peut être une rotation $\mathcal{R}$, sinon le déplacement $\mathcal{D}$, qui est égal à $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AA'}} \circ \mathcal{R}$, aurait un point fixe (**208**) : le déplacement $\mathcal{D}$ est la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AA'}}$.

210. Corollaire. — *Le composé de deux rotations est soit une rotation soit une translation.*

Ce corollaire sera précisé en (**224**).

§6. ANGLES ET ARCS ORIENTÉS.

La nécessité de pouvoir toujours faire la somme ou la différence de deux angles, ou de deux arcs de cercle, nous oblige à étendre les notions d'angle et d'arc de cercle, l'extension se faisant en accord avec la notion de sens de rotation précédemment définie. Pour cela on adopte les conventions suivantes :

211. Quand un point parcourt une portion de circonférence, il décrit un arc de cercle, qu'il passe ou non plusieurs fois par un même point. S'il fait plus d'un tour, l'arc de cercle sera compté avec le nombre de tours que le point a parcouru et la partie restante ; sa mesure sera égale à autant de fois la mesure de la circonférence additionnée de la mesure de la partie restante. On dira que l'*arc* est *orienté positivement*, et sa mesure sera un nombre positif, si le point décrivant l'arc de cercle tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; dans le cas contraire on dira que l'arc de cercle est orienté négativement et sa mesure sera un nombre négatif.

212. Définition. — *L'angle de deux demi-droites OA et OB est la portion de plan balayée par le côté origine OA, pivotant autour de son sommet O, vue avec son mouvement pour se superposer au côté extrêmité, ceci compté avec le nombre de tours qu'il fait. Sa mesure est égale à autant de fois* 360° *que de tours, additionnée de la mesure de la partie restante. On dira qu'il est orienté positivement, et sa mesure sera un nombre positif, si le côté origine balaye le plan dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; dans le cas contraire on dira que l'angle est orienté négativement, et sa mesure sera un nombre négatif.*

213. Ainsi on ne regarde plus seulement la figure, mais on regarde aussi, pour un arc de cercle, le chemin parcouru, avec son sens, par un point allant d'une extrémité à l'autre et, pour un angle, le mouvement effectué par le côté origine pour se superposer au côté extrémité. Deux arcs de cercle, ou deux angles de même sens, sont égaux au sens initial si et seulement si ils sont égaux à un nombre de tours près, c'est à dire si, modulo 360°, ils ont même mesure [11].

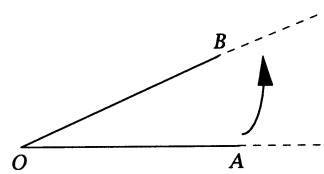


Fig. 95.

Par suite :

214. Avec les précautions nécessaires, les théorèmes relatifs aux angles et aux arcs de cercle restent vrais.

De même, on obtient les cas d'égalité pour les triangles directement ou indirectement égaux :

215. Théorème (1^0 cas d'égalité). — *Deux triangles sont directement (resp. indirectement) égaux si et seulement si ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun et de même sens d'orientation (resp. de sens d'orientation inverse).*

---

(11) La notion d'angle orienté est une notion évoluée de la notion d'angle, notion utilisée surtout par le Mathématicien ou le Géomètre confirmé. Il est coutume alors de mesurer l'angle ou l'arc de cercle non pas en degrés mais en radian, mesure que l'on définira au chapitre III § 9. Dans cette unité de mesure, un angle plat est de mesure π, un angle droit est de mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, plus ou moins $2k\pi$ où k représente le nombre de tours.

216. Théorème (2^{0} cas d'égalité). — *Deux triangles sont directement (resp. indirectement) égaux si et seulement si ils ont un angle égal et de même sens d'orientation (resp. de sens d'orientation inverse) compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Il suffit de montrer pour deux triangles égaux qu'ils sont directement égaux si deux angles correspondants ont le même sens d'orientation : si deux angles sont de sens inverses, par une symétrie orthogonale, on est ramené au cas précédent.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux tels triangles ; la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{A'A}}$ amène le point A' en A, le point B' en un point B_1, le point C' en un point C_1 ; la rotation de centre A et d'angle (AC_1, AC) amène le point C_1 au point C et le point B_1 au point B_2. Les angles (AC, AB_2) et $(A'C', A'B')$ sont égaux et de même sens (**204**) ; par suite les angles (AC, AB_2) et (AC, AB) sont égaux et de même sens. La demi-droite AB_2 se superpose à la demi-droite AB : les points B et B_2 coïncident. Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement égaux.

217. Théorème. — *Deux figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont directement (resp. indirectement) égales si, quels que soient trois points A, B, C de l'une et les points correspondants A', B', C' de l'autre, les triangles, ou triangles aplatis, qu'ils forment sont directement (resp. indirectement) égaux.*

En notant de la même manière un angle et sa mesure, on a :

218. Théorème : Relation de Chasles. — *Quelles que soient les positions respectives des demi-droites OD_1, OD_2, OD_3 on a la relation, dite de Chasles :*

$$(OD_1, OD_2) + (OD_2, OD_3) = (OD_1, OD_3) + k(360°)$$

Le terme $k(360°)$ (ou $2k\pi$) est nécessaire (**213**) car, lorsqu'on mesure des angles, on doit pouvoir les mesurer en faisant un nombre de tours arbitraire ; les valeurs algébriques choisies pour (OD_1, OD_3) et pour celle du premier membre peuvent différer d'un nombre entier de fois 360°.

219. Définition. — *On appelle angle de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'angle orienté de deux demi-droites parallèles aux deux supports des deux vecteurs, de même sens, et ayant pour origine un point quelconque du plan. On le représente par le symbole $(\vec{u}, \vec{v})$.*

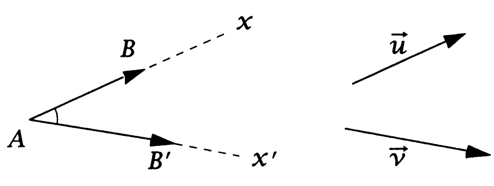


Fig. 96.

Il faut montrer que cette définition est indépendante du point choisi.

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{O_1B}$ et $\overrightarrow{O_2C}$ équipollents au vecteur $\vec{u}$ et les vecteurs $\overrightarrow{O_1B'}$ et $\overrightarrow{O_2C'}$ équipollents au vecteur $\vec{v}$. Les quadrilatères convexes O_1O_2CB et $O_1O_2C'B'$ sont des parallélogrammes (**108**). On passe de la figure $\mathcal{F}_1$ formée des segments de droite orientés $\overrightarrow{O_1B}$ et $\overrightarrow{O_1B'}$ à la figure $\mathcal{F}_2$ formée des segments de droite $\overrightarrow{O_2C}$ et $\overrightarrow{O_2C'}$ par la translation de vecteur directeur $\overrightarrow{O_1O_2}$ (**141**) : le sens de rotation n'est pas altéré (**198**)(**204**) et l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne dépend pas de l'origine choisie.

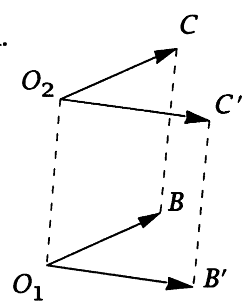


Fig. 97.

De même que pour les angles de demi-droites, si on note de la même manière un angle et sa mesure, on a :

220. Théorème : Relation de Chasles. — *Pour trois vecteurs quelconques $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ on a la relation dite de Chasles* [12] *:*

$$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w}) + k(360°)$$

Il est clair que cette relation se généralise à un nombre quelconque de vecteurs. On peut redéfinir une rotation comme suit :

221. Définition. — *Une rotation de centre O et d'angle θ est la transformation du plan sur lui-même qui, à tout point A, fait correspondre le point A' tel que le segment OA soit égal au segment OA' et tel que les angles $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})$ et θ soient égaux à $k(360°)$ près.*

Une symétrie centrale (plane) de centre O est une rotation de centre O et d'angle de mesure $180°$ à $k(360°)$ près.

222. Théorème. — *Le transformé d'un vecteur par une rotation est un vecteur de même longueur faisant avec le vecteur donné un angle égal à l'angle de la rotation.*

Soient A et B deux points et A' et B' leurs images respectives par une rotation de centre O et d'angle θ :

Les segments AB et $A'B'$ sont égaux **(129)** et

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{A'B'}) + (k(360°)) \qquad \textbf{(220)}$$

Les triangles OAB et $OA'B'$ sont directement égaux et les angles $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{OA'})$ sont égaux; par suite $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) + k(360°) = \theta + k(360°)$.

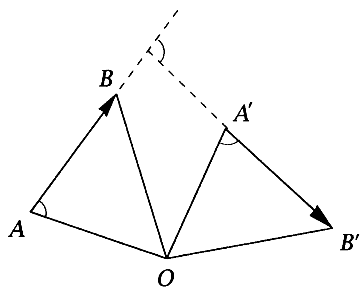


Fig. 98.

223. *Recherche du point fixe (s'il existe) d'un déplacement.*

Soit un déplacement défini par deux points A et B et leurs transformés A' et B'. On sait que les segments AB et $A'B'$ sont égaux et qu'il ne peut y avoir plus d'un point fixe **(197)**.

1º cas. Les points A et A' coïncident :

Le déplacement est une rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'})$ **(207)(222)**; le point A est un point double.

2º cas. Les points A et A' sont distincts et l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$ est nul modulo $k(360°)$:

Si le déplacement était une rotation, ce serait la transformation identique du plan **(222)**. Comme les points A et A' sont distincts, le déplacement est une translation **(209)** : il n'y a pas de point fixe.

[12] On peut développer la théorie des angles orientés (angles de droites ou de vecteurs) sans faire appel à la mesure. Ceci implique évidemment que la relation de Chasles s'énonce comme relation entre grandeurs orientées et non comme une relation entre mesures de grandeurs orientées.

3º cas. Les points A et A' sont distincts et l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ n'est pas nul modulo $k(360°)$:

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont pas égaux et le déplacement n'est pas une translation; c'est une rotation (**209**). Soient O son centre et θ son angle; alors : $OA = OA'$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta + k(360°)$; d'où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta + k(360°)$. Le point O se situe à l'intersection de la médiatrice du segment AA' et de l'arc capable d'où l'on voit le segment AA' sous un angle égal à θ.

Cas particulier : l'angle θ est de mesure $180°$ (c'est à dire $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA}$) ; la rotation est une symétrie centrale de centre le milieu O du segment AA'.

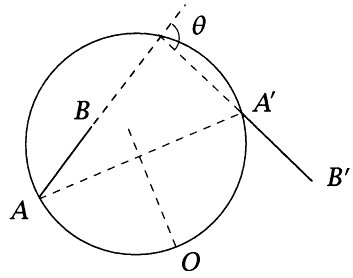


Fig. 99.

La construction du centre de rotation est toujours possible.

224. Théorème. — *Le composé de deux rotations est une rotation d'angle égal à la somme des deux angles de rotation si cette somme est non nulle modulo* $k(360°)$ *; sinon c'est une translation.*

Il est évident que le composé de deux rotations de même centre $\mathcal{R}(O, \alpha)$ et $\mathcal{R}(O, \beta)$ est la rotation $\mathcal{R}(O, \alpha + \beta)$ (**222**), et la composition de ces deux rotations est une opération commutative.

Considérons $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux rotations de centres différents, d'angles θ_1 et θ_2 respectivement, et A et B deux points du plan; notons A' et B' leurs transformés respectifs par $\mathcal{R}_1$ et A'' et B'' les transformés des points A' et B' par $\mathcal{R}_2$. On a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A''B''}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A''B''}) + k(360°) = \theta + \theta' + k(360°) \qquad (222)$$

1º cas : $\theta + \theta' \neq 0 + k(360°)$. Le déplacement $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ est une rotation (**223.** 3º cas) et l'angle de cette rotation ne peut être que $\theta_1 + \theta_2 + k(360°)$ (**222**) ;

2º cas : $\theta + \theta' = 0 + k(360°)$. Le déplacement $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ est une translation (**223.** 2º cas).

EXERCICES.

118. Soient AB et $A'B'$ deux segments égaux et non parallèles. Montrer qu'il existe une unique rotation $\mathcal{R}$ telle que $\mathcal{R}(A)$ soit le point A' et $\mathcal{R}(B)$ le point B'. Déterminer son centre et son angle (Donner une construction de la recherche du centre de rotation différente de (223)).

119. Sur les côtés d'un parallélogramme $AA'D'B$ on construit, extérieurement au parallélogramme, les carrés $ABCD$ et $A'B'C'D'$. Notons I et I' les centres de ces carrés et O et O' les centres des carrés construits extérieurement sur les deux autres côtés. Démontrer que le quadrilatère convexe $OIO'I'$ est un carré.

120. On considère un triangle équilatéral et son cercle circonscrit. Pour tout point M de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas le point A, montrer que AM égale $MB+MC$. Que peut-on dire de cette égalité si le triangle est isocèle de sommet principal B ?

121. On porte sur les côtés d'un triangle ABC rectangle en A, et à l'extérieur, les carrés $ABDE$ et $ACFG$. Démontrer que :

1º Les points D, A, F sont alignés ;

2º Les triangles AEG et ABC sont symétriques par rapport à la droite ADF et la médiane de l'un est dans le prolongement de la hauteur de l'autre ;

3º Les droites DE, FG et la perpendiculaire AH à BC sont concourantes en un point A' ;

4º Les droites CD, BF et AH sont concourantes.

122. Construire un triangle équilatéral dont les sommets sont respectivement sur trois droites parallèles ou trois circonférences concentriques données. Application : construire un triangle équilatéral étant données les distances de ses sommets à un point fixe.

§7. DES ANGLES DE DROITES.

Deux angles opposés par le sommet étant égaux (**35**), on peut étendre la notion d'angle de deux demi-droites ayant même origine à celle d'angle de deux droites comme suit :

225. L'angle de deux droites $\triangle$ et $\triangle'$ sécantes en un point O est la portion de plan décrite par la première droite $\triangle$, quand elle pivote autour du point O, pour se juxtaposer sur la seconde droite $\triangle'$, ceci vu avec le sens de parcours et le nombre de tours effectués.

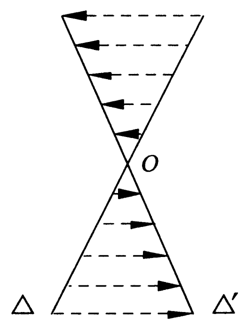


Fig. 100.

226. La différence essentielle avec les angles de demi-droites est que, si deux droites coïncident, un demi-tour supplémentaire pour l'une d'elle les fait coïncider à nouveau ; par suite la mesure d'un angle de droite se fait à $k180°$ prés, où k est un nombre entier positif, négatif ou nul selon que la droite origine pivote dans le sens direct ou non pour se superposer sur la droite extrémité. Ainsi deux angles de droites à côtés parallèles sont égaux (**98**).

227. Rappelons que deux droites parallèles se déduisent l'une de l'autre par translation (**143**) et qu'une translation n'altère pas le sens de rotation (**198**), d'où :

Si on ne regarde pas le nombre de tours (!) on peut voir l'angle de deux droites parallèles $\triangle$ et $\triangle'$ comme la portion de plan balayée par $\triangle$ quand celle-ci se déplace en restant parallèle à elle-même pour se superposer à $\triangle'$; la partie extérieure d'un angle est aussi un angle, et on peut prendre si on veut pour angle de deux droites parallèles la partie extérieure. La cohérence de la notion d'angle ainsi définie nécessite de considérer deux droites parallèles comme deux droites se coupant à l'infini (**97**), et dans la pensée, de faire rejoindre à l'infini les deux parties situées des deux côtés des deux droites (D'une certaine manière tout se passe comme si on était sur une sphère de rayon très grand).

En résumé on a les schémas suivants :

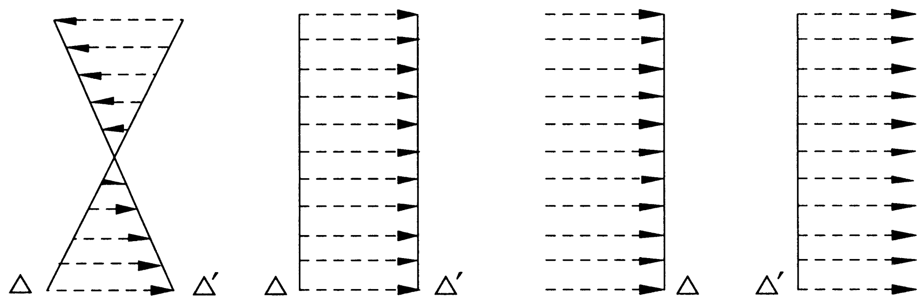


Fig. 101.

On représentera l'angle de deux droites $\triangle$ et $\triangle'$ par le symbole $(\triangle, \triangle')$.

228. Relation de Chasles : Si on convient de noter pareillement un angle de droites et sa mesure, on a pour trois droites quelconques D_1, D_2, D_3 :

$$(D_1, D_2) + (D_2, D_3) = (D_1, D_3) + k(180°) \qquad (*)$$

Cette relation est à rapprocher de la propriété (**95**) ; ceci est dû implicitement aux propriétés de la translation. Elle se généralise à un nombre quelconques de droites ; on peut aussi écrire $(D_1, D_2) = -(D_2, D_1) + k(180°)$.

Il est immédiat de vérifier la relation de Chasles : les remarques faites en (**226**)(**227**) permettent de se ramener au cas où les droites passent par un même point. On obtient une vision de l'opération "addition" pour les angles de droites comme suit :

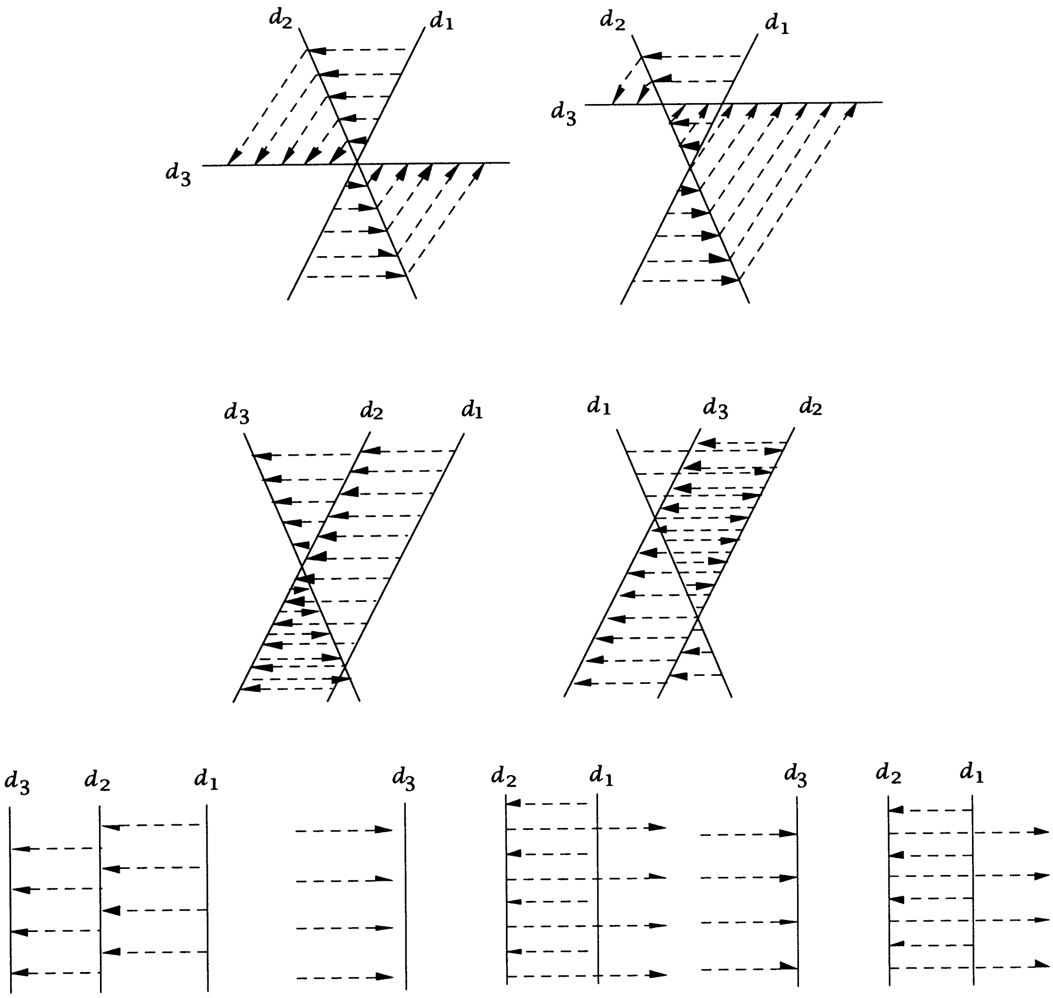


Fig. 102.

Les portions d'angles balayées dans un sens et dans le sens inverse ne comptent pas.

229. La remarque (**186**) s'énonce ainsi :

Le lieu des points d'où l'on voit un segment donné sous un angle (de droites) donné est une circonférence passant par les extrémités de ce segment.

230. De même :

Pour que quatre points A, B, C, D soient cocycliques il faut et il suffit que les angles (CA, CB) et (DA, DB) soient égaux.

L'ordre dans lequel on prend ces points n'intervient pas.

Cette propriété donne pour le cas limite **(163)** :

La droite AT est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si les angles (CA, CB) et (AT, AB) sont égaux.

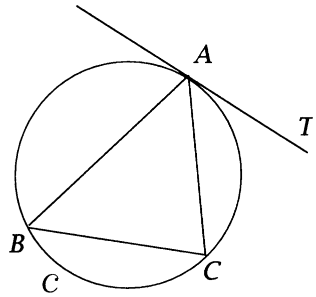


Fig. 103.

EXERCICES.

123. La *droite de* Simson : Un point M est situé sur un cercle circonscrit à un triangle ABC si et seulement si ses projections orthogonales sur les trois côtés sont alignées.

124. Soient C une circonférence de centre O et A et B deux points fixes de C. On considère M un point variable de la droite AB, C_1 une circonférence tangente à C en B et passant par M, et C_2 une circonférence tangente à C en A et passant par M. Les circonférences C_1 et C_2 se recoupent en un point P. Quel est le lieu du point P quand le point M décrit la droite AB ?

125. On considère un point fixe A situé sur une circonférence C, et $\mathcal{R}$ une rotation de centre A. Si M est un point mobile de la circonférence, on note M' son transformé par la rotation $\mathcal{R}$. Montrer que, lorsque le point M décrit la circonférence C, la droite MM' passe par un point fixe que l'on déterminera .

126. On considère C et C' deux circonférences de centre O et O' respectivement se coupant en deux points A et B. Du point B on mène une sécante variable, coupant la circonférence C en un point M et la circonférence C' en un point M'. Les tangentes à chacune de ces circonférences menées des points de contact M et M' se coupent en un point K. Démontrer que le quadrilatère $AMKM'$ est inscriptible.

127. On considère d et d' deux droites perpendiculaires sécantes en un point O et deux points P et P' situés sur la droite d. Un point I varie sur la médiatrice du segment PP' et les droites IP et IP' coupent la droite d' en des points A et A' respectivement ; les cercles circonscrits aux triangles AOP et $A'OP'$ se coupent en un second point M.

Montrer que le quadrilatère $IAA'M$ est inscriptible et que la circonférence ainsi définie reste tangente à une droite fixe que l'on déterminera lorsque le point I varie.

§8. DES ISOMÉTRIES.

231. *Généralités* : La translation, la rotation et la symétrie orthogonale sont trois exemples d'isométries du plan ; en fait, tout mouvement se ramène par composition à ces transformations **(209)(206)**. On va montrer qu'il en est de même de toute isométrie ce qui permettra d'affirmer que toute isométrie du plan est le résultat d'un mouvement. Rappelons qu'une isométrie plane est une transformation qui conserve les distances **(129)**.

Pour être plus bref, on appelle produit de deux isométries I_1 et I_2 leur composition et on l'écrit symboliquement $I_1\ I_2$, ou $I_1 \circ I_2$. On sait qu'un tel produit n'est pas en général commutatif, mais il est associatif c'est à dire $(I_1\ I_2)\ I_3 = I_1\,(I_2\ I_3)$ et on l'écrit $I_1\ I_2\ I_3$; de même, un produit de n fois la même isométrie I sera noté I^n.

Parfois un produit de déplacements et/ou, de retournements ramène le plan mobile à sa position initiale : c'est la transformation identique du plan. Si un tel produit apparaît dans un produit, on pourra le supprimer puisqu'il est sans effet. Par analogie avec un produit arithmétique, on le notera par le symbole 1. Ainsi, si $\mathcal{S}$ est une symétrie orthogonale, on a $\mathcal{S}^2 = 1$.

Il est à remarquer aussi que, si on opère un tel mouvement du plan, le mouvement inverse le ramène à sa position initiale ; si on note I l'isométrie correspondant à un mouvement du plan, on notera par le symbole I^{-1} l'isométrie correspondant au mouvement inverse. Pour que l'analogie avec l'arithmétique soit complète le symbole I^0 sera l'isométrie 1 et le symbole I^{-n} l'isométrie $(I^{-1})^n$ [(13)].

Rappelons que le produit de deux symétries orthogonales est un déplacement **(206)**, c'est à dire une rotation ou une translation. Plus précisément :

232. Théorème. — *Le produit de deux symétries orthogonales d'axes sécants en un point O est une rotation de centre O et d'angle double de l'angle formé par ces axes.*

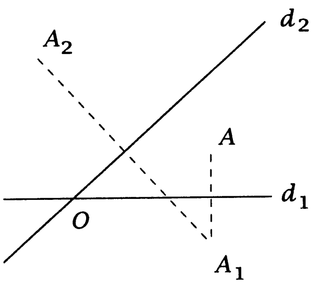


Fig. 104.

Considérons d_1 et d_2 deux droites du plan sécantes en un point O et A un point du plan. Notons A_1 le transformé du point A par la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_{d_1}$ et A_2 le transformé du point A_1 par la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_{d_2}$; on a :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_2}) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) + k(360°)\\ &= 2\,(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{OA_1}) + 2\,(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{d_2}) + k(360°)\\ &= 2\,(d_1, d_2) + k(360°)\end{aligned}$$

Les segments OA et OA_2 étant égaux, l'isométrie $\mathcal{S}_{d_2} \circ \mathcal{S}_{d_1}$ est la rotation de centre O et d'angle $2\,(d_1, d_2)$ à $k(360°)$près.

---

(13) En d'autres termes, l'ensemble des isométries muni de la loi de composition est un groupe. L'ensemble des déplacements est un sous-groupe ; on montrera que c'est un sous-groupe d'indice 2. De même l'ensemble des rotations de centre un point donné, ou des translations est un sous-groupe distingué du groupe des déplacements du plan.

233. Réciproque. — *Une rotation de centre O se décompose en produit de deux symétries orthogonales d'axes passant par O.*

Considérons $\mathcal{R}(O,\theta)$ une rotation de centre O d'angle θ et A un point du plan distinct du point O.

Si $\triangle$ est la bissectrice de l'angle (OA, OA'), le transformé du point A par le déplacement $\mathcal{S}_{OA'} \circ \mathcal{S}_{\triangle}$ est le point A' ; le point O étant un point fixe, la rotation $\mathcal{R}(O,\theta)$ est le déplacement $\mathcal{S}_{OA'} \circ \mathcal{S}_{\triangle}$ (196).

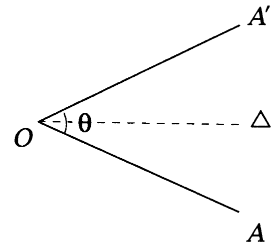


Fig. 105.

234. *Note* : Le point A étant arbitraire, pour toute rotation de centre O et toute symétrie orthogonale d'axe $\triangle$ passant par O, il existe une unique symétrie orthogonale d'axe $\triangle'$ passant par O telle que la rotation $\mathcal{R}$ soit le déplacement $\mathcal{S}_{\triangle'} \circ \mathcal{S}_{\triangle}$.

De même il existe une unique symétrie orthogonale d'axe $\triangle''$ passant par O telle que la rotation $\mathcal{R}$ soit le déplacement $\mathcal{S}_{\triangle} \circ \mathcal{S}_{\triangle''}$.

Pour vérifier l'unicité il suffit de voir que, si on a la relation $\mathcal{S}_{\triangle'} \circ \mathcal{S}_{\triangle} = \mathcal{S}_{\triangle'_1} \circ \mathcal{S}_{\triangle}$, on a l'égalité $\mathcal{S}_{\triangle'} \circ \mathcal{S}_{\triangle} \circ \mathcal{S}_{\triangle} = \mathcal{S}_{\triangle'_1} \circ \mathcal{S}_{\triangle} \circ \mathcal{S}_{\triangle}$, c'est à dire $\mathcal{S}_{\triangle'} = \mathcal{S}_{\triangle'_1}$ et les droites $\triangle'$ et $\triangle'_1$ coïncident.

On peut aussi remarquer que le produit d'une rotation par une symétrie orthogonale d'axe passant par le centre de la rotation est une symétrie orthogonale, c'est à dire le produit de trois symétries orthogonales d'axes concourants est une symétrie orthogonale.

235. Théorème. — *Le produit de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation de vecteur directeur perpendiculaire aux axes et de longueur égale au double de la distance entre ces axes.*

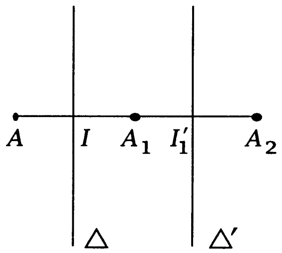


Fig. 106.

Considérons deux droites parallèles $\triangle$ et $\triangle'$, et A un point du plan ; on note A_1 le transformé de A par la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_{\triangle}$ et A_2 le transformé du point A_1 par la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_{\triangle'}$. La droite $\triangle$ est médiatrice du segment AA_1 et la droite $\triangle'$ est médiatrice du segment A_1A_2 ; par suite les points A, A_1, A_2 sont alignés et si I est le milieu du segment AA_1 et I' celui du segment A_1A_2 le segment AA_2 est double du segment II'. Autrement dit $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{II'}$.

236. Réciproque. — *Toute translation se décompose en un produit de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires au vecteur directeur et séparés d'une distance égale à la moitié de la longueur du vecteur.*

Considérons A un point du plan et A' son transformé par une translation de vecteur directeur $\vec{V}$ ($\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$). Si I est le milieu de AA', on considère $\triangle$ et $\triangle'$ deux droites perpendiculaires à la droite AA' passant respectivement par A et I. Alors $\mathcal{S}_{\triangle'} \circ \mathcal{S}_{\triangle}$ est une translation $\mathcal{T}$ transformant A en A' (235).

237. *Note* : Le point A étant arbitraire, pour toute translation $\mathcal{T}$ et toute symétrie orthogonale d'axe $\triangle$ perpendiculaire au vecteur directeur, il existe une unique symétrie orthogonale d'axe $\triangle'$ parallèle à $\triangle$ telle que la translation $\mathcal{T}$ soit le déplacement $\mathcal{S}_{\triangle'} \circ \mathcal{S}_{\triangle}$.

De même, il existe une unique symétrie orthogonale d'axe $\triangle''$ parallèle à $\triangle$ telle que la translation $\mathcal{T}$ soit le déplacement $\mathcal{S}_{\triangle} \circ \mathcal{S}_{\triangle''}$.

On peut remarquer aussi que le produit de trois symétries orthogonales d'axes parallèles est une symétrie orthogonale.

238. Théorème. — *Toute isométrie du plan se décompose en un produit d'une, deux ou trois symétries orthogonales.*

L'étude d'une isométrie du plan (ou de l'espace) est facilitée par la connaissance de ses points fixes, ou la recherche de points fixes modulo des isométries connues. Plus précisément soit I une isométrie du plan ; on a :

1º cas : *L'isométrie I possède trois points fixes non alignés : l'isométrie I est la transformation identique du plan.*

Considérons A, B, C trois points fixes non alignés. Si l'isométrie I n'est pas l'application identique du plan, il existe un point M tel que son transformé M' soit distinct de M. La transformation I conservant les distances, les points A, B, C, sont situés sur la médiatrice du segment MM' (**57**) : ils sont alignés ce qui est absurde. L'isométrie I est la transformation identique du plan.

2º cas : *Les points fixes de I sont alignés et il en existe au moins deux : l'isométrie I est la symétrie orthogonale d'axe la droite passant par les points fixes.*

En effet soient A et B deux points fixes de l'isométrie I et C un point non situé sur la droite AB ; les points C et $I(C)$ sont distincts et la droite AB est médiatrice du segment $C\,I(C)$ (**57**). L'isométrie $\mathcal{S}_{AB} \circ I$ possède trois points fixes A, B, C non alignés ; d'où $\mathcal{S}_{AB} \circ I = 1$ et l'isométrie I est la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_{AB}$. Tout point de la droite AB est un point fixe, et réciproquement.

3º cas : *L'isométrie I possède un seul point fixe : l'isométrie I est une rotation de centre ce point.*

En effet soit O ce point fixe et considérons un point A distinct du point O. Les points A et $I(A)$ sont distincts et le point O est situé sur la médiatrice $\triangle$ du segment $A\,I(A)$. L'isométrie $\mathcal{S}_{\triangle} \circ I$ possède au moins deux points fixes à savoir O et A. Par suite l'isométrie $\mathcal{S}_{\triangle} \circ I$ est la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_{OA}$ ou l'identité du plan. Ce dernier cas ne peut se présenter car l'isométrie I serait la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_{\triangle}$ et posséderait plus d'un point fixe. Ainsi l'isométrie I est la rotation $\mathcal{S}_{\triangle} \circ \mathcal{S}_{OA}$ qui est de centre O (**232**).

4º cas : *L'isométrie I ne possède aucun point fixe : l'isométrie I est une translation ou un produit de trois symétries orthogonales.*

Pour montrer cela considérons A un point du plan ; les points A et $I(A)$ sont distincts et si $\triangle$ est la médiatrice du segment $A\,I(A)$ le point A est point fixe de l'isométrie $\mathcal{S}_{\triangle} \circ I$. Plusieurs situations se présentent :

i) *Le point A est le seul point fixe de $\mathcal{S}_{\triangle} \circ I$:*
L'isométrie $\mathcal{S}_{\triangle} \circ I$ est une rotation $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_{d'}$ d'axes sécants en A (3º cas) et l'isométrie I est le produit $\mathcal{S}_{\triangle} \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_{d'}$.

ii) *L'isométrie $\mathcal{S}_{\triangle} \circ I$ possède plusieurs points fixes, tous situés sur une même droite d :*
L'isométrie $\mathcal{S}_{\triangle} \circ I$ est la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_d$ (2º cas) ; par suite I est le déplacement $\mathcal{S}_{\triangle} \circ \mathcal{S}_d$. Comme I ne possède aucun point fixe, c'est une translation de direction perpendiculaire à la droite $\triangle$ (**209**) (les droites d et $\triangle$ sont parallèles (**232**)(**235**)).

iii) *L'isométrie $\mathcal{S}_{\triangle} \circ I$ possède trois points fixes non alignés :*
Cette situation ne peut se présenter : sinon, l'isométrie $\mathcal{S}_{\triangle} \circ I$ serait l'isométrie identité du plan et I serait la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_{\triangle}$ et aurait des points fixes.

239. *Note* : Une isométrie du plan est déterminée dès que l'on connait l'image de trois points non alignés.

Un produit de deux symétries orthogonales, ou de deux déplacements, étant un déplacement **(206)** **(195)**, on a :

240. Corollaire. — *Tout produit d'un nombre pair de symétries orthogonales est une rotation ou une translation.*

241. Corollaire. — *Tout produit d'un nombre impair de symétries orthogonales est une symétrie orthogonale ou un produit de trois symétries orthogonales.*

Ainsi tout retournement est le produit d'une symétrie orthogonale par un déplacement, la symétrie orthogonale pouvant être choisie arbitrairement.

242. Corollaire. — *Si on décompose une isométrie en un produit de symétries orthogonales, la parité du nombre de symétries orthogonales est indépendante de la décomposition choisie.*

Ainsi une isométrie est soit un déplacement, soit un retournement ; si c'est un déplacement, ce nombre est pair et, si c'est un retournement, ce nombre est impair.

Souvent les démonstrations formelles, comme en **(233)**, permettent d'arriver de manière simple et rapide au résultat cherché ; en contrepartie, elles n'expliquent pas la situation observée et ne facilitent pas l'anticipation des résultats possibles à l'inverse des démonstrations "concrètes", démonstrations que nous avons privilégiées jusqu'à maintenant.

Il est intéressant de se poser la question : Pourquoi ? Ceci afin d'être plus judicieux quant au choix du type de démonstration à utiliser. A titre d'exemple, on donne deux démonstrations du théorème de Stephanos (1881) :

243. Théorème de Stephanos. — *Soient $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ trois figures directement égales d'orientations distinctes (non déductibles l'une de l'autre par translation). Ces figures sont les symétriques d'une même figure $\mathcal{F}$ par rapport aux côtés du triangle qui a pour sommets les trois centres de rotation.*

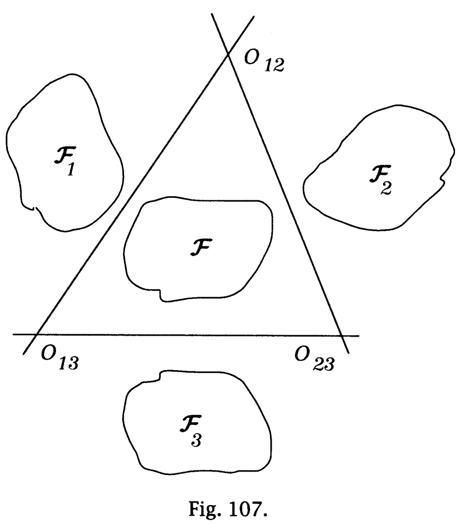


Fig. 107.

Les figures $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ étant directement égales et d'orientations distinctes, elles se déduisent l'une de l'autre par une rotation ; notons O_{ij} le centre de la rotation $\mathcal{R}_{ij}$ faisant passer de la figure $\mathcal{F}_i$ à la figure $\mathcal{F}_j$ et θ_{ij} son angle.

• *Démonstration formelle :*

$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}(O_{12}, \theta_{12}) = \mathcal{S}_{\triangle} \circ \mathcal{S}_{O_{12}O_{13}}$, où $\triangle$ est une droite passant par O_{12}.
$\mathcal{R}_{13} = \mathcal{R}(O_{13}, \theta_{13}) = \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_{O_{12}O_{13}}$, où d est une droite passant par O_{13}

On passe de la figure $\mathcal{F}_2$ à la figure $\mathcal{F}_3$ par le déplacement $\mathcal{R}_{13} \circ \mathcal{R}_{12}^{-1}$: c'est la rotation $\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}(O_{23}, \theta_{23})$. Par suite $\mathcal{R}_{23} = \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_{\triangle}$ et les droites d et $\triangle$ sont sécantes en O_{23}. La droite d est la droite $O_{13}O_{23}$ et la droite $\triangle$ est la droite $O_{12}O_{23}$.

La figure cherchée $\mathcal{F}$ est la figure $\mathcal{S}_{O_{12}O_{13}}(\mathcal{F}_1)$.

• *Démonstration "concrète"* (d'après Deltheil, Caire) :

Les rotations $\mathcal{R}_{12}$ et $\mathcal{R}_{23}$ étant déterminées par leur centre et leur angle, on se propose de déterminer de même la rotation $\mathcal{R}_{13}$. Remarquons que ces auteurs appellent aussi *transposition* une symétrie orthogonale.

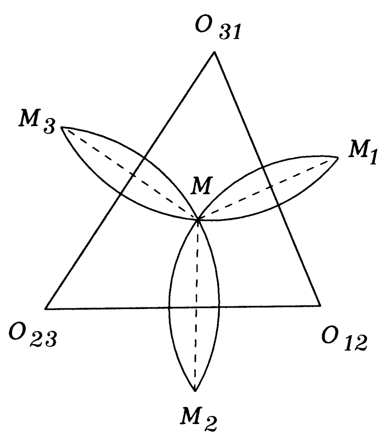
L'angle de cette rotation est (évidemment à $k360°$ près) $\theta_{13} = \theta_{12} + \theta_{23}$.

Pour déterminer son centre, décomposons chacune des rotations $\mathcal{R}_{12}$ et $\mathcal{R}_{23}$ en un produit de deux transpositions, et cherchons à réaliser l'identité de la deuxième et de la troisième transpositions. Pour cela il faut et il suffit que l'axe commun à ces deux transpositions soit la droite $O_{12}O_{23}$; la rotation $\mathcal{R}_{13}$ se présente alors comme le produit de la première et de la quatrième.

Le centre de cette rotation est donc le point d'intersection des axes des deux transpositions composantes, lesquels font respectivement avec la droite $O_{12}O_{23}$ les angles $-\frac{1}{2}\theta_{12}$ et $\frac{1}{2}\theta_{23}$. La rotation $\mathcal{R}_{31}$, opération inverse de $\mathcal{R}_{13}$, a le même centre O_{31} et son amplitude θ_{31}, définie à $k(360°)$ près, est égale au double de l'angle des droites $O_{23}O_{31}$ et $O_{31}O_{12}$. Si dans ces conditions, M_1 est un point quelconque de la figure $\mathcal{F}_1$, on en déduit le point M_2 qui lui correspond dans $\mathcal{F}_2$ au moyen des deux symétries successives d'axes $O_{12}O_{31}$ et $O_{12}O_{23}$ et on le déduit lui-même de son homologue M_3 dans $\mathcal{F}_3$ par les symétries successives d'axes $O_{23}O_{31}$ et $O_{31}O_{12}$.

Les figures $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ apparaissent dans ces conditions comme les symétriques d'une même figure $\mathcal{F}$ par rapport aux côtés du triangle qui a pour sommets les trois centres de rotation.

Les cercles de centre O_{12}, O_{23}, O_{31} passant respectivement par M_1 et M_2, par M_2 et M_3, par M_3 et M_1 contiennent tous le point correspondant M de la figure $\mathcal{F}$ et forment, selon le géomètre américain Frank Morley, le "trèfle" associé au système des trois rotations.



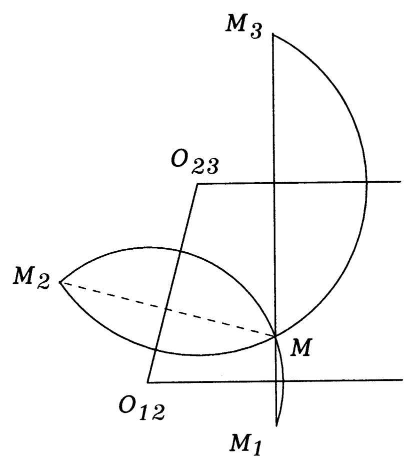


Fig. 108.

Le théorème de Stephanos s'étend sans difficultés au cas où deux (et deux seulement) des figures ont même orientation. Nous ne diminuons pas la généralité en supposant que ce sont les figures $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_3$; en ce cas (Fig. 108) le point O_{13} est rejeté à l'infini, le déplacement qui amène la figure $\mathcal{F}_1$ sur la figure $\mathcal{F}_3$ est une translation, et l'un des arcs de cercle du trèfle de Morley est un segment de droite.

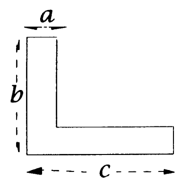
EXERCICES.

128. Un clown possédait une veste colorée rouge du côté extérieur et bleue du côté intérieur. A l'aide de ciseaux, il découpe dans cette veste un triangle ABC, espérant, en le retournant, fermer le trou fait dans la veste, de façon à obtenir extérieurement un triangle bleu sur fond rouge. Il s'aperçoit alors qu'il ne peut fermer le trou avec le triangle retourné. Peut-il en découpant le triangle arriver à ce qu'il désire ?

129. Construire un triangle ABC étant données les longueurs AB et AC et la différence des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

130. Construire le quadrilatère $ABCD$ connaissant les côtés AB, BC, AD, l'angle $\widehat{ADC}$ et sachant que la diagonale AC est bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$ et que AB est moindre que AD.

131. On considère une figure ayant la forme d'une équerre aux dimensions indiquées par la figure ci-contre. Quel est l'ensemble des isométries du plan conservant globalement cette figure pour $a = 2cm$, $b = 12cm$, $c = 18cm$?



132. On considère un triangle isocèle non équilatéral. Quel est l'ensemble des isométries du plan le conservant globalement ?

133. Soit un triangle équilatéral de sommets 0, 1, 2 ; on se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des isométries du plan le conservant globalement.

1º Montrer qu'il existe un point G invariant par toute isométrie de $\mathcal{I}$.

2º Montrer qu'il existe une rotation $\mathcal{R}$ de $\mathcal{I}$ telle que $\mathcal{R}(0) = 1$. Déterminer cette rotation et donner les transformés du point 0 par les déplacements $\mathcal{R}^2$ et $\mathcal{R}^3$.

3º Montrer que les seules isométries de $\mathcal{I}$ telles que le point 0 soit point fixe sont la transformation identique du plan que l'on notera Id et la symétrie orthogonale d'axe $0G$ que l'on notera $\mathcal{S}$.

Vérifier que pour tout élément I de $\mathcal{I}$ il existe i=0, 1, 2, tel que $\mathcal{R}^{-i} \circ I(0) = 0$. Donner la description des éléments de $\mathcal{I}$ en fonction de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{S}$.

134. Soit un carré de sommets 0, 1, 2, 3, dans cet ordre ; on se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des isométries du plan laissant le carré globalement invariant.

1º Montrer qu'il existe un point G qui est un point fixe pour toute isométrie de $\mathcal{I}$.

2º Montrer qu'il existe une rotation $\mathcal{R}$ de $\mathcal{I}$ telle que $\mathcal{R}(0) = 1$. Déterminer les images de 0 par $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$ et $\mathcal{R}^4$.

3º Montrer que les seules isométries I de $\mathcal{I}$ telles que $I(0) = 0$ sont la transformation identique du plan et une symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ d'axe que l'on déterminera.
Donner la description des isométries de $\mathcal{I}$ en fonction de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{S}$.

135. Soit un losange non carré de sommets $0, 1, 2, 3$, dans cet ordre ; on se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des isométries du plan laissant ce losange globalement invariant.

1º Montrer qu'il existe un point G qui est point fixe pour toute isométrie de $\mathcal{I}$.

2º Montrer qu'il existe une unique rotation $\mathcal{R}$ de $\mathcal{I}$ distincte de la transformation identité du plan. La déterminer.

3º Montrer que les seules isométries I de $\mathcal{I}$ telles que $I(0) = 0$ sont la transformation identique du plan que l'on notera I_d et une symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ d'axe que l'on déterminera.

Donner la description des isométries de $\mathcal{I}$ en fonction de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{S}$.

136. Soient $\triangle_1$ et $\triangle_2$ deux droites parallèles ; on se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des isométries du plan laissant globalement invariante la figure qu'elles forment.

1º Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale $\mathcal{S}$, d'axe que l'on déterminera, telle que, pour toute isométrie I de $\mathcal{E}$, on a $I(\triangle_i) = \triangle_i$ ou $\mathcal{S} \circ I(\triangle_i) = \triangle_i$, pour $i = 1, 2$.

2º On considère $\mathcal{E}'$ l'ensemble des isométries I de $\mathcal{E}$ telles que $I(\triangle_1) = \triangle_1$. Que peut-on dire des éléments de $\mathcal{E}'$ dans les cas suivants :

a) L'isométrie I possède deux points fixes situés sur $\triangle_1$;

b) L'isométrie I possède un seul point fixe situé sur $\triangle_1$;

c) L'isométrie I ne possède pas de point fixe situé sur $\triangle_1$;

3º Donner la description des éléments de $\mathcal{E}$.

137. Si une transformation ponctuelle est telle que le vecteur joignant deux points est toujours égal au vecteur joignant leurs homologues, cette transformation est une translation et réciproquement.

138. Si une transformation ponctuelle transforme un point fixe A en un point A' et tout autre point M en un point M' tel que $AM = A'M'$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \alpha$ où α est une valeur donnée distincte de $2k\pi$, cette transformation est une rotation d'angle α.

139. Tout retournement peut être considéré d'une infinité de manière comme le produit d'une symétrie orthogonale et d'un déplacement. Plus précisément, démontrer que tout retournement est réductible au produit d'une symétrie orthogonale et d'une translation de vecteur directeur parallèle à l'axe de cette symétrie orthogonale. Peut-on intervertir ces deux opérations ?

Montrer l'unicité d'une telle décomposition pour un retournement donné (on dit que c'est la *forme canonique* du retournement considéré).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II.

140. Dans un cercle deux cordes égales sont également inclinées sur le diamètre passant par leur point d'intersection.

141. Dans un cercle, deux cordes parallèles menées par les extrémités d'un diamètre sont égales et la droite joignant leurs autres extrémités passe par le centre.

142. On donne une demi-circonférence de diamètre AB, et, sur ce diamètre, deux points C et D, équidistants du centre O ; par C et D on trace deux parallèles qui coupent la demi-circonférence en C' et D' respectivement. Démontrer que la corde $C'D'$ est perpendiculaire à ces parallèles.

143. Etant donné un triangle ABC, mener par le sommet A une droite telle que, BB' et CC' étant perpendiculaires à cette droite, le segment $B'C'$ ait une longueur donnée l.

144. Par les extrémités d'un segment AB on mène les perpendiculaires xx' et yy' à ce segment. Si les points C et D sont situés respectivement sur ces droites et sont tels que l'angle $\widehat{COD}$, où O est milieu de AB, est droit montrer que la droite CD est tangente à la circonférence de diamètre AB.

145. On considère deux circonférences C et C', de centre O et O', tangentes extérieurement en un point A, et une tangente commune aux points B et B' respectivement. Démontrer les propriétés suivantes :
1º L'angle $\widehat{BAB'}$ est droit ;
2º La droite OO' est tangente à la circonférence de diamètre BB' en A ;
3º Le segment BB' est tangent, en son milieu, à la circonférence de diamètre OO'.

146. Dans un triangle ABC, on trace les circonférences de diamètres AB et AC, puis, par B et C, deux cordes parallèles BB' et CC'. Démontrer que la droite $B'C'$ passe par le sommet A.

147. Par un point donné P intérieur à une circonférence C de centre O, mener une corde AB telle que l'angle $\widehat{ACB}$ formé par les tangentes en A et B soit aussi grand que possible.

148. On considère deux circonférences égales de centres O et O', situés à une distance égale au rayon et se coupant en A et B respectivement. Du point A, on mène une droite coupant ces circonférences aux points C et C'. Montrer que le triangle BCC' est équilatéral.

149. Les tangentes en deux points A et B d'une circonférence de centre O se coupent en C. La perpendiculaire menée du point A à la droite CB coupe OC au point D. Démontrer que le segment AD est égal au rayon.

150. Deux circonférences égales se coupent en A et B. Du point A comme centre, on trace une circonférence coupant les deux premières. Démontrer que le point B et deux des points d'intersections de la troisième circonférence avec les deux premières sont alignés.

151. On considère un angle $\widehat{xOy}$, un point I de sa bissectrice, et A et B deux points sur le côté Ox. Les circonférences circonscrites aux triangles OAI, OBI coupent Oy en C et D respectivement. Démontrer que les segments AB et CD sont égaux.

152. Soient C le milieu d'un arc de cercle d'extrémités A et B, et M un point de cet arc. On prolonge AM d'une longueur MD égale à MB. Alors :
1º Les segments CB et CD sont égaux ;
2º On a l'inégalité $MA + MB < CA + CB$.

153. On considère AB une corde d'une circonférence sous-tendant un arc de cercle de mesure $120°$. Par un point M de l'arc $\widehat{AB}$ on mène les droites AM et BM, dont les prolongements coupent les tangentes en B et A en des points A' et B'. Démontrer que les segments AA' et BB' sont égaux.

154. On considère un point M d'un arc de cercle d'extrémités A et B. Quel est le lieu géométrique de la projection orthogonale H du point A sur la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$?

155. Une droite d intersecte les côtés égaux AB et AC d'un triangle isocèle ABC en B' et C' respectivement. Tracer la droite d de manière que la mesure de la somme des segments $B'B$ et $C'C$ soit égale à la mesure du segment $B'C'$.

156. Construire un triangle connaissant un côté, une hauteur, et une médiane.

157. Un rugbyman veut se placer au point de la ligne de touche d'où il voit les poteaux de but sous un angle maximum. Déterminer ce point et le construire géométriquement.

158. i) Deux points P et Q étant donnés, construire un triangle PMQ tel la longueur $PM + MQ$ soit égale à une longueur donnée l, et l'angle $\widehat{M}$ soit de mesure $60°$.

ii) Par un point M de la base BC d'un triangle équilatéral ABC mener les parallèles aux côtés AB et AC ; elles déterminent sur ces côtés les points P et Q respectivement. Déterminer le point M pour que le segment PQ soit de longueur donnée.

159. On considère ABC un triangle isocèle de sommet A, C son cercle circonscrit et C' le cercle de centre A et de rayon AB. Une droite d passant par le point C coupe les circonférences C et C' aux points D et E respectivement.
1° Montrer que la droite AD est bissectrice de l'angle $\widehat{EAB}$;
2° En déduire que le triangle DEB est isocèle.

160. Soient deux circonférences concentriques C et C' de centre O, et A et P deux points de la petite circonférence C. La perpendiculaire en P à AP coupe la circonférence C' en B et C. Le point P étant fixe, montrer que le centre de gravité G du triangle ABC ne dépend pas de la position du point A sur la circonférence C.

161. Deux circonférences de centre O et O' sont tangentes extérieurement en A. D'un point B de l'une d'elles on mène la tangente BD à l'autre ; BD recoupe la première circonférence en C ; on prolonge BA jusqu'à sa rencontre en F avec la deuxième circonférence. Démontrer que la droite AD est bissectrice de l'angle $\widehat{CAF}$.

162. Dans un triangle ABC, l'angle de la hauteur AH et du côté AB est égal à l'angle du côté AC et du rayon AO du cercle circonscrit au triangle. En déduire que si BH' et CH'' sont les hauteurs du triangle, la droite $H'H''$ est perpendiculaire au rayon OA.

163. Etant donnés une circonférence C de centre O de rayon r et un point A tel que $r < OA$, on décrit une circonférence de centre A et de rayon AO, qui rencontre le prolongement de OA en D, et la circonférence C en P et Q. D'un point M de la circonférence C, on mène les droites MP et MQ qui recoupent la circonférence de centre A en B et C respectivement. Démontrer l'égalité des segments MB et DC.

164. Soit un point M sur une circonférence de diamètre AB. Les droites MA, MB et la tangente $x'x$ en M coupent le diamètre CD perpendiculaire à AB aux points N, P, Q, respectivement. Démontrer que les segments NQ et PQ sont égaux.

165. A l'extrémité A du diamètre AB d'une circonférence de centre O, on trace une corde AC, et, à l'autre extrémité B, la tangente. La bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$ coupe la corde BC en F, la circonférence en H, et la tangente en D. Démontrer que les segments BD et BF d'une part, et FH et HD d'autre part, sont égaux.

166. On considère une demi-circonférence de centre O et de diamètre AB. Sur AO comme diamètre on trace une demi-circonférence et l'on mène la tangente BC à cette demi-circonférence. La droite AC rencontre la demi-circonférence de diamètre AB en C'. Démontrer que les segments AC et CC' sont égaux.

167. On considère deux circonférences égales, de centres O et O', telles que chacune d'elle passe par le centre de l'autre. Ces circonférences se coupent en C et D. Une droite passant par C recoupe ces circonférences en M et N. Démontrer que le triangle MDN est équilatéral; en déduire le lieu géométrique de son centre de gravité.

168. Deux circonférences sont tangentes intérieurement en un point A. Par un point D de la petite circonférence on mène une tangente qui coupe la grande circonférence en B et C. Démontrer que la droite AD est bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

169. Dans un triangle rectangle ABC, on inscrit un carré $QMNP$ dont le côté MN est sur l'hypoténuse BC. Si on note O l'intersection des diagonales du carré, montrer que la droite AO est bissectrice de l'angle $\hat{A}$.

170. Un quadrilatère $ABCD$ dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en G, est inscrit dans une circonférence; montrer que, si M est le milieu de CD, les segments MG et AB sont perpendiculaires.

171. Deux circonférences de centres O et O' se coupent en A et B; par A, on mène une sécante quelconque CD. Déterminer le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit ω du triangle BCD.

172. Un angle de grandeur invariable pivote autour de son sommet A, qui est fixe. D'un point fixe B, on mène les perpendiculaires BC et BD aux côtés de cet angle; elles rencontrent les côtés de l'angle aux points E et F.

1º Trouver le lieu géométrique des points C et D;

2º Montrer que le segment CD est de longueur constante et trouver le lieu géométrique de son milieu;

3º Trouver le lieu géométrique des points E et F.

173. On considère sur une circonférence C de centre O, un point fixe A et un point mobile B. Soit P le point d'intersection des tangentes menées des points A et B à cette circonférence.

Quel est le lieu géométrique du centre du cercle inscrit, du centre du cercle ex-inscrit contenu dans l'angle $\hat{P}$, du centre du cercle circonscrit, de l'orthocentre du triangle PAB?

174. On considère un point A extérieur à une circonférence C de centre O. Du point A, on méne une sécante MM' et, sur la sécante, on prend un point P tel que $AP = AM + AM'$. Déterminer le lieu géométrique du point P lorsque la sécante tourne autour du point A.

175. On considère dans un angle droit $\widehat{xOy}$ une circonférence inscrite de centre C, tangente en D au côté Ox. Du point O, on mène une sécante OAB à cette circonférence telle que l'arc $\overset{\frown}{AD}$ soit la moitié de l'arc $\overset{\frown}{DB}$. Donner la valeur de l'angle $\widehat{DOB}$ et des angles du quadrilatère $CADB$ et construire le point A.

176. On considère une corde AB d'une circonférence C et M le milieu du plus grand arc $\widehat{AB}$; on trace les bissectrices AN et BP des angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{MBA}$. Démontrer que le quadrilatère $MNIP$ est un parallélogramme, où I est le point de concours de AN et BP.

177. Sur le côté Ox d'un angle $\widehat{xOy}$, on prend un point A ; on trace une circonférence tangente à Ox en A, et l'on mène les tangentes paralléles à Oy à cette circonférence. Soient M et N les points de contact de ces tangentes. Démontrer que les droites AM et AN sont paralléles aux bissectrices de l'angle $\widehat{xOy}$.

178. Les prolongements des côtés d'un quadrilatère inscriptible $ABCD$ se coupent en E et F. Les bissectrices des deux angles ainsi formés coupent les côtés du quadrilatère en quatre points I, H, J, et G. Montrer que le quadrilatère $IHJG$ ainsi formé est un losange (on pourra montrer que les triangles EIJ et FGH sont isocèles).

179. i) On considère trois points a, b et c d'un plan. Construire un triangle dont ces points soient les milieux.

ii) On considère quatre points a, b, c et d d'un plan. Construire un quadrilatère dont ces points soient les milieux.

iii) On considère cinq points a, b, c, d, et e d'un plan. Construire un pentagone $ABCDE$ dont ces points soient les milieux de ses côtés.

CHAPITRE III

§1. DES LIGNES PROPORTIONNELLES.

244. Etant donnés trois points alignés A, B, C, comment peut-on distinguer les positions relatives de ces points ? Pour répondre à cette question, on oriente la droite, c'est à dire on considère un sens de parcours ; de ce fait un *segment* de cette droite est *orienté*. Si AB est un segment orienté, A désigne son origine et B son extrémité. On a ainsi des relations entre ces grandeurs comme : $AB+BC$ est le segment orienté d'origine A et d'extrémité C, c'est le segment orienté AC. Un cas particulier est $AB+BA = AA$, le segment de longueur nulle ; on désigne aussi le segment orienté BA par $-AB$.

On note $\overline{AB}$ la mesure algébrique d'un segment orienté, où $\overline{AB} = AB$ est un nombre positif si le sens de parcours de la droite est définit de A vers B. On a de manière évidente $\overline{BA} = -\overline{AB}$ et :

245. Théorème. — *Sur toute droite orientée d, étant donnés des points quelconques A, B, $C, \dots, L$ de d, on a la relation dite de Chasles :* $\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{LA} = 0$.

En particulier $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

246. Proposition. — *Soient A, B, M, N quatre points situés sur une droite orientée d et k un nombre algébrique distinct de* 1. *Si $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = k$ les points M et N sont confondus.*

On a les relations suivantes $\overline{MA} = k\overline{MB}$ et $\overline{NA} = k\overline{NB}$; d'où $\overline{MA}+\overline{AN} = k(\overline{MB}+\overline{BN})$ et $\overline{MN} = k\overline{MN}$ (**245**). Par suite $(1-k)\overline{MN} = 0$ et si $k \neq 1$ on a $\overline{MN} = 0$: les points M et N sont confondus.

247. *Notes* : i) Soient A et B deux points distincts d'une droite d. Si un point N s'éloigne indéfiniment de ces points tout en restant sur la droite d, le rapport $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ tend vers la valeur 1 sans jamais l'atteindre ; pour des raisons de continuité on dira parfois que le rapport est égal à 1 si le point N se situe infiniment loin des points A et B sur la droite d.

ii) Un point M est situé entre deux points A et B si et seulement si le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ est négatif ; si ce rapport est positif et est plus petit que 1, le point M est situé du côté opposé à B par rapport à A, et est plus grand que 1 dans le cas contraire.

248. Théorème. — *Pour tout nombre rationnel k différent de* 1, *et deux points distincts A et B, il existe un et un seul point M tel que le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ soit égal à k.*

Le nombre rationnel k est égal, au signe près, à $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers positifs :

1º Si k est négatif, on divise le segment AB en $p+q$ parties égales (**15**). Le point M est situé à l'extrémité de la $p^{ième}$ partie à partir du point A ;

2º Si k est positif et $p < q$, on divise le segment AB en $(q-p)$ parties égales (**15**). Le point M est situé à l'extérieur du segment AB du côté de A à une distance de ce point égale à p fois une de ces parties ;

3º Si k est positif et $q < p$, on divise le segment AB en $(p-q)$ parties égales (**15**). Le point M est le point situé à l'extérieur du segment AB du côté de B à une distance de ce point égale à q fois une de ces parties ;

4º Si $k = 1$ il n'existe pas de solution, ou une si on considére la remarque (**247**).

249. *Remarque* : Il se peut que le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ soit incommensurable (**21**) ; afin de pouvoir considérer tous les cas possibles, il convient d'étendre par "un acte de foi" ce dernier théorème aux nombres irrationnels, c'est à dire aux rapports incommensurables. Ceci se fait sans ambiguïté car tout nombre irrationnel (ou tout nombre réel) s'approxime aussi près que l'on veut par un nombre rationnel et il en est de même d'un rapport incommensurable (**21**).

Ainsi pour tout nombre réel k et tous points A et B distincts, il existe un unique point C tel que $\overline{AC} = k\overline{BC}$.

250. Deux points distincts A et B étant donnés, pour tout nombre $k > 0$ ($k \neq 1$), si on ne tient pas compte des signes, il existe deux points M et N tels que les rapports $\frac{MA}{MB}$ et $\frac{NA}{NB}$ soient égaux à k ; si $k = 1$ un des points se situe au milieu de AB et l'autre à l'infini. On dit que l'on a une *proportion* ou *division harmonique*[14] :

251. Définition. — *Deux points M et N divisent harmoniquement un segment AB, et sont dits conjugués harmoniquement par rapport au segment AB, si les rapports $\frac{AM}{AN}$ et $\frac{BM}{BN}$ sont égaux, c'est à dire si $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = -\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$.*
S'il en est ainsi, les points A et B divisent harmoniquement le segment MN.

252. Théorème. — *Si des droites parallèles déterminent sur une sécante des segments égaux, elles déterminent sur toute autre sécante des segments égaux.*

Soient trois droites parallèles $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, coupées par une sécante L aux points A, B, C, tels que AB égale BC.

Considérons une autre sécante L' coupant les droites $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, en A', B', C', respectivement. La parallèle à la droite L passant par A' coupe la droite $\triangle_2$ en E et celle passant par B' coupe la droite $\triangle_3$ en F.

Les quadrilatères convexes $AA'EB$ et $BB'FC$ sont des parallélogrammes (**103**), d'où $A'E$ égale AB et $B'F$ égale BC (**106**) ; par suite les segments $A'E$ et $B'F$ sont égaux. De plus les angles $\widehat{B'A'E}$ et $\widehat{C'B'F}$, respectivement $\widehat{A'EB'}$ et $\widehat{B'FC'}$, sont égaux (**98**). Par suite les triangles $A'B'E$ et $B'C'F$ sont égaux (**48**) et $A'B'$ égale $B'C'$.

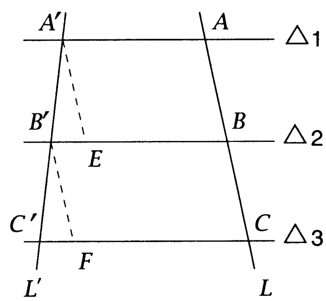


Fig. 109.

253. Théorème de Thalès. — *Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.*

Considérons $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ trois droites parallèles coupées par deux sécantes L et L' aux points A, B, C et A', B', C' respectivement.

(14) De nombreux auteurs affirment que le mot "harmonique" vient des liens qui unissent les mathématiques et la musique. Plus précisément si on note $AM = a$, $BM = b$, $MN = m$ la proportion harmonique donne $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}$. D'autre part l'accord parfait majeur *do mi sol* nécessite que les longueurs d'une corde vibrante donnant ces trois notes soient proportionnelles à 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$; ainsi les longueurs inverses sont proportionnelles à 4, 5, 6 et comme $4 + 6 = 2 \cdot 5$ les trois longueurs de cordes a, b, m satisfont la relation $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}$.

(†) Le géomètre Chasles a montré que le rapport harmonique était un invariant de la géométrie projective.

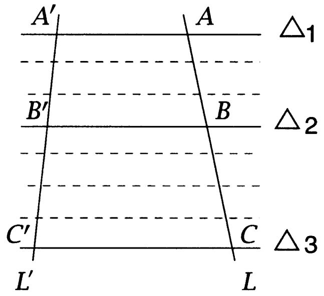


Fig. 110.

1º *cas* (Fig. 110) : Les segments AB et BC ont une commune mesure contenue p fois dans AB et q fois dans BC.

Par les extrémités des points de division induits par cette commune mesure sur les segments AB et BC, on mène les parallèles aux droites $\triangle_i$; ainsi on détermine sur la droite L' des segments égaux (252). Par suite $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{p}{q}$ c'est à dire $\frac{A'B'}{B'C'}$ égale $\frac{AB}{BC}$.

2º *cas* (Fig. 111) : Pour un entier m donné, divisons le segment BC en m parties égales (15). Portons à partir de B et vers le point A cette commune mesure plusieurs fois, jusqu'à ce que l'on définisse un encadrement du point A. On définit ainsi les points A_n et A_{n+1} tels que le point A soit situé sur le segment A_nA_{n+1} et A_nB soit n fois cette commune mesure et $A_{n+1}B$ le soit $(n+1)$ fois.

Les parallèles aux droites $\triangle_i$ passant par les points A_n et A_{n+1} respectivement coupent la sécante L' aux points A'_n et A'_{n+1} tels que A' soit situé sur le segment $A'_nA'_{n+1}$; on a les inégalités :

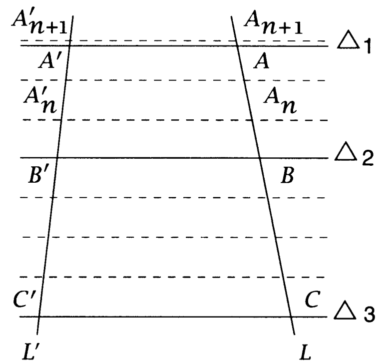


Fig. 111.

$$\frac{A'_nB'}{B'C'} < \frac{A'B'}{B'C'} < \frac{A'_{n+1}B'}{B'C'} \text{ et } \frac{A_nB}{BC} < \frac{AB}{BC} < \frac{A_{n+1}B}{BC}.$$

D'où $0 < \frac{A'B'}{B'C'} - \frac{A'_nB'}{B'C'} < \frac{A'_{n+1}A'_n}{B'C'} = \frac{1}{m}$ et $0 < \frac{AB}{BC} - \frac{A_nB}{BC} < \frac{A_{n+1}A_n}{BC} = \frac{1}{m}$.

Comme $\frac{A'_nB'}{B'C'}$ égale $\frac{A_nB}{BC}$ (1º cas), les rapports $\frac{A'B'}{B'C'}$ et $\frac{AB}{BC}$ sont égaux à $\frac{1}{m}$ près et ceci pour tout m ; ainsi $\frac{A'B'}{B'C'}$ égale $\frac{AB}{BC}$ (22).

254. *Note* : Le théorème de Thalès s'énonce aussi avec les rapports des mesures algébriques des segments, car le signe de ces rapports ne dépend pas du sens de parcours choisi sur les sécantes, étant entendu que l'on prend les segments orientés avec leurs extrémités homologues.

255. Réciproque du théorème de Thalès. — *Toute droite déterminant sur les côtés non parallèles d'un trapèze des segments proportionnels est parallèle aux bases.*

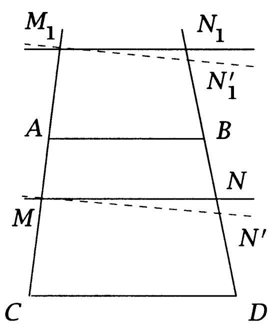


Fig. 112.

Soit MN (ou M_1N_1) une droite déterminant sur les côtés non parallèles AC et BD d'un trapèze $ABCD$ des segments proportionnels.

La parallèle aux bases passant par M coupe le côté BD en un point N', et on a $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BN'}}{\overline{N'D}}$ (253) ; par hypothèse $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{ND}}$ d'où $\frac{\overline{BN'}}{\overline{DN'}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{DN}}$ et les points N et N' sont confondus (246).

La droite est parallèle aux bases du trapèze.

256. Théorème. — *Pour qu'une droite détermine des segments proportionnels sur deux côtés d'un triangle il faut et il suffit qu'elle soit parallèle au troisième côté.*

Soit d une droite coupant les côtés AB et AC en M et N respectivement. On se ramène au cas précédent en menant la parallèle au côté BC passant par le point A.

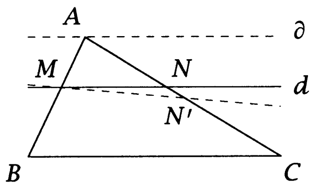


Fig. 113.

257. Théorème. — *Une série de droites concourantes en un même point détermine sur deux droites parallèles des segments correspondants proportionnels.*

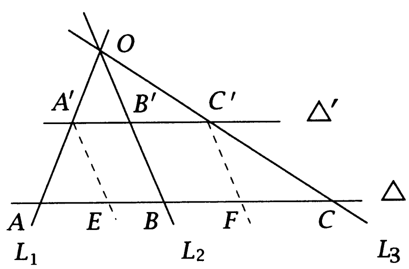


Fig. 114.

Il suffit de montrer la proposition pour trois droites L_1, L_2, L_3 concourantes en un point O et intersectant deux droites parallèles en des points A, B, C et A', B', C' respectivement.

Par les points A' et C' menons les parallèles à la droite BB', elles coupent la droite $\triangle$ aux points E et F respectivement. Les quadrilatères convexes $A'B'BE$ et $B'C'FB$ sont des parallélogrammes (**103**) et $A'B'$ égale EB et $B'C'$ égale BF. D'autre part le théorème de Thalès donne les égalités $\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'O}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{C'O}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{CB}}$; par suite $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ et $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

258. Réciproque. — *Si deux droites parallèles sont coupées par une série de sécantes déterminant des segments correspondants proportionnels (tous de même sens, ou tous de sens contraire) ces sécantes sont concourantes en un même point ou sont toutes parallèles.*

Il est clair que si deux des sécantes considérées sont parallèles, elles sont toutes parallèles (**255**).

Supposons que deux sécantes L_1 et L_2 se coupant en un point O intersectent deux droites parallèles $\triangle$ et $\triangle'$ aux points C et C' tels que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ égale $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ (Fig. 114).

La droite OC' coupe la droite $\triangle$ en un point C_1 tel que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ égale $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC_1}}$ (**257**). Par suite les points C et C_1 sont confondus et la droite L_3 passe par le point O, point de concours des droites L_1 et L_2.

259. Théorème. — *La bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure d'un angle d'un triangle partagent le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents.*

Soient ABC un triangle, AE la bissectrice intérieure et AF la bissectrice extérieure de l'angle $\hat{A}$. Par le point B menons la droite BG parallèle à la droite AE et la droite BH parallèle à la droite AF.

Les droites AE et AF étant perpendiculaires (**122**), la droite AF est perpendiculaire à la droite BG et la droite AE est perpendiculaire à la droite BH (**92**). Les triangles BAG et BAH sont isocèles (**59**) et les segments AG, AB et AH sont égaux (**53**).

D'autre part $\frac{FB}{FC} = \frac{AH}{AC}$ et $\frac{EB}{EC} = \frac{AG}{AC}$ (**253**). Par suite $\frac{FB}{FC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

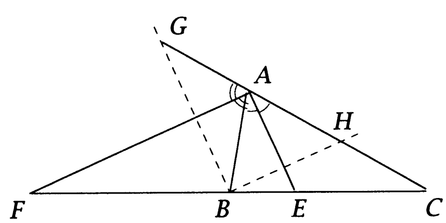


Fig. 115.

260. *Notes* :

i) Si le triangle est isocèle la bissectrice intérieure de l'angle au sommet passe au milieu de la base (**55**) et la bissectrice extérieure est parallèle à la base (**86**) ; le point d'intersection est "rejeté" à l'infini.

ii) Les points E et F divisent harmoniquement le segment BC.

261. Réciproque. — *Si une droite issue d'un sommet d'un triangle divise intérieurement, respectivement extérieurement, le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents elle est bissectrice intérieure, respectivement bissectrice extérieure, de l'angle au sommet.*

Il n'existe qu'un seul point divisant intérieurement, respectivement extérieurement, un segment dans un rapport donné (**246**).

262. Corollaire. — *Notons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ les côtés d'un triangle ABC et soient E et F les pieds respectifs des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\hat{A}$. Si $b > c$, on a les égalités suivantes :*

$BE = \frac{a \cdot c}{b+c}$, $CE = \frac{a \cdot b}{b+c}$, $FB = \frac{a \cdot c}{b-c}$, $FC = \frac{a \cdot b}{b-c}$ *si* $b \neq c$.

Dans le cas où b égale c, le point F est rejeté à l'infini.

263. Théorème. — *Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné, différent de* 1, *est une circonférence.*

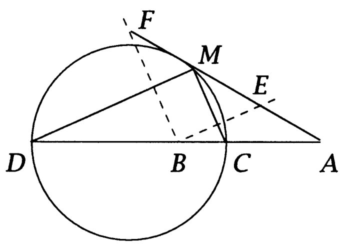


Fig. 116.

Soient A et B deux points fixes et k un rapport donné distinct de 1.

Les points C et D de la droite AB divisant harmoniqument le segment AB, l'un intérieurement, l'autre extérieurement suivant le rapport k sont des points du lieu (**251**).

Soit M un point du lieu ; alors $\frac{MA}{MB} = k$ et les droites MC et MB sont les bissectrices respectives intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{M}$ du triangle AMB (**261**) : elles sont perpendiculaires, et le point M est situé sur la circonférence de diamètre DC (**182**).

Réciproquement : Soit M un point de la circonférence de diamètre DC. Les droites parallèles aux droites MD et MC issues du point B coupent la droite AM aux points E et F respectivement, et on a $k = \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{ME}$ et $k = \frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MF}$ (**253**) ; d'où les segments ME et MF sont égaux, et BM est médiane du triangle EBF.

D'autre part l'angle $\widehat{DMC}$ est droit, d'où l'angle $\widehat{EBF}$ est droit (**98**) et les segments BM et MF sont égaux (**183**). Par suite $\frac{MA}{MB}$ égale $\frac{CA}{CB}$ qui est égal à k : le point M est un point du lieu.

Le lieu géométrique cherché est la circonférence de diamètre les deux points divisant le segment donné dans le rapport donné.

EXERCICES.

180. On considère un triangle ABC et deux points P et Q sur les côtés AC et BC de ce triangle tels que $\frac{AP}{PC} = \frac{BQ}{QC}$. La parallèle à la droite BP passant par le point A coupe le prolongement de BC en un point R ; montrer que $BC^2 = CR \cdot CQ$.

181. On considère un triangle ABC et P_1 un point du côté AB. La parallèle au côté BC passant par le point P_1 coupe le côté AC en P_2 ; la parallèle au côté AB passant par P_2 coupe le côté BC en P_3 ; la parallèle au côté AC passant par P_3 coupe le côté AB en P_4 ; et ainsi de suite... Montrer que les points P_1 et P_7 sont confondus.

Prendre un point P_1 situé sur le côté AB d'un quadrilatère convexe $ABCD$ et appliquer le processus similaire : la parallèle à la diagonale AC passant par P_1 coupe le côté BC en P_2, celle passant par P_2 coupe le côté CD en P_3 et celle passant par P_3 coupe le côté AB en P_4. Montrer que les points P_1 et P_4 sont confondus.

Si on prend un polygone avec un nombre quelconque de côtés peut-on obtenir un résultat semblable ?

182. Par le sommet A d'un parallélogramme $ABCD$, on mène une sécante quelconque qui coupe la diagonale BD en E et les côtés BC et CD en F et G respectivement. Vérifier que AE est *moyenne proportionnelle* entre EF et EG, c'est à dire $\frac{\overline{EA}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EA}}$.

183. Soient E le milieu de la médiane AD d'un triangle ABC et F le point intersection des droites BE et AC. Montrer que le segment AF est le tiers du segment AC.

184. *Théorème de* Ménélaüs : Trois points A', B', C' situés sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle sont alignés si et seulement si on a la relation $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$.

185. Montrer que les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés (voir la définition en (**317**)).

186. *Théorème de* Céva : Trois droites issues des sommets A, B, C d'un triangle sont concourantes en un même point si et seulement si les points A', B', C' où elles coupent respectivement les côtés opposés vérifient la relation $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

§2. DES POLYGONES SEMBLABLES : CAS DE SIMILITUDE.

Pour mesurer un terrain, ou étudier la figure qu'il fait, il faut éliminer les obstacles que l'on peut rencontrer comme maisons, lacs, bois, etc... Un moyen est de reporter sur un terrain plat suffisamment grand et sans obstacles une figure égale au terrain que l'on veut étudier. Une des difficultés est de trouver un tel terrain, une autre est de travailler avec des longueurs très grandes ; aussi il convient de réduire les figures pour en faire des figures semblables plus petites.

Pour réduire (ou agrandir) une figure, par exemple le polygone $ABCDEF$ (fig. 117), on prend une longueur ab, puis on reporte en b comme sommet et ab comme un de ses côtés un angle égal à l'angle $\hat{B}$; sur l'autre demi-droite de l'angle on prend une longueur bc faisant avec BC un rapport égal à $\frac{ab}{AB}$ et ainsi de suite... Il faut s'assurer bien sûr que la ligne fa s'obtient de cette manière, c'est à dire que les conditions demandées par la ressemblance de deux figures sont dépendantes, ce qui ne fait aucun doute pour un dessinateur même débutant. Les premiers examens que nous allons faire pour découvrir ces propriétés seront relatifs aux triangles, pour plus de précisions :

264. *Pour des triangles, nous verrons qu'il y a équivalence entre angles égaux et côtés proportionnels.* Mais cette propriété n'est pas toujours vraie pour des polygones quelconques ; aussi, on dit que deux *polygones* ayant le même nombre de côtés sont *semblables* lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels. On appelle *côtés homologues* pour les polygones semblables les côtés qui sont adjacents, de part et d'autre, à des angles égaux définis par des sommets correspondants. Pour les triangles semblables, les *côtés homologues* sont les côtés opposés aux angles égaux.

En fait on appelle "homologues" les parties se correspondant dans deux polygones semblables, par exemple les sommets des angles égaux pris dans le même ordre sont des points homologues, etc...

265. Le rapport de proportionnalité liant les côtés homologues est appelé *rapport de similitude*; le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de similitude. Cela résulte du résultat d'arithmétique bien connu suivant :
si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

266. *Note* : Dans un polygone quelconque on peut modifier la proportion des côtés sans faire varier les angles et selon la nature du polygone considéré on peut faire varier les angles sans changer la mesure des côtés (cf. Fig. 117) :

Le côté DE est parallèle à $D'E'$ et le quadrilatère $BAFA'$ est un parallélogramme.

Pour un polygone quelconque la proportionnalité des côtés n'est pas une conséquence de l'égalité des angles et vice-versa.

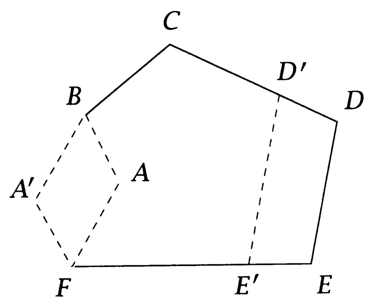


Fig. 117.

267. Théorème. — *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les deux autres côtés un triangle semblable au premier.*

Soit $B'C'$ une droite parallèle au côté BC d'un triangle ABC. Les angles du triangle $AB'C'$ sont égaux aux angles du triangle ABC (**93**) et les rapports $\frac{AB'}{AB}$ et $\frac{AC'}{AC}$ sont égaux (**253**).

La parallèle au côté AB issue du point C' coupe BC au point E et $\frac{BE}{BC}$ égale $\frac{AC'}{AC}$ (**256**). Comme le quadrilatère convexe $BB'C'E$ est un parallélogramme (**103**) les segments BE et $B'C'$ sont égaux (**106**), il en est de même des rapports $\frac{B'C'}{BC}$ et $\frac{AC'}{AC}$.

Les angles du triangle $AB'C'$ et ABC sont égaux et les côtés homologues sont proportionnels : les triangles sont semblables.

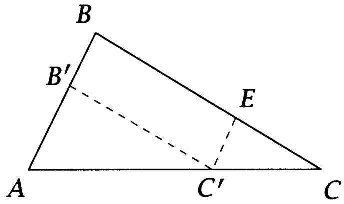


Fig. 118.

268. Théorème (1º cas de similitude). — *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun.*

En fait l'égalité de deux angles suffit (**95**).

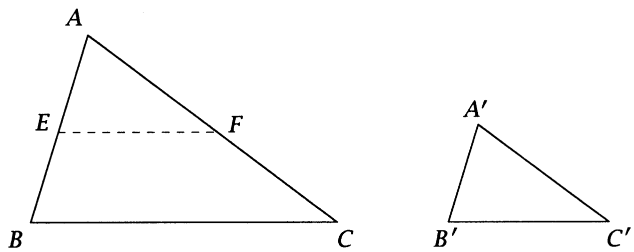


Fig. 119.

Considérons ABC et $A'B'C'$ deux triangles ayant leurs angles égaux chacun à chacun. Sur les côtés AB et AC portons les points E et F tels que AE égale $A'B'$ et AF égale $A'C'$.

Les triangles AEF et $A'B'C'$ sont égaux (**49**) et l'angle $\widehat{AEF}$ est égal à l'angle $\widehat{ABC}$. La droite EF est parallèle au côté BC (**89**) : les triangles AEF et ABC sont semblables (**267**).

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

269. Théorème (2º cas de similitude). — *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels chacun à chacun.*

Considérons deux triangles ABC et $A'B'C'$ ayant leurs angles $\hat{A}$ et $\widehat{A'}$ égaux et tels que $\frac{AB}{A'B'}$ égale $\frac{AC}{A'C'}$. Comme précédemment (cf. Fig. 119) construisons le triangle AEF égal au triangle $A'B'C'$. Ainsi $\frac{AE}{AB}$ égale $\frac{AF}{AC}$ et EF est parallèle à BC (**256**). Les triangles AEF et ABC sont semblables (**267**) et il en est de même des triangles ABC et $A'B'C'$.

270. Théorème (3º cas de similitude). — *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs trois côtés proportionnels chacun à chacun.*

Considérons ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ (Fig. 119). Sur le côté AB portons le point E tel que AE égale $A'B'$. La parallèle au côté BC passant par E coupe AC en F. Les triangles AEF et ABC sont semblables (**267**) et $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$. D'où $\frac{A'C'}{AC}$ égale $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{B'C'}{BC}$ égale $\frac{EF}{BC}$. Par suite les segments AF et $A'C'$, respectivement EF et $B'C'$, sont égaux et le triangle AEF égale le triangle $A'B'C'$ (**51**).

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

271. Théorème. — *Deux triangles rectangles ayant l'hypoténuse et un côté de l'angle droit proportionnels sont semblables.*

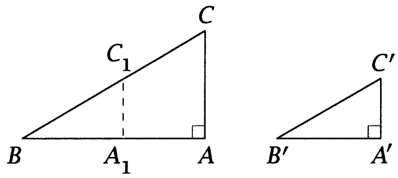


Fig. 120.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles rectangles en A et A' tels que $\frac{A'B'}{AB}$ égale $\frac{B'C'}{BC}$.

Sur BC portons le point C_1 tel que BC_1 égale $B'C'$. La parallèle à la droite AC issue du point C_1 coupe AB en un point A_1.

Les rapports $\frac{A_1B}{AB}$ et $\frac{C_1B}{CB}$ sont égaux (**256**) d'où A_1B égale $A'B'$. Le triangle A_1BC est rectangle en A (**92**) : il est égal au triangle $A'B'C'$ (**82**). Les triangles A_1BC_1 et ABC étant semblables (**267**), le triangle $A'B'C'$ est semblable au triangle ABC.

272. *Note* : Le rapport $\frac{AB}{BC}$ est indépendant du point C choisi (Fig. 121) et ne dépend que de l'angle $\widehat{ABC}$. On le compte positivement si A et C sont sur les côtés de l'angle, c'est à dire si l'angle est aigu, et négativement si un des deux points est sur le prolongement d'un côté de l'angle, c'est à dire si l'angle est obtus moindre qu'un angle plat. On appelle ce rapport *rapport de projection orthogonale* ou *cosinus* de l'angle. Les deux autres angles d'un triangle rectangle étant aigus (**81**) le cosinus d'un angle est toujours compris entre $+1$ et -1 (**66**).

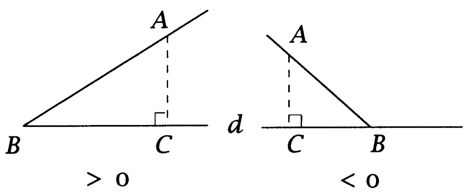


Fig. 121.

La *projection orthogonale* d'un point A sur une droite d est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite d ; la projection orthogonale d'un segment est un segment et le rapport de projection orthogonale est égal, au signe près, au rapport de la mesure d'un segment projeté et de la mesure du segment initial.

273. Théorème. — *Deux polygones semblables peuvent toujours se décomposer en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.*

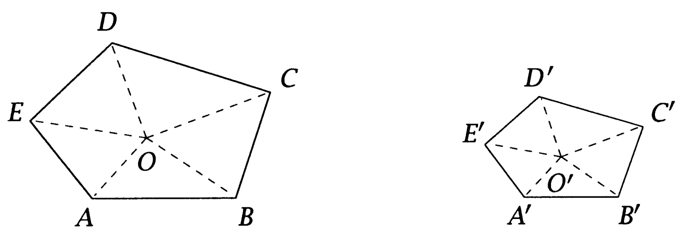


Fig. 122.

Considérons par exemple deux polygones semblables $ABCDE$ et $A'B'C'D'E'$, et O un point intérieur au polygone $ABCDE$. Décomposons ce polygone en triangles en joignant le point O à tous ses sommets. Le problème se ramène à trouver le point O' homologue du point O.

Traçons sur le côté $A'B'$, avec A' comme sommet un angle égal à l'angle $\widehat{BAO}$ et avec B' comme sommet un angle égal à l'angle $\widehat{ABO}$, les côtés de ces angles étant intérieurs au polygone $A'B'C'D'E'$. Ces côtés se coupent en un point O' (**94**).

Le triangle $O'A'B'$ est semblable au triangle OAB (**268**) d'où $\frac{A'B'}{AB}$ égale $\frac{O'B'}{OB}$. De plus $\frac{B'C'}{BC}$ égale $\frac{A'B'}{AB}$ et les angles $\widehat{O'B'C'}$ et $\widehat{OBC}$ sont égaux : les triangles $O'B'C'$ et OBC sont semblables (**269**). Ainsi de suite, si on joint le point O' à tous les sommets du polygone $A'B'C'D'E'$, il est aisé de voir que tous les triangles partiels sont semblables aux triangles correspondants du découpage du polygone $ABCDE$.

EXERCICES.

187. On considère $ABCD\ldots$ un polygone à n sommets et P un point du plan non situé sur ses côtés. On joint les lignes PA, PB, PC, etc... Par un point A' de la droite PA on mène la parallèle au côté AB, elle coupe la droite PB en un point B' ; par le point B' on mène la parallèle au côté au côté BC, elle coupe la droite PC en un point C' et ainsi de suite. Montrer que par ce processus on détermine un polygone à n sommets (on repasse par le point A') semblable au polygone donné.

188. Par le point I d'intersection des diagonales d'un trapèze $ABCD$ on mène une droite parallèle aux bases AB et CD. Cette droite coupe les côtés AD et BC aux points M et N respectivement.

Montrer que le point I est le milieu du segment MN.

189. Soient $ABCD$ un trapèze de bases AB et CD, et E un point de la droite AD tel que $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = k$. La parallèle aux bases passant par E coupe BD en un point I, AC en un point J et BC en un point F. Vérifier que $\overline{EI} = \overline{JF}$ et que $\overline{EF} = \frac{k\overline{DC}+\overline{AB}}{1+k}$.

190. On considère un point variable M situé sur une circonférence $\mathcal{C}$ de diamètre fixe AB de centre O et I le milieu de MA et J le milieu de MB. Quel est le lieu géométrique du milieu K de IJ lorsque le point M décrit la circonférence $\mathcal{C}$?

191. Une droite passant par le sommet A d'un triangle équilatéral ABC coupe le côté BC en Q et le cercle circonscrit au triangle en P. Démontrer la relation $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$.

192. On considère deux circonférences tangentes intérieurement en un point C et une corde AB de la grande circonférence tangente à la petite circonférence en un point E. Démontrer que la droite CE est bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

§3. DES RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE.

274. Pour simplifier les énoncés on appelle produit de deux lignes le produit des nombres qui expriment les mesures de ces lignes par rapport à la même unité.

Considérons A, B, C trois longueurs, ou trois nombres qui les mesurent, telles que $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$, c'est à dire $B^2 = A \cdot C$; par définition la longueur B est *moyenne proportionnelle* entre les longueurs A et C.

275. Théorème. — *Dans un triangle rectangle un côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse entière et sa projection orthogonale sur l'hypoténuse.*

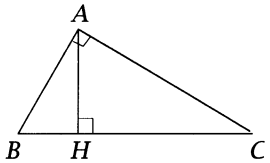


Fig. 123.

Considérons AH la hauteur d'un triangle ABC rectangle en A. Les triangles rectangles ABC et HBA ayant l'angle $\widehat{B}$ en commun sont semblables (**268**) et $\frac{BA}{BC}$ égale $\frac{BH}{BA}$.

276. Corollaire. — *Toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre passant par une de ses extrémités et sa projection orthogonale sur ce diamètre.*

277. Théorème de Pythagore. — *Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des deux autres carrés.*

Considérons ABC un triangle rectangle en A et AH la hauteur (Fig. 123) ; on a :
$\overline{BA}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH}$ et $\overline{CA}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CH}$, d'où $\overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}(\overline{BH} + \overline{HC}) = \overline{BC}^2$.

278. Théorème. — *Dans un triangle rectangle la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*

Considérons AH la hauteur d'un triangle ABC rectangle en A (Fig. 123). Les triangles rectangles BAH et ACH ayant les angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{ACH}$ égaux (**99**) sont semblables (**268**) et $\frac{AH}{CH}$ égale $\frac{BH}{AH}$, d'où $AH^2 = BH \cdot CH$.

279. Théorème-Réciproque de Pythagore. — *Soient ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue du sommet A sur BC. Le triangle ABC est rectangle en A si une des conditions suivantes est vérifiée :*

1º $\overline{BA}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$;
2º $\overline{AH}^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{HC}$;
3º $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Cas 1º ou 2º : Considérons ABC un triangle vérifiant la condition 1º ou 2º.

La droite d perpendiculaire à AB issue du point A coupe la droite BC en un point C'. Si ce n'était pas le cas, la droite d serait parallèle à BC, l'angle $\widehat{B}$ serait droit (**92**) et les points H et B seraient confondus ; la condition 1º ou 2º impliquerait que la figure ABC ne serait pas un triangle.

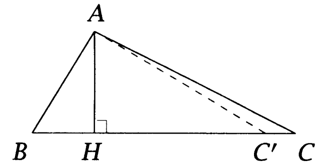


Fig. 124.

Par suite $\overline{BA}^2 = \overline{BH}\cdot\overline{BC'}$ (275) et $\overline{HA}^2 = -\overline{HB}\cdot\overline{HC'}$ (278). La condition 1º donne $\overline{BC} = \overline{BC'}$, et la condition 2º $\overline{HC} = \overline{HC'}$. Dans les deux cas les points C et C' sont confondus et le triangle ABC est rectangle en A.

Cas 3º : Les triangles AHB et AHC sont rectangles en H, d'où $AC^2 = AH^2 + HC^2$ et $AB^2 = BH^2 + AH^2$. La relation 3º donne $BC^2 = 2AH^2 + HC^2 + HB^2$.

D'autre part $\overline{BC}^2 = (\overline{BH} + \overline{HC})^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HC}^2 + 2\,\overline{BH}\cdot\overline{HC}$. On en déduit $\overline{AH}^2 = -\overline{HB}\cdot\overline{HC}$ et on est ramené au cas précédent.

280. *Remarques* :

i) Pour construire un angle droit un maçon utilise souvent un triangle dont les côtés ont des longueurs entières égales à 3, 4, 5 dans une même unité de mesure. C'est le plus petit triangle pythagoricien, c'est à dire le plus petit triangle rectangle dont les côtés ont des valeurs entières : les triangles de côtés 5, 12, 13 ou 8, 15, 17 en sont d'autres.

ii) Pour tout entier n on peut construire à la règle et au compas le nombre $\sqrt{n}$, une unité de mesure étant choisie.

Pour $n = 1$ c'est évident ; supposons que pour tout r, $1 \le r \le n$, on sache construire à la règle et au compas $\sqrt{r}$.

Pour $r = n+1$, on considère un angle droit $\widehat{xOy}$. Portons sur un côté de cet angle le point A situé à une distance du point O égale à $\sqrt{n}$ et sur l'autre côté le point B situé à une distance du point O égale à 1. L'hypoténuse AB est de mesure $\sqrt{n+1}$ (277).

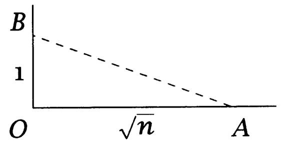


Fig. 125.

281. Théorème. — *La différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à la différence des carrés de leurs projections orthogonales sur le troisième côté.*

Considérons ABC un triangle et H la projection orthogonale de A sur le côté BC. D'après le théorème de Pythagore on a $\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$ et $\overline{AC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2$; par soustraction $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$.

282. Théorème. — *Dans tout triangle :*

1º *Le carré du côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins deux fois le produit de l'un de ses côtés par la projection orthogonale de l'autre sur lui ;*

2º *le carré du côté opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres côtés plus deux fois le produit de l'un de ses côtés par la projection orthogonale de l'autre sur lui.*

C'est à dire si ABC est un triangle et BH la hauteur, on a la relation $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{CA}\cdot\overline{AH}$.

Soit BC le côté opposé d'un angle $\hat{A}$ d'un triangle ABC et BH la hauteur.

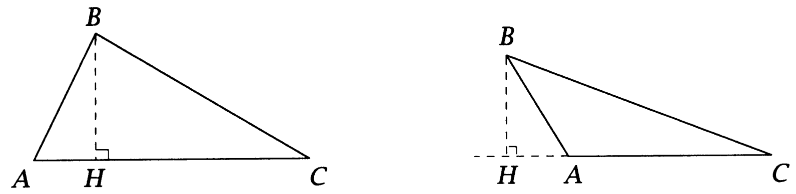


Fig. 126.

On a $BC^2 = CH^2 + AB^2 - AH^2$ (277). Or $\overline{CH}^2 = (\overline{CA} + \overline{AH})^2 = \overline{CA}^2 + 2\,\overline{CA}\cdot\overline{AH} + \overline{AH}^2$, par suite $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,\overline{CA}\cdot\overline{AH}$.

◇ Si l'angle $\widehat{A}$ est aigu (Fig. 126), le point H est situé entre A et C et $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,CA \cdot AH \quad (*)$.

◇ Si l'angle $\widehat{A}$ est obtus (Fig. 126) le point H est situé du côté opposé à C par rapport au point A et $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,CA \cdot AH \quad (**)$.

Note : Ces relations fournissent la stabilité du théorème de Pythagore dans le sens suivant : Si BC^2 est "presque égal" à AB^2+AC^2, le segment AH est "petit" et l'angle $\widehat{A}$ est "presque droit", en d'autre termes si la différence entre BC^2 et AB^2+AC^2 est négligeable, l'angle $\widehat{A}$ peut être considéré comme droit.

283. Corollaire. — *Un angle d'un triangle est aigu, droit ou obtus selon que le carré du côté opposé à cet angle est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.*

284. Théorème de Stewart. — *Etant donnés un triangle ABC et D un point de la base BC on a la relation* $\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BD}$.

Soient ABC un triangle, AH la hauteur et D un point de la base BC. On applique (**282**) aux triangles ABD et ACD :

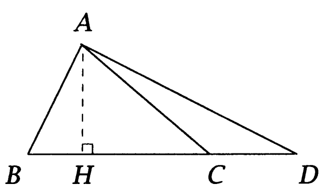


Fig. 127.

On a $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + 2\,\overline{CD} \cdot \overline{DH} \quad (*)$

et $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,\overline{BD} \cdot \overline{DH} \quad (**)$.

Multiplions l'égalité $(*)$ par $\overline{BD}$ et l'égalité $(**)$ par $\overline{DC}$ et faisons la somme ; on obtient :

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} = \overline{AD}^2 \cdot (\overline{BD} + \overline{DC}) + \overline{DC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{BD}^2 \cdot \overline{DC}$$
$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} = \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DC} \cdot \overline{BD} \cdot (\overline{DC} + \overline{BD})$$

Soit $\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BD}$.

285. Théorème. — *Le lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante est une droite perpendiculaire à la droite joignant les points fixes.*

Soient A et B les deux points fixes et M un point du lieu, c'est à dire tel que $MA^2 - MB^2$ soit égal à k.

Si H est la projection orthogonale du point M sur AB, on a $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \cdot \overline{BH}$ (**282**), c'est à dire $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \cdot \overline{BH} = k$. Par suite le point H est fixe. De plus c'est un point du lieu géométrique cherché :

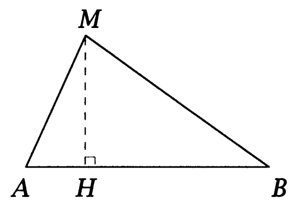


Fig. 128.

$$k = \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \cdot \overline{BH} = \overline{AB}(\overline{AB} + 2\overline{BH}) = (\overline{AH} + \overline{HB})(\overline{AH} + \overline{BH}) = \overline{HA}^2 - \overline{HB}^2 \quad (\mathbf{245})$$

Le point M est situé sur la perpendiculaire ∂ à la droite AB issue de l'unique point H de AB qui est un point du lieu géométrique.

Réciproquement soit M un point de la droite ∂. On a $MA^2 = MH^2 + HA^2$ et $MB^2 = MH^2 + HB^2$ (**277**), c'est à dire $MA^2 - MB^2 = HA^2 - HB^2 = k$ et M est un point du lieu géométrique cherché.

Le lieu géométrique est la droite ∂, droite perpendiculaire à la droite joignant les points fixes.

EXERCICES.

193. Si la médiane d'un triangle est moyenne proportionnelle entre les côtés b et c qui la comprennent, le carré construit sur la différence $b-c$ a pour diagonale le troisième côté du triangle.

194. Soient ABC un triangle quelconque et D et E les pieds des bissectrices intérieure et extérieure issues de l'angle $\widehat{A}$. Calculer les carrés des longueurs AD et AE en fonction des côtés du triangle.

195. Montrer que dans tout triangle le produit de deux côtés est égal au carré de la bissectrice de l'angle qu'ils comprennent augmenté du produit des deux segments que la bissectrice détermine sur le troisième côté.

196. Calculer le carré de la hauteur d'un triangle en fonction des côtés du triangle.

197. Montrer que le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur qui tombe sur le troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit. En déduire le rayon du cercle circonscrit en fonction des côtés du triangle.

198. Un observateur est situé au sommet du pic d'Aneto d'altitude 3 404 mètres. Si on suppose que la terre est une sphère de 12 750 kilomètres de diamètre, à quelle distance cet observateur voit-il l'horizon au mètre près ?

199. Montrer que dans un triangle la somme des carrés de deux côtés est égale à deux fois le carré de la médiane comprise entre ces côtés augmentée de la moitié du carré du troisième côté.

Calculer la somme des carrés des médianes d'un triangle en fonction des carrés des côtés du triangle.

200. Montrer que la différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale au double produit du troisième côté par la projection orthogonale, sur ce côté, de la médiane correspondante.

201. Dans un triangle ABC on partage le côté BC en quatre parties égales par les points D, E, F. Calculer les longueurs AD, AE, AF en fonction des côtés $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ du triangle.

202. Quel est le lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante ?

203. On considère un triangle ABC et on note G le point de concours de ses médianes. Montrer que pour tout point M du plan on a la relation : $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2 = \overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{MG}^2$.

204. Montrer que la somme des carrés des quatre côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales augmentée de quatre fois le carré du segment qui joint les milieux des diagonales.

205. On considère C et C' deux cercles de centres O et O' et de rayons R et R'. Quel est le lieu géométrique des centres des cercles intersectant chaque cercle C et C' en des points diamétralement opposés.

§4. PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE.

286. Théorème. — *Si d'un point on mène une sécante à un cercle le produit des distances de ce point aux intersections de la circonférence et de la sécante, ne dépend pas de la sécante considérée.*

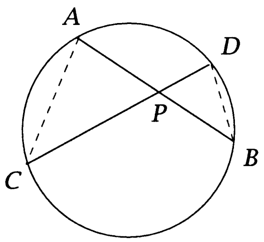


Fig. 129.

Supposons que le point P soit intérieur au cercle et soient AB et CD deux sécantes issues du point P. Considérons les triangles PAC et PDB. Les angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{DPB}$, respectivement $\widehat{ACP}$ et $\widehat{DBP}$, sont égaux (**174**). Les triangles sont semblables (**268**) et on a :
$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ c'est à dire $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD}$.

Supposons que le point P soit extérieur à la circonférence et soient AB et CD deux sécantes issues du point P. Considérons les triangles PBC et PDA : les angles $\widehat{PBC}$ et $\widehat{PDA}$ sont égaux (**174**) et ces triangles sont semblables (**268**). Par suite :
$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ c'est à dire $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PD}$.

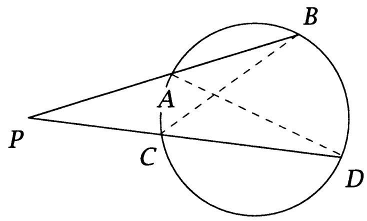


Fig. 130.

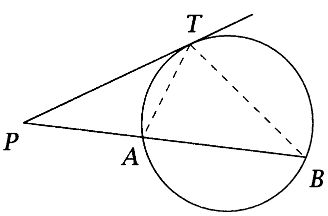


Fig. 131.

287. Si on voit une tangente PT comme position limite d'une sécante, on a $\overline{PT}^2 = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$.

Montrons ce résultat directement : soient PT une tangente et AB une sécante passant par le point P. Les triangles PAT et PTB ont l'angle $\hat{P}$ en commun et les angles $\widehat{ATP}$ et $\widehat{ABT}$ égaux (**174**)(**176**) : ils sont semblables (**268**) et $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$ d'où $\overline{PT}^2 = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$.

288. Réciproque. — *Soient quatre points A, B, C, D non tous alignés et P le point d'intersection des droites AB et CD. Si on a l'égalité $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD}$, les quatre points A, B, C, D sont cocycliques.*

Considérons C la circonférence circonscrite au triangle ABC. La droite PC recoupe la circonférence C en un point D' tel que $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD'}$. Par suite $\overline{PD}$ égale $\overline{PD'}$ et les points D et D' sont confondus.

289. *De même si on a l'égalité $\overline{PC}^2 = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$ la droite PC est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC au point C :*

La droite recoupe la circonférence en un point C' tel que $\overline{PC}\cdot\overline{PC'} = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$. D'où $\overline{PC}$ égale $\overline{PC'}$ et les points C et C' sont confondus.

Pour un point donné P et une sécante PAB d'un cercle, le produit $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ ne dépend pas de la sécante considérée : il dépend seulement du point P considéré pour un cercle donné. Par suite :

290. Définition. — *On appelle puissance d'un point par rapport à un cercle le produit des distances de ce point aux intersections d'une sécante quelconque issue de ce point avec ce cercle, compté négativement si le point est intérieur au cercle et positivement sinon.*

291. Proposition. — *La puissance d'un point par rapport à un cercle est égale à la différence du carré de la distance du point au centre du cercle avec le carré du rayon. Si le point est extérieur, elle est aussi égale au carré de la tangente menée de ce point au cercle (***287***).*

Soient C un cercle de centre O, de rayon R, et P un point du plan. Notons AB un diamètre passant par P. On a :

$$\begin{aligned} \overline{PA}\cdot\overline{PB} &= (\overline{PO}+\overline{OA})(\overline{PO}+\overline{OB}) \\ &= \overline{PO}^2 + \overline{OA}\cdot\overline{OB} + \overline{PO}(\overline{OA}+\overline{OB}) \\ &= \overline{PO}^2 - R^2. \end{aligned}$$

292. Théorème-Définition. — *Le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport à deux cercles donnés est une droite perpendiculaire à la droite des centres appelée axe radical.*

Soient C et C' deux cercles de centre O et O' et de rayon R et R' respectivement.

Supposons que R soit supérieur ou égal à R' ; pour un point M du lieu géométrique on a : $\overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2$, c'est à dire $\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2$.

Le lieu géométrique est une perpendiculaire à la droite des centres (**285**).

293. *Note* : L'axe radical de deux cercles sécants est la droite passant par les points d'intersection et celui de deux cercles tangents est leur tangente commune.

En effet, si un point est situé sur une circonférence sa puissance par rapport à ce cercle est nulle.

Si les cercles ne sont pas sécants, prendre le point M de l'axe radical situé sur la ligne des centres et élever la perpendiculaire à cette ligne.

294. Théorème. — *Les axes radicaux de trois cercles considérés deux à deux se coupent en un même point ou sont parallèles.*

Soient C, C', C'' trois cercles de centres respectifs O, O', O''.

1º) *Les trois centres sont alignés* : les axes radicaux sont parallèles car perpendiculaires à la ligne des centres (**292**).

2º) *Les trois centres ne sont pas alignés* : soient $\triangle$, $\triangle'$, $\triangle''$ les axes radicaux de ces cercles pris deux à deux.
Les droites $\triangle$ et $\triangle'$ sont sécantes en un point I car elles sont perpendiculaires aux droites OO' et OO''. Le point I est d'égale puissance par rapport à ces cercles, il est donc situé aussi sur $\triangle''$.

295. *Notes* : Ce point de concours est appelé *centre radical* des trois cercles.

Si les centres des trois cercles sont alignés, on dit que le centre radical est à l'infini ou est indéterminé selon que les axes radicaux sont parallèles ou confondues (**292**).

EXERCICES.

206. Par un point P on mène deux tangentes PR et PS à deux circonférences concentriques de centre O, le point S étant situé sur la circonférence extérieure. Notons T le point où la droite PS coupe la circonférence extérieure. Montrer que l'on a $PS^2 - PR^2 = ST^2 = RU^2$, où RU est la tangente à la circonférence intérieure.

207. Soient une circonférence de centre O de rayon R et A un point intérieur à cette circonférence. On considère deux points variables B et C sur la circonférence C tels que l'angle $\widehat{BAC}$ reste constant et égal à un angle droit. Notons H la projection orthogonale du point A sur BC et M le milieu de BC.

Démontrer les égalités $HA^2 + HO^2 = R^2$ et $MA^2 + MO^2 = R^2$. En déduire les lieux géométriques des points M et H lorsque les points B et C varient sur la circonférence.

208. Montrer que les cordes communes à trois cercles sécants concourent en un même point.

209. Quel est le lieu géométrique des centres des circonférences qui sont coupées en deux points diamétralement opposés par deux circonférences données.

210. *Théorème de* Pascal. Dans tout hexagone (convexe ou non) inscrit dans une circonférence, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite (On pourra utiliser le théorème de Ménélaüs).

211. Soient un triangle ABC, O le centre de son cercle circonscrit et I celui de son cercle inscrit. On note d la distance entre les points O et I, R le rayon du cercle circonscrit et r celui du cercle inscrit. Montrer que $d^2 = R^2 - 2rR$ (Indication : La droite AI recoupe le cercle circonscrit en un point T, tracer le diamètre ST et montrer que le triangle BIT est isocèle).

En déduire que le rayon du cercle circonscrit à un triangle est au moins égal au double du rayon du cercle inscrit.

§5. DES HOMOTHÉTIES.

Le regard différent apporté par l'étude des transformations du plan amenant une figure sur une autre qui lui est égale, et les apports qu'il induit par rapport aux cas d'égalité des triangles, nous incite à faire la même démarche pour les cas de similitude, c'est à dire à étudier les transformations du plan amenant une figure sur une figure qui lui est semblable ; cette étude fera l'objet de ce paragraphe et du suivant.

Pour simplifier l'introduction de ces transformations, on utilise une présentation où le langage vectoriel est sous-jacent. Pour cela on renvoie le lecteur aux notions de vecteur ou de segment de droite orienté (**139**)[15], et on fait les remarques et conventions suivantes :

296. Considérons quatre points A, B, C, D situés sur une même droite orientée ; dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens, ou de sens contraire, c'est dire que les quantités $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont de même signe, ou de signes opposés. Ainsi deux vecteurs égaux, de support une même droite orientée, sont de même sens et ont la même mesure algébrique.

Afin de pouvoir comparer les sens d'orientation sur deux droites orientées parallèles, en accord avec la notion vectorielle, il convient de dire :

297. Les droites parallèles d et d' sont orientées de *même sens* ou de *sens contraire* selon que, pour deux vecteurs de même sens $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ de support d et d' respectivement, les quantités $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ sont de même signe ou de signes opposés. Il est clair que cette définition est indépendante des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ choisis sur les droites d et d' (**296**).

On peut noter aussi que la symétrie centrale inverse le sens d'orientation des droites.

298. Définition. — *On appelle homothétie de centre O et de rapport k, $k \neq 0$, la transformation ponctuelle du plan qui à tout point M associe le point M' tel que les points O, M, M' soient alignés et $\overline{OM'} = k\,\overline{OM}$; on la représente par le symbole $\mathcal{H}(O,k)$.*

Les points M et M' seront dits *homologues* ou *homothétiques.*

Une *homothétie* $\mathcal{H}(O,k)$ est dite *positive* ou *directe* (respectivement *négative* ou *inverse*) si le rapport k est positif (respectivement négatif). Dans une homothétie directe, les points homologues sont situés d'un même côté par rapport au centre d'homothétie ; dans une homothétie inverse, ils sont situés de part et d'autre et :

◇ Si $k = 1$, l'homothétie $\mathcal{H}(O,1)$ est l'identité du plan ;

◇ Si $k = -1$, l'homothétie $\mathcal{H}(O,-1)$ est la symétrie centrale de centre O.

Plus généralement, considérons les points M' et M'' transformés d'un même point par deux homothéties de même centre O et de rapport k et $-k$ respectivement. Lorsque le point M décrit une figure $\mathcal{F}$ les points M' et M'' décrivent deux figures $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ symétriques par rapport au point O. Une symétrie centrale étant un déplacement (**207**), ces figures sont directement égales[16].

[15] On ne fera pas usage de la structure d'espace vectoriel, car cette notion, bien que d'une grande puissance pour le Géomètre confirmé, n'est pas une notion élémentaire et rend plus difficile une première approche de la Géométrie.

[16] Il est à remarquer que dans l'espace une symétrie centrale est un antidéplacement, c'est à dire deux volumes se déduisant l'un de l'autre par une symétrie centrale sont isométriques mais non égaux dans le sens qu'ils n'ont pas en général la même empreinte : à cet effet on peut voir une paire de ciseaux ou un tire-bouchon pour gaucher et un autre pour droitier.

299. *Remarque* : Dans une homothétie $\mathcal{H}(O,k)$ de rapport k distinct de 1, le point O est le seul point double de la transformation :

Soit M' l'image du point M par une telle homothétie ; alors $\overline{MM'} = \overline{MO} + \overline{OM'}$ **(245)** et $\overline{MM'} = (k-1)\,\overline{OM}$: le point M est confondu avec le point M' si et seulement si le point M est le point O.

300. Théorème. — *Toute homothétie admet une transformation inverse qui est l'homothétie de même centre et de rapport inverse.*

Soit M' l'image d'un point M par une homothétie $\mathcal{H}(O,k)$. Les points O, M, M' sont alignés et $\overline{OM'} = k\,\overline{OM}$ **(298)** ; d'où $\overline{OM} = \frac{1}{k}\overline{OM'}$ et le point M se déduit du point M' par l'homothétie $\mathcal{H}(O,\frac{1}{k})$.

301. *Note* : Une homothétie est une transformation bijective, c'est à dire une *application une à une*, du plan.

302. Théorème. — *Une homothétie transforme une droite quelconque en une droite de même direction (parallèle).*

Considérons une droite d et $\mathcal{H}(O,k)$ une homothétie de centre O et de rapport k.

1º) La droite d passe par le point O :
La droite d est globalement invariante par $\mathcal{H}(O,k)$ **(298)(248)**.

2º) La droite ne passe pas par le point O :
Considérons M un point de la droite d et M' son image par l'homothétie $\mathcal{H}(O,k)$. Par M' menons la droite d' parallèle à la droite d.

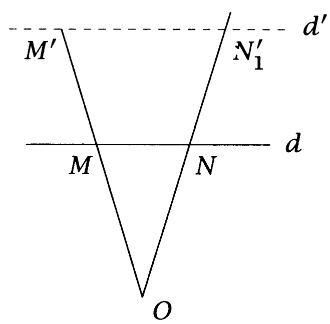


Fig. 132.

Pour tout point N de la droite d, la droite ON coupe la droite d' en un point N'_1 tel que $\frac{\overline{ON'_1}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k$ **(253)** ; par suite $\overline{ON'_1} = k\,\overline{ON}$ et N'_1 est le point transformé du point N par l'homothétie $\mathcal{H}(O,k)$. L'image de la droite d est contenue dans la droite d'.

Réciproquement soit N'_1 un point de la droite d' et N le point intersection des droites ON'_1 et d. On a la relation $\frac{\overline{ON'_1}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k$ **(253)** et $\overline{ON'_1} = k\,\overline{ON}$.

Tout point de la droite d' est image par l'homothétie $\mathcal{H}(O,k)$ d'un point de la droite d.

303. Corollaire. — *Les segments joignant deux points A et B du plan et leurs homologues A' et B' par une homothétie sont parallèles et leurs mesures sont dans le même rapport que le rapport d'homothétie (les droites étant orientées dans le même sens).*

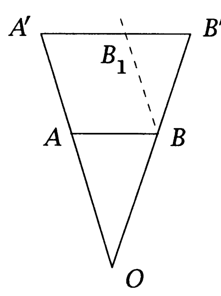


Fig. 133.

Si le centre d'homothétie O est situé sur la droite AB le corollaire est évident ; il en est de même si le rapport d'homothétie k est égal à 1.

Soient A et B deux points du plan tels que le centre d'homothétie ne soit pas situé sur la droite AB. Notons A' et B' leurs images respectives par l'homothétie considérée et B_1 le point intersection de la droite $A'B'$ avec la parallèle à AA' passant par le point B.

Le quadrilatère convexe $AA'B_1B$ est un parallélogramme **(302)(103)** et les segments $A'B_1$ et AB sont égaux. Les droites étant orientées de même sens on a $\overline{A'B_1} = \overline{AB}$. D'autre part $k = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B_1}}$ **(253)** d'où $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$ et $\overline{A'B'} = k\,\overline{AB}$.

304. *Remarque* : La figure homothétique d'un segment est un segment, d'un triangle est un triangle, d'un polygone est un polygone, de deux droites parallèles est deux droites parallèles, et le théorème (**273**) devient une tautologie.

305. Théorème. — *Réciproquement si pour deux systèmes (deux figures) S et S' de points du plan il existe deux points O et O' tels que le segment joignant le point O à un point quelconque M de S, et le segment joignant le point O' au point M' correspondant, soient constamment parallèles (toujours de même sens, ou toujours de sens contraire) et dans un rapport donné k, $k \neq 1$, les deux systèmes sont homothétiques.*

Si $k = 1$ et les segments sont toujours de même sens les deux systèmes se déduisent l'un de l'autre par une translation, si les segments sont toujours de sens contraire les deux systèmes sont homothétiques.

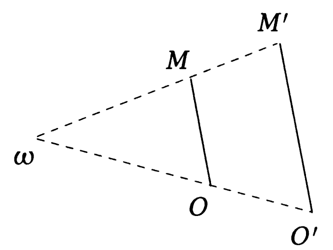


Fig. 134.

Considérons M et M' deux points correspondants des systèmes S et S' respectivement. Les droites MM' et OO' se coupent en un point ω sinon le quadrilatère convexe $OO'M'M$ serait un parallélogramme (**103**) et le rapport k serait égal à 1 (**106**)(**303**).

Comme les segments sont toujours de même sens ou toujours de sens contraire et que l'on a l'égalité $\frac{\omega O'}{\omega O} = \frac{O'M'}{OM} = k$ (**267**) le rapport $\frac{\overline{\omega O'}}{\overline{\omega O}}$ est constant et les points O et O' sont fixes : le point ω ne dépend pas des points correspondants M et M' choisis (**248**).

Ainsi pour tout point M du système S et tout point correspondant M' du système S' les points ω, M, M' sont alignés et le rapport $\frac{\overline{\omega M'}}{\overline{\omega M}}$ est constant et égal à k ou $-k$.

Le système S' se déduit du système S par l'homothétie $\mathcal{H}(\omega, k)$ ou $\mathcal{H}(\omega, -k)$.

Si le rapport k est égal à 1 et les segments sont toujours de sens contraire, on détermine de la même manière un point fixe ω et on voit que le système S' se déduit du système S par l'homothétie $\mathcal{H}(\omega, -1)$, qui est la symétrie centrale de centre ω.

Si le rapport k est égal à 1 et les segments sont toujours de même sens pour tout point M du système S et son point correspondant M' du système S' le quadrilatère convexe $OO'M'M$ est un parallélogramme (**108**) et les vecteurs $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux. Le système S' se déduit du système S par la translation de vecteur directeur $\overrightarrow{OO'}$ (**141**).

306. *Remarque* : Si, dans un plan, on a orienté toutes les droites parallèles dans le même sens, le théorème précédent s'énonce ainsi :

Si une transformation ponctuelle transforme un point fixe O en un point fixe O' et tout point M en un point M' tel que les droites AM et $A'M'$ soient parallèles et $\overline{A'M'} = k\,\overline{AM}$, où k est un nombre constant, alors :

i) Si $k \neq 1$ cette transformation est une homothétie de rapport k ;

ii) Si $k = 1$ cette transformation est une translation de vecteur directeur $\overrightarrow{AA'}$.

307. *Note* : Si on veut définir une homothétie et donner les propositions qui en découlent dans un langage vectoriel il est nécessaire de définir le produit d'un vecteur par un nombre algébrique :

On appelle *produit* du vecteur libre $\vec{V}$ par le nombre k le vecteur libre $\vec{V'}$ de support parallèle à celui du vecteur $\vec{V}$, de longueur égale au produit de la longueur du vecteur $\vec{V}$ par la valeur absolue du nombre k, et de même sens ou de sens contraire selon que le nombre k est positif ou négatif. Le vecteur $\vec{V'}$ est représenté par le symbole $k\vec{V}$.

La transformation "homothétie" de centre O et de rapport k est alors définie comme la transformation associant à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

308. Théorème. — *La figure homothétique d'une circonférence est une circonférence et les centres de ces circonférences sont des points homologues.*

Considérons C une circonférence de centre O et O' le point homologue de O par une homothétie $\mathcal{H}(\omega, k)$. Un point M décrivant la circonférence C reste à une distance constante du point O, son homothétique reste à une distance constante du point O'(**303**) et décrit la circonférence C' de centre O' et de rayon $O'M' = \mid k \mid OM$ (Le symbole $\mid \ \mid$ désignant la "valeur absolue").

Réciproquement tout point M' de la circonférence C' est le transformé d'un point de la circonférence C par l'homothétie $\mathcal{H}(\omega, k)$ (Considérer le point M déduit du point M' par l'homothétie $\mathcal{H}(\omega, \frac{1}{k})$).

309. Théorème. — *Deux cercles sont toujours homologues dans une homothétie négative ; s'ils sont inégaux ils sont aussi homologues dans une homothétie positive et s'ils sont égaux ils se déduisent l'un de l'autre par une translation.*

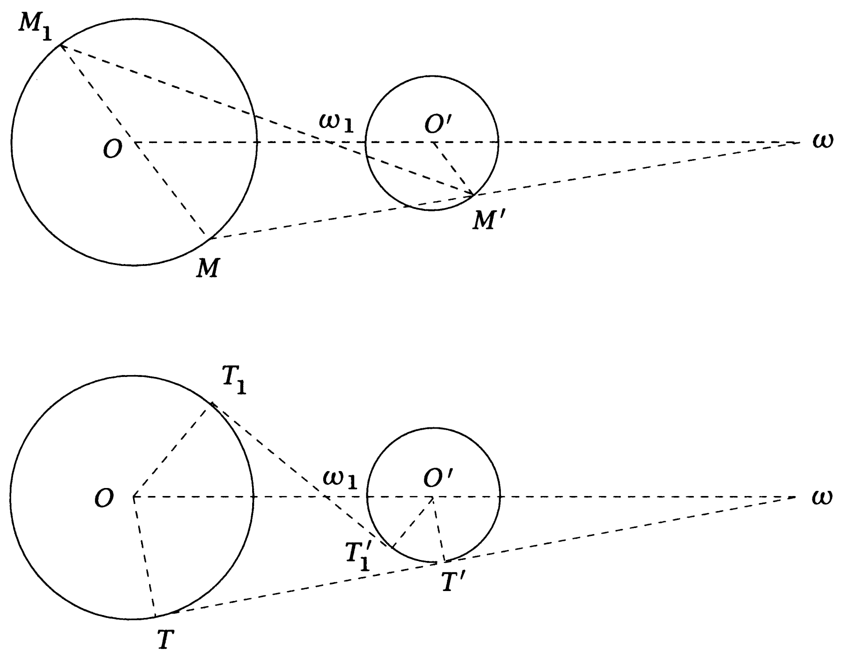


Fig. 135.

Considérons C et C' deux circonférences de centre O et O' respectivement. Les extrémités M_1 et M' de deux rayons homologues parallèles et de sens contraire (resp. M et M' de deux rayons homologues parallèles et même sens) satisfont aux conditions (**305**) et décrivent deux figures homothétiques inverses (resp. directes si les rayons ne sont pas égaux) ; dans les deux cas le rapport d'homothétie est égal, au signe près, au rapport des rayons.

Si les deux cercles sont égaux les circonférences se déduisent l'une de l'autre par une translation (**305**).

310. *Notes* :

1º) Dans un certain sens, on peut voir une translation comme une homothétie dont le centre serait rejeté à l'infini.

2º) Les points de contact d'une tangente commune intérieure (resp. extérieure) lorsqu'il en existe, sont homothétiques inverses (resp. directes) puisque les rayons qui y aboutissent sont parallèles de sens contraire (resp. de même sens). Par suite une tangente commune intérieure passe par le centre d'homothétie inverse et une tangente commune extérieure passe par le centre d'homothétie direct.

Remarque : Deux circonférences ne peuvent être homothétiques de plus de deux manières différentes.

311. Théorème. — *Une homothétie conserve les angles.*

1º) Soient d et d_1 deux droites. L'image de ces droites par une homothétie $\mathcal{H}$ est deux droites d' et d'_1 respectivement parallèles aux droites d et d_1 (**302**) ; par suite les angles (d, d_1) et (d', d'_1) sont égaux à $k180°$ (ou $k\pi$) près (**226**).

2º) Soit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ un angle de vecteurs et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ son image par une homothétie $\mathcal{H}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont transformés respectivement en des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ de supports parallèles aux supports des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (**302**) et sont tous deux de même sens ou tous deux de sens contraire : ces angles sont égaux à $k360°$ (ou $2k\pi$) près (**219**).

312. *Le pantographe* : C'est un mobile articulé permettant de réaliser des homothéties, c'est à dire de réduire ou d'agrandir des figures ; son principe est basé sur le théorème suivant :

313. Théorème. — *Soient PRMQ un parallélogramme, O et N deux points pris sur les côtés adjacents PQ et PR respectivement et alignés avec le sommet M opposé à P. Si le parallélogramme PRMQ se déforme de manière que les longueurs de ses côtés restent constantes (on a un parallélogramme articulé), ainsi que les longueurs PO, PN, et si l'un des trois points O, M, N, reste fixe, les deux autres points décrivent deux figures homothétiques l'une de l'autre dont le centre d'homothétie est le point fixe.*

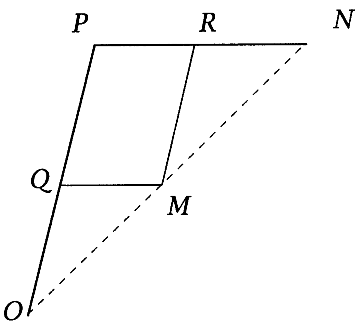


Fig. 136.

Remarquons que si le parallélogramme $PQMR$ est articulé en ses sommets, il restera un parallélogramme dans une autre position (**106**) ; de plus les points O, M, N resteront alignés :

En effet dans la position primitive ils sont alignés et on a $\frac{RM}{PO} = \frac{NR}{NP}$; dans une autre position que la position primitive, les longueurs restant constantes, on aura la même égalité. Comme les droites PQ et RM restent parallèles on aura $\frac{RM}{PO'} = \frac{NR}{NP}$, où O' est le point d'intersection des droites PQ et MN (**267**). En regardant les sens d'orientation pris sur ces droites on voit que les points O et O' sont confondus.

Pour achever la démonstration, il suffit de constater que les rapports $\frac{MO}{MN}$, ou $\frac{OM}{ON}$, ou $\frac{NM}{NO}$ sont constants comme égaux respectivement à $\frac{RP}{RN}$, ou à $\frac{PR}{PN}$, ou à $\frac{NR}{NP}$ (**267**) ou (**253**).

314. *Remarque* : Si le point R est situé au milieu du segment PN et si le point M est fixe, ce mobile articulé réalise la symétrie centrale de centre M ; plus généralement, si le point M est fixe, on réalise des homothéties négatives ; si le point O ou le point N est fixe, on réalise des homothéties positives.

Si on fait abstraction de "l'ingérence" de la translation on a :

315. Théorème. — *Deux figures homothétiques à une même troisième sont homothétiques entre elles et les trois centres d'homothéties sont alignés*[17].

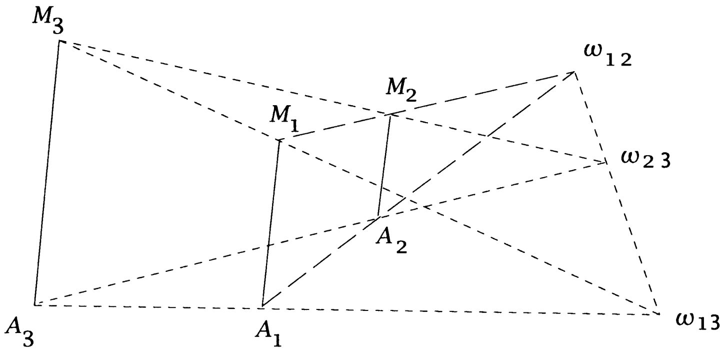


Fig. 137.

Considérons $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux homothéties de centre ω_{12} et ω_{13} et de rapports k et k' respectivement ; soient $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, trois figures telles que $\mathcal{F}_2$ soit l'image de $\mathcal{F}_1$ par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}_3$ soit l'image de $\mathcal{F}_1$ par $\mathcal{H}'$.

Prenons A_1 un point fixe de $\mathcal{F}_1$ et notons A_2 son homothétique dans la figure $\mathcal{F}_2$ et A_3 son homothétique dans la figure $\mathcal{F}_3$. De même pour un point M_1 de $\mathcal{F}_1$ on note M_2 et M_3 ses homothétiques dans les figures $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$ respectivement.

Les segments A_2M_2 et A_3M_3 sont parallèles comme parallèles tous deux à A_1M_1 et toujours de même sens, ou toujours de sens contraire, et dans un rapport constant : $\frac{A_3M_3}{A_2M_2} = \frac{A_3M_3}{A_1M_1} \times \frac{A_1M_1}{A_2M_2} = \frac{k'}{k}$.

Les deux figures $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$ sont homothétiques sauf dans le cas où $\frac{k'}{k} = 1$ et les segments homologues sont toujours de même sens ou toujours de sens contraire (**305**) ; dans le cas où $\frac{k'}{k} = 1$ les figures $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$ se déduisent l'une de l'autre par une translation.

Désignons par ω_{23} le centre de l'homothétie transformant la figure $\mathcal{F}_2$ en la figure $\mathcal{F}_3$. On peut considérer le centre d'homothétie ω_{23} comme faisant partie de la figure $\mathcal{F}_2$, et dans cette homothétie il est son propre homologue dans la figure $\mathcal{F}_3$.

D'autre part dans la figure $\mathcal{F}_1$ il a pour homologue un certain point s. La droite $s\omega_{23}$ joint les points homologues de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}_3$; elle passe par le point ω_{13} et pour la même raison (elle joint les points homologues de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}_2$) elle passe par ω_{12}.

Les trois centres d'homothéties sont alignés.

316. *Note* : Lorsque trois figures sont homothétiques deux à deux, il y a une ou trois homothéties directes.

Trois circonférences inégales deux à deux peuvent être regardées comme homothétiques deux à deux et cela de quatre manières : on choisit arbitrairement les deux premières homothéties (**309**), la troisième se déduisant des deux premières (**315**). Ainsi les trois centres d'homothétie directe sont alignés ainsi que chaque centre d'homothétie directe avec les deux centres d'homothétie inverse qui ne lui sont pas conjugués. On définit par ce biais quatre droites appelées *axes de similitude* : un est direct, les trois autres sont inverses.

(17) En d'autre termes le produit de deux homothéties est une homothétie, ou une translation suivant que le produit des deux rapports d'homothétie est différent ou égal à 1.

317. Définition. — *On appelle quadrilatère complet la figure formée par un quadrilatère ordinaire où on a prolongé les côtés opposés jusqu'à leur intersection.*

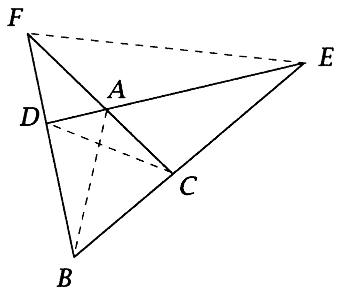
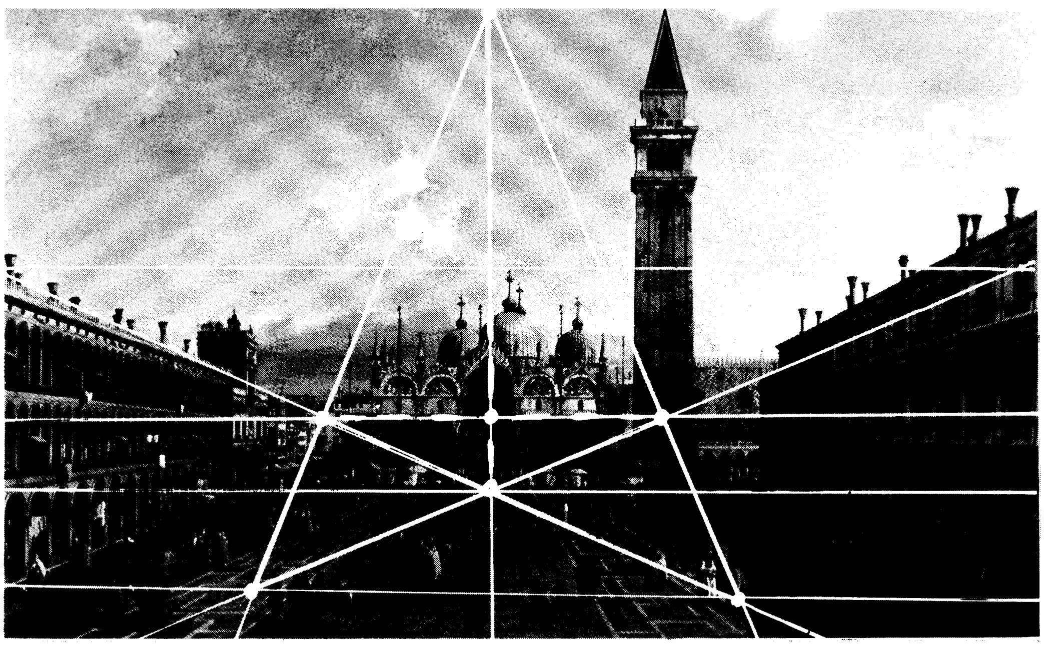


Fig. 138.

Un quadrilatère complet a six sommets A, B, C, D, E, F, opposés deux à deux et trois diagonales qui sont les segments AB, CD, EF, joignant deux sommets opposés.

Ainsi les axes de similitude de trois circonférences inégales forment un quadrilatère complet ayant pour diagonales les lignes des trois centres de similitude.



La piazza San Marco. Canaletto.

EXERCICES.

212. Soit I le milieu d'un segment AB. Pour tout point M du plan on considère le point N tel que M soit le milieu du segment AN. Quel est le lieu géométrique du point E intersection des droites BM et IN lorsque le point M décrit une droite d parallèle à la droite AB ou la circonférence de diamètre AB ?

213. Soient une circonférence de centre O et de rayon R et un point fixe A tel que $OA = d$; on joint le point A à un point quelconque M de la circonférence. Quel est le lieu géométrique des pieds I et J des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{AOM}$?

Même question si le point O décrit une droite d et si le point M est la projection du point O sur une droite d' parallèle à la droite d suivant une direction donnée.

214. On considère un triangle ABC tel que les points B et C soient fixes et le point A variable pouvant occuper toutes les positions du plan non situées sur la droite BC.

Soit I un point fixe de BC. La droite parallèle au côté AC passant par le point I coupe le côté AB en un point M et la droite parallèle au côté AB passant par le point I coupe le côté AC en un point N. Montrer que la droite MN passe par un point fixe ou est exceptionnellement de direction constante lorsque le point A varie.

215. Construire un carré connaissant la différence entre la diagonale et le côté.

216. On considère deux circonférences C et C', de centre O et O' et de rayon R et R' respectivement, tangentes extérieurement au point A. Soit AP une corde de C et AP' la corde de C' perpendiculaire à AP. Démontrer que la droite PP' passe par un point fixe ou est exceptionnellement de direction constante lorsque le point P décrit la circonférence C.

217. La *droite d'Euler* et le cercle des neuf points ou *cercle d' Euler*. Dans un triangle ABC, l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre O du cercle circonscrit sont en ligne droite, le rapport $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}}$ a pour valeur $-\frac{1}{2}$. La droite OGH est appelée *droite d'Euler*.

Dans un triangle les milieux des côtés, les pieds des trois hauteurs, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets sont neuf points d'un même cercle dont le centre est situé au milieu du segment joignant le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre.

218. On considère une circonférence de centre O, et A et B deux points fixes alignés avec O. Pour un diamètre variable MN on joint les points A et B aux points M et N ; ces droites se coupent en P et Q. Quel est le lieu géométrique des points P et Q lorsque le diamètre varie ?

Même question si on considère un parallélogramme, au lieu d'une circonférence, de centre O et si MN est un segment variable passant par O et d'extrémités situées sur les côtés du parallélogramme.

§6. SIMILITUDE DIRECTE.

L'utilisation de la transformation homothétie permet de donner une définition générale des figures semblables :

318. Une *figure $\mathcal{F}'$* est *semblable* à une figure $\mathcal{F}$ si elle est égale à une figure homothétique de $\mathcal{F}$.

Il est immédiat de vérifier que si une figure $\mathcal{F}'$ est semblable à une figure $\mathcal{F}$ la figure $\mathcal{F}$ est semblable à $\mathcal{F}'$ (**300**), et que deux figures semblables à une même troisième sont semblables entre elles (**315**).

319. Définition. — *On appelle similitude directe toute transformation du plan qui est le produit d'un déplacement par une homothétie.*

Une symétrie centrale étant un déplacement et aussi une homothétie de rapport négatif égal à -1, on peut toujours se ramener au cas d'une homothétie de rapport positif.

320. Deux *figures* planes sont *directement semblables* si chacune d'elles est directement égale à la transformée de l'autre par une homothétie du plan.

Il est clair par (**194**)(**302**)(**311**) que :

321. Théorème. — *Toute similitude directe transforme une droite en une droite, un cercle en un cercle, et conserve les angles.*

322. Théorème. — *Toute similitude directe transforme un vecteur quelconque $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ tel que :*

1º *Le rapport des longueurs entre le second et le premier vecteur est un nombre constant (positif) qui ne dépend pas du vecteur $\overrightarrow{AB}$ choisi. Ce rapport est appelé rapport de similitude ;*

2º *L'angle défini par le premier et le second vecteur ne dépend pas du vecteur $\overrightarrow{AB}$ choisi et est constant à $2K\pi$ près. Cet angle est appelé angle de la similitude.*

323. Théorème-Réciproque. — *Si, pour deux systèmes de points du plan S et S', il existe deux points O et O' tels que le segment de droite joignant le point O à un point quelconque M de S et le segment de droite joignant le point O' au point M' correspondant forment constamment un angle constant à $2K\pi$ près et les longueurs de ces segments soient dans un rapport constant, les deux systèmes sont directement semblables.*

Pour tout point M de S et son homologue M' de S' on a :

$OM = k\,O'M'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \alpha + 2K\pi.$

Considérons la rotation de centre O et d'angle α et notons S_1 l'image du système S par cette transformation. Les systèmes S_1 et S' se déduisent l'un de l'autre par une homothétie, ou par une translation (**305**) : ils sont directement semblables.

324. *Note* : Le rapport et l'angle de la similitude directe transformant le système S en le système S' sont le rapport constant et l'angle constant donnés.

325. Corollaire. — *Toute similitude directe de rapport k et d'angle α admet une transformation inverse qui est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.*

En effet une telle transformation transforme un point fixe O et un point variable M en un point fixe O' et un point variable M' respectivement tels que :

$O'M' = kOM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \alpha + 2K\pi$; d'où $OM = \frac{1}{k}O'M'$ et $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{OM}) = -\alpha + 2K\pi$.

La transformation inverse d'une similitude directe est une similitude directe.

326. Corollaire. — *Le produit de deux similitudes directes de rapport k et k', et d'angle α et α' respectivement est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.*

La similitude directe $\mathcal{S}$ de rapport k et d'angle α transforme un point fixe O en un point fixe O', et un point variable M en un point variable M' tels que $O'M' = kOM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \alpha + 2K\pi$. La similitude directe $\mathcal{S}'$ de rapport k' et d'angle α' transforme le point O' en un point O'' et le point M' en un point M'' tels que $O''M'' = k'O'M'$ et $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O''M''}) = \alpha' + 2K\pi$.

Par suite $O''M'' = kk'OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O''M''}) = \alpha + \alpha' + 2K\pi$; le produit de deux similitudes directes est une similitude directe (**323**).

FORME RÉDUITE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE.

La correspondance entre deux figures semblables est définie par un rapport et un angle, c'est à dire par la donnée de deux couples de points (A, A') et (B, B') correspondants. Une similitude directe se ramène au produit d'une rotation par une homothétie ou une translation, le centre de la rotation ou de l'homothétie étant arbitraire : l'un étant déterminé par l'autre.

Plus intéressant est l'existence d'un point fixe :

327. Théorème. — *Toute similitude ne se réduisant pas à une translation possède un et un seul point fixe appelé centre de similitude.*

Soit $\mathcal{S}$ une similitude directe déterminée par son rapport k et son angle α. Elle transforme un point fixe O en un point fixe O' et un point variable M en un point variable M' tels que $O'M' = kOM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \alpha + 2K\pi$.

Si O et M étaient deux points fixes distincts, on aurait $k = 1$ et $\alpha = 2K\pi$; la similitude $\mathcal{S}$ serait l'identité du plan.

Supposons que le point O' soit distinct du point O. La similitude $\mathcal{S}$ admet un point fixe ω si et seulement si $O'\omega = kO\omega$ et $(\overrightarrow{O\omega}, \overrightarrow{O'\omega}) = \alpha + 2K\pi$, c'est à dire si et seulement si $\omega O' = k\omega O$ et $(\overrightarrow{\omega O}, \overrightarrow{\omega O'}) = \alpha + 2K\pi$.

Le point ω est un point commun du lieu géométrique Γ des points M tels que $\frac{MO'}{MO} = k$, et du lieu géométrique Γ_1 des points M tels que $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MO'}) = \alpha + 2K\pi$. Rappelons que :

1º Si $k \neq 1$, le lieu géométrique Γ est une circonférence (**263**) ;
Si $k = 1$, le lieu géométrique Γ est la médiatrice du segment OO'.

2º Si $\alpha \neq k\pi$, le lieu géométrique Γ_1 est un arc de cercle (**180**) ;
Si $\alpha = 0$ ou π (modulo 2π), le lieu géométrique Γ_1 est contenu dans la droite OO'.

Sauf dans le cas où $k = 1$ et $\alpha = 2K\pi$, (la similitude $\mathcal{S}$ est alors une translation), ces lieux géométriques ont un et un seul point commun.

328. Tableau récapitulatif (Les lieux géométriques sont représentés en traits pleins) :

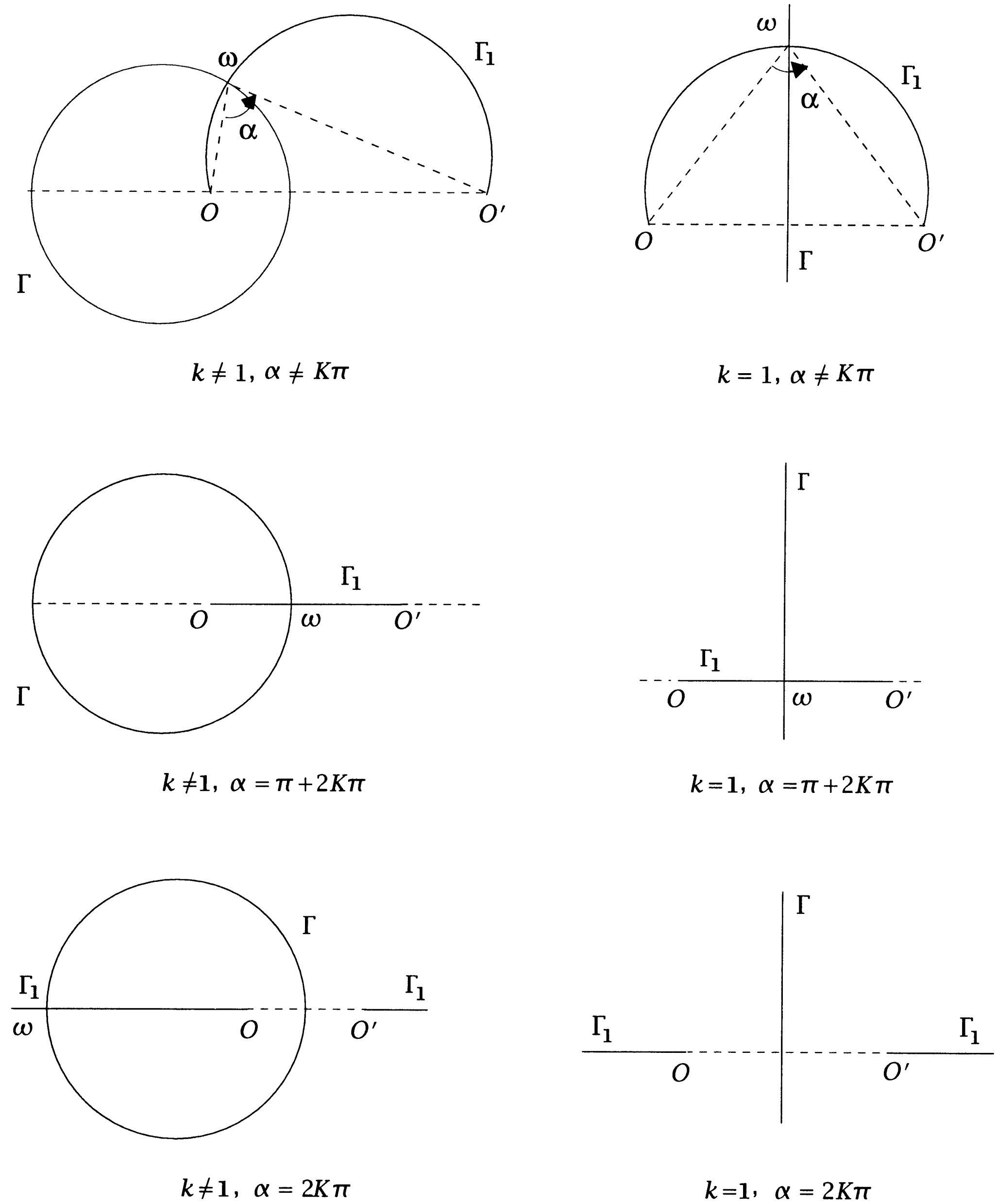


Fig. 139.

329. *Note* : Ce tableau donne en même temps la construction du point fixe lorsqu'il existe.

330. Corollaire. — *Toute similitude directe ne se réduisant pas à une translation, est le produit commutatif d'une homothétie positive et d'une rotation ayant même centre, point fixe de la similitude.*

Soit $\mathcal{S}$ une similitude produit d'une homothétie et d'une rotation, respectivement d'une rotation et d'une homothétie, ayant même centre ω. Le point ω est invariant par la rotation et par l'homothétie ; il est point fixe de la similitude.

Considérons ω le point fixe d'une similitude directe $\mathcal{S}$ qui ne soit pas une translation, et (M, M') un couple de points homologues quelconques. Si la similitude $\mathcal{S}$ est de rapport k et d'angle α, on a $\omega M' = k\,\omega M$ et $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \alpha + 2K\pi$. Soit m le transformé de M par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre ω et de rapport k et m' le transformé de M par la rotation $\mathcal{R}$ de centre ω et d'angle α, on a :

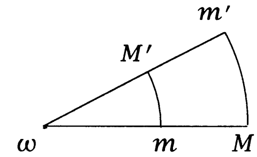


Fig. 140.

$$\omega m = \omega M' \quad , \quad (\overrightarrow{\omega m}, \overrightarrow{\omega M'}) = \alpha + 2K\pi \quad (*)$$
$$\omega m' = \omega M \quad , \quad (\overrightarrow{\omega m'}, \overrightarrow{\omega M'}) = 2K\pi \quad (**)$$

Par suite $\mathcal{R}(m) = M'$ $(*)$, et $\mathcal{H}(m') = M'$ $(**)$ car $k > 0$. Ainsi $\mathcal{S} = \mathcal{H} \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{H}$: le produit de ces deux transformations est commutatif.

331. *Note* : Le produit d'une rotation et d'une homothétie n'est pas “en général” commutatif, mais le produit d'une rotation et d'une homothétie est égal à un produit d'une homothétie et d'une rotation.

332. *Remarque* : Si ω est le point fixe d'une similitude directe $\mathcal{S}$ de rapport k et d'angle α, et si (A, A'), (B, B'), sont des couples de points homologues on a $\frac{\omega A'}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega B} = k$ et $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'}) = (\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega B'}) = \alpha + 2k\pi$. Les triangles $\omega AA'$ et $\omega BB'$ sont directement semblables.

Réciproquement si ω est un point fixe et si $\omega BB'$ reste directement semblable à un triangle fixe $\omega AA'$, le point B' est le transformé du point B par une similitude de centre ω.

333. *Construction du centre de similitude, étant donnés deux couples de points homologues.*

Considérons (A, A') et (B, B') deux couples de points homologues par une similitude $\mathcal{S}$ tels que les droites AB et $A'B'$ ne soient pas parallèles (sinon la similitude serait, soit une homothétie et on sait le construire (**305**), soit une translation et il n'y a pas de point fixe).

Le centre ω de la similitude vérifie $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'}) = (\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) + 2K\pi$. Notons I le point intersection des droites AB et $A'B'$, on a :

$(\omega A, \omega A') = (IA, IA') + K\pi$ et $(\omega B, \omega B') = (IB, IB') + K\pi$.

Par suite ω est situé sur les circonférences C et C' circonscrites aux triangles IAA' et IBB'.

Si ces circonférences sont tangentes en I, le point ω est nécessairement le point I (Fig. 141) ; si ces circonférences se coupent aux points I et I', le point ω est le point I'. En effet si ω était le point I, la similitude $\mathcal{S}$ transformerait les points alignés I, A, B en les points alignés I, A', B' tels que $\frac{IA}{IB} = \frac{IA'}{IB'}$; les droites AB et $A'B'$ seraient alors parallèles, ce qui contredit l'hypothèse (les circonférences C et C' seraient tangentes en I).

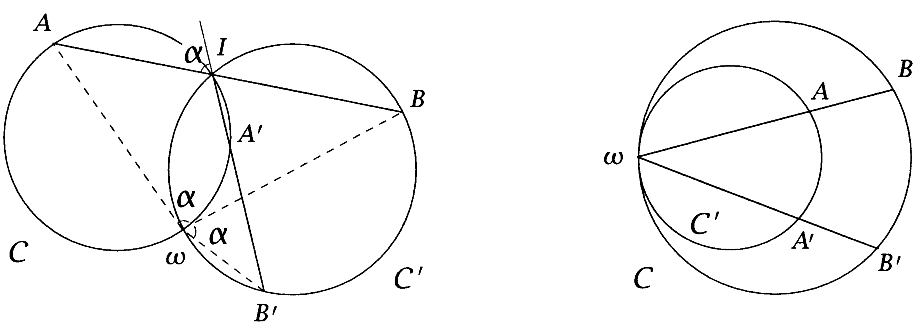


Fig. 141.

Conclusion : Le centre de similitude directe déterminé par deux couples de points homologues (A, A') et (B, B') est le second point commun des cercles circonscrits aux triangles IAA' et IBB', où le point I est le point d'intersection des droites AB et $A'B'$.

334. *Le pantographe de* Sylvester : C'est un mobile articulé permettant de réaliser une similitude.

Sur les côtés d'un parallélogramme $ABCD$ on fixe deux triangles semblables BCT et DCT' dont les angles égaux sont disposés comme l'indique la figure 142.

Les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$ étant égaux, les triangles ADT' et TBA sont semblables (**269**), et les angles $\widehat{BAT}$ et $\widehat{DT'A}$ sont égaux. Les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BAD}$ étant supplémentaires, on en déduit que l'angle $\widehat{TAT'}$ est égal aux angles $\widehat{CBT}$ et $\widehat{T'DC}$.

Lorsque l'on déforme le parallélogramme $ABCD$ autour du point fixe A, l'angle $\widehat{TAT'}$ reste constant ainsi que le rapport $\frac{AT'}{AT}$ ($\frac{AT'}{AT} = \frac{BC}{BT}$) ; la figure décrite par le point T' est semblable à celle décrite par le point T et a subi une rotation d'angle α.

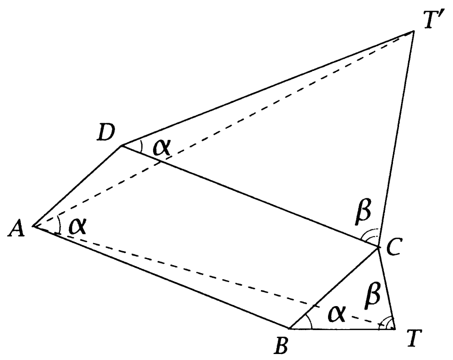
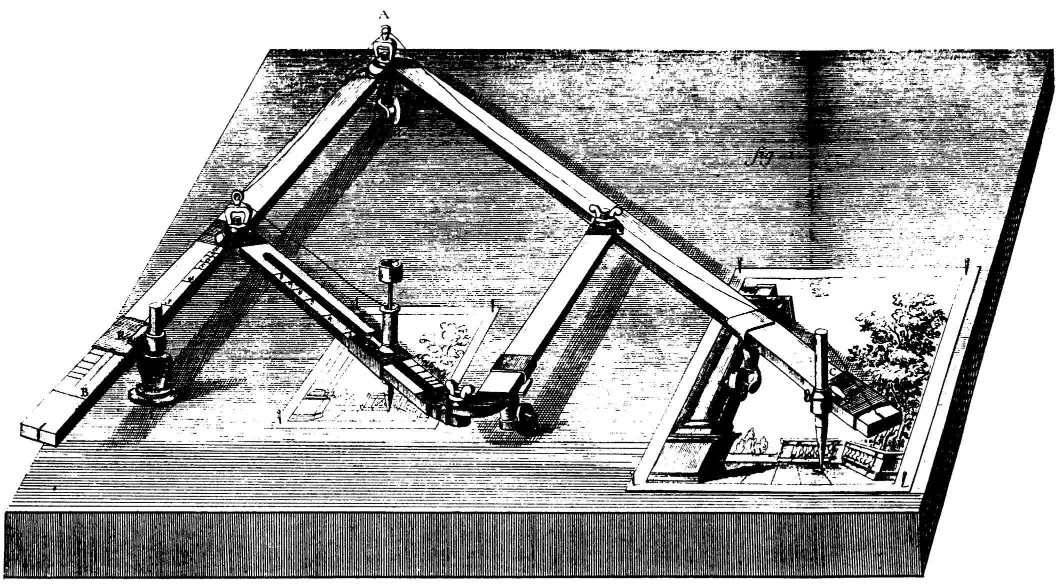


Fig. 142.

Note : Si le triangle BCT est isocèle de sommet principal B, cet appareil réalise une rotation d'angle α.



Le pantographe.
Encyclopédie de Diderot et d'Alembert (MDCCLXIII).

Fig. 143.

EXERCICES.

219. On considère deux droites d et d' sécantes en un point O. Déterminer toutes les similitudes directes $\mathcal{S}$ transformant la droite d en la droite d'. Soient $\mathcal{S}$ une de ces similitudes de centre ω non situé sur d, M un point de d et M' son transformé par $\mathcal{S}$. Montrer que les points ω, O, M, M' sont cocycliques.

220. On considère un trapèze $ABCD$ rectangle en A et D et tel que la diagonale AC soit perpendiculaire au côté BC et bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. D'un point variable M de la droite CD on élève la perpendiculaire à la droite MA qui coupe la droite BC en un point N.

Quelle est la nature du triangle AMN ? En déduire le lieu géométrique du milieu du segment MN lorsque le point M décrit la droite CD.

221. Un point variable M décrit une demi-circonférence de diamètre AB. A l'extérieur du triangle AMB on construit le carré $MBCD$. Trouver le lieu géométrique du sommet D.

222. Quel est le lieu géométrique du centre de gravité G d'un triangle équilatéral ABC dont le sommet A est fixe et dont le sommet B décrit une droite ou une circonférence.

223. On considère deux circonférences C et C' de centre O et O' respectivement, sécantes en deux points A et B ; soit $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre A telle que $\mathcal{S}(O) = O'$.

1º Montrer que la transformée de la circonférence C par la similitude $\mathcal{S}$ est la circonférence C' et que si P est un point variable de C distinct du point A, la droite $P\,\mathcal{S}(P)$ passe par un point fixe.

2º Déterminer le lieu géométrique de la projection orthogonale H de A sur la droite $P\,\mathcal{S}(P)$ lorsque le point P décrit la circonférence C privée du point A.

3º Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité et du centre du cercle circonscrit du triangle $AP\,\mathcal{S}(P)$ lorsque le point P décrit la circonférence C privée du point A.

§7. PROBLÈMES DE CONSTRUCTION.

335. *Diviser un segment donné en un certain nombre de parties égales.*

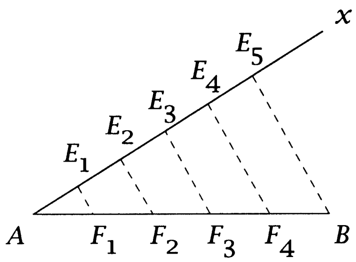


Fig. 144.

Soit AB le segment donné à diviser en n parties égales, par exemple en cinq parties.

Du point A on trace une demi-droite Ax faisant un angle non nul avec AB, de préférence aigu. A partir de ce même point A, on porte sur la demi-droite Ax, cinq fois consécutivement, une même longueur ; on définit ainsi cinq points E_1, E_2, E_3, E_4, E_5. Les parallèles à la droite E_5B passant par les points E_i, $i = 1$ à 4, coupent le segment AB aux points F_1, F_2, F_3, F_4 respectivement.

La division donnée par ces points est la division cherchée (**253**).

336. *Diviser un segment en parties proportionnelles à des segments donnés.*

Soit AB le segment donné à diviser, par exemple en parties proportionnelles aux segments s_1, s_2, s_3.

Sur une demi-droite Ax, faisant un angle non nul avec AB, on porte successivement les longueurs s_1, s_2, s_3 ; on détermine ainsi les points E_1, E_2, E_3. Les parallèles à la droite E_3B passant par les points E_1 et E_2 divisent le segment AB en parties proportionnelles aux segments donnés (**253**).

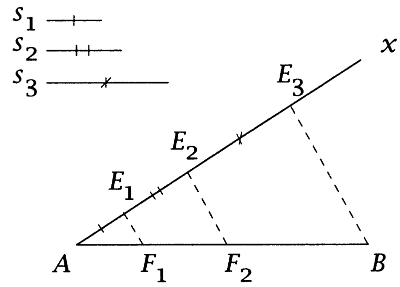


Fig. 145.

337. *Construire la quatrième proportionnelle à trois segments donnés.*

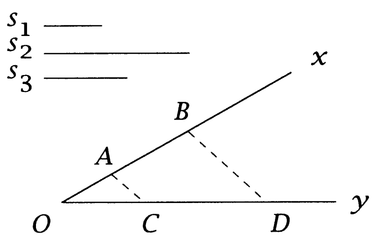


Fig. 146.

Soient s_1, s_2, s_3 les trois segments donnés. Sur le côté Ox d'un angle $\widehat{xOy}$ on porte les segments OA égal à s_1, OB égal à s_2, et sur le côté Oy le segment OC égal à s_3. La parallèle au segment AC passant par le point B coupe la demi-droite Ox en un point D. Le segment OD est la quatrième proportionnelle :
$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ (**253**), c'est à dire $\frac{OD}{s_3} = \frac{s_2}{s_1}$.

338. *Construire la moyenne proportionnelle à deux segments donnés.*

Si s_1 et s_2 sont deux segments donnés, c'est construire le segment s tel que $s^2 = s_1 \cdot s_2$.

1º *méthode* (Fig. 147) :
Sur une droite portons les segments BH et HC égaux respectivement à s_1 et s_2. La perpendiculaire à BC élevée du point H coupe la circonférence de diamètre BC en un point A. Le segment AH est le segment cherché (**278**).

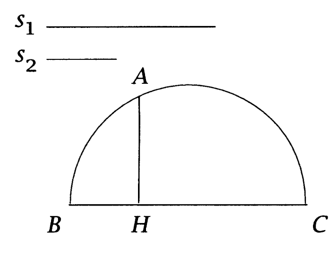


Fig. 147.

2º *méthode* (Fig. 148) :

Sur une droite portons le segment BC égal à s_1 et le segment BH égal à s_2. La perpendiculaire élevée en H à BC coupe la circonférence de diamètre BC en un point A. Le segment AB est le segment cherché : $AB^2 = BH \cdot BC$ (**275**).

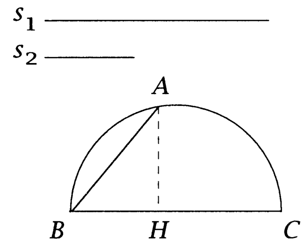


Fig. 148.

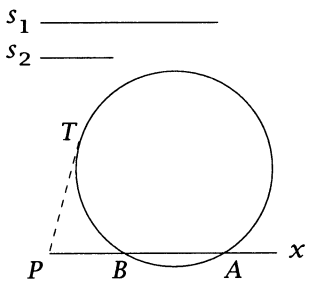


Fig. 149.

3º *méthode* (Fig. 149) :

Sur une droite Px on porte les segments PA et PB égaux respectivement à s_2 et s_1. On trace une circonférence C passant par les points A et B. La tangente PT à cette circonférence est le segment cherché : $PT^2 = PA \cdot PB$ (**287**).

339. *Notes* :

1º Un segment unité étant donné, pour tout segment de longueur d, les constructions précédentes permettent de construire un segment de longueur $\sqrt{d}$.

2º Si a et b sont deux nombres, leur moyenne géométrique $\sqrt{a \cdot b}$ est moindre que leur moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$: dans la figure 147 le segment AH représente $\sqrt{a \cdot b}$ et le segment $\frac{BC}{2}$ représente $\frac{a+b}{2}$.

340. *Construire deux segments connaissant leur somme et leur produit.*

La somme s et le produit p des deux segments cherchés étant donnés et une unité de mesure choisie, le segment de mesure s est représenté par le segment BC et le segment de mesure $\sqrt{p}$ par le segment AB (Fig. 150).

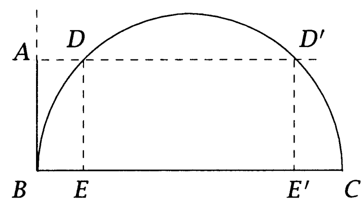


Fig. 150.

Sur les deux côtés d'un angle droit portons les longueurs BA et BC ; la parallèle à BC passant par le point A coupe la circonférence de diamètre BC aux points D et D'. Par le point D menons la paralléle à AB, elle coupe BC en un point E. Le triangle BDC étant rectangle, on a $BE \cdot EC = DE^2$. Comme AB égale DE (**106**) on a $AB^2 = BE \cdot EC$.

Les segments BE et EC répondent à la question.

Discussion :

1º Si $AB > \frac{BC}{2}$, il n'y a pas de solution : la droite parallèle à BC passant par le point A ne coupe pas la circonférence de diamètre BC.

2º Si $AB < \frac{BC}{2}$, il y a deux solutions symétriques par rapport au milieu de BC.

3º Si $AB = \frac{BC}{2}$, il y a une solution à savoir le milieu de BC.

On en déduit :

Le produit de deux segments dont la somme est constante est maximum lorsque les deux segments sont égaux.

◇ Une variante de cette construction (Fig. 151) :

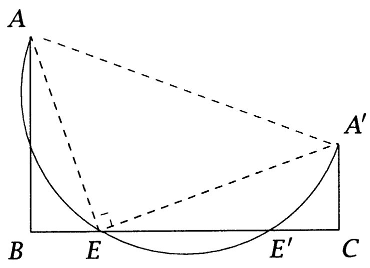


Fig. 151.

Soient BC la somme s des segments cherchés et $BA \times CA'$ leur produit p.

Perpendiculairement à BC on porte, d'un même côté, les segments BA et CA' tels que $BA \times CA' = p$. La circonférence de diamètre AA' coupe le segment BC aux points E et E'. Les angles $\widehat{AEA'}$ et $\widehat{AE'A'}$ étant droits les triangles rectangles ABE et ECA', respectivement ABE' et $E'CA'$, sont semblables (**268**) : les segments BE et EC d'une part, et BE' et $E'C$ d'autre part, répondent à la question (ces segments sont égaux chacun à chacun).

341. *Construire deux segments connaissant leur différence et leur produit.*

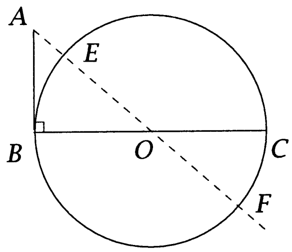


Fig. 152.

La différence d et le produit p des deux segments cherchés étant donnés et une unité de longueur étant choisie, portons sur les deux côtés d'un angle droit un segment BA de longueur d et un segment BC de longueur $\sqrt{p}$. La droite AB est tangente en B à la circonférence de centre O de diamètre BC. Notons E et F les points d'intersection de cette circonférence avec la droite AO.

Les segments AE et AF sont les segments demandés :
$AF - AE = BC$ et $AB^2 = AE \cdot AF$ (**287**).

Discussion : Il existe toujours une solution à ce problème.

◇ Une variante de cette construction (Fig. 153) :

Soient BC le segment représentant la différence d des deux segments cherchés, et BB' et CC' deux segments tels que leur produit représente le produit donné.

Perpendiculairement à BC on porte les segments BB' et CC' de part et d'autre de la droite BC. La circonférence de diamètre $B'C'$ coupe la droite BC en deux points M et M'. Les triangles MBB' et MCC', respectivement $M'BB'$ et $M'CC'$, sont semblables : les segments MB et MC d'une part, et $M'B$ et $M'C$ d'autre part, répondent à la question (ils sont égaux chacun à chacun).

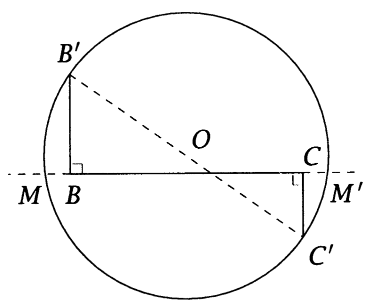


Fig. 153.

342. Application. — *Résoudre une équation du second degré, ou construire ses racines.*

Les équations du second degré sont a priori de quatre types, à savoir :

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1) \qquad x^2 - px + q = 0 \quad (2)$$
$$x^2 + px - q = 0 \quad (3) \qquad x^2 - px - q = 0 \quad (4)$$

où p et q sont des nombres positifs. Par un changement de variable x en $-x$ l'équation (1) se transforme en l'équation (2) et l'équation (3) en l'équation (4). On a donc seulement à considérer les équations $x^2 - px + q = 0$ et $x^2 - px - q = 0$ avec p et q positif, c'est à dire $x(p - x) = q$ et $x(x - p) = q$. La première équation se ramène à trouver deux segments connaissant leur somme et leur produit, et la deuxième leur différence et leur produit. Il est clair que la réalisation de cette construction nécessite la donnée du segment unité (c'est à dire du coefficient du monôme x^2 de l'équation) ceci afin de pouvoir construire le segment de longueur $\sqrt{q}$ ou deux segments représentant le produit q, et il y a possibilité d'une telle construction seulement dans le cas où $p^2 - 4q \geq 0$.

343. *Diviser un segment en moyenne et extrême raison.*

Diviser un segment en moyenne et extrême raison c'est trouver sur ce segment, ou sur son prolongement, un point dont la distance à l'une de ses extrémités soit moyenne proportionnelle entre sa distance à l'autre extrémité et le segment tout entier. C'est à dire si AB est le segment et E le point cherché alors $AE^2 = AB \cdot EB$ ou $\frac{EB}{EA} = \frac{EA}{AB}$.

• Il existe seulement deux points l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur, divisant un segment donné en moyenne et extrême raison :

a) Soit X un point quelconque parcourant le segment AB de A vers B ; le rapport $\frac{XA}{AB}$ croît de 0 à 1 et le rapport $\frac{XB}{XA}$ décroît de l'infini à 0 et ceci de manière continue : il existe un et un seul point E intérieur au segment AB tel que $AE^2 = AB \cdot EB$.
b) Soit X un point parcourant le prolongement du segment AB situé du côté opposé au point B par rapport au point A, le point X allant du point A à l'infini ; le rapport $\frac{XB}{XA} = \frac{XA+AB}{XA} = 1 + \frac{AB}{XA}$ diminue continuement de l'infini à 1, tandis que le rapport $\frac{XA}{AB}$ croît de zéro à l'infini. Sur cette demi-droite il existe un et un seul point E' tel que $AE'^2 = AB \cdot E'B$.
c) Soit X un point parcourant le prolongement du segment AB du même côté que le point B ; le rapport $\frac{AB}{XA}$ est moindre que 1 et le rapport $\frac{XA}{XB}$ est supérieur à 1. Il n'existe pas de point satisfaisant à la propriété demandée sur cette demi-droite.

• Construction des deux points E et E' :

On a $AE^2 = AB \cdot EB$ et $AE'^2 = AB \cdot E'B$ où E est un point intérieur au segment AB et E' un point extérieur. De ces égalités on déduit :

$$\begin{aligned} AE'^2 - AE^2 &= AB(E'B - EB) = AB \cdot EE' \\ &= (AE' + AE)(AE' - AE) = EE'(AE' - AE) \end{aligned}$$

Par suite $AE' - AE = AB$ $(*)$.

D'autre part $\frac{EA}{AB} = \frac{EB}{EA}$, d'où $\frac{EA}{AB} + 1 = \frac{EB}{EA} + 1$ et $\frac{EA+AB}{AB} = \frac{EB+EA}{EA}$. Compte tenu de l'égalité $(*)$ on a $\frac{AE'}{AB} = \frac{AB}{EA}$ c'est à dire $AE' \cdot EA = AB^2$ $(**)$.

Le problème se ramène à construire deux longueurs ayant pour différence AB et pour produit AB^2 (ici l'unité de longueur n'intervient pas : on connait $\sqrt{AB^2}$).

Par le point B on élève une perpendiculaire au segment AB et on prend sur cette perpendiculaire le point O situé à une distance $\frac{AB}{2}$ du point B. Le cercle de centre O, de rayon OB, coupe la droite AO aux points C et C' respectivement. Les longueurs AC et AC' sont les longueurs cherchées ; il suffit de les reporter sur la droite AB, on obtient les points E et E'.

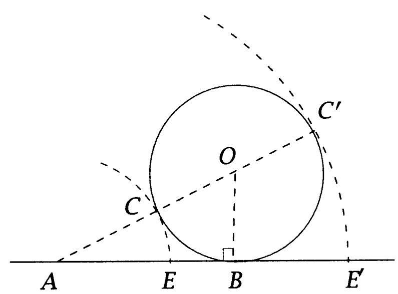


Fig. 154.

Note : La longueur AE est égale à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ et la longueur AE' est égale à $\frac{\sqrt{5}+1}{2}AB$. C'est une construction classique souvent utilisée car en rapport avec le nombre d'or.

344. *Construction de figures par homothétie ou par similitude.*

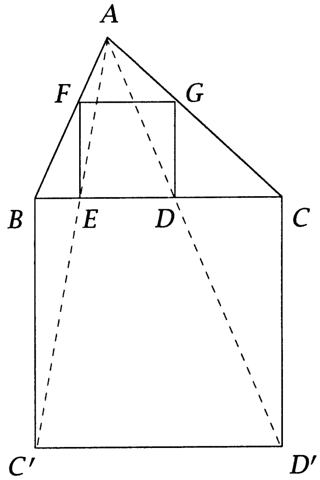


Fig. 155.

Cette méthode de construction consiste à construire en première approche une figure auxiliaire semblable à la figure demandée, puis de passer de l'une à l'autre par une homothétie ou une similitude adéquate.

Par exemple inscrivons un carré dans un triangle ABC donné, un côté du carré étant porté par un côté. Sur le côté BC du triangle traçons extérieurement le carré $BCD'E'$; ce carré est homothétique au carré cherché $FGDE$ par une homothétie de centre A.

Les points D et E s'obtiennent en prenant les intersections du côté BC avec les droites AD' et AC'.

Le problème n'est possible "au sens strict" que si aucun des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle n'est obtus : le carré est intérieur au triangle.

TRACÉ DE QUELQUES COURBES.

345. On dit que deux courbes se *raccordent en un point* si en ce point la tangente de l'une et la tangente de l'autre coïncident(18).

346. *Tracé de l'arcade en plein cintre* (Fig. 156) :

C'est la figure obtenue en raccordant deux segments parallèles d'égale longueur par une demi-circonférence ; en architecture c'est la voûte romane.

Les segments AB et $A'B'$, étant tangents à la demi-circonférence de diamètre BB', sont perpendiculaires au diamètre BB'.

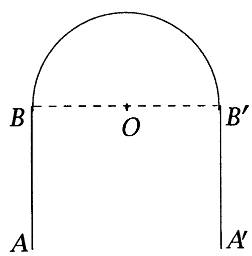


Fig. 156.

347. *Tracé de l'ogive* (Fig. 157) :

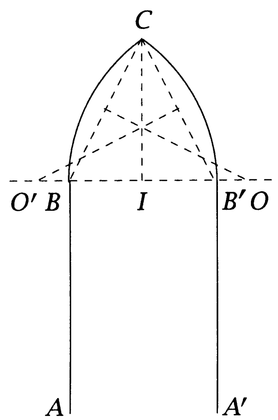


Fig. 157.

Une *ogive* est constituée de deux arcs de cercle sécants se raccordant avec deux segments d'égale longueur ; l'écart entre les deux segments parallèles s'appelle l'*ouverture* de l'ogive, et la distance de l'intersection des deux circonférences à la droite joignant les points de raccordement la *montée*.

Par le milieu I d'un segment BB' définissant l'ouverture, on élève une perpendiculaire IC de longueur égale à la montée de l'ogive ; les médiatrices de BC et de $B'C$ coupent la droite BB' aux points O et O' respectivement. Ces points sont les centres des arcs de cercle $\overset{\frown}{B'C}$ et $\overset{\frown}{BC}$.

(18) En géométrie différentielle on dit que l'on a une *courbe de classe* C_1.

348. *Tracé de l'ovale* (Fig. 158) :

L'*ovale* est une courbe fermée à quatre centres formée de quatre arcs de cercle se raccordant et possédant deux axes de symétrie. La plus grande dimension entre deux points de cette courbe est appelée *grand axe*.

Un grand axe AB étant choisi, on le divise en trois parties égales AC, CD, DB. Des points C et D comme centres, on trace les circonférences de rayon $\frac{1}{3}AB$; elles se coupent en E et F et on mène les diamètres FCG, FDI, ECH et EDJ. Des points E et F comme centres, on trace les arcs de cercle $\widehat{HJ}$ et $\widehat{GI}$: la courbe obtenue est l'ovale de grand axe AB et les points G, H, I, J, sont les points de raccordement.

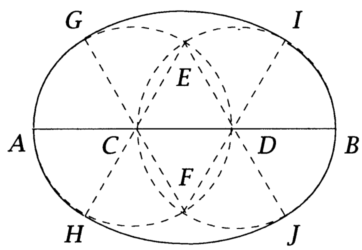


Fig. 158.

349. *Tracé de l'ove* (Fig. 159) :

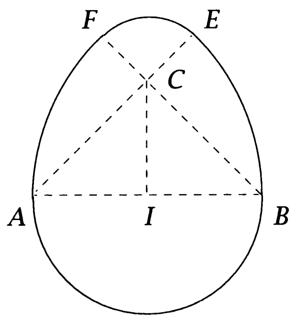


Fig. 159.

L'*ove* est une courbe fermée à quatre centres, formée de quatre arcs de cercle se raccordant et possédant un axe de symétrie.

Une longueur AB étant donnée, par son milieu I on élève une perpendiculaire IC égale à $\frac{AB}{2}$. Les circonférences de rayon AB et de centre A et B coupent les droites AC et BC en E et F respectivement. Du point C comme centre on décrit l'arc $\widehat{EF}$, et du point I la demi-circonférence $\widehat{AB}$. La courbe obtenue est un ove et les points A, B, E, F sont les points de raccordement.

350. *Tracé de l'anse de panier, ou de l'arc surbaissé* (Fig. 160) :

L'*anse de panier* est un demi-ovale composé, de préférence, d'un nombre impair d'arcs de cercle (pour un pont usuellement trois) se raccordant entre eux et possédant un axe de symétrie.

Construction d'une arche surbaissée à trois arcs de cercle :

Soient AB l'ouverture et OC la montée, où le point O est le milieu de AB et OC est perpendiculaire à AB. La droite OC coupe la demi-circonférence de diamètre AB au point D, et on note E et F les points divisant l'arc $\widehat{AB}$ en trois arcs de cercle égaux (**363**). Les paralléles aux segments DE et DF passant par le point C coupent les segments AE et BF aux points G et H respectivement. La paralléle au segment EO passant par le point G coupe la paralléle au segment FO passant par le point H en un point O_3 situé sur la droite DO ; les droites GO_3 et HO_3 coupent le segment AB aux points O_1 et O_2 respectivement.

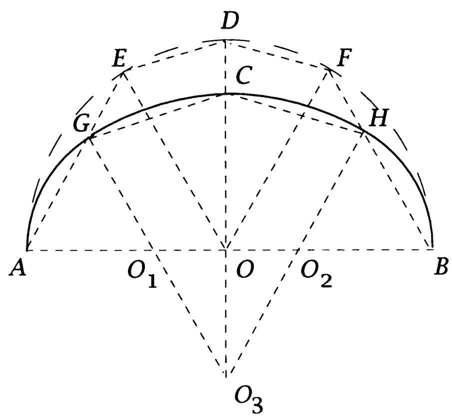


Fig. 160.

L'arc surbaissé est la courbe formée des arcs de cercle $\widehat{AG}$ et $\widehat{HB}$ de centres respectifs O_1 et O_2, et de l'arc de cercle $\widehat{GH}$ de centre O_3.

351. *Tracé de l'arc rampant* (Fig. 161) :

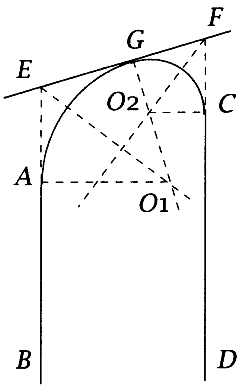
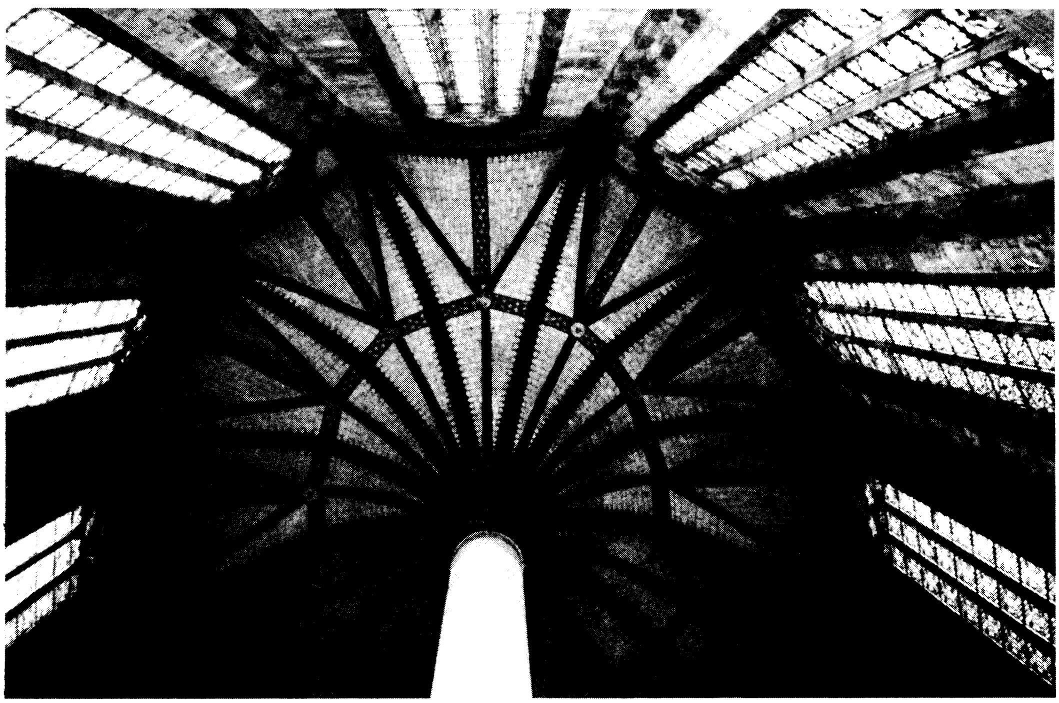


Fig. 161.

L'*arc rampant* est une arcade composée de deux arcs de cercle se raccordant entre eux et se raccordant à deux segments parallèles d'inégale longueur. Ces segments sont appelés *pieds-droits* (cette construction est destinée à soutenir une rampe).

Soient AB et CD les pieds-droits de l'ouverture où est située l'arcade, les points A et C sont à déterminer, la droite EF étant parallèle à la rampe. Sur le segment EF on fixe un point G, point de contact de EF avec l'arc rampant (usuellement le milieu de EF). La perpendiculaire élevée du point G à la droite EF coupe la bissectrice de l'angle $\widehat{GEB}$ au point O_1 et la bissectrice de l'angle $\widehat{GFD}$ au point O_2. Les points A et C sont les pieds des perpendiculaires abaissées des points O_1 et O_2 aux droites EB et FD respectivement.

L'arc rampant est la courbe formée des pieds-droits AB et CD et des arcs de cercle $\widehat{AG}$ de centre O_1 et $\widehat{GC}$ de centre O_2.



Le palmier des Jacobins. Toulouse.

EXERCICES.

224. Dans un triangle ABC donné, inscrire, puis circonscrire, un triangle équilatéral.

225. Inscrire dans un triangle donné un rectangle semblable à un rectangle donné.

226. Inscrire un rectangle dans une demi-circonférence semblable à un rectangle donné, un côté étant porté par le diamètre.

227. Construire un segment qui soit à un segment donné comme les carrés de deux segments donnés entre eux.

228. Construire un segment dont le carré soit au carré d'un segment donné comme deux segments donnés entre eux.

229. Tracer une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée.

230. Tracer une circonférence passant par un point donné et tangente à deux droites données.

231. On considère deux circonférences C et C' tangentes en un point M et une droite ∂ tangente en un point N à la circonférence C'. Si EF est le diamètre de la circonférence C perpendiculaire à la droite ∂, montrer que les points E, M, N, sont alignés.

Tracer une circonférence passant par un point donné et tangente à une droite et à une circonférence données.

232. Tracer la droite joignant un point P à l'intersection de deux droites d et d', intersection se trouvant située hors d'une feuille de papier.

Ensuite, avec une règle trop courte, tracer la droite joignant deux points d'une feuille de papier.

233. Par un point donné A mener une droite coupant une droite d en E et une droite d' en E' de sorte que le rapport $\frac{\overline{AE'}}{\overline{AE}}$ soit égal à un nombre algébrique k donné.

234. On considère deux circonférences concentriques de centre O. Tracer une droite sur laquelle ces circonférences interceptent deux cordes dont l'une soit le double de l'autre.

235. Construire un triangle ABC connaissant deux angles et le périmètre, ou deux angles et la somme des médianes, ou deux angles et la somme des bissectrices, etc...

236. On considère quatre points alignés A, B, C, D, tels que AB et CD aient même milieu I, et E un point du plan. Soit O le milieu de BE et K celui de CE. Que peut-on dire des segments OK et AD ? On suppose que les points A et O sont fixes ; en déduire le lieu géométrique du point K lorsque le point D décrit une droite ou une circonférence.

§8. DES POLYGONES RÉGULIERS.

352. Un polygone convexe est *régulier* lorsqu'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux ; un triangle équilatéral, un carré sont des polygones réguliers.

Un polygone est *inscrit* dans un cercle lorsque tous ses sommets sont situés sur la circonférence, on dit aussi que le *cercle* est *circonscrit* au polygone.

Un *polygone* est *circonscrit* à un cercle lorsque tous ses côtés sont tangents à la circonférence, on dit aussi que le cercle est *inscrit* dans le polygone.

Un triangle est inscriptible (**150**) et circonscriptible (**191**).

353. Théorème. — *Lorsqu'on divise une circonférence en un nombre quelconque d'arcs égaux, les cordes sous-tendant ces arcs forment un polygone régulier inscrit et les tangentes menées par les points de la division forment un polygone régulier circonscrit.*

Les angles du polygone, interceptant des arcs formés par $(n-2)$ divisions égales entre elles, sont égaux (**174**) ; de plus les côtés du polygone inscrit sont égaux (**31**).

Le polygone inscrit est un polygone régulier.

Les tangentes menées par les points de division forment un polygone circonscrit ; on montre que ce polygone est régulier en considérant les triangles EAB, FBC, GCD, etc ... (Fig. 162). Ces triangles sont isocèles (**188**) et leurs bases AB, BC, CD, etc ... sont égales ; de plus les angles à la base $\widehat{EBA}$, $\widehat{FBC}$, $\widehat{GCD}$, etc ... sont égaux (**162**).

Les triangles considérés sont égaux et les angles du polygone circonscrit, respectivement ses côtés, sont tous égaux : le polygone circonscrit ainsi défini est régulier.

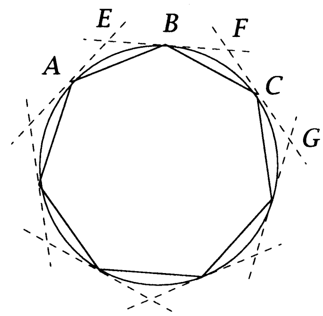


Fig. 162.

354. Théorème-Réciproque. — *Tout polygone régulier est inscriptible et circonscriptible.*

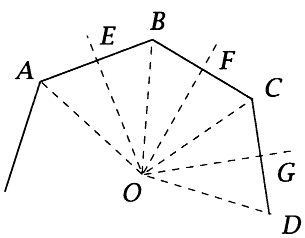


Fig. 163.

Soit $ABCD\ldots$ un polygone régulier. Considérons le cercle circonscrit au triangle ABC ; son centre O est le point d'intersection des médiatrices OE et OF des côtés AB et BC respectivement.

Les triangles isocèles OAB et OBC sont égaux (**51**), et l'angle $\widehat{OCB}$ est égal à la moitié de l'angle $\widehat{ABC}$; les angles du polygone étant tous égaux, l'angle $\widehat{OCB}$ est égal à l'angle $\widehat{OCD}$ et les triangles OBC et OCD sont égaux (**49**). Par suite le segment OC est égal au segment OD.

Le point D est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC ; en faisant de même pour les autres sommets, on prouve que le polygone est inscriptible.

D'autre part les hauteurs OE, OF, OG, etc ... des triangles isocèles égaux OAB, OBC, OCD, etc ... étant toutes égales, le cercle de centre O et de rayon OE est tangent aux côtés du polygone (**158**).

Le polygone est circonscriptible.

Le centre (commun) du cercle circonscrit et du cercle inscrit d'un polygone régulier est appelé *centre* du *polygone*, le rayon du cercle circonscrit est le *rayon du polygone*, le rayon du cercle inscrit est l'*apothème* , et l'angle de deux rayons consécutifs OA et OB est l'*angle au centre* du polygone.

355. *Remarques* :

1º Les angles au centre d'un polygone régulier (convexe) de n côtés sont tous égaux, ils ont pour mesure $\frac{360°}{n}$, c'est à dire $\frac{2\pi}{n}$;

2º L'angle d'un polygone régulier de n côtés étant égal à $\frac{n-2}{n}\pi$, l'angle d'un polygone régulier et son angle au centre sont supplémentaires ;

3º Tout rayon d'un polygone régulier de n côtés est bissectrice de l'angle au sommet auquel il aboutit ;

4º Tout polygone régulier est globalement invariant par des rotations de centre le centre du polygone et d'angle un angle ayant pour mesure un multiple du $n^{ième}$ de la circonférence ;

5º Tout polygone régulier est globalement invariant par les symétries orthogonales d'axes les médiatrices des côtés, ou les bissectrices des angles. Si n est pair, le centre est centre de symétrie du polygone.

A cet effet on peut reprendre les exercices nº 133 et 134 et les généraliser à un polygone régulier de n côtés.

356. Corollaire. — *Les rayons passant par les sommets et les milieux des côtés d'un polygone régulier de* n *côtés divisent le cercle circonscrit et le cercle inscrit en* $2n$ *arcs égaux, et définissent deux polygones réguliers de* $2n$ *côtés.*

Soient OA et OB deux rayons consécutifs d'un polygone régulier $ABCD\ldots$; le triangle OAB est isocèle et sa hauteur (l'apothème) est bissectrice de l'angle au centre du polygone régulier. Les angles au centre du polygone étant tous égaux, on définit ainsi $2n$ angles égaux et par suite $2n$ arcs égaux sur le cercle circonscrit, et sur le cercle inscrit.

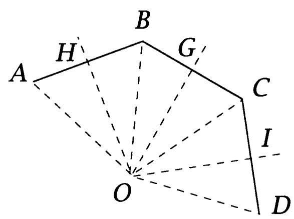


Fig. 164.

357. Théorème. — *La différence entre le rayon et l'apothème d'un polygone régulier est plus petite que la moitié du côté du polygone.*

Les inégalités triangulaires relatives au triangle OAH (Fig. 164) donnent $OA - OH < AH$ et $AH = \frac{1}{2}AB$.

358. *Note* : A mesure que l'on double le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit (356) (respectivement circonscrit) dans une circonférence, son côté diminue et sa mesure tend vers zéro ; par suite la différence entre le rayon et l'apothème diminue en tendant vers zéro et le polygone se rapproche "aussi près que l'on veut" de la circonférence à mesure que le nombre de côtés augmente. Ce procédé est utilisé en informatique : une circonférence n'est qu'un polygone régulier avec un grand nombre de côtés.

359. Théorème. — *Deux polygones réguliers ayant le même nombre de côtés sont semblables et le rapport de leurs périmètres est égal à celui de leurs rayons et de leurs apothèmes : c'est le rapport de similitude.*

Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés inscrits, ou circonscrits, à deux circonférences égales sont égaux (il suffit de faire coïncider les deux circonférences de telle sorte que deux sommets des deux polygones soient confondus).

Si $\mathcal{P}$ est un polygone régulier inscrit, ou circonscrit, à un cercle C de centre O et C' un autre cercle de même centre, l'homothétie de centre O qui transforme le cercle C en le cercle C', transforme le polygone régulier $\mathcal{P}$ en un polygone régulier $\mathcal{P}'$ semblable. Le rapport de similitude est égal au rapport des rayons, qui est celui des apothèmes.

360. *Remarque* : Divisons une circonférence en n parties égales et notons γ une de ces parties ; joignons les points de division de p en p à partir de l'un d'eux.

◇ Si p est un nombre premier avec n, on revient au point de départ après avoir parcouru n fois l'arc $p\gamma$, ou p fois la circonférence qui est de mesure $n\gamma$:

En effet le plus petit commun multiple de la circonférence représentée par $n\gamma$ et de l'arc $p\gamma$ sous-tendu par chaque corde est $np\gamma$. On forme ainsi un polygone régulier non convexe de n côtés et on lui donne le nom de *polygone régulier étoilé.*

◇ Si les nombres p et n ont un plus grand commun diviseur d, $d \neq 1$, le plus petit commun multiple de la circonférence $n\gamma$ et de l'arc $p\gamma$ est $\frac{np\gamma}{d}$; c'est à dire que l'on revient au point de départ après avoir parcouru $\frac{p}{d}$ fois la circonférence. On définit ainsi un polygone régulier (étoilé ou non) de $\frac{n}{d}$ côtés.

Ainsi les polygones réguliers convexes ou étoilés de n côtés correspondent aux nombres inférieurs et premiers à n. Les nombres premiers et inférieurs avec n se correspondent deux à deux, à égale distance du plus petit et du plus grand de ces nombres, par exemple 1 et $n-1$, ou p et $n-p$; cette correspondance définit le même polygone.

Il s'ensuit que le nombre de polygones réguliers convexes ou étoilés de n côtés est égal au nombre des nombres premiers à n dans la suite $1, 2, 3, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ ou $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$ selon que le nombre n est pair ou impair.

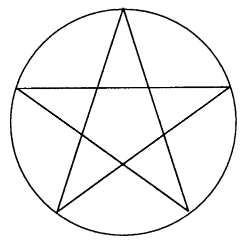


Fig. 165.

A une similitude près il n'existe qu'un hexagone régulier, que deux pentagones réguliers l'un convexe, l'autre étoilé, etc ...

INSCRIPTION DES POLYGONES RÉGULIERS DANS UN CERCLE.

361. Un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, on sait inscrire le polygone régulier d'un nombre double de côtés : on divise en deux parties égales l'arc intercepté par un côté du polygone donné, que l'on reporte autant de fois que nécessaire.

De même, un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, on sait circonscrire à ce cercle un polygone régulier d'un même nombre de côtés : par les sommets du polygone inscrit on mène les tangentes (353).

362. *Le carré* :

L'angle au centre d'un carré étant droit, il suffit de tracer deux diamètres perpendiculaires AC et BD : on divise ainsi la circonférence en quatre arcs égaux. Si R est le rayon du cercle, par le théorème de Pythagore on obtient :

Le côté du carré inscrit dans un cercle de rayon R est de mesure $R\sqrt{2}$ et son apothème $R\frac{\sqrt{2}}{2}$.

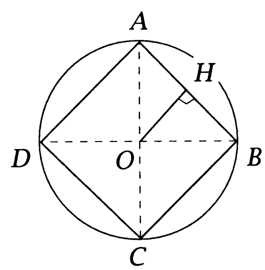


Fig. 166.

363. *L'hexagone* :

La mesure de l'angle au centre d'un hexagone régulier est 60°, c'est à dire $\frac{1}{6}^{ième}$ de circonférence ; le triangle isocèle formé par un côté et le centre de l'hexagone, par exemple OAB, est équilatéral.

Le côté d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R est de mesure le rayon R (il est égal au rayon du cercle circonscrit) et son apothème est de mesure $R\frac{\sqrt{3}}{2}$.

◇ *Construction* : à partir d'un point A de la circonférence, on porte six fois le rayon ; on définit les segments AB, BC, CD, DE, EF, FA : ils forment un hexagone régulier inscrit dans ce cercle.

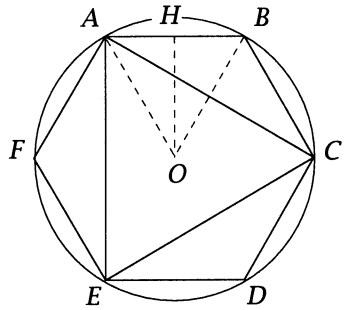


Fig. 167.

364. *Le triangle équilatéral* :

Pour construire un triangle équilatéral on joint de deux en deux les sommets d'un hexagone régulier inscrit.

Le quadrilatère $ABCO$ (Fig. 167) est un losange (**109**) et ses diagonales AC et OB sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, d'où :

L'apothème d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon R est de mesure $\frac{1}{2}R$ et son côté est de mesure $R\sqrt{3}$.

365. *Le décagone* :

Le côté d'un décagone régulier inscrit est égal au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.

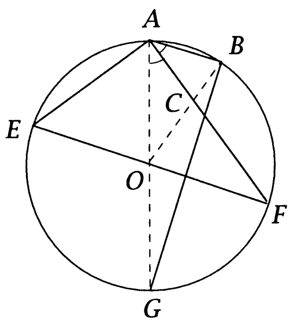


Fig. 168.

Soit AB un côté du décagone inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. L'angle au centre d'un décagone est de mesure 36°, c'est à dire $\frac{1}{10}^{ième}$ de circonférence, et les angles à la base du triangle isocèle OAB sont de mesure 72° (Fig. 168).

La bissectrice de l'angle $\widehat{OAB}$ coupe le segment OB en un point C et détermine deux triangles isocèles ABC et CAO (calculer la mesure de leurs angles) et AB égale AC, et AC égale OC.

D'autre part $\frac{OC}{CB} = \frac{OA}{AB}$ (**259**), c'est à dire $AC^2 = OC^2 = OB \cdot CB$. On remarque aussi que $BC < AB$ (**66**).

La construction d'un décagone régulier inscrit dans une circonférence est donnée en (**343**) :

On divise le rayon OB d'une circonférence C donnée en moyenne et extrême raison : on obtient le point C tel que $OC^2 = OB \cdot CB$. Du point B comme centre, on décrit un arc de cercle de rayon OC qui coupe la circonférence au point A et on trace AB : c'est le côté d'un décagone inscrit dans la circonférence C.

Le côté d'un décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R est de mesure $R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et son apothème est de mesure $\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

En joignant les points de division donnés par un décagone régulier de trois en trois, on obtient un décagone étoilé (côté AF de Fig. 168) ; la mesure de son côté est égale à $R\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et son apothème à $\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

On peut aussi voir que le côté du décagone étoilé divise le rayon en moyenne et extrême raison : il correspond à la seconde solution du problème. Ainsi :

La différence des côtés du décagone régulier étoilé et du décagone régulier convexe inscrits dans un même cercle est égale au rayon et leur produit est égal au carré du rayon.

En effet la droite AC recoupe la circonférence en un point F tel que l'arc $\widehat{BF}$ soit égal au double de l'arc $\widehat{AB}$ ($\widehat{BAF} = 36°$ et $\widehat{AOB} = 36°$). Par suite AF est le côté du décagone régulier étoilé ; de plus $AF = AC + CF$ et $AC = AB = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Comme le triangle FOC est isocèle ($\hat{O} = \hat{C} = 72°$) le segment CF est égal au rayon OF et $AF = R\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

366. *Le pentagone* :

Pour le pentagone régulier on joint de deux en deux les sommets du décagone régulier ; si on les joint de quatre en quatre, on obtient le pentagone étoilé.

Le côté du pentagone régulier est AE (Fig. 168) et EF est diamètre ; l'angle $\widehat{EOF}$ est de mesure 5 fois 36°, l'angle $\widehat{EAF}$ est droit et $AE = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Le côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R est de mesure $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ et son apothème est de mesure $\frac{R}{2}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$.

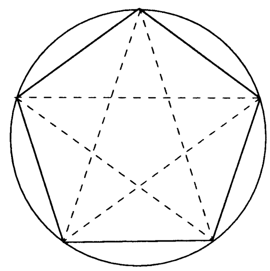


Fig. 169.

De même en considérant le triangle rectangle ABG, on voit que le côté du pentagone régulier étoilé inscrit dans un cercle de rayon R est de mesure $\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ et son apothème $\frac{R}{2}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

Note : Dans notre société les rapports entre grandeurs faisant intervenir le *nombre d'or* ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) sont considérés comme des critères de beauté et d'esthétique ; on peut se référer par exemple aux peintres de la Renaissance, Botticelli, Léonard de Vinci (fig. 171 : dessin des proportions de l'Homme par Léonard de Vinci selon les indications de Vitruve), ... Dans les rapports des dimensions d'un pentagone régulier étoilé ou convexe intervient ce nombre : les intersections des diagonales du pentagone étoilé définissent un pentagone régulier convexe qui permet de redéfinir un pentagone régulier étoilé et ainsi de suite (on a un "effet zoom"). C'est peut être une des raisons pour laquelle ces polygones ont souvent été utilisés. Notons que le pentagone régulier étoilé était le symbole des Pythagoriciens, et la légende veut qu'un jeune disciple de Pythagore, Hippasus de Metepontum, ayant mis en évidence l'incommensurabilité de deux segments de cette configuration au cours d'une promenade en bateau fut jeté par-dessus bord et périt noyé ...

367. *Le pentédécagone* ou (*pentadécégone*) :

L'angle au centre d'un pentédécagone régulier est de mesure 24°, c'est à dire $\frac{1}{15}^{ième}$ de circonférence. Comme $24° = 60° - 36°$, on a :

L'arc intercepté par le côté d'un pentédécagone régulier inscrit est égal à la différence des arcs interceptés par le côté d'un hexagone régulier avec celui d'un décagone régulier.

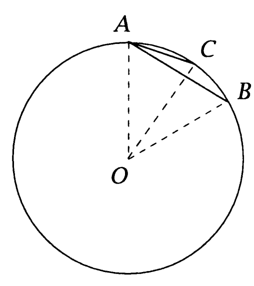


Fig. 170.

Outre le pentédécagone régulier, il existe trois pentédécagones étoilés dont les côtés interceptent les $\frac{2}{15}^{ièmes}$, les $\frac{4}{15}^{ièmes}$ et les $\frac{7}{15}^{ièmes}$ de la circonférence. On déduit leurs constructions à partir du pentédécagone régulier comme précédemment.

368. *Problème* : Inscrire dans une circonférence donnée un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés.

Il est en général impossible de résoudre ce problème à la règle et au compas. Pour pouvoir le résoudre, il faut que le nombre n de côtés du polygone régulier vérifie certaines conditions, conditions données par Gauss dans *Disquisitiones arithmeticæ, lipsiæ.*

Avant Gauss, il était acquis que les seuls polygones réguliers constructibles à la règle et au compas étaient ceux que nous venons de décrire ; dans son ouvrage, Gauss a montré que l'on peut construire le polygone régulier de 17 côtés (et en a donné une construction), et plus généralement celui de $2^{2^n}+1$ côtés pourvu que $2^{2^n}+1$ soit un nombre premier(19). Signalons que la construction à la règle et au compas du polygone régulier à 257 côtés fut donnée par Richelot, et celle du polygone régulier à 65 537 côtés par Hermes. Toutefois il existe des solutions approchées à ce problème pour un nombre quelconque de côtés, solutions utilisées par les tailleurs de pierres.

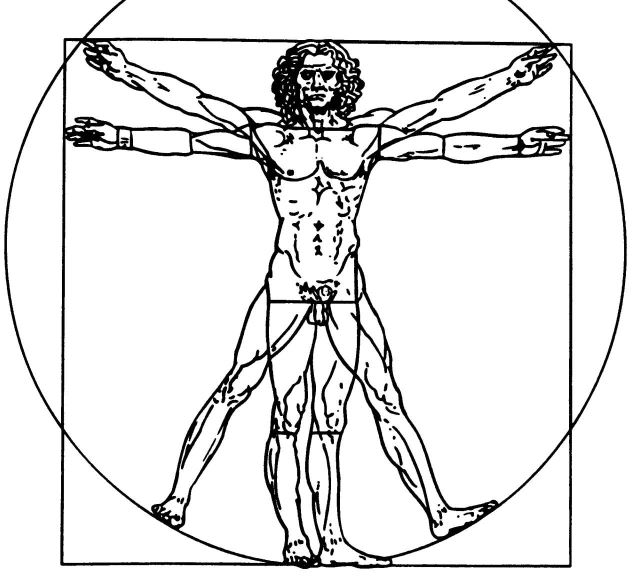


Fig. 171.

EXERCICE.

237. Pour un polygone régulier à n côtés, on considère l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des isométries du plan le conservant globalement, et C_n le sous-ensemble de $\mathcal{D}_n$ formé des isométries directes.

i) Déterminer $\mathcal{D}_n$ et C_n.

ii) Donner les axes de symétrie de ces polygones et décrire l'action de C_n sur ces axes de symétrie ; on distinguera le cas où n est un nombre pair de celui où il est un nombre impair.

(19) On appelle nombres de Fermat les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Fermat a vérifié que les cinq premiers nombres de cette forme, pour $0 \leq n \leq 4$ à savoir 3, 5, 17, 257, 65 537, sont premiers et conjecturé qu'il en était de même pour tout n. Mais pour $n = 5$, on obtient 4 294 967 297 qui est divisible par 641. On a vérifié que pour n compris entre 5 et 19 les nombres F_n ne sont pas premiers, et maintenant on pense qu'il en est de même pour tout $n \geq 5$. On en déduirait alors qu'il y aurait seulement cinq polygones réguliers avec un nombre premier de côtés constructibles à la règle et au compas ...

§9. MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE.

Rappelons que la longueur d'un segment de droite est le nombre qui exprime combien de fois ce segment contient le segment unité choisi (**19**), la comparaison se faisant par superposition. Ainsi la mesure directe de la *longueur* d'une ligne n'est possible que si cette ligne est droite et il faut définir ce que l'on entend par longueur d'un arc de cercle ou, plus généralement d'un arc de courbe, car il n'est pas possible de comparer par superposition un arc de cercle à un segment de droite unité donné.

Nous adopterons la définition suivante, définition compatible avec la remarque (**17**) :

369. Définition. — *La longueur d'une courbe, d'extrémités deux points, est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un contour polygonal inscrit dans la courbe entre ces deux points lorsque les longueurs des côtés de ce contour tendent indéfiniment vers zéro.*

370. Pour être rigoureux il faut prouver que la limite existe, car elle n'existe pas pour n'importe quelle courbe, et qu'elle ne dépend pas du processus d'inscription choisi, c'est à dire de la manière dont la mesure des côtés du contour polygonal utilisé tend vers zéro.

371. Pour un cercle la résultante d'un tel processus consiste expérimentalement à entourer la circonférence par une ficelle puis à la tendre afin d'obtenir une ligne droite ; la longueur de la circonférence est la longueur de ficelle utilisée : c'est le problème du cerclage des roues. On voit que la longueur d'une circonférence est finie : elle existe !

Il n'en est pas de même de toute courbe fermée comme par exemple la frontière définie par un fractal qui, dans de nombreux cas, est une figure plane bornée de périmètre infini. Un aperçu esthétique en est donné dans le très beau livre "The beauty of Fractal" (H. O. PEITGEN-P. H. RICHTER, Springer Verlag, 1 986). Un exemple simple est donné par le "flocon de neige" découvert par Von Koch en 1 904, que l'on construit de la manière suivante :

La *courbe initiale, ou courbe d'ordre* 0, est un triangle équilatéral et le *générateur* est le segment brisé *Gen* ; on passe de la courbe d'ordre n, notée L_n, à la courbe d'ordre $n+1$, notée L_{n+1}, en remplaçant chaque segment de la courbe d'ordre n par le segment générateur Gen du côté sortant (Fig. 172) :

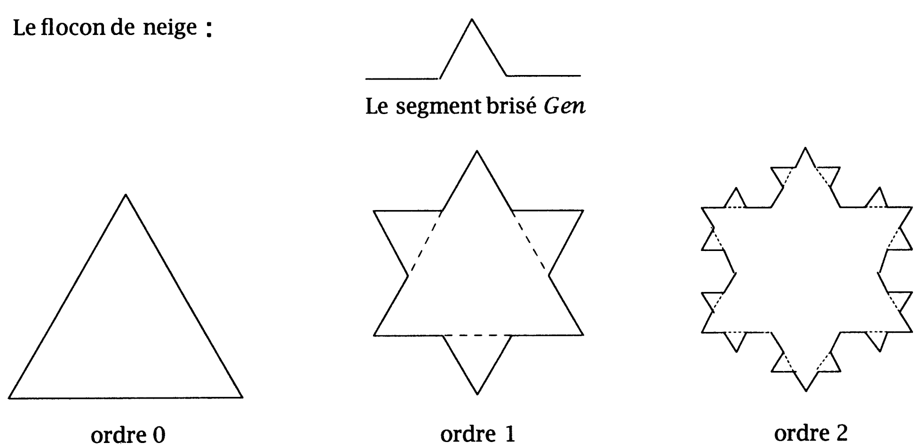


Fig. 172.

La mesure de la ligne L_{n+1} est égale à $\frac{4}{3}$ de la mesure de la ligne L_n et la courbe de Von Koch est la courbe limite représentée en la figure 172, elle prend la forme d'un flocon de neige d'où son nom ; le périmètre de cette ligne tend vers l'infini.

L'antiflocon réalisé de la même manière, mais où le générateur est rentrant au lieu d'être sortant comme pour le flocon est de la forme suivante :

L'antiflocon :

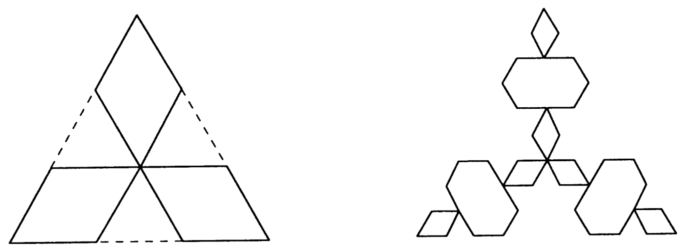


Fig. 173.

372. *Note* : Le passage à la limite nécessite certaines précautions comme le montrent les sophismes **(390)(391)**, ou les paradoxes de Zénon d'Élée. L'étude des conditions de passage à la limite n'étant pas le but de cet ouvrage, on renvoie le lecteur à un cours d'analyse élémentaire, ou à Lebesgue, pour l'étude générale de ces conditions ; pour la mesure de la circonférence, ou d'un arc de cercle, et le calcul de π ces conditions seront respectées, mais pour plus de clarté et pour ne pas alourdir plus que nécessaire les démonstrations, elles ne seront pas signalées lors de leur usage.

Revenons à la circonférence et remarquons le :

373. Théorème. — *De deux polygones convexes l'un inscrit l'autre circonscrit à une même circonférence, celui qui a le plus petit périmètre est le polygone inscrit.*

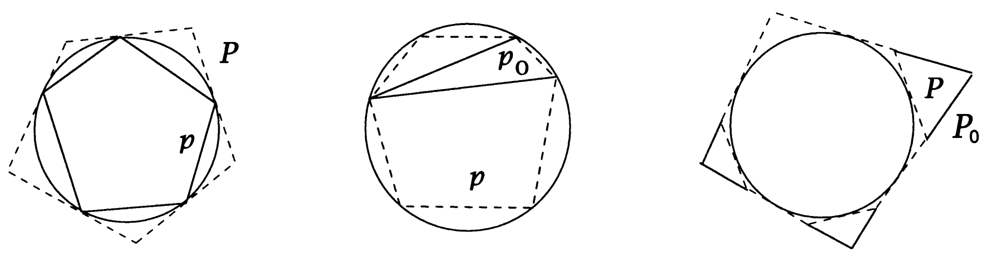


Fig. 174.

On vérifie le théorème à l'aide des trois lemmes suivants, déduits des inégalités triangulaires :

Lemme 1.— *Soient P un polygone convexe circonscrit à un cercle C et p un polygone convexe inscrit tels que les côtés du polygone P soient tangents à C aux sommets du polygone p. Alors le périmètre du polygone p est moindre que celui du polygone P* (Fig. 174).

Lemme 2.— *Soient p_0 et p deux polygones convexes inscrits dans un cercle C tels que tout sommet du polygone p_0 soit sommet du polygone p. Alors le périmètre du polygone p_0 est moindre que celui du polygone p* (Fig. 174).

Lemme 3.— *Soient P_0 et P deux polygones convexes circonscrits dans un cercle C tels que les points où les côtés du polygone P_0 sont tangents au cercle soient aussi des points où les côtés du polygone P soient tangents. Alors le périmètre du polygone P est moindre que celui du polygone P_0* (Fig. 174).

374. Pour une circonférence C donnée regardons les deux processus suivants[20] :

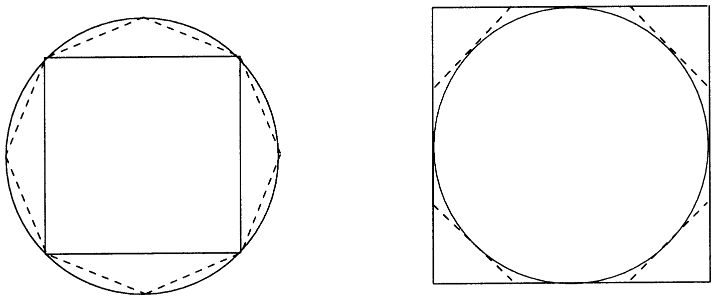


Fig. 175.

1º) Inscrivons successivement, (Fig. 175), dans la circonférence C les polygones réguliers de quatre côtés, huit côtés, seize côtés, etc... , en doublant toujours le nombre des côtés. Les périmètres de ces polygones réguliers vont sans cesse en augmentant (**373**) et au bout de quelques opérations il n'est plus possible de faire la distinction entre la circonférence et le polygone : on approxime "aussi près que l'on veut" la circonférence par un polygone régulier inscrit[21].

Ainsi la mesure p des périmètres des polygones réguliers va sans cesse croître tout en restant constamment inférieure à une quantité fixe, par exemple le périmètre d'un polygone convexe circonscrit P_0 choisi. A la limite, les périmètres de ces polygones inscrits tendent vers une valeur l_0.

2º) Circonscrivons de même (Fig. 175) un carré, un octogone, etc... à la circonférence C ; la mesure des périmètres de ces polygones réguliers va sans cesse en diminuant (**373**) et au bout de quelques opérations il n'est plus possible de faire la distinction entre la circonférence et le polygone : on approxime "aussi près que l'on veut" la circonférence par un polygone régulier circonscrit.

Ainsi la quantité P représentant les périmètres des polygones réguliers successivement construits va sans cesse en décroissant tout en restant constamment supérieure à une quantité fixe, par exemple un périmètre d'un polygone convexe inscrit p_0 choisi. A la limite, les périmètres de ces polygones circonscrits tendent vers une valeur L_0.

375. *Ces deux limites sont égales* :

Les polygones réguliers inscrits et circonscrits ayant un même nombre de côtés sont semblables et leurs périmètres sont dans le rapport de celui de leurs rayons, ou de leurs apothèmes (**359**). Ce rapport tend vers la valeur 1 : les deux valeurs limites l_0 et L_0 sont égales. Notons L cette valeur.

Pour achever la démonstration (**370**), il suffit de montrer que la valeur limite L obtenue ne dépend pas des polygones convexes utilisés, c'est à dire :

(20) On peut initialiser ces deux processus avec n'importe quel polygone convexe régulier inscrit et circonscrit ; le résultat obtenu est indépendant (**376**).

(21) C'est la méthode utilisée en informatique pour tracer une circonférence (**358**).

376. Théorème. — *Les périmètres des polygones convexes inscrits ou circonscrits dont le plus grand des côtés diminue indéfiniment vers zéro tendent vers la valeur limite L précédemment définie.*

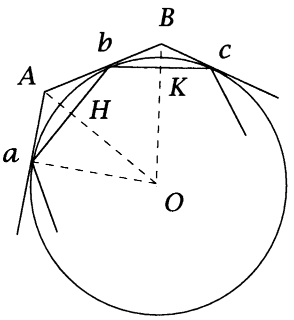


Fig. 176.

Soient C une circonférence de centre O de rayon R, $abc\dots$ un polygone inscrit quelconque et $ABC\dots$ le polygone circonscrit formé par les tangentes aux points a, b, c, ... et notons p et P leurs périmètres respectifs.

La limite L trouvée précédemment est comprise entre p et P car P est plus grand que n'importe quel périmètre d'un polygone convexe inscrit (c'est à dire $L \leq P$) et p est plus petit que n'importe quel périmètre d'un polygone circonscrit (on a $p \leq L$).

D'autre part le segment OA coupe le côté ab en son milieu H et donne l'égalité $\frac{Aa+Ab}{ab} = \frac{Aa}{aH} = \frac{R}{OH}$ (les triangles OaH et OaA sont semblables).

De même $\frac{Bb+Bc}{bc} = \frac{R}{OK}$ où le point K est le milieu de bc, et ainsi de suite...

Faisons la somme des numérateurs et la somme des dénominateurs des premiers nombres de ces différentes égalités, on obtient un rapport compris entre le plus grand et le plus petit des rapports initiaux[22] ; il vient $\frac{P}{p} = q$ où q est compris entre la plus grande et la plus petite des quantités $\frac{R}{OH}$, $\frac{R}{OK}$, etc...

Faisons varier le polygone de manière que le plus grand des côtés diminue indéfiniment : les distances OH, OK, etc... tendent vers R et les rapports $\frac{R}{OH}$, $\frac{R}{OK}$, etc... tendent vers la valeur 1. Il en est de même de $\frac{P}{p}$ et par suite les rapports $\frac{L}{p}$ et $\frac{P}{L}$ tendent vers la valeur 1 :

Les périmètres P et p tendent vers la valeur L quand les côtés diminuent indéfiniment vers zéro.

377. Définition. — *La longueur L, limite commune des suites des périmètres des polygones convexes inscrits, ou circonscrits, tels que les côtés diminuent tous indéfiniment est appelée longueur de la circonférence.*

378. Théorème. — *Les longueurs de deux circonférences quelconques sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres.*

Soient C et C_1 deux circonférences de rayons R et R_1 et de longueurs L et L_1 respectivement. Dans chacune de ces circonférences inscrivons deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés; ces polygones sont semblables (**359**) et leurs périmètres P et P_1 sont entre eux comme les rayons R et R_1.

Faisons croître le nombre de leurs côtés, par exemple selon le processus (**374**).

Le rapport $\frac{P}{P_1}$, égal à $\frac{R}{R_1}$, tend vers le rapport $\frac{L}{L_1}$: ainsi les rapports $\frac{L}{L_1}$ et $\frac{R}{R_1}$ sont égaux.

379. Corollaire-Définition. — *Le rapport de la longueur de la circonférence au diamètre est un nombre constant; on le désigne par la lettre grecque π.*

380. Corollaire. — *La longueur d'une circonférence de rayon R est égale à $2\pi R$.*

---

(22) Considérons les rapports des nombres positifs suivants $\frac{A_i}{a_i} = \frac{B_i}{b_i}$ pour $i = 1,\dots,n$. Alors $\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n a_i \frac{B_i}{b_i} \leq \sum_{i=1}^n a_i K$ si $\frac{B_i}{b_i} \leq K$ pour $i = 1,\dots,n$. On obtient $\frac{\sum A_i}{\sum a_i} \leq K$. De même si $k \leq \frac{B_i}{b_i}$ pour $i = 1,\dots,n$ on obtient $k \leq \frac{\sum A_i}{\sum a_i}$.

LONGUEUR D'UN ARC DE CERCLE.

L'existence de la longueur d'un arc de cercle se démontre de la même manière que celle de la longueur d'une circonférence : on considère une ligne brisée régulière inscrite, ou circonscrite, dont le nombre de côtés double indéfiniment, puis on regarde le cas d'une ligne brisée quelconque dont on fait tendre la longueur de ses côtés vers zéro.

381. De ces démonstrations on déduit les remarques suivantes :

◇ Tout arc de cercle est plus long que la corde qui le sous-tend : il est limite croissante de lignes brisées d'extrémités les extrémités de la corde.

Pour des raisons analogues, tout arc de cercle est plus court que toute ligne brisée enveloppante terminée en ses extrémités.

◇ Le rapport d'un arc de cercle à sa corde tend vers 1 lorsque l'arc de cercle tend vers zéro, le cercle restant fixe. En effet l'arc de cercle $\widehat{ab}$ (Fig. 176) est compris entre la corde ab et la ligne brisée aAb.

◇ Deux arcs de cercle égaux ont des longueurs égales : les lignes brisées servant à la définition de leurs longueurs peuvent être prises égales chacune à chacune.

◇ La somme de deux arcs de cercle a pour longueur la somme des longueurs de ces arcs de cercle : l'union de deux lignes brisées inscrites dans chacun d'eux constitue une ligne brisée inscrite dans l'arc de cercle total.

Donc d'aprés la notion de "mesure", notion maintes fois évoquée, le rapport des longueurs de deux arcs de cercle d'une même circonférence est égal au rapport des deux arcs de cercle. En particulier ces longueurs sont entre elles comme les mesures des arcs de cercle, ou des angles au centre (**169**) en degrés ou en grades ; ce rapport ne dépend pas de l'unité de mesure choisie.

382. Définition. — *On appelle arc de* 1 *radian un arc dont la longueur est égale au rayon, et un angle de* 1 *radian un angle qui, dans la position d'angle au centre, découpe un arc de* 1 *radian.*

La connaissance de la valeur du nombre π donne la mesure d'un tel arc en degrés ou en grade. Ainsi un arc de 1 radian vaut en degrés $\frac{R\times 360°}{2\pi R} = \frac{180°}{\pi} = 180° \times 0,3183\cdots \approx 57°29$ et en grades $\frac{R\times 400}{2\pi R} gr = \frac{200}{\pi} gr \approx 63,66$gr, et la mesure d'une circonférence en radians est égale à 2π (voir le calcul de π).

CALCUL DE π.

On montrera seulement la possibilité de calculer π avec une approximation quelconque, une réponse complète à cette question étant du domaine des mathématiques "avancées". Cependant on ne peut omettre de mentionner le célèbre problème de la quadrature du cercle qui revient à construire, à la règle et au compas, un segment de droite égal à la longueur d'une circonférence de rayon donné, et les échecs successifs quant à la possibilité de résoudre ce problème ; l'incommensurabilité de π due à Lambert (1770) n'en serait pas la cause essentielle, comme le montre $\sqrt{2}$. Pour l'histoire signalons que c'est Lindemann (1882) qui a démontré l'impossibilité de la quadrature du cercle.

On présente ici deux méthodes algorithmiques de calcul, méthodes non usitées en général car la convergence de ces algorithmes est lente ; leur intérêt est un "intérêt d'école" car elles font comprendre ce qu'il faut faire et elles ont une place dans l'Histoire. Rappelons que calculer π c'est calculer la longueur d'une circonférence de rayon donné R :

383. Méthode des périmètres (utilisée par Archimède) :

Dans une circonférence de rayon donné, on calcule les périmètres des polygones réguliers inscrits dont le nombre de côtés double indéfiniment ; ces périmètres fournissent une valeur approchée par défaut de la longueur de la circonférence et cette valeur sera d'autant plus approchante que le nombre de côtés sera plus grand.

D'autre part on calcule les périmètres des polygones réguliers circonscrits correspondants : on obtient des valeurs approchées par excès de la longueur de la circonférence, et cette valeur sera d'autant plus approchante que le nombre de côtés sera plus grand.

La différence entre la valeur approchée par excès et la valeur approchée par défaut des périmètres des polygones circonscrits et inscrits donnera l'erreur maximale commise pour le calcul de la longueur de la circonférence par un tel processus[(23)].

On sait inscrire et circonscrire certains polygones réguliers dans une circonférence et, de là, inscrire et circonscrire les polygones réguliers d'un nombre double de côtés. Le calcul de π se ramène aux deux problèmes suivants :

• *Problème I* : Etant donné le côté c d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence de rayon R, trouver la mesure du côté du polygone régulier inscrit dans la même circonférence d'un nombre double de côtés.

Soient AB, de mesure c, le côté d'un polygone régulier et AC le côté d'un polygone régulier d'un nombre double de côtés inscrits dans une même circonférence de rayon R. Notons c' la mesure de AC.

On a $AC^2 = CD \cdot CE$ (275), c'est à dire $c'^2 = 2R(R - OE)$. D'autre part $OE^2 = OA^2 - AE^2$ (277), par suite $c' = \sqrt{2R(R - \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}})}$. Si on prend le rayon pour unité, il vient $c' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}}$.

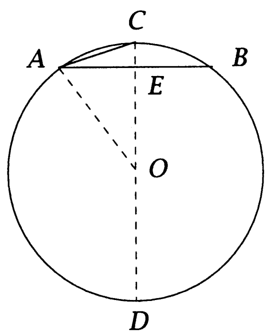


Fig. 177.

• *Problème II* : Etant donné le côté c d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence de rayon R, trouver la mesure du côté du polygone régulier circonscrit dans la même circonférence d'un même nombre de côtés.

Il suffit de remarquer que ces polygones sont semblables et que le rapport de similitude est égal au rapport de leurs apothèmes. L'apothème du polygone régulier circonscrit est égale au rayon du cercle, et l'apothème du polygone régulier inscrit est égale à $\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$. Si on désigne par c_1 la mesure du polygone régulier circonscrit, on a $\frac{c_1}{c} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}}$. Si on prend le rayon pour unité, il vient $c_1 = \frac{2c}{\sqrt{4 - c^2}}$.

A titre d'exercice, si on regarde les valeurs approchées obtenues à partir du carré comme polygone régulier initialisant le processus, il vient :

(23) Archimède a utilisé cette méthode et a proposé de prendre pour valeur de π la fraction $\frac{22}{7}$; pour ce faire il a pris l'hexagone régulier comme polygone initialisant le processus, en s'arrêtant au polygone régulier de 96 côtés.

Nombre de côtés	valeur de π par défaut	valeur de π par excès
4	2,828 427	4
8	3,061 467	3,313 708
16	3,121 445	3,182 667
32	3,136 548	3,151 723
64	3,140 329	3,144 116
128	3,141 269	3,142 213
256	3,141 556	3,141 847

En résumé, on a défini le nombre π par la suite $(U_n)_{n\in N}$ où $U_1 = 2^1\sqrt{2}$, $U_2 = 2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $U_3 = 2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $U_4 = 2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots$; c'est à dire, si on pose $\alpha_1 = \sqrt{2}$ et $\alpha_n = \sqrt{2+\sqrt{\alpha_{n-1}}}$, le terme général de la suite $(U_n)_{n\in N}$ est $U_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{2-\sqrt{\alpha_n}}$.

Dans les approximations qui ont été proposées, on peut signaler celle d'Adrien Métius qui donne pour valeur de π la fraction $\frac{355}{113}$; cette valeur est exacte au millième près et Adrien Métius l'attribue à son père Adrien Métius comme l'ayant publiée dans sa *Geometriæ practica* dans une réfutation de la quadrature du cercle proposée par Simon Duchesne.

384. Méthode des isopérimètres (proposée par Schwab) :

Cette méthode est une variante de la précédente ; elle conduit à des calculs plus simples que ceux exigés par la méthode des périmètres.

On calcule le rapport du périmètre p d'un polygone régulier au rayon r du cercle circonscrit et à l'apothème a, ou au rayon du cercle inscrit pour des polygones réguliers dont le nombre de côtés augmentent indéfiniment. Les rapports $\frac{p}{r}$ et $\frac{p}{a}$ ne dépendent que du nombre de côtés de ces polygones réguliers, et non de la circonférence choisie. Par suite, dans cette méthode on ne considère que des polygones réguliers dont le nombre de côtés double indéfiniment et qui ont un périmètre constant. Le calcul de π se ramène au problème suivant :

• *Problème III* : Etant donnés le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier trouver le rayon r_1 et l'apothème a_1 du polygone régulier d'un nombre double de côtés, isopérimètre au premier.

Si c est le côté d'un polygone régulier à n côtés, il faut trouver le rayon et l'apothème du polygone régulier à $2n$ côtés de longueur $\frac{c}{2}$ en fonction du rayon et de l'apothème du polygone régulier initial. En effet si, pour simplifier, on prend une circonférence de périmètre 2, c'est à dire des polygones réguliers de périmètre 2, on a $\pi = \frac{2}{2R}$, ou $R = \frac{1}{\pi}$.

Ainsi le rayon initial et l'apothème de tout polygone régulier de périmètre égal à 2 sont des valeurs approchées, l'une par excès l'autre par défaut de $\frac{1}{\pi}$; il suffit de vérifier que la différence entre ces valeurs peut-être "aussi petite que l'on veut" pourvu que les polygones réguliers aient assez de côtés.

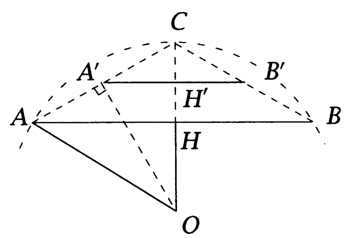


Fig. 178.

Soient AB le côté d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de centre O, de rayon $OA = r$, et $OH = a$ la perpendiculaire issue de O au côté AB. La demi-droite OH coupe l'arc $\widehat{AB}$ en son milieu C ; notons A' et B' les milieux respectifs de AC et de BC.

Le segment $A'B'$ représente le côté du polygone régulier de $2n$ côtés isopérimètrique au polygone initial (**123**). Comme l'angle $\widehat{A'OB'}$ est égal à la moitié de l'angle $\widehat{AOB}$ (**149**)(**55**), ce polygone est inscrit dans le cercle de centre O de rayon $OA' = r'$ et est d'apothème $OH' = a'$ où H' est le point intersection de OH avec AB.

Le point H' étant le milieu de CH, on a $OH' = \frac{1}{2}(OC + OH)$, et, le triangle $OA'C$ étant rectangle, on a $OA'^2 = OC \cdot OH'$; on obtient ainsi :

$OH' = a' = \frac{1}{2}(a + r)$ et $OA' = r' = \sqrt{ra'}$ (*).

Il reste à vérifier que la différence entre le rayon et l'apothème est "aussi petite que l'on veut" ; le côté AB étant divisé indéfiniment par 2, on peut déduire ce résultat immédiatement de (**357**). Plus précisément :

$$\begin{aligned} r' - a' &= \sqrt{r\frac{a+r}{2}} - \frac{a+r}{2} \\ &= \sqrt{\frac{a+r}{2}}\left(\sqrt{r} - \sqrt{\frac{a+r}{2}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{a+r}{2}}\,\frac{r - \frac{a+r}{2}}{\sqrt{r} + \sqrt{\frac{a+r}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{a+r}{2}}}{\sqrt{r} + \sqrt{\frac{a+r}{2}}}\,\frac{r-a}{2} \end{aligned}$$

Comme a est moindre que r, on vérifie que $\frac{\sqrt{\frac{a+r}{2}}}{\sqrt{r}+\sqrt{\frac{a+r}{2}}} < \frac{1}{2}$ et $r' - a' < \frac{r-a}{4}$.

Pour initialiser cet algorithme, prenons un carré de périmètre égal à 2, c'est à dire de côté égal à $\frac{1}{2}$ et désignons son apothème par a_1, et son rayon par r_1 : on a $a_1 = \frac{1}{4}$ et $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

A l'aide des formules précédentes on calcule les apothèmes et les rayons $a_2, r_2, a_3, r_3, a_4, r_4, \ldots$, des polygones réguliers isopérimètriques de 8, 16, 32, ... côtés ; on obtient :

$a_2 = \frac{a_1+r_1}{2}, r_2 = \sqrt{r_1a_2}$; $a_3 = \frac{a_2+r_2}{2}, r_3 = \sqrt{r_2a_3}$; ...

et $r_2 - a_2 < \frac{r_1-a_1}{4}, r_3 - a_3 < \frac{r_2-a_2}{4} < \frac{r_1-a_1}{4^2}, \ldots$

Par récurrence on voit que $r_n - a_n < \frac{r_1-a_1}{4^n}$; par suite la différence $r_n - a_n$ est "aussi petite que l'on veut".

D'autre part on remarque dans la suite $a_1, r_1, a_2, r_2, \ldots, a_n, r_n, \ldots$, chaque terme, à partir du troisième, est alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique des deux termes le précédant et que les termes de rang pair $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vont en croissant tout en restant inférieurs à $\frac{1}{\pi}$, tandis que les termes de rang pair $r_1, r_2, r_3, \ldots$ vont en décroissant tout en restant supérieurs à $\frac{1}{\pi}$. On énonce cette remarque ainsi :

385. Théorème de Schwab. — *En formant une suite de nombres dont les deux premiers soient* 0 *et* $\frac{1}{2}$, *dont chaque terme soit alternativement moyenne arithmétique et moyenne géométrique entre les deux précédents, les nombres ainsi écrits tendront vers* $\frac{1}{\pi}$.

Note : A une époque où la calculette n'avait pas cours, pour mémoriser les premières décimales de π, on utilisait des procédés de mémorisation. Pour retenir les trente premières décimales de π Beutel proposa en 1 913 les vers suivants :

Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages !
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
8 9 7 9
Qui de ton jugement peut briser la valeur ?
3 2 3 8 4 6 2 6
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9
Tirez circonférence au diamètre etcetera.
5 0 2 8 8

Signalons le poème mnémotechnique suivant :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Glorieux Archimède, artiste ingénieux,
Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,
Soit ton nom conservé par de savants grimoires !
Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
O quadrature ! vieux tourment du philosophe !
Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
Comment intégrer l'espace plan circulaire ?
Former un triangle auquel il équivaudra ?
Nouvelle invention : Archimède inscrira
Dedans un hexagone ; appréciera son aire
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :
Dédoublera chaque élément antérieur ;
Toujours de l'orbe calculée approchera ;
Définira limite ; enfin, l'arc le limiteur
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle !
Professeur, enseignez son problème avec zèle !...

◇ Pour terminer rapportons les propos du Géomètre S. F. Lacroix :

Les recherches des savants anglais dans l'Inde nous ont fait connaître un rapport de la circonférence au diamètre plus approché que celui d'Archimède : c'est celui de 3 927 *à* 1 250, *consigné dans l'Akberry, ouvrage persan contenant un extrait de la doctrine des brahmes, et traduit en anglais par M. Gladwin* (tome II page 317).

Si l'on multiplie par 8 *les deux termes de ce rapport, ils deviennent* 31 416 *et* 10 000 *; puis, si l'on double ceux-ci, on obtient* 62 832 *et* 20 000, *qui se trouvent dans l'Algèbre de Mohammed-Ben-Musa, auteur oriental du IX*$^{\text{ième}}$ siècle (page 71 de la traduction anglaise). Ce dernier rapport est celui des Indiens ramené au rayon 10 000 et répond au polygone régulier de 768 côtés.

§10. QUELQUES SOPHISMES RÉCRÉATIFS ET INSTRUCTIFS.

A travers les temps, la Géométrie a posé le problème de savoir ce qu'est une démonstration et de l'utilité d'une méthode en Géométrie. L'informatique a depuis peu repris le relais et a posé la question supplémentaire de savoir ce que sont un problème ou un théorème de Géométrie et une démonstration géométrique : un ordinateur ne connait que des formules numériques ou littérales (calcul formel) et un problème de géométrie est un "problème de situations". On ne pose pas un problème de géométrie comme on pose un problème d'algèbre : un problème de géométrie se pose de manière générique, toute information supplémentaire est liée aux précédentes et fait partie d'un tout.

Le but de cet appendice n'est pas de répondre à ces questions, questions liées à l'Intelligence artificielle, aux problèmes de réécriture, etc... et non entièrement résolues bien que des résultats prometteurs aient été réalisés ; citons pour un lecteur curieux le livre de Shang-Ching Chou "Mechanical Geometry Theorem Proving" (D. Reidel Publishing Company 1 988). On fermera cette parenthèse sur ces récents développements en posant la question : quand une formule littérale est-elle un théorème de Géométrie ?

Sur l'utilité de la méthode en géométrie, on rapportera une phrase d'Hadamard relevée dans *Sur la méthode en Géométrie* qui peut servir de ligne de conduite à tout enseignant et permettre à l'enseigné d'acquérir l'autonomie suffisante pour prendre les raisonnements à son propre compte et ne pas être seulement la "voix de son maître" :

L'éléve doit en effet se persuader qu'il ne pourra recueillir quelque fruit de ses études mathématiques, ni même les poursuivre sans efforts exagérés et se faire une idée juste de ce qu'est la géométrie s'il ne parvient non seulement à comprendre les raisonnements qui lui sont exposés, mais encore à en construire d'autres par lui-même, et trouver dans une mesure plus ou moins étendue, des démonstrations de théorème ou de solutions de problème.

Afin de mieux pouvoir se poser la question de savoir ce qu'est une démonstration et d'attirer l'attention sur les pièges que peut rencontrer un *commençant*, on va présenter certains paradoxes célèbres dûs à un raisonnement incorrect ou à une construction réalisée avec un peu trop de légèreté.

Précisons qu'un paradoxe mathématique est un résultat notoirement faux obtenu après des opérations que l'on croit être justes. Il est nécessaire d'expliquer tout paradoxe sinon il jette le trouble dans l'esprit alors qu'expliqué il a sa place dans l'enseignement. De toute manière, il faut être très prudent quant à leur utilisation dans la phase initiatique et plutôt que de les approfondir il vaut mieux se borner à les montrer, ce que nous ferons.

386. *Démontrer géométriquement que* $64 = 65$, *ou* $1 = 0$:

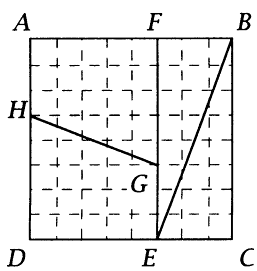


Fig. 179.

On prend un carré $ABCD$ que l'on divise en 64 carrés égaux, c'est à dire on divise les côtés du carré en 8 segments égaux, et on joint les extrémités correspondantes de ces segments (Fig. 179).

Partageons-le en deux triangles rectangles égaux EFB et EBC et en deux trapèzes égaux $AFGH$ et $GHDE$ comme il est indiqué sur la figure 179.

Découpons le carré suivant les segments EB, EF, GH et disposons le tout comme l'indique la figure 180. Le rectangle obtenu renferme 65 (13×5) carrés tous égaux à ceux définis dans le carré $ABCD$. Il en résulte que 64 égale 65 ! Et 1 égale 0 !

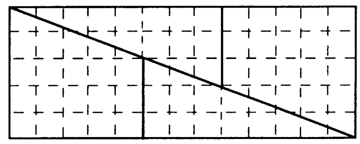


Fig. 180.

387. *Démontrer que tout triangle est isocèle :*

Soit un triangle ABC scalène (quelconque), la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ coupe la médiatrice du côté BC en un point P sinon le triangle ABC est isocèle de sommet principal A (**59**) ; pour une raison identique le point P n'est pas situé sur BC.

On démontre de la même manière que le triangle est isocèle que le point P soit intérieur ou extérieur au triangle (cf. Figure ci-dessous).

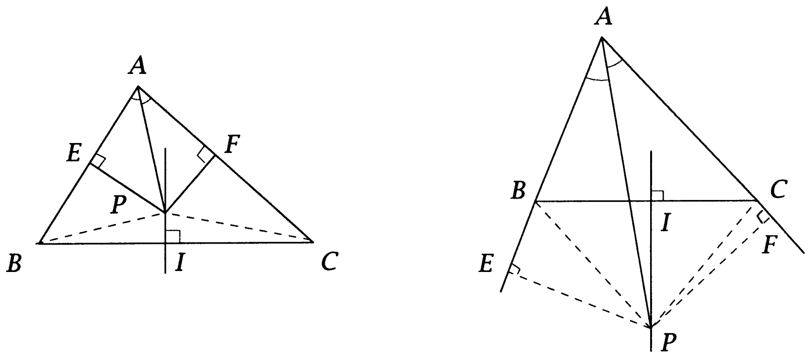


Fig. 181.

La droite AP étant bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ on a $PE = PF$ et les triangles rectangles AEP et AFP sont égaux (**82**) ; par suite $AE = AF$ (*). Comme le point P est situé sur la médiatrice du segment BC, on a $PB = PC$: les triangles rectangles PEB et PFC sont égaux et $EB = FC$ (**).

Des égalités (*) et (**) on déduit, par addition ou soustraction selon que le point P est intérieur ou extérieur, que $AB = AC$: le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.

388. *Démontrer que si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, le quadrilatère est un trapèze isocèle :*

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ tel que les côtés AD et BC soient égaux ; on montre que les côtés AB et CD sont parallèles.

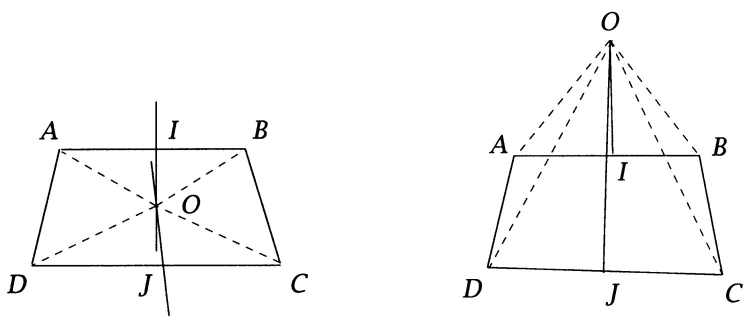


Fig. 182.

Les médiatrices des côtés AB et CD se coupent en un point O, sinon les côtés AB et CD sont parallèles ; notons I et J les milieux des côtés AB et CD.

On démontre que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle que le point O soit intérieur ou extérieur au quadrilatère.

Le point O étant situé sur la médiatrice de AB et de CD, on a $OA = OB$ et $OC = OD$; comme $AD = BC$ par hypothèse, les triangles OAD et OBC sont égaux. Par suite les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$ sont égaux.

D'autre part les triangles rectangles AOI et BOI, respectivement COJ et DOJ, sont égaux (**82**) et les angles $\widehat{AOI}$ et $\widehat{BOI}$, respectivement $\widehat{COJ}$ et $\widehat{DOJ}$, sont égaux.

1º *Le point O est intérieur* : La somme de ces angles est égale à quatre angles droits ; par suite la somme des angles $\widehat{IOA}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{DOJ}$ est égale à deux angles droits et les points I, O et J sont alignés. Les droites AB et CD sont parallèles comme droites perpendiculaires à une même troisième.

2º *Le point O est extérieur* : On déduit aisément les égalités angulaires suivantes :
$\widehat{IOJ} = \widehat{AOI} - \widehat{AOD} - \widehat{DOJ} = \widehat{BOI} - \widehat{BOC} - \widehat{COJ} = -\widehat{IOJ}$
Ceci n'est possible que si l'angle $\widehat{IOJ}$ est nul, c'est à dire si les points O, I, J sont alignés. Le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

389. *Démontrer que tout point d'un segment est milieu de ce segment* :

Considérons P un point quelconque d'un segment AB et C un point du plan tel que le triangle ABC soit isocèle de base AB.

Les triangles PAC et PBC ayant les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ égaux, les côtés AC et BC égaux, et le côté PC en commun, sont égaux. Par suite AP égale PB et P est situé au milieu de BC.

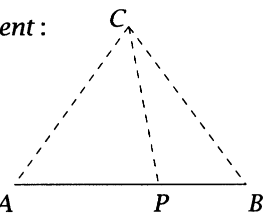


Fig. 183.

390. *Démontrer qu'une partie d'un angle est égale à l'angle entier* :

Soient $ABCD$ un carré et I et J les milieux respectifs des côtés AB et CD. On considère E un point du plan tel que CE égale CD. La médiatrice du segment AE coupe la droite IJ en un point P ; notons K le milieu de AE.

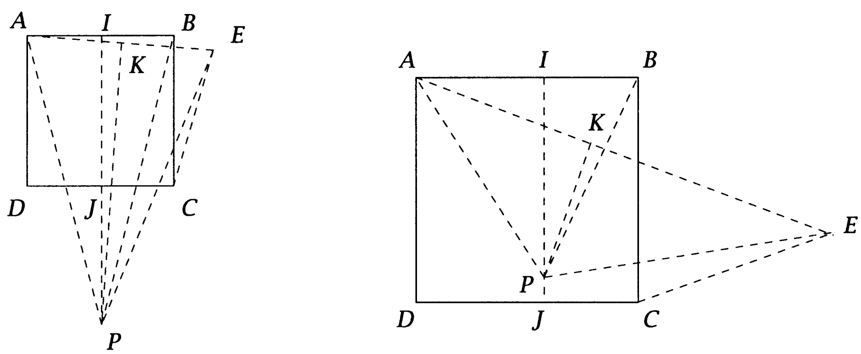


Fig. 184.

On démontre (de la même manière) que l'angle $\widehat{PCE}$ égale l'angle $\widehat{PCB}$ que le point P soit extérieur ou intérieur au carré.

Le point P est situé sur la médiatrice des segments AB et AE, par suite :
$PA = PB$, $PA = PE$, d'où $PB = PE$.

Comme $CB = CE$ par hypothèse, les triangles PCE et PCB sont égaux (**51**) et l'angle $\widehat{PCE}$ égale l'angle $\widehat{PCB}$.

390 bis. *Démontrer qu'une partie d'un angle est égale à l'angle entier* :

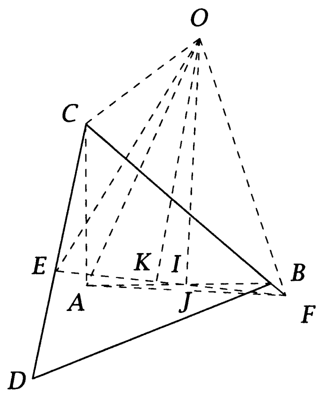


Fig. 185.

On considère ABC un triangle rectangle en A et BCD un triangle équilatéral. Sur le côté DC on prend le point E tel que CE égale CA, et si I est le milieu du côté AB, on trace la droite EI qui coupe le prolongement du côté CB au point F. On note J et K les milieux respectifs des segments AF et EF ; les médiatrices de ces segments se coupent en un point O vu que les points A, E, F, ne sont pas alignés.

Montrons que l'angle $\widehat{ACO}$ égale l'angle $\widehat{ECO}$. Le point O est équidistant des points A et F et des points F et E ; par suite OE égale OF. Comme les segments CA et CE sont égaux par hypothèse, les triangles ACO et ECO sont égaux et l'angle $\widehat{ACO}$ égale l'angle $\widehat{ECO}$.

391. *Démontrer que la somme de deux côtés d'un triangle est égale au troisième côté* :

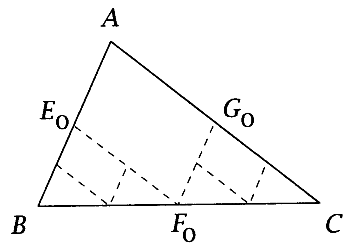


Fig. 186.

Soient ABC un triangle et E_0, F_0, G_0 les milieux respectifs des côtés AB, BC et AC.

Comme le segment E_0F_0 est égal à la moitié du segment AC et le segment F_0G_0 est égal à la moitié du segment AB, la ligne brisée L_0 définie par les points B, E_0, F_0, G_0, C est de mesure $AB + AC$.

En effectuant une construction semblable avec les triangles BE_0F_0 et F_0G_0C, on obtient une ligne brisée L_1 de mesure $AB + AC$, et ainsi de suite...

Il est clair que la ligne brisée L_n tend vers le segment BC quand n tend vers l'infini(24), et est de mesure constante égale à $AB + AC$ pour tout n ; d'où la mesure du segment BC est égale à la somme des mesures des segments AB et AC.

392. *Démontrer que la longueur d'une demi-circonférence est égale la longueur du diamètre et $\pi = 2$* :

On considère une demi-circonférence C de centre O et de diamètre AB égal à $2R$. La longueur de cette demi-circonférence est égale à πR.

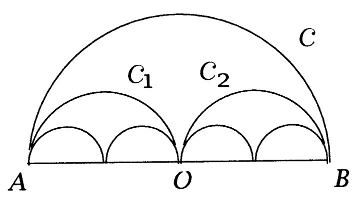


Fig. 187.

Soient C_1 et C_2 deux demi-circonférences de diamètre AO et OB respectivement. La longueur de C_1 est égale à $\pi\frac{R}{2}$, et celle de C_2 à $\pi\frac{R}{2}$; la longueur de la ligne curviligne AOB est égale à πR ; notons L_0 cette ligne.

De même, on obtient une ligne L_1 de longueur πR en formant quatre arcs de cercle de diamètre égal à $\frac{1}{4}AB$, et ainsi de suite...

La ligne curviligne L_n tend vers le diamètre AB quand n tend vers l'infini et est de mesure constante égale à πR ; d'où la mesure du diamètre AB est égale à la mesure de la demi-circonférence de diamètre AB.

(24) Pour tout m il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout point M de L_n la distance de M à BC est moindre que $\frac{1}{m}$.

393. *Démontrer le postulat d'Euclide, sans l'aide d'aucun postulat* :

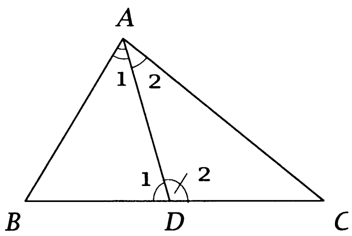


Fig. 188.

Soit x la somme des mesures des angles internes d'un triangle quelconque ABC, et D un point de la base BC. Notons $\widehat{A_1}$ l'angle $\widehat{BAD}$, $\widehat{A_2}$ l'angle $\widehat{DAC}$, $\widehat{D_1}$ l'angle $\widehat{BDA}$, et $\widehat{D_2}$ l'angle $\widehat{ADC}$.

On a les relations angulaires suivantes :

$$\hat{B} + \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = x \text{ et } \widehat{A_2} + \widehat{D_2} + \hat{C} = x$$

Donc $\hat{B} + \widehat{A_1} + \widehat{D_1} + \widehat{A_2} + \widehat{D_2} + \hat{C} = 2x$

Mais $\hat{B} + \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \hat{C} = x$ et $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 180°$.

Par suite $x + 180° = 2x$ et $x = 180°$: ceci implique le postulat d'Euclide (**95**).

394. *Le paradoxe de* Proclée (V^{ième} siècle av. J. C.) :

Soient AQ et BP deux demi-droites ne se coupant pas, telle que la première forme un angle aigu, et la deuxième un angle droit avec la droite AB.

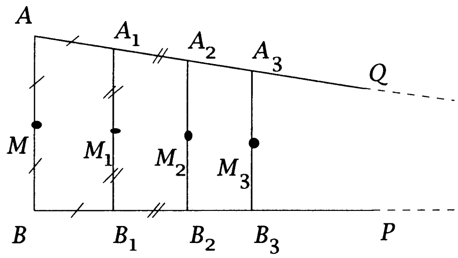


Fig. 189.

Soit M le milieu de AB. On note A_1 le point de AQ tel que $AA_1 = AM$, et B_1 le point de BP tel que $BB_1 = BM$. Les segments AQ et BP ne peuvent se couper dans ABB_1A_1 : en effet s'ils avaient un point commun H, nous aurions un triangle ABH avec $AH + BH \leq AB$ ce qui est absurde. Par suite AA_1 et BB_1 n'ont pas de point commun.

Réitérons ce processus, et soient M_1 le milieu de A_1B_1, A_2 le point de AQ et B_2 celui de BP tels que $A_1A_2 = A_1M_1$ et $B_1B_2 = B_1M_1$; pour des raisons similaires ils n'ont pas de point commun. On obtient ainsi une suite de points M_n milieu du segment A_nB_n tels que les segments A_nA_{n+1} et B_nB_{n+1} n'ont pas de point commun.

Les points A_m et B_m ne peuvent être confondus, sinon $A_{m-1}B_{m-1} = A_{m-1}A_m + B_{m-1}B_m$ et les droites $A_{m-1}B_{m-1}$, $A_{m-1}Q$, $B_{m-1}Q$ seraient confondues. En outre on aurait un triangle rectangle ABA_m d'hypothénuse AA_m égale au côté BA_m.

395. *Démontrer que par un point extérieur à une droite on peut abaisser deux perpendiculaires distinctes* :

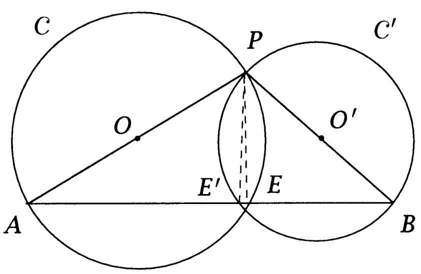


Fig. 190.

On considère C et C' deux circonférences sécantes de centre O et O' ; notons P un des points d'intersection de ces circonférences et traçons les diamètres PA et PB.

La droite AB coupe la circonférence C en E et la circonférence C' en E'. Les angles $\widehat{PEA}$ et $\widehat{PE'B}$ sont droits (**183**) : du point P on peut abaisser deux perpendiculaires distinctes sur la droite AB.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III.

238. On considère une circonférence de centre O, et une corde CD. Sur cette corde, comme diamètre, on décrit une circonférence de centre O' ; la ligne des centres OO' coupe la première circonférence en A et B. Du point A on mène les tangentes à la deuxième circonférence AT et AT' ; la corde TT' coupe OO' en F. Démontrer que le point O' est milieu du segment BF.

239. Deux droites parallèles coupent deux droites sécantes Ox et Oy aux points A, B, et C, D. Les segments AD et BC se coupent en O'. Si on note I et J les milieux respectifs des segments AB et CD, montrer que les points O, I, O', J, sont alignés.

240. Trois droites sécantes Ox, Oy, Oz, sont intersectées par deux droites parallèles aux points A, B, C, et E, F, G, respectivement. Montrer l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$.

241. On donne un quadrilatère $ABCD$; la parallèle menée de B à CD coupe AC en F, et celle menée de C à AB coupe BD en G. Démontrer que les droites AD et FG sont parallèles.

242. Des sommets A et B d'un parallélogramme $ABCD$ on abaisse des perpendiculaires AM et BN aux diagonales BD et AC respectivement. Démontrer que ces perpendiculaires sont inversement proportionnelles aux diagonales sur lesquelles elles tombent.

243. Démontrer que la somme des carrés des distances d'un point P, intérieur à un rectangle, à deux sommets opposés A et C est égale à la somme des carrés de ses distances aux deux autres sommets B et D.

244. Le demi-cercle décrit sur le côté oblique BC d'un trapèze rectangle $ABCD$, vers l'intérieur du trapèze, rencontre le côté opposé AD aux points M et N. Démontrer que le produit des segments déterminés par l'un quelconque des points M et N sur AD est égal aux produits des bases.

245. Si deux triangles ont un angle égal et qu'un second angle soit le supplément d'un angle de l'autre, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels aux côtés opposés aux angles supplémentaires.

246. Sur un diamètre AB d'une circonférence C on prend deux points C et D équidistants du centre O, et on trace d'un même côté du diamètre des droites parallèles CM et DN limitées à la circonférence. Démontrer les égalités $CM \times DN = CA \times CB = DA \times DB$.

247. Deux cordes perpendiculaires AB et DC se coupent en M. Démontrer que la somme des carrés des quatre segments déterminés par le point M sur ces cordes reste constante, quelles que soient la position du point M et la direction des cordes.

248. On considère deux circonférences concentriques de centre O ; on joint un point variable M de l'une d'elle aux extrémités d'un diamètre variable AB de l'autre. Démontrer que la somme $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$ reste constante lorsque le point M et le diamètre varient, et que cette somme ne dépend que des deux circonférences initiales.

249. Une droite issue du sommet A d'un carré $ABCD$ coupe les côtés BC en M et DC en I. Démontrer la relation $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{2}{AC^2}$.

250. Par le sommet A d'un parallélogramme $ABCD$, on mène une sécante AMN qui coupe BC en M et DC en N. Prouver que le produit $BM \cdot DN$ est constant.

Par un point O de la diagonale BD on mène une sécante qui coupe les côtés adjacents AB, AD aux points F et G, et les deux autres côtés BC, DC aux points F' et G'. Démontrer la relation $OF \cdot OG = OF' \cdot OG'$.

251. Quel est le lieu géométrique des points du plan dont la distance à l'un des côtés d'un angle est le double de la distance à l'autre côté ?

252. D'un point A extérieur à une circonférence de centre O on trace une sécante mobile ABC ; en M milieu de la corde BC, on trace MD perpendiculaire à BC et égal à MA. Quel est le lieu géométrique du point D ?

253. On considère un triangle ABC de base fixe BC et d'angle constant $\widehat{A}$. Quel est le lieu géométrique de la projection du milieu du côté AB sur le côté AC, lorsque le sommet A varie ?

254. On considère un triangle rectangle ABC rectangle en A et on trace la circonférence de diamètre la médiane AM ; cette circonférence coupe les côtés AB et AC aux points P et N respectivement.

1º Montrer que les points P et N sont les milieux respectifs des côtés AB et AC ;

2º Le point A décrivant la circonférence de diamètre BC, quel est le lieu géométrique des points P et N ? Que peut-on dire du segment PN dans ce mouvement ?

255. On considère un point P situé dans un angle $\widehat{xOy}$; une droite ∂ passant par P coupe les côtés de cet angle en B et C. Déterminer ∂ telle que la somme $\frac{1}{BP} + \frac{1}{PC}$ soit maximum.

256. Inscrire dans une circonférence donnée un triangle isocèle dont la base soit égale à la hauteur.

257. On considère deux circonférences égales C et C', de centre O et O', et non sécantes. Si I milieu de OO' est donné, tracer à la règle seule le symétrique d'un point M du plan par rapport au point I. Peut-on généraliser ce problème au cas où les circonférences ne sont pas égales ?

258. On considère deux circonférences sécantes, de centre O et O'. Tracer par l'un des points d'intersection C une sécante AB qui soit divisée par ce point dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

259. Sur le côté AB d'un carré $ABCD$ on décrit, à l'extérieur du carré, une demi-circonférence de diamètre AB. Sur cette demi-circonférence on considère un point M et on trace les droites MC et MD qui coupent le côté AB en P et Q respectivement. Les perpendiculaires menées des points P et Q au côté AB coupent MB et MA aux points S et R.

Quelle est la nature du quadrilatère $RSPQ$? En déduire la relation $PQ^2 = PB \times QA$.

260. On considère deux circonférences C_1 et C_2 de centre O_1 et O_2, sécantes en P et Q, et une sécante commune EPF.

S'il existe une circonférence C de centre ω telle que C_1 et C_2 lui soient tangentes intérieurement en E et F, que peut-on dire du quadrilatère $O_1\omega O_2P$?

Déterminer une sécante EPF telle que le produit $PE \cdot PF$ soit maximum.

261. Un rectangle est divisé en trois carrés $ADFE$, $EFHG$, $GHCB$. Démontrer que l'angle $\widehat{BHC}$ est égal à la somme des angles $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BFC}$.

262. On considère un parallélogramme $ABCD$ et un point M sur la diagonale BD. On trace les parallèles aux côtés de ce parallélogramme passant par M. La parallèle au côté AD coupe AB en I et DC en J, et celle respective au côté AB coupe AD au point K et BC au point L.

Démontrer que les droites IK, BD, LJ, sont parallèles ou concourantes.

263. Sur les côtés égaux AB, AC d'un triangle isocèle (ou sur leurs prolongements), on prend deux points B' et C'. La droite issue de A, passant par le milieu I du segment $B'C'$, coupe le côté BC au point D.

Montrer que le point D divise le côté BC proportionnellement aux segments AC' et AB'.

264. On considère six triangles semblables ayant un côté commun AB et étant tous situés d'un même côté par rapport à ce côté commun ; on les note CAB, ABF, AEB, $C'BA$, BAF', $BE'A$ (les triangles se déduisent deux à deux par symétrie par rapport à la médiatrice au segment AB).

Démontrer que les sommets de ces triangles qui ne sont pas situés sur AB sont cocycliques (Indication : considérer les puissances des points A et B par rapport au cercle circonscrit au triangle CEF).

265. Montrer qu'un point P pris sur la diagonale AC d'un losange $ABCD$, divise cette diagonale en deux segments dont le produit est égal à la différence $AB^2 - PB^2$ du carré du côté du losange et du carré de la distance du point P au sommet B.

266. Sur les côtés AB, AC, BC d'un triangle ABC on construit, extérieurement au triangle, des carrés de centres O_1, O_2, O_3. Montrer que si les points A et O_3 sont de part et d'autre du côté BC, les segments O_1O_2 et AO_3 sont égaux et perpendiculaires.

Notons O_1 le point situé du côté opposé au point C par rapport à AB. Montrer que les droites AO_3, BO_2 et CO_1 sont concourantes.

267. *Théorème de* Ptolémée Dans un quadrilatère inscriptible la somme des produits des deux couples de côtés opposés est égale au produit des diagonales.

268. *Réciproque du théorème de* Ptolémée. Si ABC est un triangle et P un point du plan non situé sur l'arc $\widehat{CA}$ du cercle circonscrit au triangle, on a l'égalité $AB \cdot CP + BC \cdot AP > AC \cdot BP$.

269. On considère un triangle équilatéral ABC. Un point P du plan est tel que $PC + PA = PB$ ou $PC + PA > PB$ suivant qu'il est ou non situé sur l'arc $\widehat{AC}$ du cercle circonscrit au triangle ABC.

270. Si un point P est situé sur l'arc $\widehat{CD}$ du cercle circonscrit à un carré $ABCD$ on a $PA\,(PA + PC) = PB\,(PB + PD)$.

271. Montrer que la différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles est égale à deux fois le produit de la distance des centres par la distance du point à l'axe radical.

272. Soit C un cercle fixe de centre O. On considère deux points fixes A et B tels que le point O ne soit pas situé sur la médiatrice de AB, et C' un cercle variable passant par les points A et B. Montrer que l'axe radical des cercles C et C' passe par un point fixe situé sur la droite AB lorsque le cercle C' varie tout en passant par les points de base A et B.

273. On donne trois points fixes A, B, C alignés, dans cet ordre, et on note $\triangle$ la perpendiculaire élevée en C à la droite ABC. Par A et B on mène deux droites perpendiculaires variables coupant la droite $\triangle$ en M et N respectivement.

1º Que peut-on dire des droites AN et BM ?

2º Montrer qu'il existe deux points fixes I et J d'où l'on voit le segment MN sous un angle droit.

3º Les droites AM et BN se coupent en P, et les droites AN et BM en Q. Montrer que la droite PQ passe par un point fixe.

4º Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle AMN et du centre du cercle circonscrit au triangle BMN ?

274. Deux sécantes coupent quatre droites issues d'un même point O en A, B, C, D, et A', B', C', D' respectivement. Montrer que les rapports $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ et $\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$ sont égaux.

Ce rapport, étant indépendant de la sécante considéré, on a un rapport harmonique s'il est compté avec son signe algébrique.

275. Soient ABC un triangle et a, b, c trois points situés sur les côtés BC, CA, AB tels que $\frac{Ba}{BC} = \frac{Cb}{CA} = \frac{Ac}{AB} = \frac{1}{3}$. Si E, F, G dénotent les intersections respectives de Bb, Cc, de Aa, Cc, et de Bb, Aa, alors E est milieu de FC, G est milieu de EB, et F est milieu de AG (Indication : cf exercices nº 83 et 183).

276. On considère trois couples de droites parallèles ∂ et ∂', d et d', $\triangle$ et $\triangle'$. Les droites d et d' coupent les droites ∂ et ∂' en F, F' et B, B' respectivement ; les droites $\triangle$ et $\triangle'$ coupent les droites ∂ et ∂' en E, E' et C, C' respectivement. Si la droite $\triangle$ coupe la droite d en A et la droite $\triangle'$ coupe la droite d' en A' tels que les points A, B, C' sont alignés, montrer que les points E, A', F' sont alignés.

277. Par le point E d'une demi-circonférence de diamètre AB on mène un tangente ; cette tangente coupe les tangentes menées de A et B en C et D. Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de E sur AB ; montrer que la droite AD passe par le milieu I de EH. En déduire que les droites AD, BC, EH sont concourantes.

278. On dit que l'on voit d'un point donné un cercle donné sous un angle α si l'angle des tangentes menées de ce point au cercle est égal à l'angle α.

Quel est le lieu géométrique des points d'où l'on voit deux cercles donnés sous des angles égaux ?

279. On inscrit un triangle ABC dans un cercle C de telle sorte que BC ne soit pas un diamètre. Les tangentes en B et C au cercle C se coupent en un point D, et par D on mène la paralléle à la tangente en A qui coupe la droite AB en F et la droite AC en E. Soit K le point de la droite AD tel que DK égale DE. Montrer que l'angle $\widehat{EKF}$ est un angle droit.

280. On considère un carré $ABCD$ de diagonales AC et BD, et P et Q deux points intérieurs au carré tels que les triangles BPC et CQD soient égaux et isocèles d'angles à la base θ.

Montrer que les droites CP et DQ sont perpendiculaires. Pour quelles valeurs de θ le triangle ADP est-il équilatéral ?

281. Dans une plaine un Cow-boy à cheval s'approche d'un lac dont les rives forment un angle droit. Quel est le chemin le plus court que le Cow-boy doit emprunter pour abreuver son cheval ?

282. Un chien et son maître se trouvent de part et d'autre d'un canal aux rives paralléles aux points A et B respectivement. Sachant que le chien nage deux fois moins vite qu'il ne marche, où doit-il aborder la rive opposée pour rejoindre son maître le plus rapidement possible ?

283. On considère A et B deux points fixes situés de part et d'autre de deux droites paralléles d et d', et ∂ une direction donnée. Trouver un point M sur d et un point M' sur d' tels que la direction MM' soit la direction donnée et tels qu'une des conditions suivantes soit réalisée :

1º Les distances AM et BM' sont égales ;

2º Les droites AM et BM' sont perpendiculaires ;

3º Les droites AM et BM' sont paralléles.

284. Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC, et à l'extérieur, on construit les carrés $ABDE$, $ACFG$, $BCLM$. Démontrer que :

1º Les triangles ABC et AEG sont tels que la médiane issue de A de l'un d'eux est dans le prolongement de la hauteur issue de A de l'autre ; en outre le segment EG (resp. BC) est le double de la médiane du triangle ABC (resp. AEG) issue de A.

2º Les segments CD et AM sont égaux et perpendiculaires, ainsi que les segments BF et AL.

3º On prolonge AJ d'une longueur égale JS ; montrer que les droites BS et CD sont perpendiculaires.

4º Montrer que les droites AS, BF et CD sont concourantes.

285. Soient deux points fixes B et C situés sur une circonférence C de centre O, et A un point mobile de la circonférence. Quel est le lieu géométrique de l'orthocentre H du triangle ABC lorsque le point A décrit la circonférence C ?

Poser le même problème pour le centre du cercle inscrit, ou exinscrit, ou le centre de gravité.

286. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et l_1 et l_2 deux longueurs donnés. Construire un quadrilatère $ABCD$ tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{v}$, $AD = l_1$ et $BC = l_2$.

287. Soient C une circonférence de centre O, et $\overrightarrow{v}$ un vecteur libre donnés. Si M est un point mobile de la circonférence C, on considère le point N tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{v}$ et le point P tel que le quadrilatère convexe $OMPN$ soit un parallélogramme.

Montrer que les droites PM et PN passent chacune par un point fixe que l'on déterminera lorsque le point M décrit la circonférence. Que peut-on dire du point O par rapport aux deux points fixes ?

Si au lieu de décrire une circonférence, le point mobile M décrit un quadrilatère convexe dont l'intersection des diagonales est le point O, a-t-on un résultat similaire ?

288. Inscrire dans une circonférence donnée un triangle dont un côté passe par un point donné, et les deux autres ont des directions données.

289. Construire un triangle ABC étant données la longueur $AB+AC$, la direction BC et sachant que les sommets B et C sont situés sur deux demi-droites Ax et Ay.

290. *Cercles de* Mohr : On considère trois circonférences C_1, C_2, C_3 de centre ω_1, ω_2, ω_3, de rayon R_1, R_2, R_3, telles que C_1 et C_3 sont tangentes extérieurement en un point B, et toutes deux tangentes intérieurement à la circonférence C_2 en A et D respectivement. On suppose de plus que les centres ω_1, ω_2, ω_3 sont alignés.

1º Une circonférence C de centre ω_1 de rayon R supérieur à R_1, recoupe la circonférence C_2 en un point P et la circonférence C_3 en un point Q, points situés d'un même côté par rapport à la droite AD. Montrer que les points D, P, Q sont alignés.

2º Une circonférence C de centre ω_2 recoupe la circonférence C_1 en un point P et la circonférence C_3 en un point Q, points situés d'un même côté par rapport à la droite AD. Montrer que les angles $\widehat{D\omega_3 Q}$ et $\widehat{D\omega_1 P}$ sont supplémentaires.

291. *Lemme de* Miquel : On considère dans le plan deux systèmes de quatre points A, B, C, D et A', B', C', D' tels que les points A, A', B, B' soient cocycliques, de même que les points B, B', C, C', les points C, C', D, D', et les points D, D', A, A'.

Si les points A, B, C, D sont cocycliques, il en est de même des points A', B', C', D'.

292. On se propose de montrer que le théorème (95) disant que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits implique le postulat d'Euclide. C'est à dire, on suppose le théorème (95) et les propriétés démontrées jusqu'au numéro (89) :

I –i) Montrer que la somme des angles d'un quadrilatère convexe est égale à quatre droits ;

ii) Montrer que le rectangle existe, c'est à dire qu'il existe un quadrilatère avec quatre angles droits, et que dans un rectangle les côtés opposés sont égaux.

II – Soient A_0 un point non situé sur une droite L et H_0 sa projection orthogonale sur cette droite.

i) Par A_0 élevons la perpendiculaire L' à la droite A_0H_0 ; montrer que la droite L' est parallèle à la droite L.

ii) Soient $x'A_0x$ une droite distincte de L' et supposons que l'angle $\widehat{H_0A_0x}$ soit aigu ; justifier-le.

Prenons un point A_1 sur le côté A_0x de cet angle, et notons H_1 et B_1 ses projections orthogonales sur les droites L et A_0H_0 respectivement.

a) Justifier que le point B_1 se trouve du même côté que le point H_0 par rapport à la droite L'.

b) Si les points A_0 et B_1 sont de part et d'autre de la droite L que peut-on dire des droites $x'A_0x$ et L ?

c) On suppose que les points A_0 et B_1 sont du même côté par rapport à la droite L. Calculer B_1H_0 en fonction de A_0H_0 et de A_0B_1.

Considérons le point A_2 de la demi-droite A_0x tel que A_0A_1 et A_1A_2 soient égaux et notons H_2, C_2, B_2 ses projections orthogonales sur les droites L, A_1H_1, A_0H_0 respectivement. Si les points A_0, B_2 sont de part et d'autre de la droite L que peut-on dire des droites L et $x'A_0x$? Sinon calculer B_2H_0 en fonction de A_0H_0 et de A_0B_1.

d) Que peut-on dire des droites L et $x'A_0x$?

293. On propose la variante suivante au problème précédent, basée sur les travaux de Legendre, et utilisant l'*axiome de* Pasch :

Soient A, B, C trois points non alignés et d une droite qui ne passe par aucun des points A, B, C ; si la droite d passe par un point du segment AB, elle passera toujours par un point du segment AC ou par un point du segment BC.

Soient A un point non situé sur une droite L et B sa projection orthogonale sur cette droite ; alors la droite L' perpendiculaire à la droite AB passant par A est parallèle à la droite L. On montre que toute droite d passant par A et distincte de L' est sécante avec la droite L :

Du côté de l'angle aigu β fait par les droites d et AB, on prend sur la droite L les points $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tels que BB_1 égale AB, B_1B_2 égale $AB_1, \ldots, B_{n-1}B_n$ égale AB_{n-1}

i) Calculer en fonction de n la mesure des angles $\widehat{AB_1B}$, $\widehat{AB_2B_1}, \ldots, \widehat{AB_nB_{n-1}}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAB_n}$.

ii) Montrer que les droites d et L sont sécantes.

294. *D'après* Bachet de Meziriac : On considère un triangle rectangle dont les côtés sont commensurables entre eux. Montrer que la bissectrice issue de l'angle droit n'est pas commensurable aux côtés.

295. i) On considère C et C' deux circonférences ; déterminer les similitudes directes transformant la circonférence C en la circonférence C'.

ii) On considère deux triangles équilatéraux ABC et $A'B'C'$; déterminer les similitudes directes transformant le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$.

iii) On considère deux carrés $ABCD$ et $A'B'C'D'$; déterminer les similitudes directes transformant le carré $ABCD$ en le carré $A'B'C'D'$. Montrer que les centres de ces similitudes sont sur une même circonférence que l'on déterminera.

296. On considère $ABCD$ un rectangle où $AB < BC$; on note E et F les points des segments BC et AD tels que $ABEF$ soit un carré.

Déterminer le rapport $\frac{AB}{BC}$ pour que les rectangles $ABCD$ et $ECDF$ soient semblables. Cette condition étant vérifiée, donner les similitudes directes qui transforme le rectangle $ABCD$ en le rectangle $ECDF$.

297. I - Incommensurabilité de la diagonale d'un carré par rapport à son côté :

Soit $ABCD$ un carré de côté R ; sur la diagonale AC et sur son prolongement on porte les points E et F tels que $CE = CF = R$.

i) Écrire la longueur de AF en fonction de AE et de R ;

ii) Montrer que $\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AE}$;

iii) Donner la décomposition en fraction continue du nombre $\frac{AF}{AB}$ que l'on calculera. En déduire que la diagonale du carré est incommensurable à son côté (ou $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel).

II - Incommensurabilité de la hauteur d'un triangle équilatéral par rapport à son côté :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté R. Sur la hauteur AI et sur son prolongement on porte les points E et F tels que $IE = IF = R$. On note D et G les intersections respectives de la droite AB avec la droite CE et la parallèle à CE passant par I.

i) Écrire la longueur de AB, puis celle de AF, en fonction de AE et de AD ;
ii) Montrer que $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD}$. En déduire que la hauteur du triangle équilatéral est incommensurable à son côté (ou $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel).

298. *Le constructeur universel d'équations de d'*Alembert : Etant donné un polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ à coefficients réels, d'Alembert s'est proposé de tracer cette fonction à l'aide d'une machine mécanique, afin de pouvoir en déterminer les racines expérimentalement, machine basée sur le principe suivant :

On considère deux axes perpendiculaires $y'Oy$ et $x'Ox$. Sur l'axe $y'Oy$ on porte les points $B_0, B_1, \ldots, B_n$ d'ordonnées respectives a_0, $a_0 + a_1, \ldots$, $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Soit x une valeur comprise entre 0 et 1. Par les points d'abcisses x et 1 menons les parallèles ∂_x et d à l'axe $y'Oy$, et par le point B_n traçons la parallèle à l'axe $x'Ox$; elle coupe les droites ∂_x et d aux points C_n et b_{n-1}. La droite $B_{n-1}b_{n-1}$ coupe la droite ∂_x en C_{n-1}. Par C_{n-1} traçons la parallèle à l'axe $x'Ox$, elle coupe la droite d en b_{n-2} ; et la droite $B_{n-2}b_{n-2}$ coupe la droite ∂_x en C_{n-2}, et ainsi de suite.

Montrer que la mesure algébrique $\overline{xC_0}$ (on a orienté la droite ∂_x dans le même sens que la droite $y'Oy$) est égale à la valeur du polynôme $P(X)$ en x.

299. On considère deux droites distinctes $OA'A$ et $OB'B$ telles que les droites $A'B'$ et AB soient parallèles. On note $2'$ le milieu de $A'B'$; la droite $O2'$ coupe la droite AB en le point 2. Les droites $A'B$ et $B'2$ se coupent en i_3 et la droite Oi_3 coupe les droites AB et $A'B'$ en 3 et $3'$ respectivement; et ainsi de suite, la droite $B'3$ coupe la droite $A'B$ en i_4, etc... Montrer que le point n divise le segment AB dans le rapport $\frac{1}{n}$, c'est à dire $\frac{nB}{AB} = \frac{1}{n}$.

300. *Théorème de* Desargues : On considère deux triangles PQR et $P'Q'R'$. Montrer que les droites PP', QQ', RR' sont concourantes si et seulement si les points d'intersection des couples de droites $(PR, P'R')$, $(PQ, P'Q')$, $(RQ, R'Q')$ sont alignés.

301. *Théorème de* Morley : Chaque angle d'un triangle ABC quelconque est divisé en trois parties égales par deux demi-droites issues de son sommet. Les trois points d'intersection des demi-droites adjacentes de ces angles forment un triangle équilatéral :

1º Soient quatre points E, F, G, H tels que $EF = FG = GH$ et $\widehat{EFG} = \widehat{FGH} = 180° - 2a > \frac{180°}{3}$.
Montrer que ces quatre points sont sur une même circonférence C.
Considérons A un point non situé du même côté que le point F ou G par rapport à la droite EH et tel que l'angle $\widehat{EAH}$ soit égal à $3a$.
Montrer que le point A est aussi sur la circonférence C.

2º a) Les demi-droites divisant les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ en trois parties égales se coupent en I et J, le point I étant intérieur au triangle BCJ. Soient F et G les points situés sur BJ et CJ tels que les angles $\widehat{FIJ}$ et $\widehat{JIG}$ soient égaux à 30° ($\frac{\pi}{6}$). Montrer que le triangle IFG est équilatéral.
b) Evaluer les angles en F et G du triangle JFG en fonction des angles $\widehat{A} = 3a$, $\widehat{B} = 3b$, $\widehat{C} = 3c$ du triangle ABC, et l'angle $\widehat{IFJ}$.
c) Soient les points E et H situés sur BA et CA tels que BE égale BI, et CH égale CI. Montrer que les points A, E, F, G, H sont sur une même circonférence.
d) Démontrer le théorème de Morley.

302. *Problème de* Fermat ou *point de* Torricelli : Déterminer un point P du plan tel que la somme de ses distances aux trois sommets d'un triangle ABC soit minimum :

1º Montrer que le point P ne peut être à l'extérieur du triangle ABC ;

2º Extérieurement au triangle ABC, on construit trois triangles équilatéraux ACB', BCA', BAC'. Montrer que les segments AA', BB', CC' sont égaux.

a) Soient $\mathcal{R}$ la rotation de centre C d'angle $-60°$, et Q un point intérieur au triangle ABC. Notons Q' l'image du point Q par la rotation $\mathcal{R}$; vérifier l'inégalité $QA+QB+QC \geq BB'$. Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

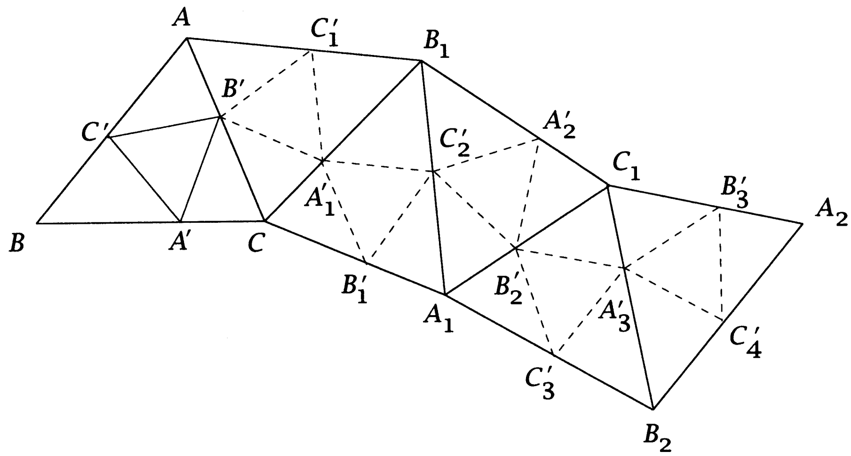
b) Soit P le point intersection des droites AA' et BB'. Quelles conditions angulaires doit-on avoir pour que le point P soit intérieur au triangle ABC ? Dans ce cas montrer que les points B, P, P', B' sont alignés, le point P' étant le point image du point P par la rotation $\mathcal{R}$.

c) En déduire le point P du plan tel que la somme $PA + PB + PC$ soit minimum.

303. *Problème de* Fragano ou *trajectoire de lumière* : Inscrire dans un triangle donné ABC un triangle de périmètre minimum.

1º cas : Tous les angles du triangle donné sont aigus.

On développe le triangle ABC par symétries orthogonales comme le décrit la figure ci-dessous :



Avec les notations de la figure :

i) Montrer que le quadrilatère ABB_2A_2 est un parallélogramme;

ii) Montrer que la longueur $C'C'_4$ ne dépend pas de la position du point C' sur AB. Donner la relation métrique entre la mesure du segment $C'C'_4$ et le périmètre du triangle $A'B'C'$; en déduire une condition pour que ce périmètre soit minimum;

iii) Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du *triangle orthique* (le triangle défini par les pieds des hauteurs). Le triangle orthique est-il de périmètre minimum ?

iv) Montrer l'unicité du triangle de périmètre minimum.

2º cas : Que peut-on dire si le triangle ABC est rectangle ? S'il possède un angle obtus ?

◇ *Autre démonstration :*

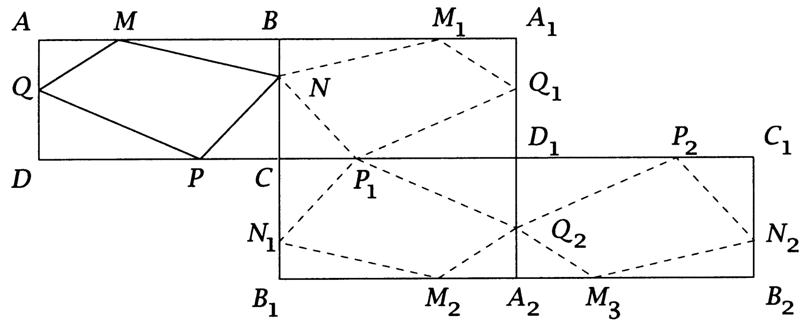
i') Soient A' un point de la base BC d'un triangle ABC, et A_1 et A_2 les symétriques du point A' par rapport aux côtés AB et AC respectivement. Pour un A' donné, déterminer un triangle $A'B'C'$ inscrit dans le triangle ABC de périmètre minimum. Est-il unique ?

ii') Pour un A' donné, quelle est la nature du triangle A_1AA_2, et la valeur de l'angle $\widehat{A_1AA_2}$? En déduire la position du point A' pour que le périmètre du triangle $A'B'C'$ inscrit dans le triangle ABC soit minimum ?

iii') Dans le cas où ce périmètre est minimum que peut-on dire des droites BB' et CC' ?

304. Soit $ABCD$ un rectangle. On se propose de trouver quatre points M, N, P, Q situés chacun sur les côtés du rectangle tel que le périmètre du quadrilatère qu'ils forment soit minimal.

Pour cela on développe le rectangle $ABCD$ par symétries orthogonales comme le décrit la figure ci-dessous :



Avec les notations de la figure montrer que le périmètre du quadrilatère $MNPQ$ est inférieur ou égal à la mesure du segment MM_3. Dans quels cas a-t-on égalité ? Si le périmètre du quadrilatère est minimum le calculer en fonction de la diagonale du rectangle. A-t-on unicité de la solution pour le problème proposé ?

305. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscriptible. Trouver quatre points M, N, P, Q, situés sur les côtés du quadrilatère tels que le périmètre du quadrilatère qu'ils forment soit minimum (Indication : utiliser l'idée de la deuxième solution donnée dans le problème de Fragano).

306. On se propose de construire un triangle ABC étant donné l'angle $\hat{A}$, la médiane AI et la bissectrice AJ issue de cet angle selon une solution proposée par G. Velissarios (cf. The American Mathematical Monthly, vol 95, nº 5, 1 988) :

1º Soit MNP un triangle, PI la bissectrice de l'angle $\hat{P}$, et E et F les intersections de la médiatrice de MN avec le cercle circonscrit au triangle MNP. Montrer que $EN^2 = EI \cdot EP$.

2º Construire un triangle étant donnés un côté, l'angle opposé et la bissectrice issue de cet angle (Indication : tracer la médiatrice du côté donné) ;

3º Dans le triangle ABC que l'on veut construire, on considère B' le point tel que A soit milieu de BB' et J' le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{B'AC}$. Que peut-on dire de la droite JJ' ? En déduire une construction du triangle ABC.

ÉPILOGUE.

L'étude des figures géométriques planes a permis de structurer le plan en exhibant des outils, en particulier de montrer le rôle des transformations (isométries, homothéties, similitudes) et la notion de vecteur. Les opérations induites sur les vecteurs par les transformations permettent de définir une structure algébrique d'espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des réels (en fait le corps engendré par les nombres rationnels, les expressions radicales ou entiers algébriques, et π), en ce qui concerne le plan. Cette structure n'a pas été utilisée intentionnellement car la notion d'espace vectoriel est une notion abstraite et non élémentaire, et n'était pas le but de cet ouvrage qui est une initiation à la Géométrie élémentaire. Citons à cet effet Laisant "*Rien ne pénètre dans notre esprit qu'après avoir d'abord passé sous le témoignage de nos sens.*"

La naissance des Géométries non euclidiennes, et le désir de les comprendre par rapport à la Géométrie Euclidienne, a amené à introduire les espaces géométriques, la droite, le plan, etc... à partir de la structure d'espace vectoriel et de groupe qui opère dessus. Pour cela on introduit les espaces affines, c'est à dire on cherche à "oublier" l'élément particulier qu'est le zéro en ajoutant aux transformations linéaires les translations : un espace affine attaché à un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est un ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel le groupe additif de $\mathcal{V}$ opère fidèlement et transitivement. En d'autres termes, à tout point A de $\mathcal{E}$ et tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ on associe un unique point B de $\mathcal{E}$ de telle sorte que si le point A est fixe, la correspondance $\vec{v}$ donne B soit une à une *bijective* ; on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $\vec{v}$.

L'espace vectoriel $\mathcal{V}$ s'appelle l'*espace des translations* de $\mathcal{E}$, les éléments de $\mathcal{V}$ les *translations* de $\mathcal{E}$, ou *vecteurs libres* de $\mathcal{E}$. La *dimension* de $\mathcal{E}$ est la dimension de $\mathcal{V}$ sur le corps de base : un espace de dimension un s'appelle *droite affine*, de dimension deux s'appelle *plan affine*, etc...

Ceci permet de retrouver les théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues, le birapport, etc..., qui sont des rapports de grandeurs ; mais pour la notion d'angle, le théorème de Pythagore, etc... il faut introduire une notion de distance (qui implique une notion d'angle), opération qui nécessite la donnée d'un *produit scalaire*, c'est à dire la donnée d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}$. L'espace ainsi défini, est un espace euclidien et la donnée du produit scalaire détermine la géométrie de l'espace. La donnée du produit scalaire détermine la notion de *déplacement*, c'est à dire la notion d'*égalité de deux figures* : un déplacement ne change ni la forme ni la grandeur d'une figure, en d'autres termes une figure est *invariable* par un déplacement.

Un déplacement, par exemple une translation, une rotation, une symétrie orthogonale, détermine une transformation ponctuelle de l'espace et l'ensemble de ces transformations forment un groupe : l'étude de la géométrie devient l'étude des groupes. Comme le dit Hadamard :

Une figure invariable est une figure à laquelle on ne fait subir que les transformations d'un certain groupe (dit groupe des déplacements).

Ce groupe est assujetti à vérifier certaines conditions, et c'est la donnée du groupe des déplacements qui détermine la Géométrie, Euclidienne ou non, de l'espace. La Géométrie n'est plus l'étude des figures de l'espace mais l'étude du groupe qui la défini : ceci fut exprimé pour la première fois dans le programme d'Erlangen par F. Klein.

Pour donner une notion intuitive d'une autre Géométrie, c'est à dire d'une géométrie non euclidienne, on terminera en donnant, sans la justifier, l'image mentale que Poincaré a donné de la Géométrie de Lobatschefski :

Imaginons une sphère S et, à l'intérieur de cette sphère, un milieu dont l'indice de réfraction et la température soient variables. Dans ce milieu se déplaceront des objets mobiles : les mouvements de ces objets seront assez lents et leurs chaleurs spécifiques assez faibles pour qu'ils se mettent immédiatement en équilibre de température avec le milieu ; de plus, tous ces objets auront le même coefficient de dilatation, de sorte que nous pourrons définir la température par la longueur de l'un quelconque d'entre eux. Soient R le rayon de la sphère, et ρ *la distance d'un point du milieu au centre de la sphère : je supposerai qu'en ce point la température absolue soit* $R^2 - \rho^2$ *et l'indice de réfraction* $\frac{1}{R^2 - \rho^2}$.

Que penseraient alors des êtres intelligents qui ne seraient jamais sortis d'un pareil monde ?

1º *Comme les dimensions de deux petits objets transportés d'un point à un autre varieraient dans le même rapport, puisque le coefficient de dilatation serait le même, ces êtres croieraient que ces dimensions n'ont pas changé. Ils n'auraient aucune idée de ce que nous appelons différence de température. Aucun thermomètre ne pourrait la leur révéler, puisque la dilatation de l'enveloppe serait la même que celle du liquide thermométrique.*

2º *Ils croieraient que cette sphère S est infinie : ils ne pourraient jamais, en effet, atteindre la surface ; car, à mesure qu'ils en approcheraient ils entreraient dans des régions de plus en plus froides ; ils deviendraient de plus en plus petits, sans s'en douter, et ils feraient de plus en plus de petits pas.*

3º *Ce qu'ils appelleraient lignes droites, seraient des circonférences orthogonales à la sphère S, et cela pour trois raisons :*

- ◇ *Ce seraient les trajectoires des rayons lumineux ;*
- ◇ *En mesurant diverses courbes avec un mètre, nos êtres imaginaires reconnaîtraient que ces circonférences sont le plus court chemin d'un point à un autre : en effet, leur mètre se contracterait ou se dilaterait quand on passerait d'une région à une autre, et ils ne se douteraient pas de cette circonstance ;*
- ◇ *Si un corps solide tournait de telle façon qu'une ligne demeurât fixe, cette ligne ne pourrait être qu'une de ces circonférences : c'est ainsi que, si un cylindre tournait lentement autour de deux tourillons et était chauffé d'un côté, le lieu de ses points qui ne bougeraient pas serait une courbe convexe du côté chauffé, et non une ligne droite.*

Il en résulterait que ces êtres adopteraient la géométrie de Lobatschefski.

Nous voyons bien maintenant qu'il est impossible de démontrer le postulatum d'Euclide à l'aide des propositions antérieures : car si une telle démonstration existait, elle serait admise par les êtres fictifs dont il vient d'être question (puisque toutes ces propositions antérieures subsisteraient à leurs yeux) ; or elle conduirait alors à un résultat inexact, puisque, pour ces êtres, le postulatum est faux.

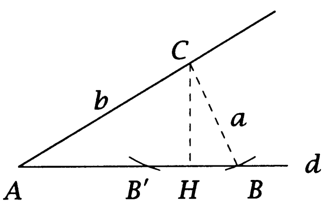
SOLUTIONS.

8. Plusieurs cas se présentent :

i) L'angle donné est compris entre les deux côtés donnés : c'est immédiat ;

ii) Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux sont donnés :

Soient $a = BC$, $b = AC$ et l'angle $\hat{A}$ donnés d'un triangle ABC.



Construction : Sur une droite d donnée porter l'angle $\hat{A}$ et sur l'autre côté de l'angle $\hat{A}$ porter le point C tel que $AC = b$. Du point C comme centre tracer un arc de cercle de rayon a. Il coupe la droite d au point B.

Discussion : On note H le pied de la perpendiculaire abaissée du point C sur la droite d :

1º $a < CH$: Il n'y a pas de solution ;

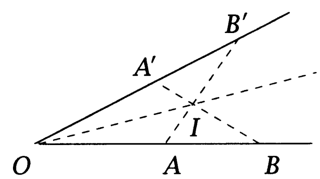
2º $a = CH$: L'angle $\hat{B}$ est un angle droit (les points B et H sont confondus). Il y a une solution si l'angle $\hat{A}$ est aigu et pas de solution sinon ;

3º $a > CH$: L'arc de cercle coupe la droite d en deux points B et B' :

i) L'angle $\hat{A}$ est aigu : il y a toujours une solution et une autre si $a < b$. Ainsi si $a \geq b$, on a une seule solution et, si $a < b$, on a deux solutions ; dans ce cas les angles opposés au côté AC sont supplémentaires.

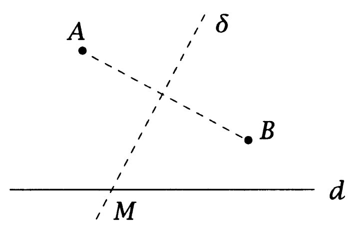
ii) L'angle $\hat{A}$ est droit ou obtus : la construction n'est possible que si le point A est situé entre les points B et H : une seule solution si $a > b$ et pas de solution si $a \leq b$.

9. Les triangles AOB' et $A'OB$ sont égaux (**49**) : les angles $\hat{B}$ et $\hat{B'}$ sont égaux ainsi que les angles $\widehat{IA'B'}$ et $\widehat{IAB}$ ($\widehat{OAB'} = \widehat{OA'B}$ et (**34**)). Les triangles AIB et $A'IB'$ sont égaux (**48**) et IB égale IB'. Les triangles OIB' et OIB sont égaux (**49**) et le point I est situé sur la bissectrice de l'angle $\hat{O}$ (**38**).



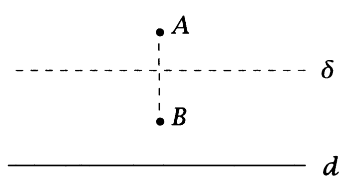
Autre solution : La bissectrice de l'angle $\widehat{xOx'}$ est axe de symétrie de la figure. Dans cette symétrie, les points A et A', respectivement B et B', se correspondent ; le point I, intersection des droites $A'B$ et AB', est fixe : il est situé sur la bissectrice de l'angle.

10. Soient A et B deux points fixés et d une droite donnée. Un point M est équidistant des points A et B si et seulement si il est situé sur la médiatrice ∂ du segment AB.

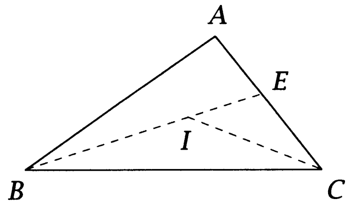


Il y a une solution unique si et seulement si la droite AB n'est pas perpendiculaire à la droite d (**42**)(**44**), et le point M se situe à l'intersection de la droite d et de la médiatrice du segment AB.

Si la droite d est perpendiculaire à la droite AB, il n'y a pas de solution si elle ne passe pas par le milieu du segment AB, et il y en a une infinité dans le cas contraire, c'est à dire dans le cas où elle est médiatrice de ce segment.



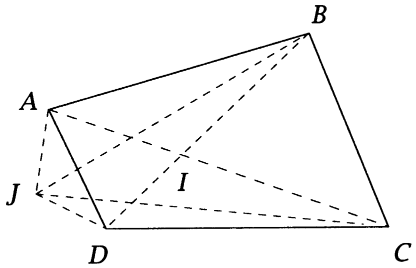
11. $AB + AE > BI + IE$ et $IE + EC > IC$ **(67)**, ou redémonstration de (71), d'où $AB + (AE + EC) > BI + IC$ et $AB + AC > IB + IC$.



12. 13 . Utiliser (68) et l'exercice 11.

15. Notons $\mathcal{P}$ le périmètre d'un quadrilatère convexe $ABCD$ et I l'intersection des diagonales.

1º Par **(67)** on a :



$$AC < AB + BC \qquad AB < AI + IB$$
$$AC < AD + DC \qquad BC < IB + IC$$
$$BD < AB + AD \qquad DC < ID + IC$$
$$BD < BC + DC \qquad AD < IA + ID$$

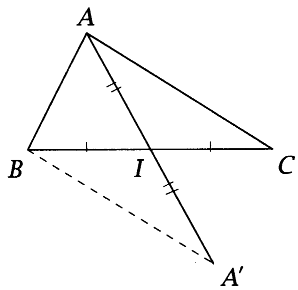
En sommant ces inégalités on obtient :

$$2(AC + BD) < 2\mathcal{P} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} < 2(AC + BD)$$

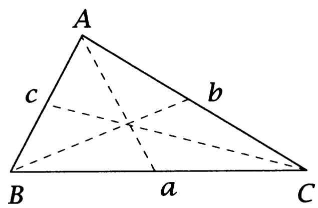
2º Si J est un point distinct du point I, on a : $JA + JC > AC$ et $JB + JD > BD$ **(70)**, d'où $JA + JB + JC + JD > IA + IC + IB + ID$.

16. Si I est le milieu de BC on a $AI + IB > AB$ et $AI + IC > AC$ **(67)** ; d'où $AI > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

Soit A' tel que le point I soit le milieu de AA' ; les triangles IAC et $IA'B$ sont égaux **(49)** et $A'B$ égale AC. Par **(67)** $AA' < AB + A'B$ d'où $AI < \frac{1}{2}(AB + AC)$.



17. Désignons par a, b et c les milieux des côtés opposés aux sommets A, B, C. De l'exercice précédent, on a :

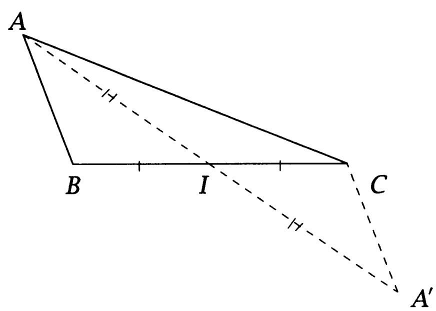


$$\frac{1}{2}(AB + AC - BC) < Aa < \frac{1}{2}(AB + AC)$$
$$\frac{1}{2}(BA + BC - AC) < Bb < \frac{1}{2}(BA + BC)$$
$$\frac{1}{2}(CA + CB - AB) < Cc < \frac{1}{2}(CA + CB)$$

En sommant ces inégalités membre à membre on a :
$\frac{1}{2}(AB + AC + BC) < Aa + Bb + Cc < AB + AC + BC$.

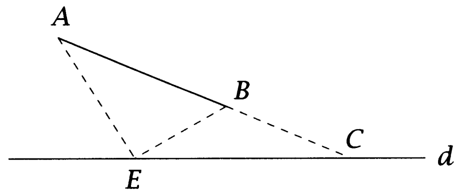
18. Soient ABC un triangle tel que AB soit plus petit que AC et I le milieu de BC. Notons A' le point du plan tel que le point I soit le milieu de AA' ; les triangles ABI et $A'CI$ sont égaux **(49)** et AB égale $A'C$ et l'angle $\widehat{BAI}$ égale l'angle $\widehat{CA'I}$.

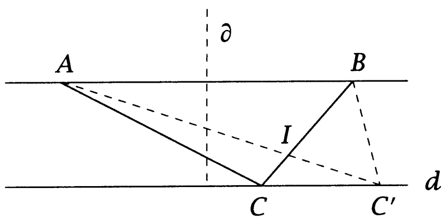
Comme $A'C$ est plus petit que AC, l'angle $\widehat{A'AC}$ est plus petit que l'angle $\widehat{AA'C}$ **(66)** qui est égal à l'angle $\widehat{A'AB}$.



19. 1º cas : Les deux points A et B sont situés du même côté par rapport à la droite d et AB et d sont sécantes en C :

Pour tout point E de d on a $AE - BE \leq AB$ ou $BE - AE \leq AB$ (**67**) ; l'égalité n'étant réalisée qu'au point C.





2º cas : La droite AB est parallèle à la droite d :

Notons ∂ la médiatrice du segment AB, alors $C'A - C'B > CA - CB$ (> 0).

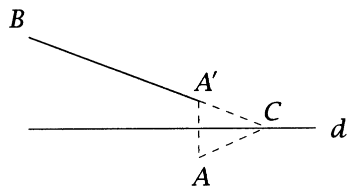
En effet $CA - CB = CA - CI - IB$ (1) et $C'A - C'B = C'I + AI - C'B$ (2). Par suite :

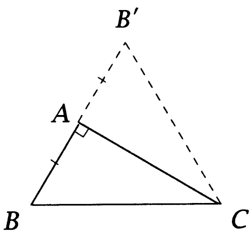
$(2) - (1) = IC' + IB - C'B + (IA + IC - CA) >$
$IC' + IB - C'B > BC' - BC' = 0$ (**67**).

Plus on s'éloigne, sur d, du pied de ∂ plus la différence est grande : il n'y a pas de solution.

3º cas : Les deux points A et B sont situés de part et d'autre de la droite d :

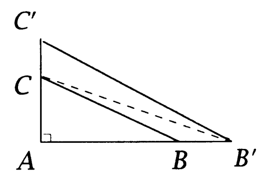
On se ramène au premier cas en considérant le point A' obtenu par pliage autour de la droite d comme charnière, c'est à dire la droite d est médiatrice du segment AA'.





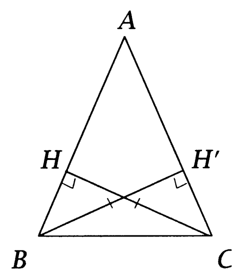
20. L'angle $\hat{C}$ égale la moitié de l'angle $\hat{B}$ et l'angle $\hat{A}$ est droit. Si B' est tel que A soit le milieu de BB', les triangles ABC et $AB'C$ sont égaux (**49**). Les angles du triangle $BB'C$ sont tous égaux et BB' égale BC (**54**) ; d'où BA égale $\frac{1}{2}BC$.

21. Par (78) on a $BC < B'C < B'C'$.



22. 1º cas. Les deux hauteurs BH' et CH sont intérieures :

les triangles rectangles BHC et $BH'C$ sont égaux (82). Les angles $\widehat{HBC}$ et $\widehat{H'CB}$ sont égaux : le triangle ABC est isocèle (54).

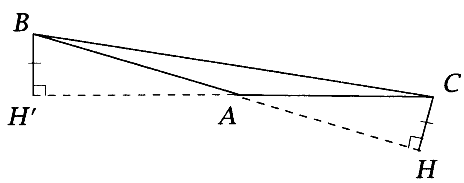


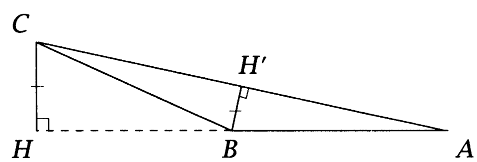
2º cas. Les hauteurs BH' et CH sont extérieures :

les triangles rectangles BHC et $BH'C$ sont égaux ; on fait de même que précédemment.

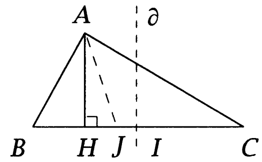
3º cas. La hauteur BH' est intérieure et la hauteur CH est extérieure :

$AH < AC$ (78) ; les triangles rectangles BHC et $BH'C$ sont égaux (82) et HB égale $H'C$. D'où $AB < AH'$, ce qui est absurde (75). Cette configuration ne peut se présenter.

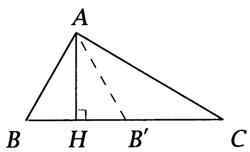




23. Si AB est plus petit que AC, le point A est situé du même côté que le point B par rapport à la médiatrice ∂ du côté BC (77). Notons I, J, H les points d'intersection respectifs de la médiane, de la bissectrice, de la hauteur avec le côté BC.



Le point H est situé du même côté que le point B par rapport au point I : sinon AH couperait la médiatrice ∂ de BC et par un point on pourrait abaisser (ou élever si H est en I) deux perpendiculaires distinctes à une droite (44) ou (42).



De même le point H est situé du même côté que le point I par rapport au point B et est différent : l'angle $\hat{B}$ est aigu et comme précédemment la droite AH ne peut couper la perpendiculaire à la droite BC élevée du point B.

De l'exercice n<u>o</u> 18, on sait que le point J est situé entre les points B et I. Soit B' le point de HC tel que HB égale HB'. D'où AB' égale AB et B' est situé entre H et C (78). L'angle $\widehat{HAC}$ est plus grand que l'angle $\widehat{HAB'}$, lui même égal à l'angle $\widehat{BAH}$. D'où l'angle $\widehat{BAJ}$ qui est la moitié de l'angle $\widehat{BAC}$ est plus grand que l'angle $\widehat{BAH}$ et le point J est situé entre les points I et H.

24. Soit un triangle ABC de sommet principal A. Il suffit de montrer que la médiane BI est plus grande que la bissectrice BJ.

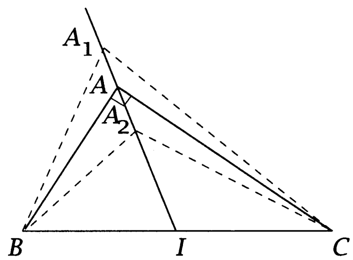
Notons AH la hauteur. Comme H est situé entre B et C, les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont aigus (81).

1<u>o</u> cas : $AB \geq BC$. Alors l'angle $\hat{A}$ est plus petit que l'angle $\hat{C}$ (66). Il est aigu et on est ramené à l'exercice n<u>o</u> 23.

2<u>o</u> cas : $AB < BC$. Si l'angle $\hat{A}$ est aigu, c'est comme pour le premier cas.

L'angle $\hat{A}$ est obtus, ou droit : le point H est situé du même côté que A par rapport à I (77)(44), sur le prolongement du côté CA. Par l'exercice n<u>o</u> 18 on a $\widehat{ABI} < \widehat{IBC}$. Les points H, A, J, I se trouvent dans cet ordre sur la droite AC ; on a $BJ < BI$.

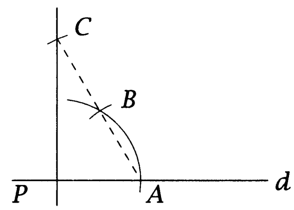
29. Indication : utiliser (96).



30. 1<u>o</u> Le triangle ABC est tel que AI égale $\frac{1}{2}BC$. Les triangles IAB et IAC sont isocèles (53), les angles $\widehat{IBA}$ et $\widehat{IAB}$ (resp. $\widehat{ICA}$ et $\widehat{IAC}$) sont égaux (54). D'où $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$; comme $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ égale deux droits (95) l'angle $\hat{A}$ est droit.

2<u>o</u> On a $A_1I > AI = \frac{1}{2}BC$: $\widehat{A_1BC} > \widehat{ABC}$ et $\widehat{A_1CB} > \widehat{ACB}$; par (95) on en déduit que $\widehat{BA_1C} < \widehat{BAC}$ et l'angle $\widehat{A_1}$ est aigu.

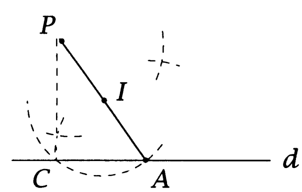
3<u>o</u> On a $A_2I < AI = \frac{1}{2}BC$: $\widehat{A_2BC} < \widehat{ABC}$ et $\widehat{A_2CB} < \widehat{ACB}$; par (95) on en déduit que $\widehat{BA_2C} > \widehat{BAC}$ et l'angle $\widehat{A_2}$ est obtus.



31. 1<u>o</u> cas : Le point P est situé sur la droite d.

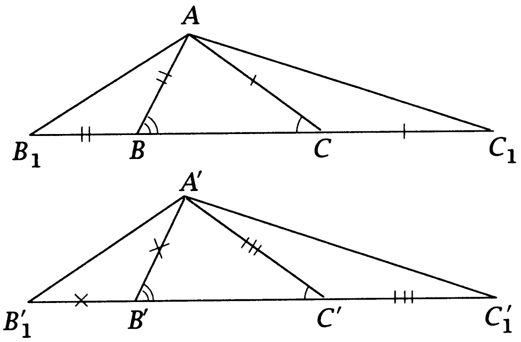
Du point P mener un arc de cercle coupant la droite d en un point A. De ce point comme centre, mener un autre arc de cercle de même rayon, coupant le premier arc de cercle en un point B. Tracer la droite AB et prendre sur cette droite le point C tel que BC égale BA. La droite PC est perpendiculaire à la droite d.

2<u>o</u> cas : Le point P n'est pas situé sur la droite d.



Prendre un point A sur la droite d et construire I milieu du segment PA. Tracer l'arc de cercle de centre I et de rayon IA ; cet arc recoupe la droite d en un point C et la droite PC est perpendiculaire à la droite d.

32. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles de même périmètre ayant deux angles égaux chacun à chacun ; leurs trois angles sont égaux chacun à chacun (96). Sur les prolongements du côté BC (resp. $B'C'$), portons la longueur BB_1 égale à BA et la longueur CC_1 égale à CA (resp. $B'B'_1$ égale à $B'A'$ et $C'C'_1$ égale à $C'A'$). Par hypothèse les segments B_1C_1 et $B'_1C'_1$ sont égaux.

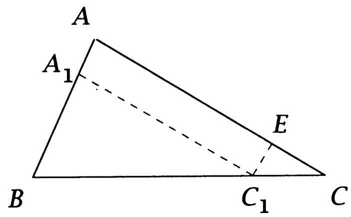


Les triangles BAB_1 et CAC_1 sont isocèles. L'angle $\widehat{ABC}$ égale l'angle $2\widehat{B_1}$ et l'angle $\widehat{ACB}$ égale $2\widehat{C_1}$ (96). De même l'angle $\widehat{A'B'C'}$ égale $2\widehat{B'_1}$ et l'angle $\widehat{A'C'B'}$ égale $2\widehat{C'_1}$.

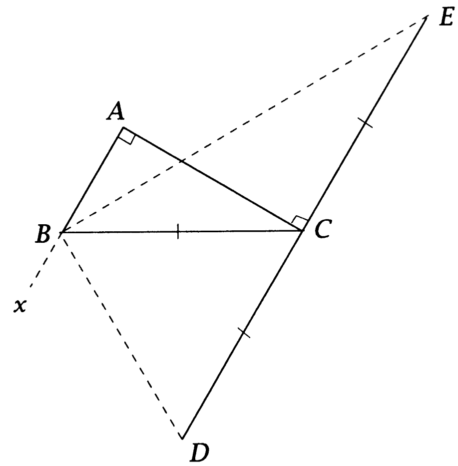
Les triangles AB_1C_1 et $A'B'_1C'_1$ sont égaux (48) et AB_1 égale $A'B'_1$ et AC_1 égale $A'C'_1$. Les triangles ABB_1 et $A'B'B'_1$ (resp. ACC_1 et $A'C'C'_1$) sont égaux (48) et AB égale $A'B'$ et AC égale $A'C'$. Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux (51).

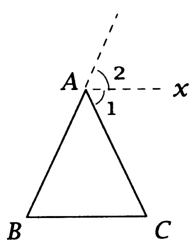
◇ *Autre solution* :

Supposons $B'C'$ plus petit que BC ; soient C_1 le point du segment BC tel que BC_1 égale $B'C'$ et A_1 le point du segment AB tel que A_1C_1 soit parallèle à AC. L'angle $\widehat{C_1}$ égale l'angle $\widehat{C}$ (93) et les triangles $A'B'C'$ et A_1BC_1 sont égaux (48). Si C_1E est parallèle à AB, le segment A_1C_1 égale le segment AE (106) et le périmètre du triangle A_1BC_1 est plus petit que celui du triangle ABC. D'où $B'C'$ égale BC et les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux (48).



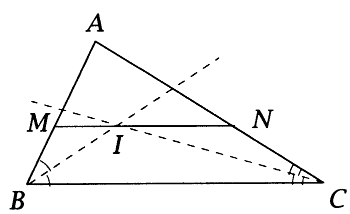
33. Les triangles BCE et BCD sont isocèles (53), les angles $\widehat{CBE}$ et $\widehat{CEB}$, respectivement $\widehat{CBD}$ et $\widehat{CDB}$, sont égaux (54). D'autre part les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{BEC}$, respectivement $\widehat{DBx}$ et $\widehat{BDC}$, sont égaux (93). D'où l'angle $\widehat{ABE}$ égale l'angle $\widehat{EBC}$ et l'angle $\widehat{CBD}$ égale l'angle $\widehat{DBx}$. Les droites BE et BD sont les bissectrices interne et externe de l'angle $\widehat{B}$.

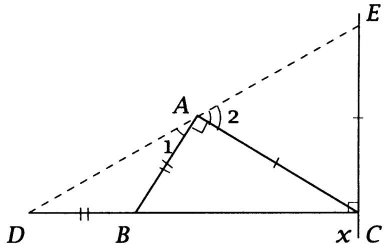




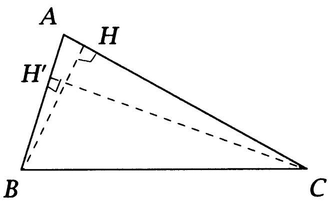
34. Soit ABC un triangle tel que la bissectrice extérieure Ax de l'angle $\widehat{A}$ soit parallèle au côté BC ; les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{A_1}$, respectivement $\widehat{B}$ et $\widehat{A_2}$, sont égaux (93). Par suite l'angle $\widehat{B}$ égale l'angle $\widehat{C}$ et le triangle ABC est isocèle (54).

35. Par (93) les angles $\widehat{BCI}$ et $\widehat{CIN}$, respectivement $\widehat{BIM}$ et $\widehat{IBC}$ sont égaux ; les triangles MBI et NCI sont isocèles (54) et MI égale MB et NI égale NC. D'où MN égale $MB + NC$. Réponse : i) $MN = MB + NC$; ii) $MN = MB - NC$ ou $MN = NC - MB$.

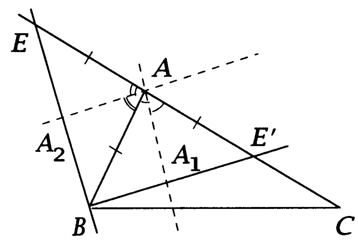




36. Les triangles CAE et BDA sont isocèles (53) : les angles $\widehat{D}$ et $\widehat{A_1}$, respectivement $\widehat{E}$ et $\widehat{A_2}$, sont égaux (54). Le triangle EDC étant rectangle, la somme des angles $\widehat{D}$ et $\widehat{E}$ vaut un angle droit : il en est de même de la somme des angles $\widehat{A_1}$ et $\widehat{A_2}$. L'angle $\widehat{DAE}$ est plat et les points D, A, E sont alignés.

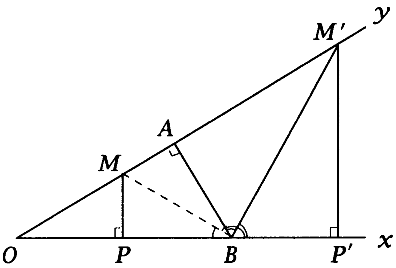


37. Indication : les triangles rectangles $AH'C$ et AHB ont leurs angles égaux chacun à chacun, ou exercice n° 21.



38. 1° Notons AA_1 et AA_2 les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{A}$. Les triangles EAB et $E'AB$ sont isocèles et AA_1 (resp. AA_2) est perpendiculaire à BE' (resp. à BE) (55). Comme AA_1 et AA_2 sont perpendiculaires (40), les droites BE et AA_1, respectivement BE' et AA_2 sont parallèles (86).

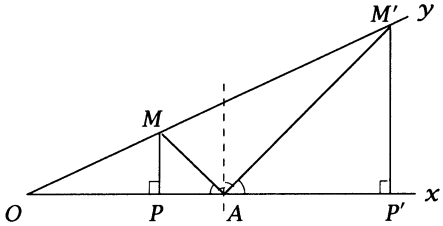
2° L'angle $\widehat{EBE'}$ étant égal à l'angle $\widehat{A_1AA_2}$, le triangle EBE' est un triangle rectangle (ou utiliser exercice n° 30).



39. Prendre OA sur Oy de longueur l ; par le point A élever la perpendiculaire au côté Oy. Elle coupe le côté Ox en un point B (92). Les bissectrices de l'angle $\widehat{B}$ coupent le côté Oy aux points M et M' ; de ces points abaisser sur Ox les perpendiculaires MP et $M'P'$. Comme MP égale MA et $M'P'$ égale $M'A$ (83) on a $OM + MP = l$ et $OM' - M'P' = l$.

Discussion : Il y a impossibilité de cette construction si la perpendiculaire au côté Oy ne coupe pas Ox, c'est à dire si l'angle $\widehat{xOy}$ est droit (86) ; dans ce cas, pour tout point M de Oy, le point P est confondu avec le point O et le point M tel que $OM + MP$ égale l est situé sur Oy à une distance $\frac{l}{2}$ de O. Si la longueur l n'est pas nulle, il n'existe pas de point M' tel que $OM' - M'P'$ soit égal à l ; si la longueur l est nulle, tout point de Oy convient.

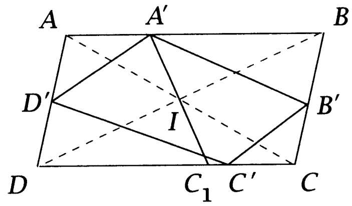
Si l'angle $\widehat{xOy}$ n'est pas droit, il reste à vérifier que la bissectrice de l'angle $\widehat{ABx}$ coupe Oy, ce qui est une conséquence immédiate de (96) et de (93), ou exercice n° 34.



• Prendre OA sur Ox de longueur l ; par le point A mener AM et AM' faisant avec Ox des angles égaux à la moitié d'un angle droit (élever du point A une perpendiculaire à Ox, puis mener les bissectrices). Par M et M' abaisser les perpendiculaires MP et $M'P'$ à Ox. Par suite $OP + MP = l$ et $OP' - M'P' = l$.

Discussion : Il y a impossibilité de cette construction (pour le point M') si la droite AM' est parallèle à Oy, c'est à dire si l'angle $\widehat{xOy}$ est la moitié d'un angle droit. Dans ce cas si l est une longueur nulle, tout point de Oy convient.

Si l'angle $\widehat{xOy}$ est plus grand que la moitié d'un angle droit on a $M'P' - OP' = l$, les points M' et P' étant sur les prolongements des côtés de l'angle $\widehat{xOy}$.



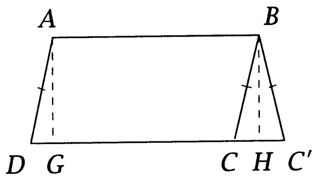
40. Soient $A'B'C'D'$ un parallélogramme inscrit dans un parallélogramme $ABCD$ de centre I.

Les angles $\widehat{AA'D'}$ et $\widehat{B'C'C}$ (resp. $\widehat{AD'A'}$ et $\widehat{CB'C'}$ sont égaux (98), et $A'D'$ égale $B'C'$ (106) : les triangles $AA'D'$ et $B'C'C$ sont égaux (48) et AA' égale CC'.

D'autre part notons C_1 le point intersection de $A'I$ avec CD. Le point I est milieu de AC et de $A'C_1$ (c'est le centre du parallélogramme $ABCD$) ; par suite les triangles IAA' et ICC_1 sont égaux et CC_1 égale AA'. Les points C_1 et C' sont confondus et le point I est situé sur la diagonale $A'C'$; de même il est situé sur la diagonale $B'D'$: c'est le centre du parallélogramme $A'B'C'D'$.

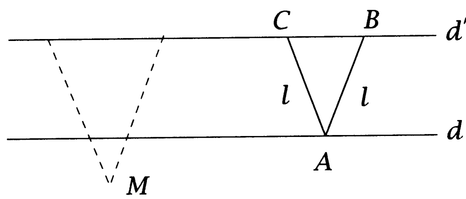
41. Utiliser (107) ou l'exercice ci-dessus.

42. *Indication :* montrer que le périmètre est égal à la somme des côtés égaux du triangle ABC.

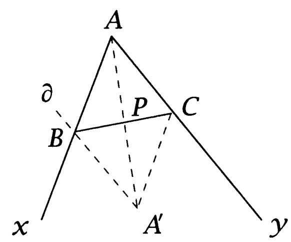


43. Soient C et C' les deux positions du point C. Le triangle BCC' est isocèle et $\widehat{BCC'} = \widehat{BC'C}$. Les triangles rectangles ADG et BCH sont égaux (82) et $\widehat{ADC} = \widehat{BCH}$.

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme et le quadrilatère $ABC'D$ est un trapèze isocèle.



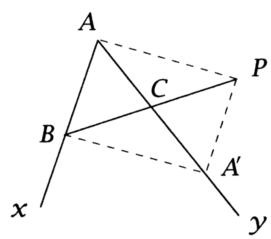
44. *Indication :* Soit A un point de la droite d ; il existe deux points B et C sur d' tels que AB et AC soient de longueur donnée l (78) (si l'écart entre les droites est moindre que l). Le problème se ramène à mener une droite parallèle à une direction donnée passant par un point donné (100).



45. Soient $\widehat{xAy}$ l'angle donné et P le point. Supposons le problème résolu et soit BC le segment, d'extrémités sur les côtés de l'angle dont P est le milieu. Notons A' le point du plan tel que P soit milieu du segment AA'. Le quadrilatère convexe $ABA'C$ est un parallélogramme (107).

Construction : Construire A' tel que P soit milieu du segment AA' ; de A' mener la parallèle ∂ au côté Ay, elle coupe le côté Ax en B. La droite BP coupe la droite Ay au point C. Le segment BC est le segment cherché.

Discussion : il y a une solution si et seulement si la droite ∂ coupe la droite Ax, c'est à dire si et seulement si l'angle $\widehat{xAy}$ n'est pas un angle plat.



46. Soient $\widehat{xAy}$ l'angle donné et P le point. Supposons le problème résolu et soit A' tel que le point C soit milieu du segment AA'. Le quadrilatère convexe $ABA'P$ est un parallélogramme (107).

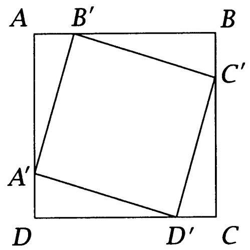
Construction : Tracer PA' parallèle à Ax et $A'B$ parallèle à AP. Le segment BP est le segment cherché.

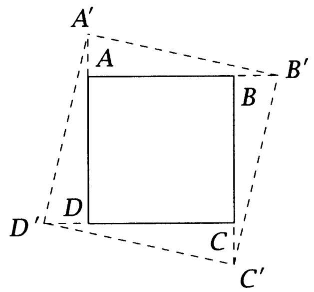
Discussion : Il y a une solution si et seulement si la parallèle au côté Ax passant par le point P coupe la droite Ay, c'est à dire si et seulement si l'angle $\widehat{xAy}$ n'est pas un angle plat.

47. Les triangles rectangles $AA'B'$, $BB'C'$, $CC'D'$, $DD'A'$ sont égaux (49). Par suite :

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$$
$$\widehat{A'B'A} = \widehat{B'C'B} = \widehat{C'D'C} = \widehat{D'A'D} \qquad (*)$$
$$\widehat{AA'B'} = \widehat{BB'C'} = \widehat{CC'D'} = \widehat{DD'A'} \qquad (**)$$

Les égalités (*) (**) sont complémentaires ; les angles du quadrilatère $A'B'C'D'$ sont droits. Ses côtés étant égaux, c'est un carré.

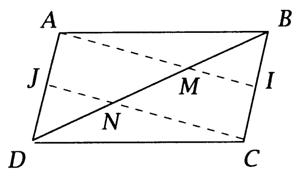




◇ *Autre solution* : Soit O le centre du carré, considérer la rotation de centre O d'angle 90°.

48. Notons I, J les milieux respectifs des côtés BC et AD, et M, N les intersections des droites AI et JC avec la diagonale BD.

Le quadrilatère $AJCI$ est un parallélogramme (108) ; par suite M est le milieu de BN et N est le milieu de DM (123) : les points M et N divisent la diagonale BD en trois parties égales.

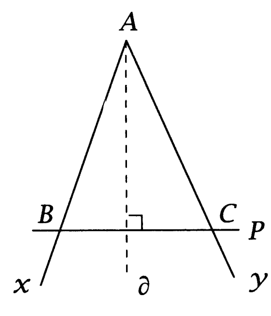


49. Indication : Tracer une diagonale et utiliser (123).

50. Si on forme des angles égaux, le triangle formé par les points d'intersection et le sommet de l'angle est isocèle.

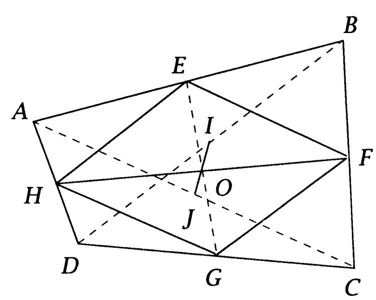
Construction : Soient $\widehat{xAy}$ l'angle donné et P le point. Tracer la bissectrice ∂ de l'angle $\widehat{xAy}$ puis abaisser la perpendiculaire PCB à la droite ∂. La droite PCB est la droite cherchée.

Discussion : La construction n'est possible que si la perpendiculaire abaissée de P à la droite ∂ coupe les côtés de l'angle $\widehat{xAy}$, c'est à dire si l'angle $\widehat{xAy}$ n'est pas un angle plat.



51. Notons E, F, G, H les milieux respectifs des côtés d'un quadrilatère $ABCD$.

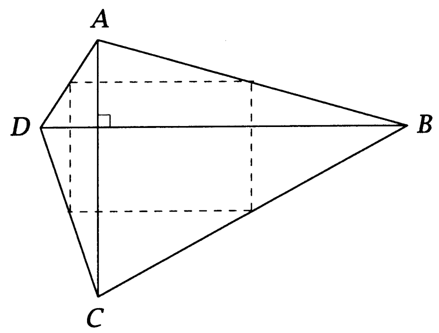
Les droites EF et GH sont parallèles comme parallèles à la droite AC (123) ; de même les droites EH et GF sont parallèles comme parallèles à la droite BD. Le quadrilatère convexe $EFGH$ est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu O (107).

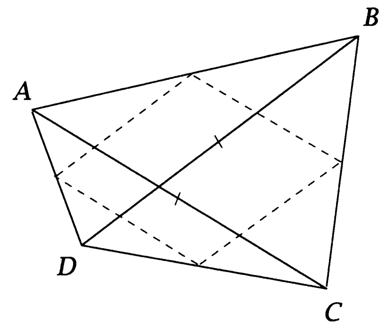


Notons I et J les milieux des diagonales BD et AC respectivement. Les droites EI et GJ sont parallèles comme parallèles à la droite AD (123) ; de même les droites EJ et IG sont parallèles. Le quadrilatère convexe $EIGJ$ est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu, à savoir le point O. Les droites EG, HF et IJ sont concourantes au point O.

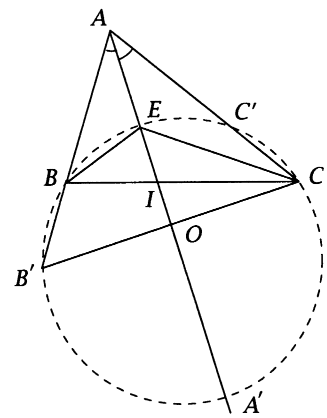
On montre de même que le quadrilatère convexe $HIFJ$ est un parallélogramme.

52. C'est un rectangle si les diagonales sont perpendiculaires, un losange si elles sont égales et un carré si elles sont perpendiculaires et égales.





53. Soient I le point intersection de la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ avec le côté BC, et E' un point courant de cette bissectrice. Lorsque le point E' décrit le segment AI de I vers A, les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle $E'BC$ vont croissant et l'angle $\widehat{E'}$ diminue strictement de π à $\hat{A}$ (95) : s'il prend la valeur $\frac{1}{2}(\hat{A}+\pi)$, il ne la prend qu'une fois. Si E' est le point intersection des bissectrices du triangle, il prend cette valeur (exercice n° 26) : le point E est le point intersection des bissectrices du triangle ABC.



◇ *Autre solution* : Le cercle circonscrit au triangle BEC coupe les côtés AB et AC aux points B' et C' respectivement. On montre que la droite BE, ou CE, est bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, ou de l'angle $\widehat{ACB}$.

i) *Le point B' est situé entre les points A et B* :

Les angles $\widehat{BB'C}$ et $\widehat{BEC}$ sont égaux (174) : l'angle $\widehat{AB'C}$ vaut $\frac{1}{2}(\pi-\hat{A})$. Il en est de même de l'angle $\widehat{ACB'}$ (95) et le triangle $AB'C$ est isocèle : la bissectrice AI est médiatrice du segment BC' (148). Par suite les arcs $\overset{\frown}{B'E}$ et $\overset{\frown}{EC}$ sont égaux et la droite BE est bissectrice de l'angle ABC.

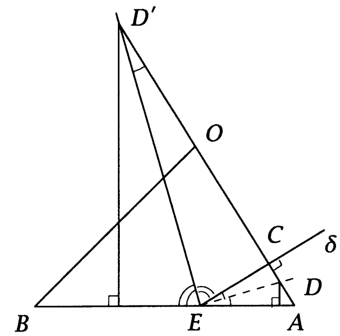
ii) *Le point B est situé entre les points A et B'* :

L'angle $\widehat{BB'C}$ vaut $\frac{1}{2}(\pi-\hat{A})$ (174) et (95) il en est de même de l'angle $\widehat{ACB'}$: le triangle $AB'C$ est isocèle et la bissectrice AI est médiatrice du segment $B'C$. Les arcs $\overset{\frown}{B'A'}$ et $\overset{\frown}{A'C}$ sont égaux (A' est la seconde intersection de AE avec le cercle circonscrit), et il en est de même des arcs $\overset{\frown}{BE}$ et $\overset{\frown}{EC'}$ (178). La droite CE est bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

iii) *Les points B et B' sont confondus* :

L'angle $\widehat{ABC}$ vaut $\frac{1}{2}(\pi-\hat{A})$ (162)(175), et il en est de même de l'angle $\widehat{ACB}$: le triangle ABC est isocèle et la droite AE est axe de symétrie de la figure. Le point E est milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ et BE est bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

54. Si le point D existe il est équidistant de la droite AB et de la droite ∂ perpendiculaire à OA passant par le point C. Notons E le point intersection de la droite ∂ et de la droite AB : le point D est situé sur la bissectrice de l'angle $\widehat{CEA}$ ou de l'angle $\widehat{CEB}$.



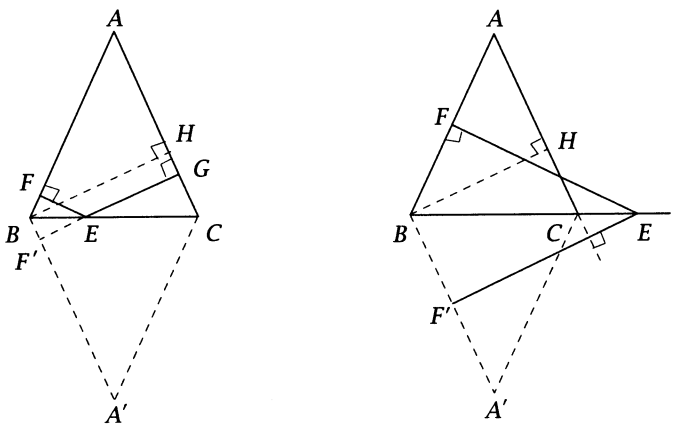
Construction : Du point C élever la perpendiculaire ∂ à la droite OA ; elle coupe la droite AB au point E.

Tracer les bissectrices des angles $\widehat{CEA}$ et $\widehat{CEB}$; elles coupent la droite AO aux points D et D' qui sont les points cherchés.

Discussion : La construction n'est possible que si on sait construire le point E. Si le point E n'existe pas, les droites ∂ et AB sont parallèles et l'angle $\hat{A}$ est droit. Le point D est le milieu du segment AC.

Si le point E existe, il y a deux solutions.

55. Soit BH la hauteur d'un triangle isocèle ABC ; par un point E de la base BC menons les perpendiculaires EF et EG aux côtés AB et AC respectivement ; on montre que $EF+EG$ égale BH.

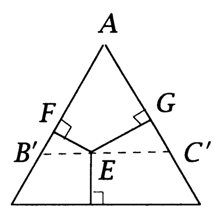


Notons $\mathcal{S}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite BC et A' et F' les points images de A et F respectivement par $\mathcal{S}$. Le point F' est situé sur $A'B$ (130) et les triangles rectangles BFE et $BF'E$ sont égaux (133)(130). Par suite l'angle $\widehat{BEF'}$ égale l'angle $\widehat{BEF}$ qui est égal à l'angle $\widehat{GEC}$ (95) : les points G, E, F' sont alignés et le quadrilatère convexe $BHGF'$ est un rectangle (111). Ainsi BH égale GF'. Comme EF' égale EF (133) on a $EF+EG$ égal à BH et la somme est constante.

• Si le point E est sur le prolongement de la base, on montre de même que c'est la différence des distances qui est constante et égale à BH.

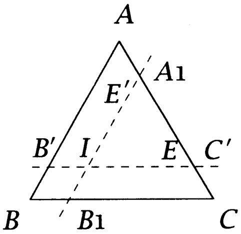
Note : pour comparer la somme de deux segments de droite (pour des problèmes de minimum par exemple) il est souvent utile de se ramener à un seul segment de droite.

56. On se ramène à l'exercice précédent. Soient ABC un triangle équilatéral et E un point intérieur. Abaissons les perpendiculaires EF, EG, et EH aux côtés AB, AC, BC respectivement, et par E menons la parallèle au côté BC qui coupe le côté AB en B' et le côté AC en C'.



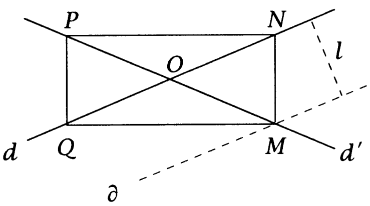
Le triangle $AB'C'$ est isocèle et la somme $EF+EG$ est constante pour tout point E de $B'C'$; de plus la distance EH est constante (113). D'où pour tout point E de $B'C'$ la somme des distances aux trois côtés du triangle ABC est constante.

Soient E et E' deux points situés à l'intérieur du triangle ABC ; par E et E' on mène les parallèles $B'C'$ et A_1B_1 aux côtés BC et AB respectivement. Elles se coupent en un point I intérieur au triangle, et la somme des distances des points E et E' aux trois côtés est égale à la somme des distances du point I à ces dits côtés : elle est constante (elle est égale à la hauteur du triangle).



• Si le point est extérieur il faut considérer deux types de zones. On trouve que c'est la somme des distances à deux côtés diminuée de celle relative au troisième côté, ou la distance à un côté diminuée de la somme des distances aux deux autres côtés qui est constante. Dans les deux cas la valeur trouvée est celle relative à un point intérieur.

57. 1º cas : Les droites d et d' se coupent en un point O.

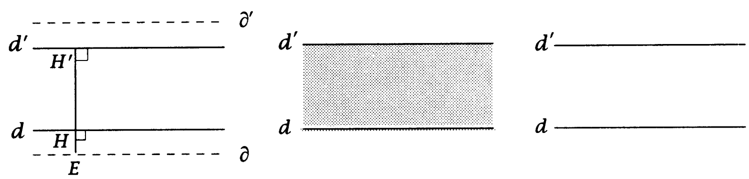


Soit ∂ la droite parallèle à la droite d située à une distance égale à l (143). Elle coupe en un point M la droite d', point faisant parti du lieu géométrique. Notons N, Q, P les points de d et d' respectivement tels que ON égale OM, égale OQ, égale OP.

Par l'exercice nº 55, on sait que les points situés sur le quadrilatère convexe $MNPQ$, qui est un rectangle (107)(113) sont des points du lieu. Par un même raisonnement, on montre que tout autre point ne convient pas (mener une droite parallèle au côté du rectangle se trouvant dans le même angle déterminé par les droites d et d' que le point). Le lieu géométrique cherché est le rectangle $MNPQ$.

2º cas : Les droites d et d' sont parallèles.

La perpendiculaire aux droites d et d' passant par un point E coupe ces droites en H et H' respectivement, et on a $EH+EH'$ égal à HH' si E est situé entre les droites d et d' et $EH+EH'$ égal à $2EH+HH'$ sinon.



$l > HH'$ $\quad$ $l = HH'$ $\quad$ $l < HH'$

Ainsi :

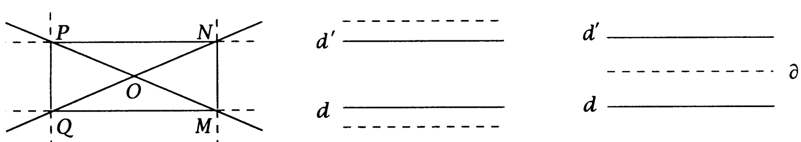
◇ $l > HH'$ deux droites ∂ et ∂' situées à une distance égale à $\frac{1}{2}(l - HH')$ de d et d' extérieurement.

◇ $l = HH'$: tous les points situés entre d et d'.

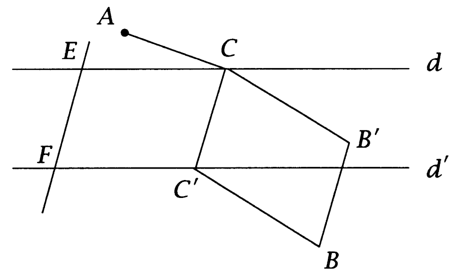
◇ $l < HH'$: pas de solution.

• Pour la différence, on trace les lieux en pointillés, et on a :

Le quadrilatère $PNMQ$ est le lieu des points du plan dont la différence des distances est égale à l.

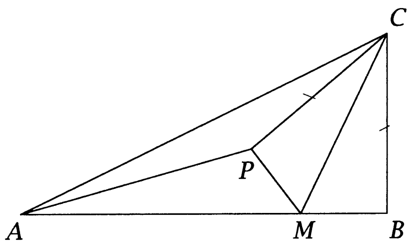


$l > 0$ $\quad$ $l > 0$ $\quad$ $l = 0$



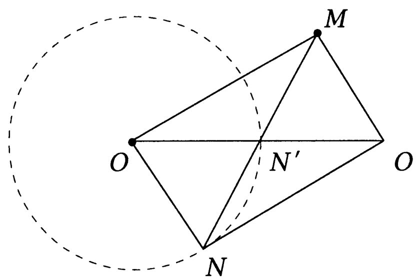
58. Une droite de direction ∂ coupe les droites d et d' aux points E et F respectivement ; notons B' le point image de B par la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{FE}}$.

Soit $ACC'B$ un chemin allant de A en B tel que CC' soit de direction ∂. Le chemin $ACB'B$ est de même longueur (106)) ; c'est le plus court chemin si les points A, C, B' sont alignés (68).



59. La bissectrice de l'angle $\widehat{BCP}$ coupe le segment AB en un point M ; les triangles PMC et BMC sont égaux (49).

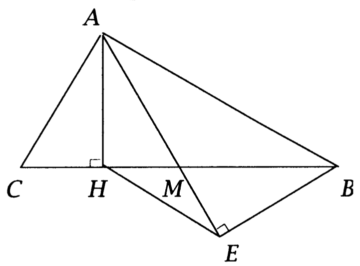
On a les relations suivantes :
$AP < AM + PM = AM + MB = AB$.



60. Supposons le problème résolu et soit O' le point tel que N' soit milieu du segment OO'. Le quadrilatère $OMNO'$ est un parallélogramme.

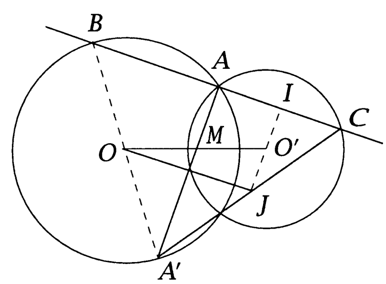
◇ *Construction* : Tracer la circonférence de centre O et de rayon $2R$, puis la circonférence de centre M de rayon R : le point O' est à l'intersection de ces deux circonférences. Le point N' est le point intersection de OO' avec la circonférence C. Tracer la droite MN'.

◇ *Discussion* : la construction n'est possible que si $OM < 3R$; si $OM < 3R$, il y a deux solutions symétriques par rapport à la droite MO et si $OM = 3R$, il y a une solution et la droite MN passe par le centre.



61. Le triangle ABC étant rectangle on a $AM = MC$ (exercice n<u>o</u> 30) ; comme l'angle $\widehat{C}$ vaut 60° le triangle AMC est équilatéral. On en déduit $\widehat{M} = 60°$, $\widehat{HAM} = 30°$, $\widehat{MBE} = 30°$. Par suite les triangles AHM et MBE sont égaux et $AH = BE$.

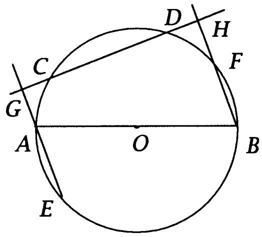
Ainsi les triangles rectangles AHB et BEA sont égaux ; leurs hauteurs issues des sommets E et H sont égales, et les droites EH et AB sont parallèles (113) : les angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{AEH}$ sont égaux. D'où l'angle $\widehat{AEH}$ vaut 30°, et le triangle AHE est isocèle. Les segments AH et HE sont égaux.



62. La droite AM recoupe la circonférence de centre O en A', et les points B, O, A' sont alignés (BO recoupe la circonférence en A'' tel que l'angle $\widehat{BAA''}$ soit droit (exercice n<u>o</u> 30) ; si J est le milieu de $A'C$, les droites OJ et BC sont parallèles.

Si I est le milieu de AC les droites IJ et AA' sont parallèles ; par suite l'angle $\widehat{I}$ est droit et les points I, J, O' sont alignés (57). Comme M est le milieu de OO', la droite AA' est médiatrice du segment OJ. Le triangle $A'OJ$ est isocèle, et il en est de même du triangle $A'BC$ (59). La droite AA' est médiane : les segments AB et AC sont égaux.

63. Le triangle ABM étant isocèle, les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{MCA}$ ont même complémentaire et le triangle AMC est isocèle : $BM = AM = AC$.

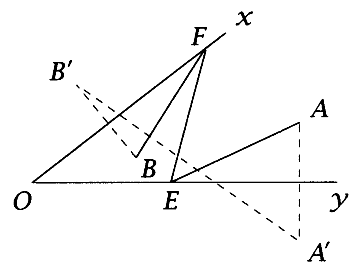


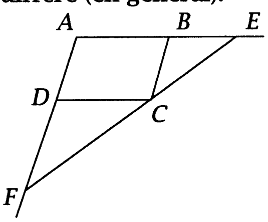
64. Les angles $\hat{E}$ et $\hat{F}$ sont droits, par suite les angles $\widehat{EAF}$ et $\widehat{EBF}$ le sont aussi. La corde EF est un diamètre et le quadrilatère $AEBF$ est un rectangle ; par suite $GEBH$ est un rectangle et $GE = HB$.

Le point O est situé sur la médiatrice de AF qui est celle de GH ; elle est axe de symétrie de la figure et $HC = DG$.

65. Soient A' et B' les symétriques respectifs des points A et B par rapport aux côtés Ox et Oy de l'angle, et E et F deux points de ces mêmes côtés. Le chemin $AEFB$ est de même longueur que le chemin $A'EFB'$; il est le plus court lorsque les points A', E, F, B', sont alignés.

Note : Si le chemin choisi est tel que l'ordre des côtés est inversé, on fait de même mais la longueur des chemins diffère (en général).

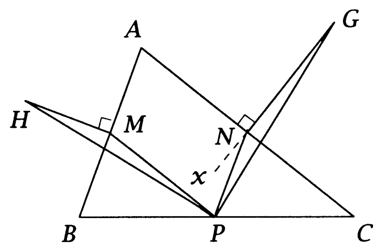




66. Les triangles BEC, AEF, et DCF sont isocèles ; on a les égalités $\widehat{DCF} = \widehat{DFC}$, $\widehat{BCE} = \widehat{BEC}$, $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$. Par suite $\widehat{DCF} = \widehat{BCE}$.

Comme $\hat{A} + \hat{E} + \hat{F} = 180°$, on a $\widehat{BCD} + \widehat{AEF} + \widehat{DCF} = 180°$, et les points E, C, F, sont alignés.

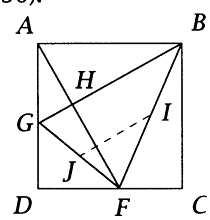
67. Les triangles PNG et PMH sont égaux car $MH = AM = PN$, $GN = AN = MP$, et $\widehat{BMP} = \widehat{PNC}$ (98), et donc $\widehat{HMP} = \widehat{PNG}$. On en déduit $\widehat{HPM} = \widehat{NGP}$; si Nx est le prolongement de GN, on a les égalités $\widehat{xNP} = \widehat{NGP} + \widehat{NPG}$, $\widehat{PNC} = \widehat{BAC} = \widehat{MPN}$, et $\widehat{xNP} + \widehat{PNC} = 90°$. Par suite $\widehat{HPG} = 90°$ et les droites HP et PG sont perpendiculaires (le triangle HPG est rectangle isocèle).

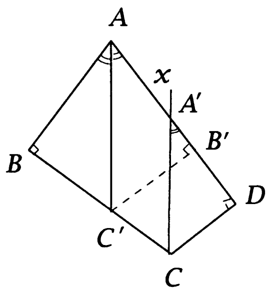


68. Soit I le milieu de AB ; le quadrilatère $ABNM$ étant un trapèze, on a $DI = \frac{1}{2}(BN + AM)$ soit $DI = \frac{1}{2}AB$ (exercice n° 49). Le triangle ADB est rectangle (exercice n° 30).

69. Les triangles rectangles ADF et AGB sont égaux, et $\hat{H} = 90°$ ($\widehat{DAF} = \widehat{ABG}$).

Soient I le milieu de BF et J celui de GF : la droite IJ est parallèle à BG (123), et donc perpendiculaire à AF.





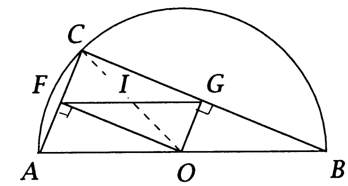
70. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que les angles $\hat{B}$ et $\hat{D}$ soient droits ; prenons B' sur AD tel que $AB = AB'$, et C' sur BC tel que $B'C'$ soit perpendiculaire à AD. Les angles $\widehat{C'}$ et $\hat{C}$ sont égaux (98), et AC' est bissectrice des angles $\hat{A}$ et $\widehat{C'}$ (Les triangles rectangles ABC' et $AB'C'$ sont égaux). Si Cx est la bissectrice de l'angle $\hat{C}$, on a $\widehat{C'Cx} = \frac{1}{2}\hat{C} = \widehat{BC'A}$ et les droites AC' et Cx sont parallèles.

• *Autre solution* : la bissectrice de l'angle $\hat{C}$ coupe AD en A' ; tracer AC' parallèle à $A'C$. Les angles $\widehat{BAC'}$ et $\widehat{C'AD}$ sont égaux comme complémentaires d'un même angle égal à $\widehat{BCA'}$ (ou l'exercice n° 27).

71. Le quadrilatère $BCPN$ est un parallélogramme, et les segments ND et MC sont égaux et parallèles : le quadrilatère $NMCD$ est un parallélogramme et CD est parallèle à NM.

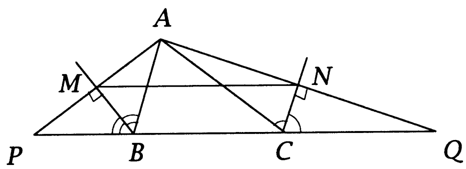
72. Les triangles AFB et BGA sont égaux (48) : leurs hauteurs sont égales et les droites AB et FG sont parallèles.

Autre solution : Utiliser la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice des bases.



73. Le quadrilatère $CGOF$ est un rectangle; notons I est l'intersection des diagonales. Les triangles IFC et OAC sont isocèles, par suite les angles $\widehat{CFG}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux : les droites FG et AB sont parallèles.

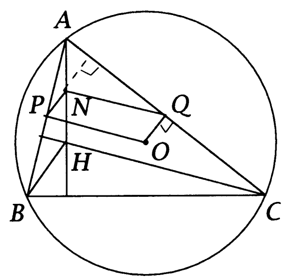
•*Autre solution* : Les droites OF et OG sont médiatrices respectives des segments AC et BC, d'où F et G sont les milieux de ces segments. Utiliser (123).



74. Notons P et Q les intersections des droites AM et AN avec la droite BC. Les triangles ABP et ACQ sont isocèles : M est le milieu de AP et N celui de AQ. La droite MN est parallèle à la droite PQ, c'est à dire BC. En considérant les triangles APB et ACQ on voit que la droite MN passe par les milieux de AB et AC (123)(90).

75. Les angles $\widehat{FAH}$, $\widehat{DAG}$ et $\widehat{BAC}$ ont une bissectrice commune Ax. Les triangles AFH, ADG et ABC étant isocèles, les bases FH, DG et BC sont perpendiculaires à cette bissectrice commune : elles sont parallèles.

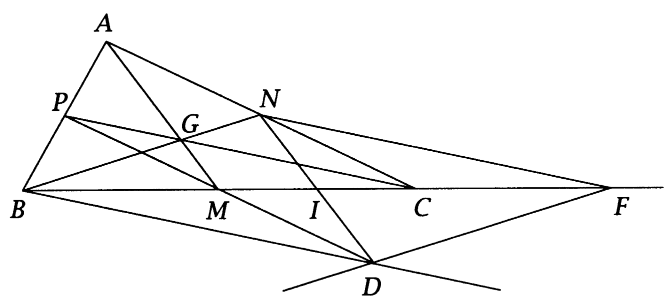
•*Autre solution* : La hauteur relative à la base est axe de symétrie de la figure.



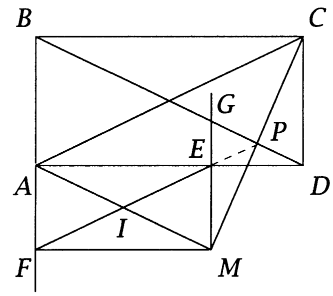
76. La droite PN est parallèle à la droite BH (123); la droite OQ est perpendiculaire à AC (57). Par suite les droites OQ et BH sont parallèles (86), et les droites PN et OQ sont parallèles.

De même les droites OP et QN sont parallèles et le quadrilatère $OPNQ$ est un parallélogramme.

77. Le quadrilatère $PNFC$ est un parallélogramme (123), et $PN = FC$. Par suite le milieu I de BF, intersection des diagonales du parallélogramme $BNFD$, est milieu de MC : le segment NI est parallèle à AM et $NI = \frac{1}{2}AM$ (123). D'autre part $ND = 2NI$, et les segments AM et ND sont égaux.



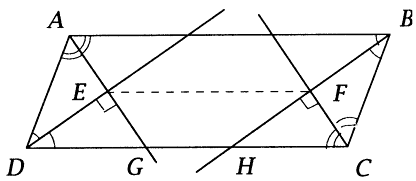
Le quadrilatère convexe $MNCD$ est un parallélogramme (107), et MD est parallèle à AC; comme les droites PM et AC sont parallèles (123), les points P, M, D sont alignés (90).



78. 1º Les droites ME et BD sont sécantes en G. Les angles $\widehat{GMP}$ et $\widehat{PCD}$ (resp. $\widehat{GPM}$ et $\widehat{CPD}$) sont égaux (93) et $PM = PC$: les triangles PGM et PCD sont égaux (48) et $GM = CD$. Comme $CD = AB$ le quadrilatère $ABGM$ est un parallèlogramme (108). Les droites AM et BD sont parallèles.

2º Les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{AMF}$ sont égaux (98). Les quadrilatères $ABCD$ et $AEMF$ étant des rectangles, les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{CAD}$ (resp. $\widehat{AMF}$ et $\widehat{MFE}$) sont égaux (113). Par suite les droites EF et AC sont parallèles (89).

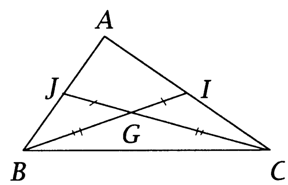
3º Notons I le point de concours des diagonales du rectangle $AEMF$. Les droites IP et AC sont parallèles (123) : les points E, F, P sont alignés (2º) et (90)).



79. Considérons $ABCD$ un parallèlogramme. Les bissectrices des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ coupent le côté DC en G et H respectivement, et les bissectrices des angles $\hat{D}$ et $\hat{C}$ coupent AG et BH en E et F.

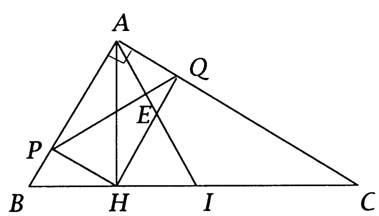
Les triangles BCH et ADG sont isocèles (105)(95)(54) : les segments CH et DG sont égaux (106), et il en est de même des triangles DEG et HFC (48). Par suite leurs hauteurs sont égales (ou écrire que $ED = FH$) : les droites EF et DC sont parallèles (108).

◇ *Autre solution* : Considérer les droites des milieux des triangles ADG et BCH.



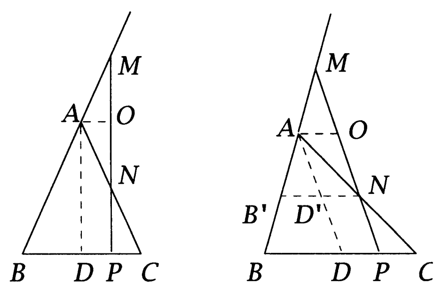
80. Considérons ABC un triangle dans lequel les médianes BI et CJ sont égales et se coupent au point G.

On a $GI = GJ$ et $BG = CG$ (124), et les triangles GJB et GIC sont égaux (49). Par suite $BJ = IC$ et $AB = AC$: le triangle ABC est isocèle.



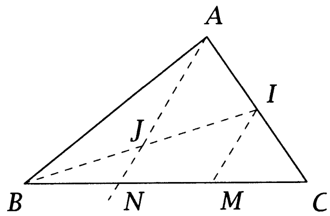
81. Le triangle ABI est isocèle, d'où les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{ABI}$ sont égaux. D'autre part $\widehat{ACB} = \widehat{BAH}$ (99) et, comme le quadrilatère $AQPH$ est un rectangle, $\widehat{BAH} = \widehat{APQ}$. Si E est le point d'intersection des droites AI et PQ l'angle $\hat{E}$ est droit (95).

• *Autre solution* : Soit I' sur BC tel que AI' soit perpendiculaire à PQ. Les angles $\widehat{QAI'}$ et $\widehat{PQH}$ sont égaux (99). Comme le quadrilatère $AQHP$ est un rectangle, on a $\widehat{PQH} = \widehat{AHQ}$. Les angles $\widehat{AHQ}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux (99) : le triangle $AI'C$ est isocèle. Par suite, il en est de même du triangle BAI' : le point I' est milieu de BC et les points I et I' sont confondus.



82. Du point A, on mène AO et AD respectivement perpendiculaires à PN et BC. Le point O est milieu de MN (59) et $PM + PN = 2PO = 2AD$. La somme $PN + PM$ est constante.

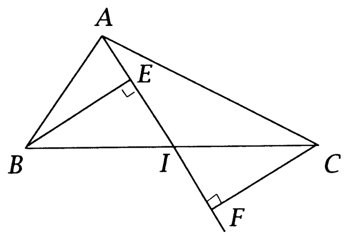
Note : Si le triangle ABC est quelconque, mener $ND'B'$ est parallèle à BC ; alors D' est milieu de $B'N$ (exercice 239). Les quadrilatères $AOND'$ et $AOD'B'$ sont des parallélogrammes et O est milieu de MN (123) : la somme $PN + PM$ est constante.



83. Soit ABC un triangle, BI une médiane, et J le milieu de BI. La droite AJ et la parallèle à AJ passant par I coupent le côté BC en N et M respectivement.

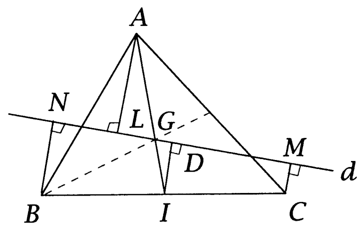
En considérant le triangle BIM on a $BN = NM$ (123). On obtient de même $NM = MC$ en considèrant le triangle ACN. Le point N divise le segment BC en son tiers.

• *Autre solution* : Considérer le point D symétrique du point A par rapport au point B, I le milieu de AC et L celui de DC. Le quadrilatère $BAIL$ est un parallélogramme et les diagonales se coupent en leur milieu J. La droite AJ coupe BC en son tiers, centre de gravité du triangle ADC.



84. Soit ABC un triangle, I le milieu de BC, et E et F les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets B et C sur la médiane AI.

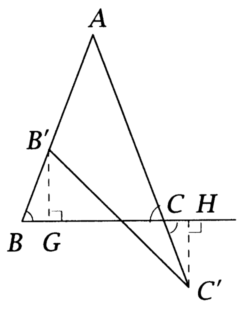
Les triangles rectangles BEI et CFI sont égaux (82) et $BE = CF$: les sommets B et C sont équidistants de la médiane BC.



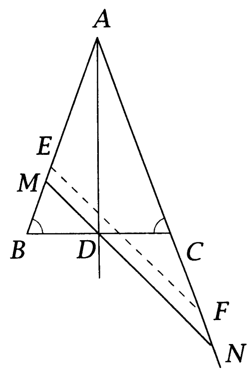
85. Soient I le milieu de BC, et N, L, D, M, les pieds des perpendiculaires abaissées sur la droite d à partir des points B, A, I, C respectivement.

Le quadrilatère $BNMC$ est un trapèze, d'où $BN + MC = 2DI$ (exercice nº 49). D'autre part $AG = 2GI$, et AL est parallèle à DI. Ainsi $AL = 2DI$ (si D' est le milieu de GL, et I' celui de AG les triangles GDI et $GD'I'$ sont égaux et (123).

Par suite $BN + CM = AL$.

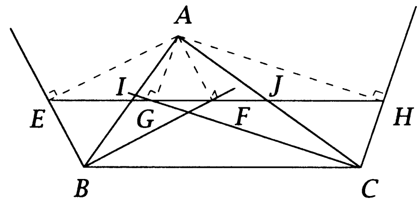


86. Considérons le triangle isocèle ABC et un triangle $B'AC'$ satisfaisants aux conditions données (de même angle $\widehat{A}$ et tels que les sommes des côtés comprenants cet angle soient égales). Menons les perpendiculaires $B'G$ et $C'H$ à la droite BC. Les triangles rectangles $BB'G$ et $CC'H$ sont égaux (82), d'où $BG = CH$ et $BC = GH$. Comme $GH < B'C'$, le triangle isocèle est le triangle de base minimum.



87. Soient BDC la sécante pour laquelle le triangle ABC est isocèle et MDN une autre sécante ; le triangle AMN n'étant pas isocèle, les segments BM et CN ne sont pas égaux. On peut supposer que l'on a $BM < CN$. Par un point F du segment CN, on mène la parallèle à MN ; elle coupe le segment AM au point E. Par suite $BM < BE$ et $CF < CN$. Par suite il existe un point F pour lequel $BE = CF$, et $AB + AC = AE + AF$.

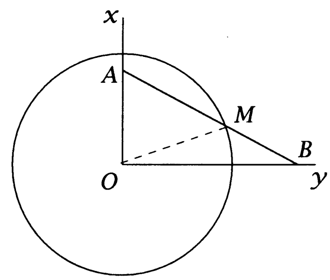
De l'exercice précédent, on a $BC < EF$; comme $EF < MN$, on a $BC < MN$. En outre $AE + AF < AM + AN$: le triangle isocèle est celui qui a le plus petit périmètre.



88. Soient ABC un triangle et AE, AF les perpendiculaires sur les bissectrices de l'angle $\widehat{B}$, et AG, AH celles sur les bissectrices de l'angle $\widehat{C}$.

Le quadrilatère $AEBF$ est un rectangle : ses diagonales se coupent en leur milieu I et $\widehat{EFB} = \widehat{ABF} = \widehat{FBC}$.

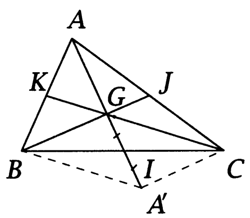
La droite EF passe par le milieu I de AB et est parallèle au côté BC (89). De même la droite GH passe par le milieu J de AC et est parallèle au côté BC. La droite IJ étant parallèle au côté BC (123), les points E, F, G, H sont alignés (90).



89. Soient $\widehat{xOy}$ un angle droit et AB le segment donné. On a $OM = \frac{1}{2}AB$: le point M est situé sur l'arc de cercle de centre O, de rayon $\frac{1}{2}AB$, situé dans l'angle donné.

Réciproquement, pour tout point M' de cet arc de cercle, le cercle de centre M' et de rayon $\frac{1}{2}AB$ coupe le côté de l'angle Ox en un point A', distinct de O, et la droite $A'M'$ coupe le côté Oy en B'. Le segment $A'B'$ est égal au segment AB et le point M' est un point du lieu géométrique (*Autre solution* : Construire le rectangle de diagonale $2\,OM'$).

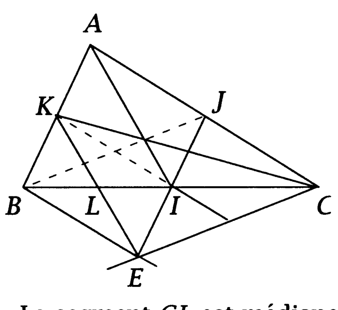
Le lieu géométrique cherché est l'arc de cercle de centre O, de rayon $\frac{1}{2}AB$, situé dans l'angle donné.



90. Supposons le problème résolu et soit un triangle ABC dont les médianes AI, BJ et CK ont les longeurs données et se coupent au point G. Prolongeons GI d'une longueur égale IA' : le quadrilatère $BA'CG$ est un parallélogramme dont les côtés BG et CG sont de longueurs égales aux $\frac{2}{3}$ des longueurs BJ et CK, et la diagonale GA' est les $\frac{2}{3}$ de la médiane AI (G est au tiers de AI).

◇ *Construction* : Diviser les longueurs données en trois parties égales (Prendre une longueur, construire un triangle ayant cette longueur comme médiane et tracer une autre médiane). Tracer le segment GC, la circonférence de centre C et de rayon égal au $\frac{2}{3}$ de BJ, et la circonférence de centre G et de rayon égal au $\frac{2}{3}$ de AI : elles se coupent au point A', et la droite $A'G$ coupe cette dernière circonférence au point A. Prendre le milieu I de GA', puis le point B tel que I soit le milieu de BC : le triangle ABC est le triangle cherché.

◇ *Discussion* : la construction n'est possible que si peut construire le triangle GCA', c'est à dire si les longueurs données permettent de construire un triangle (67).

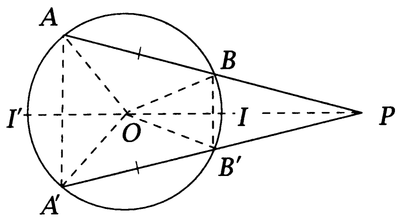


91. Le quadrilatère $BJCE$ est un parallèlogramme, d'où EJ et BC se coupent en I milieu des diagonales et $EC = BJ$.

D'autre part IK est parallèle à AC (123) donc à BE, et IJ est parallèle à AB donc EJ est parallèle à AB : le quadrilatère $BKIE$ est un parallélogramme. Les diagonales EK et BI se coupent en leur milieu L. Comme $KL = \frac{1}{2}AI$, le côté KE est égal à la médiane AI : le triangle KCE est un triangle construit avec les médianes du triangle ABC.

Le segment CL est médiane du triangle KCE, et I est le centre de gravité du triangle CEK (124). Comme $IC = \frac{1}{2}BC$, $IK = \frac{1}{2}AC$, $IE = \frac{1}{2}AB$, et que les médianes se coupent au tiers à partir de la base, les médianes du triangle EKC sont égales aux $\frac{3}{4}$ des côtés du triangle ABC.

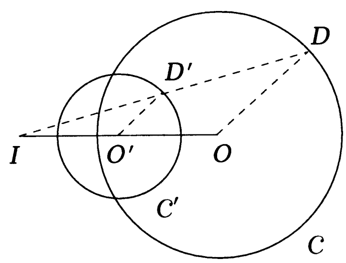
92. Le point O est équidistant des droites T, T', T'' (158); il est situé sur les bissectrices des angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{BQC}$ (83). Ces angles sont supplémentaires (93) ou (98), l'angle $\widehat{POQ}$ est un angle droit.



93. Les cordes données AB et $A'B'$ se coupent en un point P ; notons O le centre du cercle, I le milieu de l'arc BB', I' le point diamétralement opposé. Les arcs $\widehat{ABI}$ et $\widehat{A'B'I}$ sont égaux (31)(27) ainsi que les arcs $\widehat{AI'}$ et $\widehat{A'I'}$; par suite les angles $\widehat{AOI}$ et $\widehat{A'OI}$ sont égaux ainsi que les angles $\widehat{AOI'}$ et $\widehat{I'OA'}$ (37). Les triangles OAA' et OBB' étant isocèles la droite II' est médiatrice des segments AA' et BB' et l'image de la droite AB par la symétrie orthogonale $S_{II'}$ est la droite $A'B'$ (133)(130). Les droites AB et $A'B'$ se coupant au point P, ce point est situé sur la droite II' et les segments PA et PA', respectivement PB et PB' sont égaux.

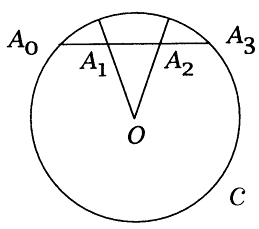
• *Autre solution* : Les angles $\widehat{AA'B'}$ et $\widehat{BAA'}$ sont égaux (37); le triangle PAA' est isocèle et PA égale PA', et PB égale PB'.

94. Soient C la circonférence donnée de centre O et de rayon r, et I le point fixe; notons O' le milieu de IO et pour un point D de la circonférence C, D' le milieu de ID. Le segment $O'D'$ est égal à $\frac{1}{2}OD$ (123) : le point D' se situe sur la circonférence C' de centre O' et rayon $\frac{1}{2}r$.



Réciproquement soit D' un point de la circonférence C' et D le point du plan tel que D' soit le milieu du segment ID. Le segment OD est égal à $2O'D'$ (123) qui est égal à r : le point D est situé sur la circonférence C.

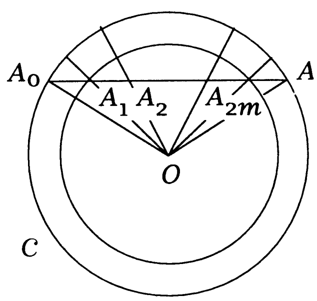
Le lieu cherché est la circonférence C' de centre O' et de rayon $\frac{1}{2}r$.



95. Notons A_0A_3 la corde considérée et A_1 et A_2 les points la divisant au tiers.

Le segment OA_1 est médiane du triangle OA_0A_2 et il en est de même du segment OA_2 pour le triangle OA_1A_3. Les segments OA_1 et OA_2 sont plus petits que les segments OA_0 et OA_3 et l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ est plus grand que les angles $\widehat{A_0OA_1}$ et $\widehat{A_2OA_3}$ (exercice n° 18) : on ne divise pas l'angle au centre en trois parties égales.

Les triangles A_0A_1O et A_3A_2O sont égaux (49) ou (149) : les angles $\widehat{A_0OA_1}$ et $\widehat{A_3OA_2}$ sont égaux et plus petits que l'angle $\widehat{A_1OA_2}$.



• Divisons une corde en n parties égales et notons $A_0, A_1, \ldots, A_n$ les points de cette corde où A_0 et A_n sont les extrémités.

1° cas : Le nombre de divisions s est impair.

• Pour $n = 3$, c'est la question précédente.

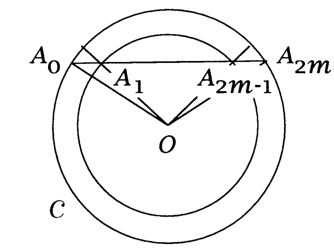
Hypothèse de récurrence :

Supposons que pour tout m et toute corde divisée en $2m+1$ parties égales, $2m+1 < n$, on a les égalités et inégalités angulaires suivantes :

$$\widehat{A_mOA_{m+1}} > \widehat{A_{m-1}OA_m} = \widehat{A_{m+1}OA_{m+2}} > \ldots > \widehat{A_0OA_1} = \widehat{A_{2m}OA_{2m+1}}.$$

• Pour $2m+1=n$: Les triangles OA_0A_1 et $OA_{2m}A_n$ sont égaux (49) ou (149) et les angles $\widehat{A_0OA_1}$ et $A_{2m}\widehat{OA}_{2m+1}$ sont égaux. De plus OA_1 égale OA_{2m}.

Le segment A_1A_{2m} est une corde du cercle de centre O de rayon OA_1 ; elle est divisée en $2(m-1)+1$ parties égales et l'hypothèse de récurrence s'applique. Pour achever la démonstration, il reste à vérifier que l'angle $\widehat{A_0OA_1}$, ou $A_{2m}\widehat{OA}_{2m+1}$, est plus petit que l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ ce qui se fait comme précédemment car OA_1 est médiane du triangle A_0OA_2.



2º cas : Le nombre de division n est pair.

• Si $n=2$ la médiatrice de la corde est axe de symétrie, les deux angles sont égaux. .

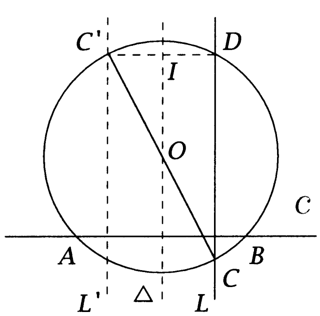
Hypothèse de récurrence :
Supposons que pour tout m et toute corde divisée en $2m$ parties égales, $2m < n$, on a les égalités et les inégalités angulaires suivantes :

$$A_m\widehat{OA}_{m-1} = A_m\widehat{OA}_{m+1} > A_{m-1}\widehat{OA}_{m_2} = A_{m+1}\widehat{OA}_{m+2} > \ldots > \widehat{A_1OA_0} = A_{2m-1}\widehat{OA}_{2m}.$$

• Pour $2m = n$: Les triangles A_0OA_1 et $A_{2m}OA_{2m-1}$ sont égaux et les angles $\widehat{A_1OA_0}$ et $A_{2m-1}\widehat{OA}_{2m}$ sont égaux. De plus OA_1 égale OA_{2m-1}.

Le segment A_1A_{2m-1} est une corde du cercle de centre O de rayon OA_1 ; elle est divisée en $2(m-1)$ parties égales et l'hypothèse de récurrence s'applique. Pour achever la démonstration, il reste à vérifier que l'angle $\widehat{A_1OA_0}$ est plus petit que l'angle $\widehat{A_2OA_1}$, ce qui se fait comme précédemment car OA_1 est médiane du triangle A_0OA_2.

96. Soient $\triangle$ la médiatrice du segment AB et L' la droite image de la droite L par la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_\triangle$. Notons C et D les points intersections de la droite L avec la circonférence $\mathcal{C}$ (C et D peuvent être confondus si la droite L ne coupe pas le segment AB), C' le point diamétralement opposé à C, et I le point intersection des droites $\triangle$ et DC'.



On sait que l'angle $\widehat{C'DC}$ est droit (exercice nº 30), d'où les droites DC' et $\triangle$ sont perpendiculaires et le point I est milieu du segment DC' (148). Le point C' est image du point D par $\mathcal{S}_\triangle$ (131) : il est situé sur la droite L'.

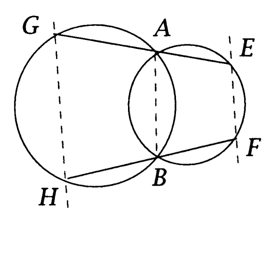
Réciproquement soit C' un point de L' non situé sur la droite AB. Notons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC' et C le point diamétralement opposé au point C'. De même que précédemment on voit que le point C est situé sur la droite L.

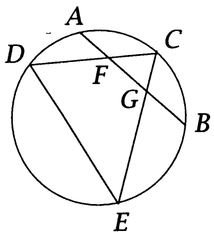
Le lieu géométrique du point cherché est la droite L' non compris le point intersection des droites AB et L'.

Note : Si on considère qu'une droite est un cercle de rayon infini, le lieu géométrique est la droite L', droite symétrique de la droite L par rapport à la médiatrice du segment AB.

97. Notons M et N les points d'intersection des cordes AB et AC respectivement avec la droite joignant les milieux des arcs qu'elles sous-tendent. Le triangle AMN est isocèle (177) ou (178) (selon les arcs choisis).

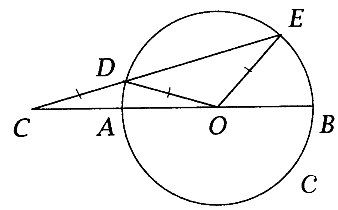
98. Par (175) on a : $\widehat{GAB} + \widehat{GHB} = 180°$ et $\widehat{BAE} + \widehat{EFH} = 180°$. Par suite $\widehat{GHF} + \widehat{EFH} = 180°$ et les droites GH et EF sont parallèles (89).





99. Il y a trois cas de figures possibles selon que les points D et E sont situés d'un même côté par rapport à la droite AB ou non.

On calcule les angles du quadrilatère (177)(178) et on utilise (180) ou (185).



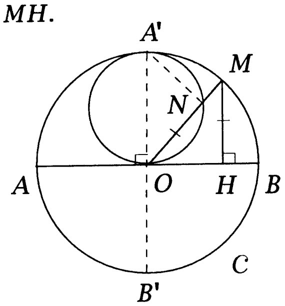
101. Les triangles ODC et ODE sont isocèles : les angles $\widehat{DCO}$ et $\widehat{DOC}$ d'une part, et $\widehat{ODE}$ et $\widehat{OED}$ d'autre part, sont égaux.

Comme $\widehat{EOB} = \widehat{OEC} + \widehat{OCE}$ et $\widehat{ODE} = \widehat{DOC} + \widehat{DCO}$ (96), l'angle $\widehat{EOB}$ est le triple de l'angle $\widehat{DOA}$.

Note : Cette configuration permet d'imaginer une "machine" trissectant un angle.

102. Notons AB le diamètre fixe et $A'B'$ le diamètre perpendiculaire.

Prenons OM un rayon du demi-plan contenant A', et soit H le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur le diamètre AB. Notons N le point du rayon OM tel que ON égale MH.

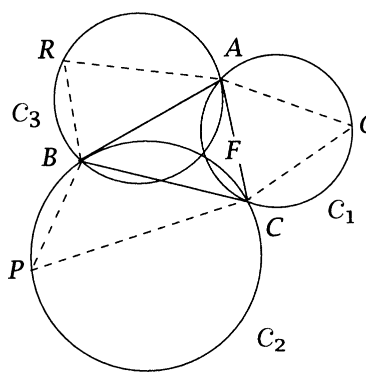


Les angles $\widehat{A'ON}$ et $\widehat{OMH}$ sont égaux (93). Par suite les triangles $A'ON$ et OMH sont égaux (49) et l'angle $\widehat{A'NO'}$ est droit. Le point N est situé sur la circonférence de diamètre OA' (182).

Réciproquement soit un point N de la circonférence de diamètre OA'. Notons M le point intersection de la demi-droite ON avec C et H le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur AB. Les angles $\widehat{A'ON}$ et $\widehat{OMH}$ sont égaux (93) et les triangles rectangles $A'ON$ et OMH aussi (82). Par suite ON égale MH.

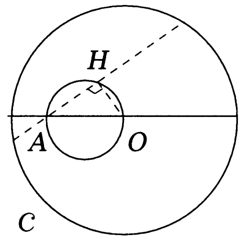
Le lieu géométrique cherché se compose des deux circonférences de diamètre OA' et OB' (il y a symétrie par rapport au diamètre AB).

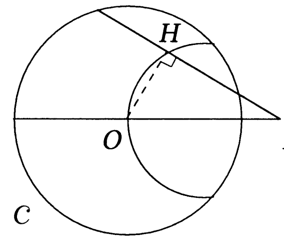
103. Notons C_1, C_2, C_3 les cercles circonscrits aux triangles ACQ, BCP, ABR, respectivement et F le point intersection des cercles C_1 et C_2 qui ne soit pas C (Deux circonférences se coupent au moins en un autre point que les sommets du triangle, sinon les trois circonférences seraient tangentes et la somme des angles opposés aux côtés pris comme bases serait égale à un angle droit (174) (95)).



On a $\widehat{AFB} = 360° - (\widehat{AFC} + \widehat{BFC})$. Par (175) $\widehat{AFC} = 180° - \widehat{AQC}$ et $\widehat{BFC} = 180° - \widehat{BPC}$. Comme $\widehat{ARB} + \widehat{AQC} + \widehat{BPC} = 180°$ par hypothèse, on en déduit que $\widehat{AFB} = 180° - \widehat{ARB}$ et le point F est situé sur la circonférence C_3 (185).

104. Soient C la circonférence considérée, O son centre, et A le point fixe. Si H est le milieu d'une corde alors OH est perpendiculaire à la corde (149) et le point H est situé sur la circonférence de diamètre AO (182).

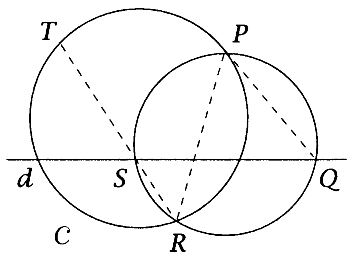


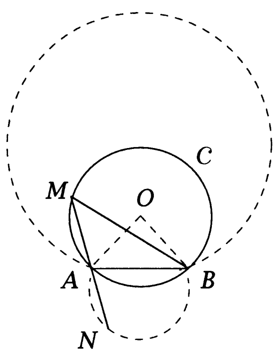


Réciproquement soit H un point situé sur l'arc de cercle de diamètre AO contenu dans la circonférence C. L'angle $\widehat{AHO}$ est droit (182); par suite la corde déterminée sur la circonférence C par la droite AH est de milieu H (148).

Le lieu géométrique du milieu des cordes de la circonférence C passant par le point A est l'arc de cercle de diamètre AO déterminé par la circonférence C et situé à l'intérieur du cercle C ; si le point A est intérieur, ou sur la circonférence C le lieu géométrique est la circonférence de diamètre AO (167).

105. La droite donnée d est fixe et l'angle $\widehat{PQS}$ est fixe, donc constant ; par suite l'angle $\widehat{SRP}$ est constant (174) et si T est le point d'intersection de la droite RS avec la circonférence C l'arc $\widehat{TP}$ est de mesure constante lorsque la circonférence passant par P et Q varie (173). Le point P est fixe ; il en est de même du point T.





106. Le triangle BMN est isocèle de base BN et l'angle $\widehat{M}$ est égal à $\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (173). D'où l'angle $\widehat{ANB}$ est égal à $\frac{1}{2}(180° - \frac{1}{2}\widehat{AOB})$. Le point N est situé sur l'arc de cercle, opposé à l'arc $\widehat{AMB}$ par rapport à la droite AB, d'où l'on voit le segment AB sous un angle égal à $\frac{1}{2}(180° - \frac{1}{2}\widehat{AOB})$.

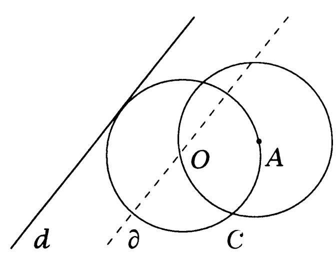
Réciproquement soit N un point situé sur cet arc de cercle et M le point intersection de la circonférence C avec la droite AN. L'angle $\widehat{MBN}$ est égal à $180° - \frac{1}{2}(180° - \frac{1}{2}\widehat{AOB}) - \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (95), soit $\frac{1}{2}(180° - \frac{1}{2}\widehat{AOB})$; le triangle MNB est isocèle et MN égale MB.

Le lieu géométrique du point N est constitué des deux arcs de cercle d'où l'on voit le segment AB sous un angle égal à $\frac{1}{2}(180° - \frac{1}{2}\widehat{AOB})$ (pour la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$ tenir compte de la mesure de l'arc $\widehat{AB}$ parcouru par le point M) : ces deux arcs de cercle sont situés de part et d'autre de l'arc de cercle décrit par le point M par rapport à la droite AB.

111. • *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit C un cercle de centre O de rayon r passant par le point A et tangent à la droite d.

Le point O se situe à une distance égale à r de la droite d (158) et du point A.

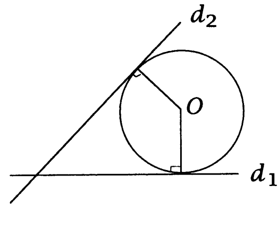
• *Construction* : Tracer, du même côté que le point A par rapport à la droite d, la droite ∂ située à une distance r de la droite d : les droites d et ∂ sont parallèles (143). Tracer la circonférence de centre A et de rayon r : le point O, centre du cercle cherché, est à l'intersection de la circonférence avec la droite ∂.



- *Discussion* :

◇ Si le point A est situé à une distance supérieure à $2r$ de la droite d, il n'y a pas de solution ;
◇ Si le point A est situé à une distance égale à $2r$ de la droite d, il y a une solution ;
◇ Si le point A est situé à une distance moindre que $2r$ de la droite d, et n'est pas situé sur la droite d ; il y a deux solutions, elles sont symétriques par rapport à la perpendiculaire abaissée de A sur la droite d ;
◇ Si le point A est situé sur la droite d, il y a deux solutions ; elles sont symétriques par rapport à la droite d.

112. • *Analyse* : Le centre du cercle cherché est équidistant des droites données d_1 et d_2 et à une distance égale au rayon donné.



• *Construction* : Tracer ∂_1 et ∂_2 deux droites situées à une distance égale à r des droites d_1 et d_2 respectivement (143). Ces droites se coupent en un point O qui est le centre du cercle cherché.

• *Discussion* :

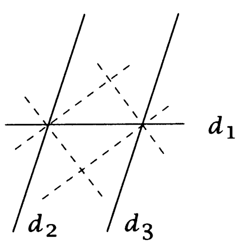
◇ Si les droites données d_1 et d_2 sont sécantes en un point A, il existe quatre solutions se déduisant deux à deux par la symétrie centrale de centre A ;
◇ Si les droites données d_1 et d_2 sont parallèles :
  ∘ et si la distance entre les droites données d_1 et d_2 est différente du double du rayon donné, il n'y a pas de solution ;
  ∘ et si la distance entre les droites données d_1 et d_2 est égale au double du rayon donné, il y a une infinité de solutions.

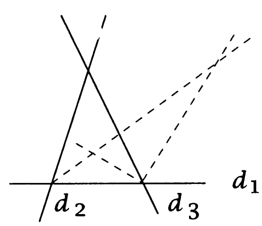
Note : On peut aussi faire la construction en traçant, d'une part, les bissectrices des angles formés par les droites d_1 et d_2 et, d'autre part, une droite parallèle à celles-ci située à une distance égale au rayon donné de ces droites.

113. • *Analyse* : Soient d_1, d_2, d_3 trois droites données et C un cercle de centre O tangent à ces trois droites. Le point O est équidistant des droites d_1, d_2, d_3 (158) ; si deux droites sont sécantes, il est situé sur la bissectrice d'un des angles qu'elles forment (83) et, si elles sont parallèles, il est situé sur la droite parallèle équidistante à ces droites (143).

• *Construction et discussion* :

◇ Si les droites d_1, d_2, d_3 sont parallèles, il n'existe pas de cercle tangent aux trois droites ;





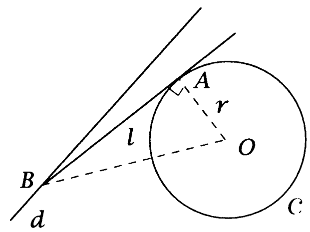
◇ Si la droite d_1 est sécante avec les droites d_2 et d_3 : tracer les bissectrices des angles formés par les droites d_1, d_2 et d_1, d_3 (64) ; ces bissectrices se coupent en des points qui sont les centres cherchés (83). Si les droites d_2 et d_3 sont parallèles, il y a deux solutions ; si les droites d_2 et d_3 sont sécantes, elles forment avec la droite d_1 un triangle et il y a quatre solutions (190) ;

◇ Si les droites sont concourantes en un point O, il n'y a pas de solution à moins de considérer qu'un point est un cercle de rayon nul ; dans ce cas il y a une solution qui est le point O.

114. Soient d la droite et C la circonférence de centre O de rayon r données.

• *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit AB une tangente à la circonférence C en A où l'extrémité B est située sur la droite d et est telle que le segment AB soit de longueur l donnée.
Le triangle ABO est rectangle en A.

• *Construction* :
Prendre un angle droit $\widehat{xA'y}$ et porter sur ses côtés $A'x$ et $A'y$ deux longueurs $A'B'$ et $A'O'$ égales respectivement à l et à r : le triangle $A'B'O'$ est rectangle.



Tracer la circonférence de centre O et de rayon $O'B'$; elle coupe la droite d en un point B. Par le point B on mène la tangente BA à la circonférence C (ou tracer la circonférence de centre B de rayon l : elle coupe la circonférence au point A).

• *Discussion* :
◇ Si le point O est situé à une distance supérieure à $O'B'$ de la droite d, il n'y a pas de solution ;
◇ Si le point O est situé à une distance égale à $O'B'$ de la droite d, il y a deux solutions ;
◇ Si le point O est situé à une distance moindre que $O'B'$ de la droite d, il y a quatre solutions.

115. Utiliser (188) et calculer p en fonction des segments déterminés par ces circonférences.

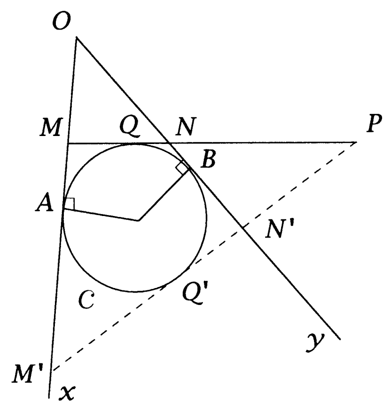
116. • *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit PMN la droite telle que le périmètre $2p$ du triangle OMN soit le périmètre donné.
Le cercle exinscrit au triangle OMN est tangent en A et B aux côtés Ox et Oy de l'angle et on a $OA = OB = p$.

• *Construction* : Déterminer sur les côtés Ox et Oy de l'angle les points A et B tels que $OA = OB = p$; tracer la circonférence C tangente en A et B aux côtés de l'angle.
La tangente à la circonférence C passant par le point P coupe les côtés de l'angle en M et N. Le triangle OMN est le triangle cherché.

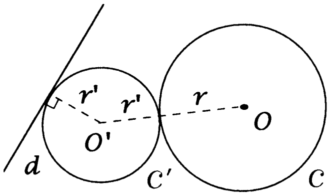
• *Discussion* : Il est nécessaire que le point P ne soit pas à l'intérieur de la circonférence C. Supposons qu'il en soit ainsi :

◇ Si le point de contact est sur l'arc $A\widehat{Q}B$, la tangente ainsi construite répond à la question ;

◇ Si le point de contact est sur l'arc $A\widehat{Q'}B$, le triangle $OM'N'$ ne répond pas à la question : $OM' + ON' - M'N' = 2p = OA + OB$.



Pour tout point P intérieur à l'angle il y a deux ou zéro solutions selon que le point est dans le triangle "mixtilignes" OAB ou non ; pour un point extérieur, il y a une ou zéro solution selon que le point est situé dans les angles adjacents à l'angle donné $\widehat{xOy}$ ou dans l'angle opposé par le sommet.



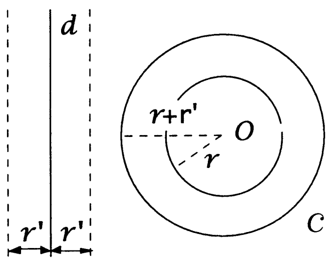
117. • *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit C' une circonférence de centre O', de rayon r', tangente à la droite d et au cercle C de centre O et de rayon r.
Le point O' se situe à une distance égale à r' de la droite d et à une distance $r+r'$ du point O.

• *Construction* : Tracer la droite ∂ parallèle à la droite d située à une distance égale à r' de cette droite ; tracer la circonférence C_1 de centre O et de rayon $r+r'$. La circonférence C_1 coupe la droite ∂ au point O', centre de la circonférence cherchée. Tracer la circonférence C'.

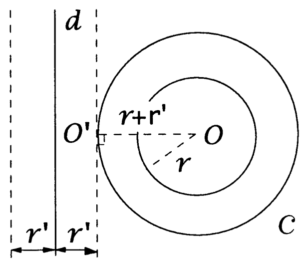
• *Discussion* :

◇ Si le point O se situe à une distance supérieure à $r + 2r'$ de la droite d, il n'y a pas de solution ;
◇ Si le point O se situe à une distance égale à $r + 2r'$ de la droite d, il y a une solution ;
◇ Si le point O se situe à une distance comprise entre $r + 2r'$ et r de la droite d, il y a deux solutions ;
◇ Si le point O se situe à une distance égale à r de la droite d, il y a trois solutions ;
◇ Si le point O se situe à une distance inférieure à r de la droite d, il y a quatre solutions.

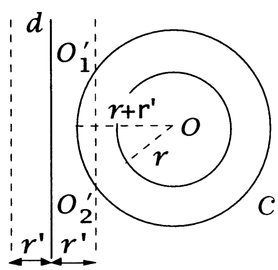
En résumé :



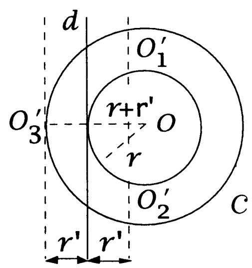
pas de solution



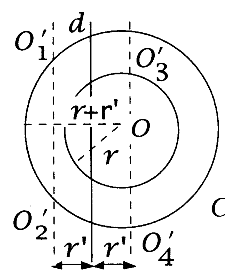
une solution



2 solutions



3 solutions



4 solutions

Note : Il se peut que la circonférence cherchée C' soit tangente intérieurement à la circonférence C. Son centre O' se situe à une distance égale à r de la droite d et à une distance $r-r'$ du point O.

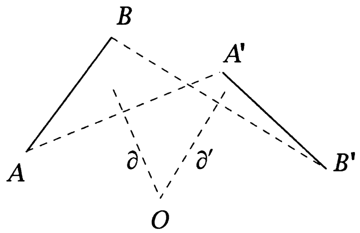
Tracer les droites ∂ et ∂' situées à une distance égale à r' de la droite d et la circonférence C_1 de centre O et de rayon $r-r'$. Le point O' centre de la circonférence cherchée est le point intersection de la circonférence C_1 et de la droite ∂ (ou ∂').

Discussion : Il est nécessaire que le rayon r' soit inférieur au rayon r.

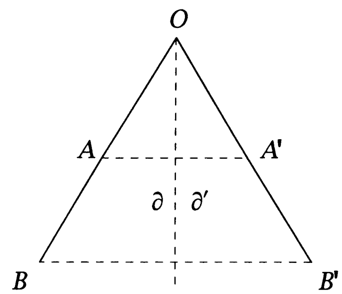
- ◇ Si le point O se situe à une distance supérieure à r de la droite d, il n'y a pas de solution ;
- ◇ Si le point O se situe à une distance égale à r de la droite d, il y a une solution ;
- ◇ Si le point O se situe à une distance comprise entre r et $r-2r'$ de la droite d, il y a deux solutions ;
- ◇ Si le point O se situe à une distance égale à $r-2r'$ de la droite d, il y a trois solutions ;
- ◇ Si le point O se situe à une distance inférieure à $r-2r'$ de la droite d, il y a quatre solutions.

118. Le centre de la rotation est situé à l'intersection des médiatrices ∂ et ∂' des segments AA' et BB', et des arcs de cercle C et C' d'où l'on voit les segments AA' et BB' respectivement sous un angle θ, angle de la rotation cherchée.

◇ *Construction* a) :



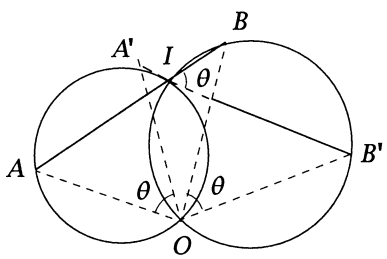
∂ non parallèle à ∂'



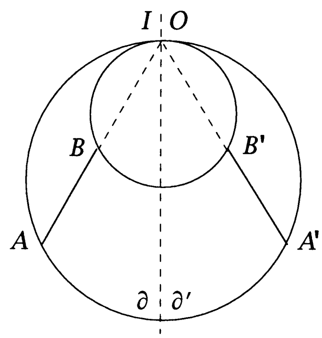
∂ parallèle à ∂' (elles sont confondues)

◇ Construction b) :

C est le cercle d'où l'on voit AA' sous un angle θ et C' est le cercle d'où l'on voit BB' sous un angle θ.



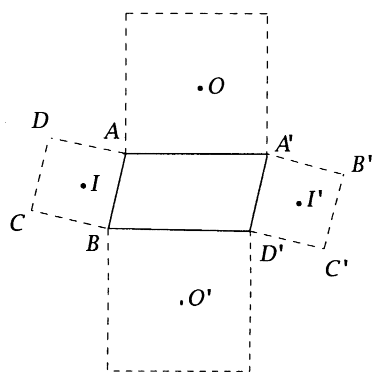
Les cercles C et C' sont sécants

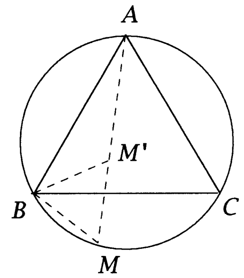


Les cercles C et C' sont tangents

119. La rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point A en le point A'. Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{A'B'}) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, la droite $A'B'$ est la transformée par la rotation $\mathcal{R}$ de la droite AB.

Les segments AB et $A'B'$ étant égaux, le transformé du point B par la rotation $\mathcal{R}$ est le point B' et le transformé du carré $ABCD$ est le carré $A'B'C'D'$. Par suite le transformé du point I par la rotation $\mathcal{R}$ est le point I' : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et OI égale OI'. On montre de même que les autres angles du quadrilatère convexe $OIO'I'$ sont droits : c'est un carré.





120. La rotation $\mathcal{R}$ de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme le point C en le point A et la droite CM en une droite Ax telle que $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{Ax}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Comme $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, la droite Ax est la droite AM, et le point M', transformé de M par $\mathcal{R}$, est situé sur AM ; on a $MC = AM'$. Le triangle BMM' est équilatéral et BM égale MM'. D'où AM égale $BM+MC$.

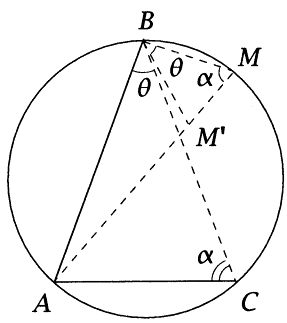
Supposons maintenant que le triangle ABC soit isocèle. En considérant, comme précédemment, la rotation $\mathcal{R}$ de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ on voit que les points A, M, M' sont alignés, et que l'image du point C par $\mathcal{R}$ est le point A.

Notons θ l'angle $\widehat{CBA}$ et α l'angle $\widehat{ACB}$; on a $\theta + 2\alpha = 180°$.

Des inégalités triangulaires on déduit :

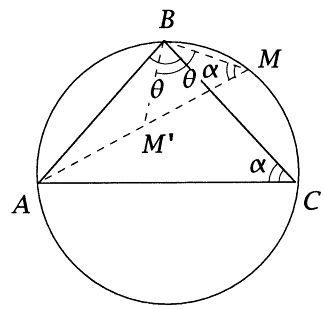
Si $\theta < \alpha$, (on a $\theta < 60°$) alors $MM' < BM$ et $AM < BM + MC$

Si $\theta > \alpha$, (on a $\theta > 60°$) alors $MM' > BM$ et $AM > BM + MC$



$\theta < 60°$

$AM < BM + MC$



$\theta > 60°$

$AM > BM + MC$

121. 1º Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAF}$ sont égaux à 45° ; l'angle $\widehat{DAF}$ est plat et les points D, A, F sont alignés.

2º La diagonale d'un carré est axe de symétrie du carré : les triangles AEG et ABC sont symétriques par rapport à la droite ADF.

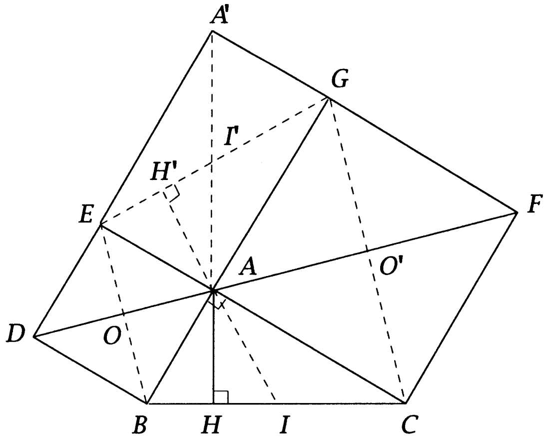
Soient I le milieu du côté BC et I' celui de EG. Notons AH la hauteur du triangle ABC et AH' celle du triangle AEG. Par symétrie les angles $\widehat{I'AG}$ et $\widehat{IAC}$ sont égaux et l'angle $\widehat{IAC}$ égale l'angle $\widehat{ICA}$ (54). Par suite la somme des angles $\widehat{I'AG}$ et $\widehat{HAC}$ est égale à 90° : les points I', A, H sont alignés. Il en est de même, par symétrie, des points I, A, H' : la médiane de l'un est dans le prolongement de la hauteur de l'autre.

3º Soit A' le point intersection des droites DE et FG ; le quadrilatère convexe $AEA'G$ est un rectangle (111) et les points A, I', A' sont alignés (107). Les droites DE, AH, FG sont concourantes au point A'.

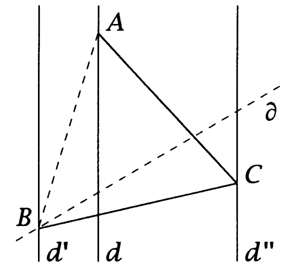
4º Les segments CF et AC d'une part, et BC et AA' d'autre part, sont égaux; les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{A'AG}$ étant égaux on a $\widehat{BCF} = \widehat{CAA'}$. Les triangles CFB et ACA' sont égaux : $\widehat{CFB} = \widehat{ACA'}$. Comme les droites CF et AC sont perpendiculaires, les droites BF et $A'C$ le sont aussi. Il en est de même des droites DC et $A'B$.

Les droites CD, BF, AH sont concourantes car hauteurs du triangle $A'BC$.

◇ *Autre solution* : Utiliser les rotations de centre O et O' et d'angle 90°.



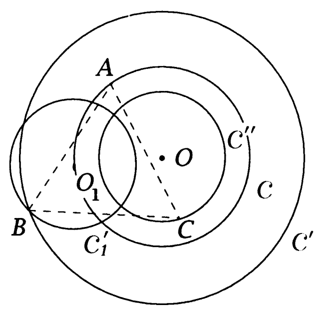
122. • *Analyse* : Soit ABC un triangle équilatéral alors le point B se déduit du point C par une rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.



• *Construction A* : Considérer d', d, d'' trois droites parallèles prises dans cet ordre et A un point de d.

Construire la droite ∂ déduite de la droite d'' par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$; elle coupe la droite d' en un point B qui est le deuxième sommet du triangle cherché. Le point C est situé à l'intersection de la droite d'' et de la circonférence de centre A et de rayon AB, il est tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

• *Discussion A* : la droite ∂ coupe toujours la droite d'. Une fois le point A fixé et le sens de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ donné, il existe une et une seule solution au problème donné.



• *Construction B* : Considérer C', C, C'' trois circonférences concentriques de centre O, de rayons décroissants r', r, r'' et un point A de C.

Tracer la circonférence C''_1 déduite de la circonférence C'' par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ (il suffit de déterminer son centre O_1) ; elle coupe la circonférence C' au point B qui est le deuxième sommet du triangle demandé. Le point C cherché est situé à l'intersection de la circonférence C'' et de la circonférence de centre A de rayon AB ; il est tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

• *Discussion B* : Une fois le point A fixé et le sens de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ donné, il existe autant de solutions qu'il y a de points communs aux circonférences C' et C''_1. Une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux circonférences aient des points communs est : $r' - r'' \leq OO_1 \leq r' + r''$. Comme le triangle OAO_1, est équilatéral la condition s'écrit $r' - r'' \leq r \leq r' + r''$. Ainsi :

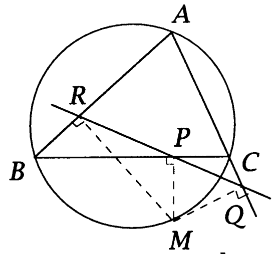
◇ Si $r'' + r < r'$, il n'y a pas de solution ;

◇ Si $r'' + r > r'$, les circonférences C' et C''_1 se coupent en deux points et il y a deux solutions. Si le sens de l'angle n'est pas fixé, il y a quatre solutions se déduisant deux à deux par la symétrie orthogonale d'axe OA ;

◇ Si $r'' + r = r'$, les circonférences C' et C''_1 sont tangentes et il y a une solution.

Note : Dans ce cas, le point O est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC et on retrouve le résultat de l'exercice n° 120.

123. Soient M un point du plan et P, Q, R ses projections orthogonales sur les côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC.



Le quadrilatère $BRPM$ est inscriptible d'où

$$(BR, BM) = (PR, PM) + k\pi \qquad (*)$$

De même le quadrilatère $CQMP$ est inscriptible et

$$(CQ, CM) = (PQ, PM) + k\pi \qquad (**)$$

Supposons que le point M soit situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC; alors $(BA, BM) = (CA, CM) + k\pi$. Comme $(BR, BM) = (BA, BM)$ et $(CQ, CM) = (CA, CM)$ on a $(PR, PM) = (PQ, PM) + k\pi$: les droites PQ et PR sont confondues et les points P, Q, R sont alignés.

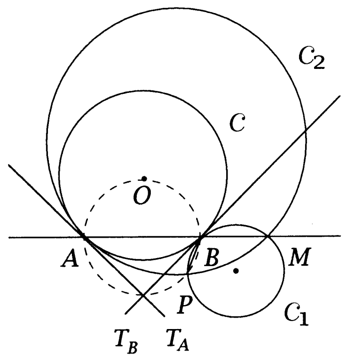
Réciproquement si les points P, Q, R sont alignés on a $(PR, PM) = (PQ, PM) = k\pi$. Par suite $(BR, BM) = (CQ, CM) + k\pi$ $(*)(**)$; donc $(BA, BM) = (CA, CM) + k\pi$ et les points A, B, C, M sont cocycliques (230).

124. On note T_A et T_B les tangentes à la circonférence C en A et B respectivement. On a :

$$(PM, PB) = (BM, T_B) = \frac{1}{2}(OA, OB) + k_1\pi$$

$$(PA, PM) = (T_A, AM) = \frac{1}{2}(OA, OB) + k_2\pi$$

d'où $(PA, PB) = (OA, OB) + k\pi$. Le point P est situé sur le cercle circonscrit C' au triangle OAB.



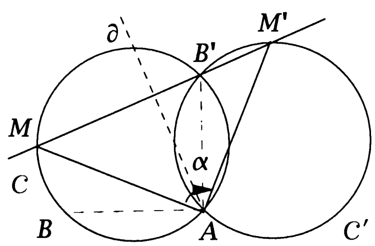
Réciproquement, soit P un point de la circonférence C' et C_2 la circonférence passant par le point P et tangente à la circonférence C au point A; elle recoupe la droite AB en un point M. Notons C_1 la circonférence circonscrite au triangle PMB. On a les égalités suivantes à $k\pi$ près :

$$(PM, PB) = (PM, PA) + (PA, PB) = (AM, T_A) + (OA, OB) = (AB, T_A) + (OA, OB)$$
$$= \frac{1}{2}(OB, OA) + (OA, OB) = \frac{1}{2}(OA, OB)$$

D'où $(PM, PB) = (BM, T_B)$ et T_B est tangente à la circonférence C_1 en B.

Le lieu géométrique du point P lorsque le point M décrit la droite AB est le cercle circonscrit au triangle OAB.

125. Soit α l'angle de la rotation; lorsque le point M décrit la circonférence C, le point M' décrit la circonférence C' déduite de la circonférence C par la rotation $\mathcal{R}$.



Notons ∂ la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$. Le triangle AMM' est isocèle, on a :

$$(MA, MM') = (MA, \partial) + (\partial, MM')$$
$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (228)$$

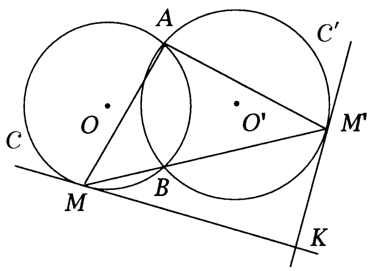
La droite MM' recoupe la circonférence C en un point B' tel que l'arc $\overset{\frown}{AB'}$ soit de mesure constante : le point B' est fixe.

De même l'angle $(M'M, M'A)$ est de mesure constante $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi$ et, si on note B'' le point où la droite $M'M$ recoupe la circonférence C', l'arc $\widehat{AB''}$ est de mesure constante : le point B'' est fixe.

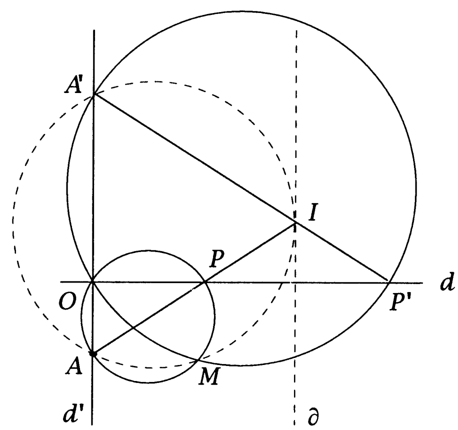
La droite MM' étant mobile les points B' et B'' sont confondus (11).

Lorsque le point M décrit la circonférence C, la droite MM' passe par le point fixe B', second point d'intersection des circonférences C et C', si l'angle de la rotation est différent de $\pi + 2k\pi$; sinon C et C' sont tangentes, et elle passe par le point A.

Autre solution : Le point B' est image d'un point B de C par la rotation $\mathcal{R}(A, \alpha)$ (de même pour les points M et M'). Les triangles BAB' et MAM' sont isocèles d'angle au sommet α. D'où $(BA, BB') = (MA, MM')$; comme $(BA, BB') = (MA, MB')$ (214) ou (230), ces angles sont égaux et la droite MM' passe par le point fixe B'.



126. Par (230), on a $(MA, MK) = (BA, BM) + k\pi$ et $(M'A, M'K) = (BA, BM') + k\pi$. Les points M, B, M' sont alignés, d'où $(MA, MK) = (M'A, M'K) + k\pi$ et les points A, M, K, M' sont cocycliques (230).



127. Les points O, A, P, M sont cocycliques, d'où :

$(AM, AP) = (OM, OP) + k\pi$ (230)

Les points A, P, I étant alignés, on a :

$(AM, AI) = (OM, OP) + k\pi$

De même les points O, A', P', M sont cocycliques, d'où :

$(A'M, A'I) = (OM, OP') + k\pi$ (230)

Comme les points O, P, P' sont alignés, on obtient :

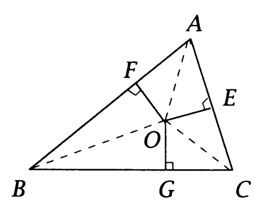
$(OM, OP) = (OM, OP') + k\pi$.

Par suite $(AM, AI) = (A'M, A'I) + k\pi$; et les points A, A', M, I sont cocycliques (230).

Notons ∂ la médiatrice du segment PP' ; comme le triangle IPP' est isocèle, on a $(IP, \partial) = (\partial, IP') + k\pi$. Les droites AA' et ∂ sont parallèles et les angles (IA, ∂) et $(A'A, A'I)$ sont égaux à $k\pi$ près.

La droite ∂ est tangente au point I au cercle circonscrit au quadrilatère $AA'MI$ (230).

128. Le triangle n'est pas isocèle, sinon il aurait un axe de symétrie et le problème ne se poserait pas (59) ou (200) et (201).

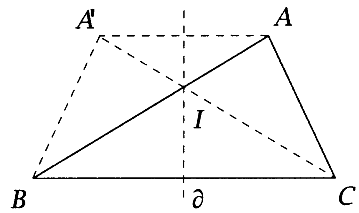


On trace les bissectrices des angles du triangle ABC ; elles sont concourantes en un point O (120). Du point O on abaisse les perpendiculaires OE, OF, OG aux côtés AC, AB, BC respectivement ; ces segments sont égaux (83). De plus $BF = BG$, $CG = CE$, $AE = AF$ (82).

On découpe le triangle ABC selon OE, OF, OG ; il suffit de retourner les quadrilatères $AEOF$, $CEOG$, $BGOF$ et de les coudre pour résoudre le problème.

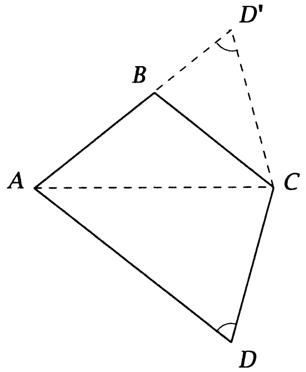
Note : Si les trois angles du triangle sont aigus, on peut aussi utiliser le centre du cercle circonscrit pour découper le triangle en trois triangles isocèles.

129. Supposons le problème résolu et soit A' le symétrique du point A par rapport à la médiatrice du segment BC. Alors $A'B$ égale AC et $\widehat{A'BA} = \widehat{ACB} - \widehat{A'CB}$.



Construction : Construire le triangle ABA', puis la médiatrice ∂ du segment AA'. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite ∂.

Discussion : La construction est toujours possible.



130. Supposons le problème résolu et soit D' l'image du point D par la symétrie orthogonale d'axe AC. Les points A, B, D' sont alignés et les angles $\widehat{BD'C}$ et $\widehat{ADC}$ sont égaux.

Construction : Construire le triangle $BD'C$ ($BD' = AD - AB$ et exercice n° 8). Porter le point A sur le prolongement du côté $D'B$; construire le point D symétrique du point D' par rapport à la droite AC.

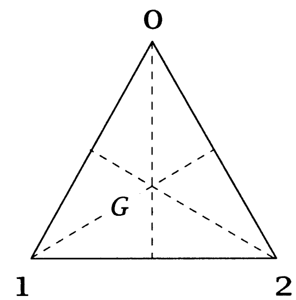
Discussion : La construction est toujours possible ; il y a autant de solutions que de solutions à la construction du triangle $BD'C$.

131. La transformation identique du plan est la seule isométrie.

132. La transformation identique du plan et la symétrie orthogonale d'axe la bissectrice de l'angle au sommet.

133. 1) Soit I une isométrie de $\mathcal{E}$. S'il existe un point fixe G pour l'isométrie I, on a, pour tout i=0, 1, 2, $Gi = I(G)\,I(i) = G\,I(i)$.

Si le point $I(i)$ est distinct du point i, le point G est situé sur la médiatrice du côté $i\,I(i)$.



Notons G l'intersection des médiatrices des côtés du triangle : c'est le centre du cercle circonscrit au triangle et $G0$ égale $G1$ égale $G2$. Comme l'image par une isométrie I de $\mathcal{E}$ d'un sommet du triangle est un sommet, on a $I(G)0$ égal à $I(G)1$ égal à $I(G)2$.

Par suite $I(G)$ est situé sur les médiatrices des côtés du triangle et G est point fixe pour toute isométrie I de $\mathcal{E}$.

2) Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{3}$ alors $\mathcal{R}(0) = 1$, $\mathcal{R}(1) = 2$, $\mathcal{R}(2) = 0$. Un déplacement étant déterminé par deux points, la rotation $\mathcal{R}$ est l'unique déplacement (rotation) de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{R}(0) = 1$.

On a $\mathcal{R}^2(0) = 2$, $\mathcal{R}^2(1) = 0$, $\mathcal{R}^2(2) = 1$, et $\mathcal{R}^3 = Id$.

3) Une isométrie I de $\mathcal{E}$ telle que $I(0) = 0$ possède deux points fixes 0 et G. Si I est un déplacement, c'est la transformation identique du plan ; si I est un retournement, c'est la symétrie orthogonale d'axe $0G$. Il suffit de vérifier que cette symétrie est élément de $\mathcal{E}$, ce qui est immédiat car $0G$ est médiatrice du côté 12.

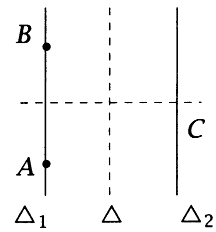
Il est clair que pour i=0, 1, 2, on a $\mathcal{R}^{-i}(i) = 0$; si I est une isométrie de $\mathcal{E}$ telle que $I(0) = i$ on a $\mathcal{R}^{-i} \circ I(0) = 0$ et $\mathcal{R}^{-i} \circ I = Id$ ou $\mathcal{R}^{-i} \circ I = \mathcal{S}$. Par suite, pour tout élément I de $\mathcal{E}$, il existe i=0, 1, 2, tel que $I = \mathcal{R}^i$ ou $I = \mathcal{R}^i \circ \mathcal{S}$ et réciproquement. L'ensemble $\mathcal{E}$ est constitué de six éléments.

134. Le point G est le point d'intersection des diagonales, la rotation $\mathcal{R}$ est la rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{4}$ (ou $-\frac{\pi}{4}$ suivant la position du sommet 1) ; $\mathcal{R}^i(0) = i$ avec $4 = 0$.

La symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ est la symétrie orthogonale d'axe $0G$ et, pour tout élément I de $\mathcal{E}$, il existe i=0, 1, 2, 3, tel que $I = \mathcal{R}^i$ ou $I = \mathcal{R}^i \circ \mathcal{S}$ et réciproquement. L'ensemble $\mathcal{E}$ est constitué de 8 éléments.

Remarque : l'isométrie $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ est la symétrie par rapport à la médiatrice de 01.

135. Le point G est le point d'intersection des diagonales, la rotation $\mathcal{R}$ est la rotation de centre G et d'angle égal à 180°. Si $I(0) = 0$, alors I est la transformation identique ou I est la symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ d'axe $0G$. Les isométries de $\mathcal{E}$ sont I_d, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, cette dernière étant la symétrie orthogonale d'axe $1G$.



136. 1) L'image d'une droite par une isométrie est une droite ; par suite si I est une isométrie de $\mathcal{E}$ on a $I(\Delta_1) = \Delta_1$ et $I(\Delta_2) = \Delta_2$, ou $I(\Delta_1) = \Delta_2$ et $I(\Delta_2) = \Delta_1$.

Soit Δ la droite équidistante des droites Δ_1 et Δ_2 **(143)** et $\mathcal{S}$ la symétrie orthogonale d'axe Δ. Comme $\mathcal{S}(\Delta_1) = \Delta_2$ et $\mathcal{S}(\Delta_2) = \Delta_1$, la symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ est la symétrie orthogonale cherchée.

2) a_- Soit I une isométrie de $\mathcal{E}'$ ayant deux points fixes A et B situés sur Δ_1 :

La médiatrice du segment AB coupe la droite Δ_2 en un point C ; le point C est point fixe pour I et I est la transformation identique du plan (238). En effet CA égale $I(C)A$ et CB égale $I(C)B$: $I(C)$ est situé sur la médiatrice de AB. Comme $I(C)$ est situé sur Δ_2, les points C et $I(C)$ coïncident.

b_- Soit I une isométrie de $\mathcal{E}'$ ayant un seul point fixe A situé sur Δ_1 :

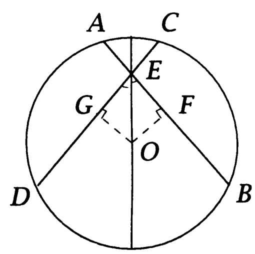
Prenons B un point de Δ_1 distinct du point A ; les points B et $I(B)$ sont distincts et A est le milieu du segment $B\,I(B)$. Notons d la médiatrice du segment $B\,I(B)$; l'isométrie $\mathcal{S}_d \circ I$ est une isométrie de $\mathcal{E}'$ et possède deux points fixes situés sur Δ_1 à savoir A et B.

L'isométrie I est la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_d$ (cf. a_-).

c_- Soit I une isométrie de $\mathcal{E}'$ n'ayant aucun point fixe situé sur Δ_1.

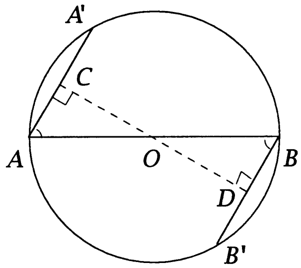
Soit A un point de Δ_1. Alors les points A et $I(A)$ sont distincts ; si d est la médiatrice du segment $A\,I(A)$, l'isométrie $\mathcal{S}_d \circ I$ est une isométrie de $\mathcal{E}'$ possédant au moins un point fixe situé sur Δ_1 à savoir A. L'isométrie $\mathcal{S}_d \circ I$ est donc une symétrie orthogonale (cf. b_-) ou la transformation identique du plan (cf. a_-). Ce dernier cas ne peut se présenter sinon I serait la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_d$ et aurait un point fixe situé sur Δ_1. Par suite l'isométrie $\mathcal{S}_d \circ I$ est une symétrie orthogonale $\mathcal{S}'_d$ d'axe perpendiculaire à Δ_1 et l'isométrie I est la translation $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}'_d$.

3) De la description des éléments de $\mathcal{E}'$ et de 1) on déduit que les isométries de $\mathcal{E}$ sont Id, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_\partial$ ou ∂ est une droite perpendiculaire à Δ_1, $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ où la direction du vecteur $\vec{v}$ est la direction de la droite Δ_1, $\mathcal{R}$ rotation de centre un point situé sur Δ et d'angle de mesure π, et $\mathcal{S} \circ \mathcal{T}_{\vec{v}}$ pour tout vecteur $\vec{v}$ de direction la droite Δ_1.



140. Considérons AB et CD deux cordes égales d'un même cercle se coupant en un point E. Notons F et G les pieds des perpendiculaires abaissées du point O, centre du cercle, sur ces cordes respectivement.

Les triangles rectangles OFE et OGE sont égaux : les angles $\widehat{OEB}$ et $\widehat{OEG}$ sont égaux.



141. Soient AB un diamètre d'un cercle de centre O, et AA' et BB' deux cordes parallèles. Notons C et D les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les cordes AA' et BB' respectivement.

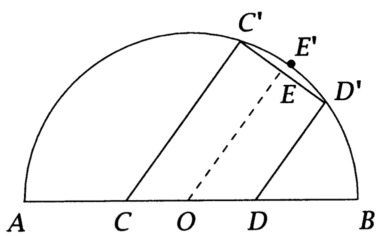
Les points O, C, D sont alignés, et les triangles OAC et OBD sont égaux. Par suite les segments OC et OD sont égaux, et les cordes sont égales.

Les triangles isocèles OAA' et OBB' étant égaux et les points O, A, B étant alignés, les points O, A', B' sont alignés (le quadrilatère $AA'BB'$ est un rectangle).

142. Soit E' le milieu de l'arc $\overset{\frown}{C'D'}$ et notons C'', D'', E'' les intersections respectives des droites $C'C$, $D'D$, $E'O$ avec la circonférence.

Les cordes $C'C''$ et $D'D''$ sont égales (la perpendiculaire à ces cordes passant par le point O détermine deux triangles rectangles égaux et (155)), par suite les arcs $\overset{\frown}{BD'}$, $\overset{\frown}{AC''}$ sont égaux.

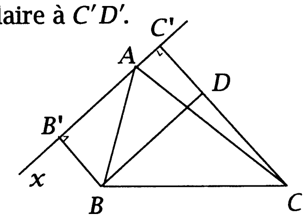
On en déduit les égalités en mesure suivantes :



$$\begin{aligned}
\widehat{D'DB} &= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{D'B} + \overset{\frown}{D''A}) \\
&= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{D'B} + \overset{\frown}{D''C''} + \overset{\frown}{C''A}) \\
&= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{D'B} + \overset{\frown}{C'D'} + \overset{\frown}{D'B}) \\
&= \overset{\frown}{E'B} \\
&= \widehat{E'OB}
\end{aligned}$$

Les droites OE' et DD' sont parallèles, et la droite OE' est bissectrice de l'angle $\widehat{C'OD'}$. Le triangle $C'OD'$ étant isocèle, les droites OE' et $C'D'$ sont perpendiculaires.

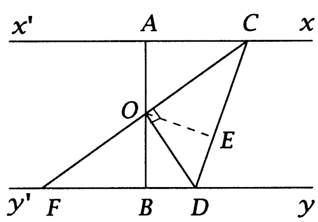
• *Autre solution* : La parallèle à la droite CC' passant par O coupe la droite $C'D'$ en son milieu E (253) ; le triangle $OC'D'$ est isocèle et OE est perpendiculaire à $C'D'$.



143. Supposons le problème résolu et soit Ax la droite telle que, BB' et CC' étant perpendiculaires à Ax, on ait $B'C'$ de mesure l. La parallèle à Ax passant par B coupe CC' en D : le quadrilatère $BDC'B'$ est un rectangle et BD est de mesure l.

◇ *Construction* : Tracer la circonférence de diamètre BC, puis la circonférence de centre B et de rayon l. Elles se coupent en un point D. Tracer la droite Ax parallèle à BD.

◇ *Discussion* : Si $l < BC$, il y a deux solutions ; si $l = BC$, il y a une solution la parallèle à BC ; si $l > BC$, il n'y a pas de solution.

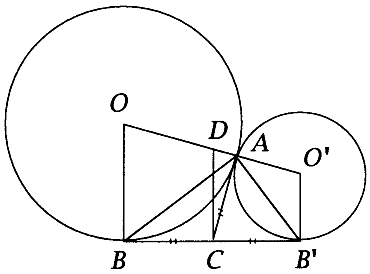


144. La droite CO coupe yy' en F et les triangles OAC et OBF sont égaux (48) : les segments OC et OF sont égaux. Le segment OD est hauteur et médiane du triangle DCF : il est isocèle et OD est bissectrice de l'angle $\widehat{CDF}$.

Le point O est équidistant des droites CD, BD, AC : la droite CD est tangente à la circonférence de diamètre AB.

Autre solution : Soit E la seconde intersection des circonférences de diamètre OC et OD respectivement. Les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{ODB}$ d'une part, et $\widehat{ACO}$ et $\widehat{BOD}$ d'autre part, sont égaux (99). Comme $\widehat{AEO} = \widehat{ACO}$ et $\widehat{OEB} = \widehat{ODB}$, l'angle $\widehat{AEB}$ est droit et le point E est sur la circonférence de diamètre AB.

Les angles $\widehat{CEO}$ et $\widehat{OED}$ étant droits, les points C, E, D, sont alignés et la droite CD est tangente au point E à la circonférence de diamètre AB (158).



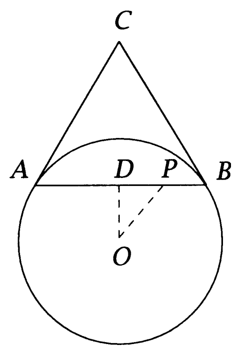
145. 1º Soit C le point de BB' tel que AC soit tangente commune aux deux circonférences : les segments CB, CB', CA sont égaux et le triangle ABB' est rectangle : l'angle $\widehat{BAB'}$ est droit.

2º Les segments CA et OA (ou OO') sont perpendiculaires (158) : la droite OO' est tangente à la circonférence de diamètre BB' en A.

3º La droite CO (resp. CO') est bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ (resp. de l'angle $\widehat{AO'B'}$). Soit D le point de OO' tel que CD soit perpendiculaire à BB'.

Les angles $\widehat{COD}$ et $\widehat{DCO}$ (resp. $\widehat{DO'C}$ et $\widehat{DCO'}$) sont égaux (93) ; les triangles DOC et $DO'C$ sont isocèles (ou cf.exercice nº49 $DC = \frac{OB+OB'}{2} = \frac{OO'}{2}$).

La droite BB' est tangente à la circonférence de diamètre OO' au point C.

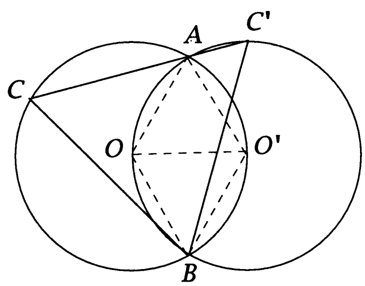


146. Les segments AB et AC étant diamètres des circonférences, les angles $\widehat{AB'B}$ et $\widehat{A'C'C}$ sont droits ; comme les droites BB' et CC' sont parallèles, les points A, B, C' sont alignés.

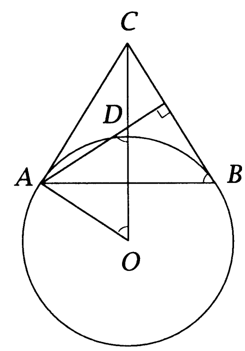
147. Supposons le problème résolu. Le triangle CAB est isocèle et l'angle $\widehat{ACB}$ est maximum lorsque les angles égaux $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$ sont minima, c'est à dire lorsque la corde AB est minimum.

◇ *Construction* : Tracer la droite perpendiculaire à OP en P.

Autre solution : Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires. Minimiser l'angle $\widehat{AOB}$.



148. Les triangles $OO'A$ et $OO'B$ sont équilatéraux, et les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AO'B}$ sont égaux à 120°. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AC'B}$ sont de mesure 60° et le triangle BCC' est équilatéral.



149. Supposons que l'angle $\hat{C}$ du triangle isocèle ACB soit aigu : le point D est intérieur au triangle.

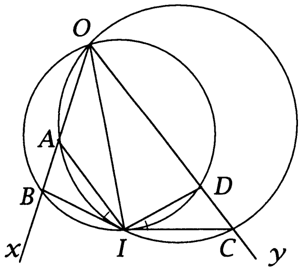
L'angle $\widehat{ADO}$ est égal à l'angle $\widehat{ABC}$ (99), et l'angle $\widehat{ABC}$ est égal à l'angle $\widehat{AOD}$ (162) : le triangle AOD est isocèle et le segment AD est égal au rayon.

On procéde de même si l'angle $\hat{C}$ est obtus.

Autre solution : La droite OC est bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ et les droites AD et OB sont paralléles (93).

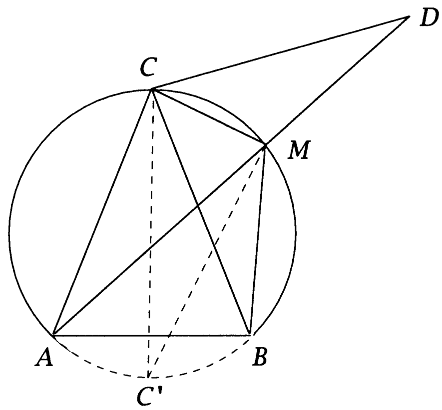
150. Soient M et M' les deux intersections situées d'un même côté par rapport à la droite AB. Les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{ABM'}$ sont égaux (174) : les points B, M, M' sont alignés.

Autre solution : Soient O et O' les centres respectifs de ces circonférences et $\mathcal{R}$ la rotation de centre A telle que $\mathcal{R}(O) = O'$. Si M est l'intersection de C avec la troisième circonférence, $\mathcal{R}(M) = M'$ est le point intersection de C' avec cette circonférence. Utiliser l'exercice nº 125.



151. Le point I est milieu des arcs $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{BD}$ et les segments IA et IC (resp. IB et ID) sont égaux.

Les angles $\widehat{BID}$ et $\widehat{AIC}$ sont égaux comme supplémentaires de l'angle xOy, et les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{DIC}$ sont égaux. Les triangles AIB et CID sont égaux (49) : les segments AB et CD sont égaux.

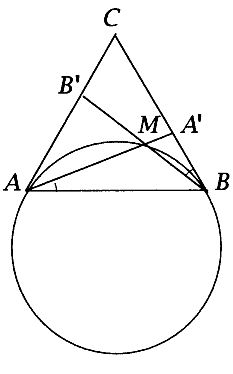


152. 1°) La bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ intersecte la circonférence ABC au point C' diamétralement opposé au point C. L'angle $\widehat{CMC'}$ étant droit, la droite CM est bissectrice de l'angle $\widehat{BMD}$; le triangle BMD est isocèle et CM est perpendiculaire à BD et passe par son milieu.

Dans le triangle BCD la droite CM est hauteur et médiatrice : le triangle BCD est isocèle et CB égale CD.

2°) Dans le triangle ACD on a $AD < AC + CD$ et, comme $AD = AM + MB$ et $AC + CB = AC + CD$, on a $AM + MB < AC + CB$.

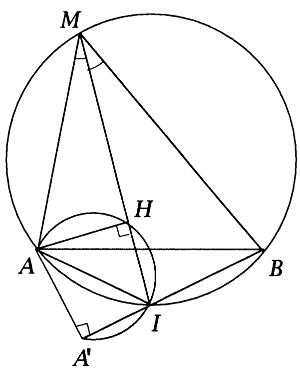
Autre solution : On a les égalités angulaires suivantes : $(MC, MD) = (CM, CA) + (AC, AM) = (BM, BA) + (BC, BM) = (BC, BA) = (AB, AC)$ et $(CA, CB) = (MA, MB)$. Par suite $(MB, MC) = (MA, MB)$: les triangles MCB et MCD sont égaux (ou MC est axe de symétrie de la figure $CBMD$).



153. Les tangentes se coupent en un point C et le triangle ABC est équilatéral.

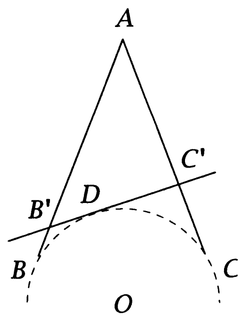
D'autre part les angles $\widehat{CBB'}$ et $\widehat{BAA'}$ sont égaux et le triangle $AA'B$ est égal au triangle $BB'C$ (48) : les segments AA' et BB' sont égaux.

154. La bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ passe par le milieu I de l'autre arc de cercle de la circonférence définissant l'arc $\overset{\frown}{AB}$; il est fixe. l'angle $\widehat{AHI}$ étant droit le lieu géométrique demandé est contenu dans la circonférence de diamètre AI.



Soit A' la projection orthogonale du point A sur la droite BI, et H un point de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AA'}$ de cette circonférence situé du même côté que le point B par rapport à la droite AA'. La droite IH coupe l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ en un point M et la droite MH est bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.

Le lieu géométrique de la projection orthogonale H du point A sur la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ est l'arc de cercle $\overset{\frown}{AA'}$, situé du même côté que le point B par rapport à la droite AA', d'où l'on voit le segment AI sous un angle droit.



155. Supposons le problème résolu et soit D le point du segment $B'C'$ tel que $B'B$ égale $B'D$.

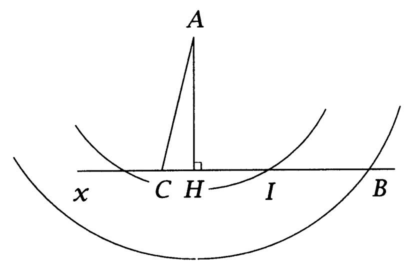
Les segments DC' et CC' sont égaux ; si on montre que les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{DBC}$ sont égaux, le cercle tangent en B et C aux droites AB et AC est tangent en D à la droite $B'C'$.

Le triangle $C'CD$ est isocèle et $\widehat{DCC'} = \frac{1}{2}\widehat{AC'B'}$. De plus $\widehat{DBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{AB'C'}$. Comme $\widehat{AB'C'} + \widehat{AC'B'} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2\widehat{ABC}$, on a $\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{AB'C'} = \frac{1}{2}\widehat{AC'B'}$ soit $\widehat{ACD} = \widehat{DBC}$.

- *Construction* : Elever les perpendiculaires aux côtés AB et AC aux points B et C ; elles se coupent en un point O. Tracer le cercle de centre O et de rayon OB. Mener une droite tangente à ce cercle, elle coupe les côtés AB et AC aux points B' et C' cherchés.
- *Discussion* : Il y a une infinité de solution : tout point B' du côté AB convient.

156. 1°) *cas* : La hauteur, la médiane et le côté sont issus du même sommet.

Tracer la hauteur AH et de H élever la perpendiculaire Hx à AH. Tracer la circonférence de centre A de rayon la longueur de la médiane : elle coupe la droite Hx au point I. Puis tracer la circonférence de centre A de rayon la longueur du côté donné : elle coupe la droite Hx en un point B. Porter sur Hx le point C tel que IB égale IC.



◇ *Discussion* :

a) Si $AI < AH$ ou $AB < AH$, il n'y a pas de solution ;

b) Si $AI = AH$ et

si $AB = AH$, il n'y a pas de solution ;

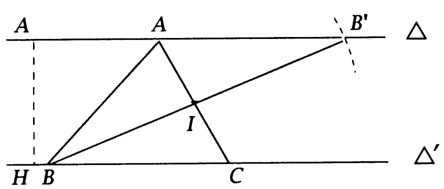
si $AB > AH$, il y a une solution et le triangle cherché est isocèle ;

c) Si $AI > AH$ et

si $AB = AH$, il y a une solution ;

si $AB > AH$, il y a deux solutions.

2°) *cas* : La hauteur est relative au côté donné et la médiane est issue d'une des extrémités de ce côté.



◇ *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit ABC le triangle cherché et I le milieu du côté AC. La droite BI coupe la parallèle au côté BC passant par A en un point B'. Le quadrilatère $ABCB'$ est un parallélogramme.

◇ *Construction* : Tracer deux droites parallèles $\triangle$ et $\triangle'$ distantes d'une longueur égale à la hauteur AH donnée. Sur $\triangle'$ porter le côté BC et de B décrire un arc de cercle de rayon égal à deux fois la médiane ; il coupe la droite $\triangle$ en un point B'. Construire I milieu de BB' ; la droite CI coupe $\triangle$ au point A. Le triangle ABC est le triangle cherché.

◇ *Discussion* :

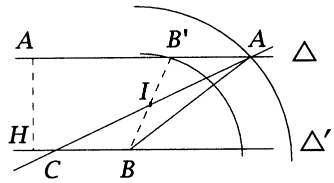
a) Si $2BI = BB' < AH$, il n'y a pas de solution ;

b) Si $2BI = BB' = AH$, il y a une solution ;

c) Si $2BI = BB' > AH$, il y a deux solutions.

3°) *cas* : La hauteur est issue d'une des extrémités du côté donné et la médiane de l'autre extrémité.

◇ *Analyse* : Supposons le problème résolu et prolongeons la médiane donnée jusqu'à son intersection B' avec la parallèle passant par A au côté BC donné. Le quadrilatère $ABCB'$ est un parallélogramme.



◇ *Construction* : Tracer deux droites parallèles $\triangle$ et $\triangle'$ distantes d'une longueur égale à la hauteur AH donnée. D'un point B situé sur $\triangle'$, tracer un arc de cercle de rayon égal au côté donné, il coupe la droite $\triangle$ en un point A. Puis tracer un arc de cercle de centre B de rayon égal à deux fois la longueur de la médiane donnée, il coupe la droite $\triangle$ en B'. Prendre I le milieu de BB' et mener la droite AI : elle coupe la droite $\triangle'$ en un point C.

Le triangle ABC est le triangle cherché.

◇ *Discussion* :

a) Si $AB < AH$ ou $2BI < AH$, il n'y a pas de solution ;

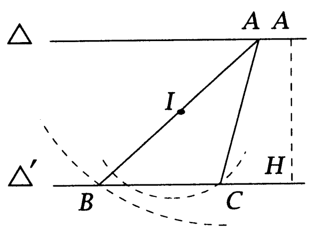
b) Si $AB = AH$ et

si $2BI = AH$, il n'y a pas de solution ;

si $2BI > AH$, il y a deux solutions ;

c) Si $AB > AH$, il y a deux ou quatre solutions selon que $2BI = AH$ ou $2BI > AH$.

4°) *cas* : La médiane est relative au côté donné et la hauteur est issue d'une des extrémités de ce côté.



Tracer deux droites parallèles $\triangle$ et $\triangle'$ distantes d'une longueur égale à la hauteur AH donnée. Du point A situé sur la droite $\triangle$ tracer un arc de cercle de rayon égal à la longueur du côté donné : il coupe la droite $\triangle'$ en un point B. Du milieu I de AB tracer un arc de cercle de rayon égal à la longueur de la médiane : il coupe la droite $\triangle'$ en un point C. Le triangle ABC est le triangle cherché.

◇ *Discussion* :

a) Si $AB < AH$, il n'y a pas de solution ;

b) Si $AB = AH$ et

si $AH \geq 2IC$, il n'y a pas de solution ;

si $AH < 2IC$, il y a deux solutions symétriques par rapport à la droite AH ;

c) $AB > AH$ et

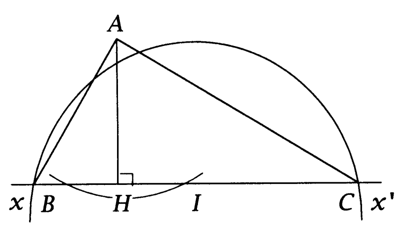
si $AH > 2IC$, il n'y a pas de solution ;

si $AH = 2IC$, il y a deux solutions symétriques par rapport à la droite AH ;

si $AH < 2IC$, il y a deux solutions symétriques par rapport à la droite AH et quatre solutions, symétriques deux à deux par rapport à la droite AH, si $AB \neq 2IC$.

5°) *cas* : La médiane et la hauteur sont issues du même sommet et le côté donné est relatif à ces lignes.

D'un point H situé sur une droite xx' élever une perpendiculaire AH de longueur la hauteur donnée. Du point A, tracer un arc de cercle de rayon égal à la longueur de la médiane, il coupe la droite xx' au point I. Du point I tracer un arc de cercle de rayon égal à la moitié du côté donné ; il coupe la droite xx' en deux points B et C. Le triangle ABC est le triangle cherché.



◇ *Discussion* :

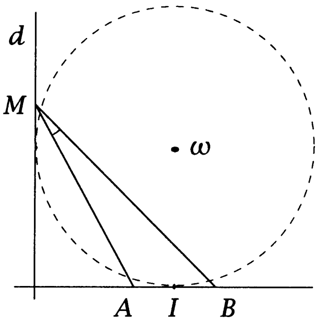
a) Si $AI < AH$, il n'y a pas de solution ;

b) Si $AI = AH$, il y a une solution et le triangle est isocèle ;

c) Si $AI > AH$, il y a deux solutions, symétriques par rapport à la hauteur AH.

157. Notons A et B les poteaux de but et d la droite représentant la ligne de touche.

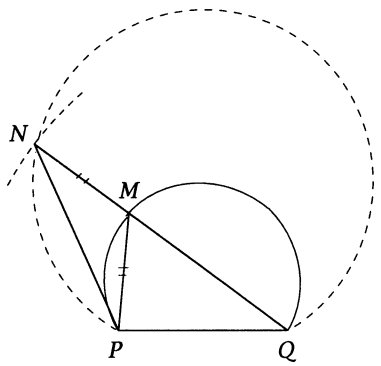
Soient M un point de d et α l'angle $\widehat{AMB}$. Le point M se situe sur l'arc capable d'où l'on voit le segment AB sous un angle α.



L'angle α sera maximum si l'arc capable est arc de cercle d'une circonférence de rayon minimum, c'est à dire lorsque cette circonférence sera tangente à la droite d.

◇ *Construction* : Déterminer le milieu du segment AB, le centre ω de la circonférence cherchée se situe à une distance de A et de B égale à la distance du point I à la droite d. Tracer la circonférence de centre ω et de rayon ωA, elle est tangente à la droite d au point cherché.

158. i) Le point M est sur l'arc capable d'où l'on voit le segment PQ sous un angle de 60° ; prolongeons le segment QM d'une longueur MN égale à MP.



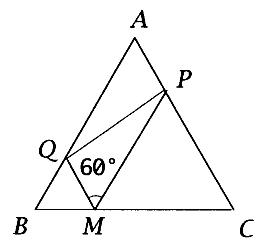
Le triangle MNP est isocèle et l'angle $\widehat{MNP}$ est égal à 30°.

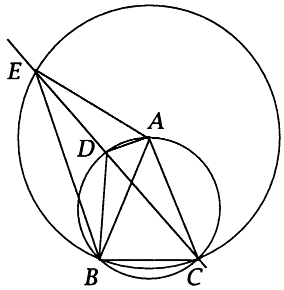
◇ *Construction* : Tracer l'arc capable d'où l'on voit le segment PQ sous un angle de 30° puis la circonférence de centre Q et de rayon l. Si le point N est l'intersection de ces deux courbes, le point M cherché est l'intersection du segment QN avec l'arc capable d'où l'on voit le segment PQ sous un angle de 60°.

◇ *Discussion* : La construction n'est possible que si la longueur donnée l est telle que $l < 2PQ$.

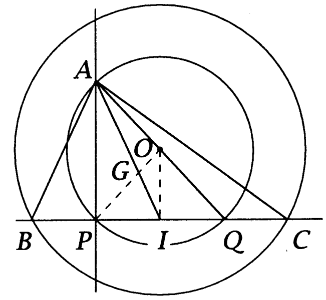
ii) La longueur $MP + MQ$ est constante de longueur le côté AB du triangle équilatéral ABC et l'angle $\widehat{PMQ}$ est égal à 60°. On est ramené à la construction précédente : construire le triangle PMQ ; le triangle APQ est égal au triangle PMQ, et AP (resp. AQ) est égal à QM (resp. à PM).

◇ La construction n'est possible que si $l < AC\frac{\sqrt{3}}{2}$.



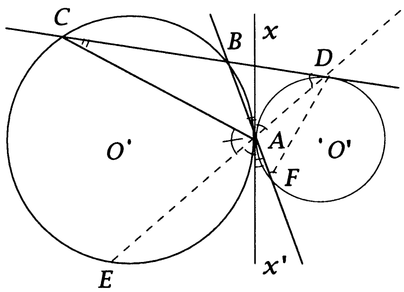


159. Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$ sont égaux. D'autre part $\widehat{EAB} = 2\widehat{ECB} = 2\widehat{DAB}$: la droite AD est bissectrice de l'angle $\widehat{EAB}$, elle est médiatrice du segment EB, et médiane du triangle EDB : le triangle EDB est isocèle.



160. Notons I le milieu de BC et Q l'autre point intersection de BC avec le circonférence C. Le segment OI est perpendiculaire à BC et I est milieu de PQ et AI est médiane du triangle AQP. Comme les points A, O, Q, sont alignés PO est médiane du triangle APQ. Soit G' le centre de gravité de ce triangle : le point G' est situé au tiers de OP, il est fixe lorsque le point A varie.

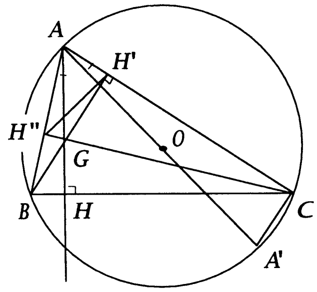
Le point G' est situé au tiers de AI : c'est le point G.



161. Notons xx' la tangente commune au point A et E l'autre intersection de la droite DA avec la première circonférence. On a les égalités angulaires suivantes :

$$\widehat{EAC} = \widehat{ACD} + \widehat{CDA}$$
$$\widehat{ACD} = \widehat{xAB} = \widehat{FAx'}$$
$$\widehat{CDA} = \widehat{DFA} = \widehat{xAD} = \widehat{x'AE}$$

On en déduit l'égalité des angles $\widehat{EAC}$ et $\widehat{EAF}$; la droite AD est bissectrice de l'angle $\widehat{CAF}$.



162. Tracer le diamètre AA' ; les angles $\widehat{HAC}$ et $\widehat{BCA'}$ sont égaux (99), ainsi que les angles $\widehat{BCA'}$ et $\widehat{BAA'}$ (174) : on a $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$.

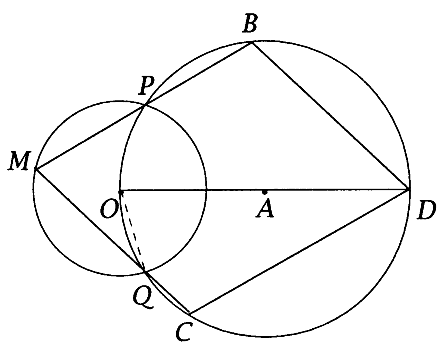
Si G est l'orthocentre du triangle ABC, les points A, H', G, H'', sont cocycliques et $\widehat{H''H'B} = \widehat{H''AH}$; par suite $\widehat{H''H'B} = \widehat{OAC}$. Les côtés $H'B$ et AC de ces angles sont perpendiculaires : les deux autres côtés, étant de même sens, sont perpendiculaires.

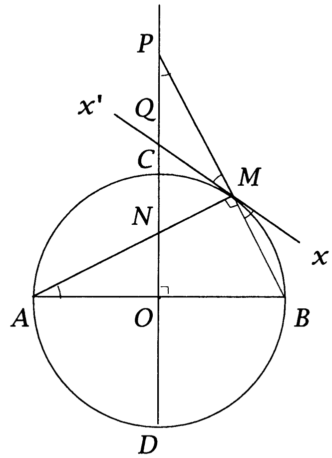
•*Autre solution* : On a $(OA, OC) = 2(BA, BH)$, d'où $(AB, AH) = (AO, AC)$. Les points H', C, B, H'', ainsi que les points A, H'', H, C, sont cocycliques : $(AH'', AH) = (CH'', CH) = (H'H'', H'B)$. Comme $(CH'', CH) = (AB, AH)$, on a $(AO, AC) = (H'H'', H'B)$; d'où le résultat (AC et BH' sont perpendiculaires).

163. On montre que le quadrilatère $CMBD$ est un parallélogramme.

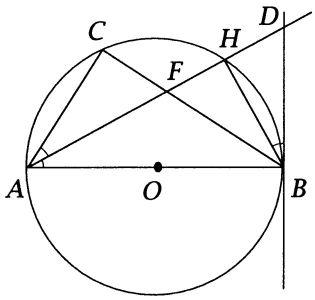
Les angles $\widehat{OBD}$ et $\widehat{OCD}$ sont droits, et les arcs $\overset{\frown}{OP}$ et $\overset{\frown}{OQ}$ sont égaux : les angles $\widehat{PBD}$ et $\widehat{QCD}$ sont égaux.

D'autre part le quadrilatère $DCQO$ est inscrit dans la circonférence de centre A, d'où les angles $\widehat{QCD}$ et $\widehat{QOD}$ sont supplémentaires. La droite OA étant axe de symétrie des deux circonférences, l'angle au centre $\widehat{QOD}$ est égal à l'angle inscrit $\widehat{QMP}$: le quadrilatère $CMBD$ est un parallélogramme (105), et MB est égal à DC.

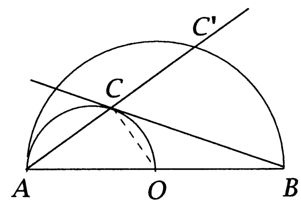




164. On a les égalités angulaires suivantes : $\widehat{PMQ} = \widehat{xMB} = \widehat{MAB} = \widehat{BPO}$. Par suite le triangle QMP est isocèle ; le triangle MPN étant rectangle, MQ est médiane et $NQ = PQ$.

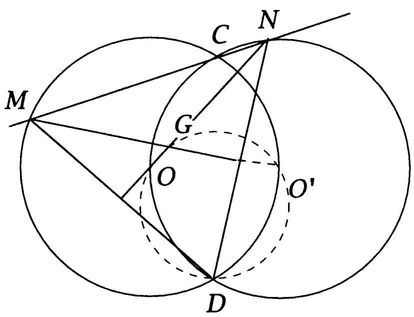


165. Les angles $\widehat{DBH}$ et $\widehat{DAB}$ sont égaux ; comme $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} = \widehat{HBC}$, la droite BH est bissectrice de l'angle $\widehat{DBF}$: le triangle DBF est isocèle (59). Par suite $BF = BD$ et $FH = HD$.



166. Le triangle AOC' est isocèle et OC est hauteur : le point C est milieu du segment AC'.

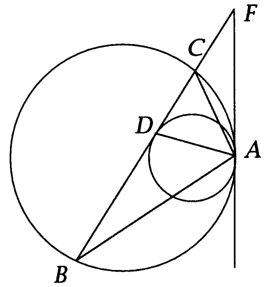
Note : Cette propriété est vraie pour toute sécante passant par A, et ce sans utiliser les propriétés de l'homothétie.



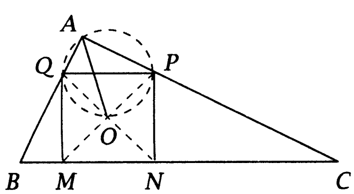
167. Le triangle MND est équilatéral (exercice n° 148).

Le centre de gravité G du triangle est situé à l'intersection des médiatrices des cordes DN et DM : elles passent par les centres O et O' de ces circonférences. L'angle $\widehat{OGO'}$ étant constant et égal à $\frac{2}{3}$ d'un angle plat, Le lieu géométrique du point G est le cercle circonscrit au triangle DOO'.

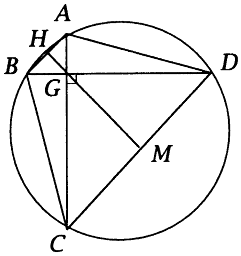
Autre solution : Considérer la rotation de centre D transformant la circonférence C en la circonférence C', et utiliser l'exercice n° 125.



168. La tangente en A à ces circonférences coupe BC en F. Les angles $\widehat{FDA}$ et $\widehat{DAF}$ sont égaux ; comme $\widehat{DBA} + \widehat{DAB} = \widehat{FDA}$, $\widehat{FAC} + \widehat{CAD} = \widehat{DAF}$, et $\widehat{FAC} = \widehat{DBA}$, on en déduit que les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{DAB}$ sont égaux.



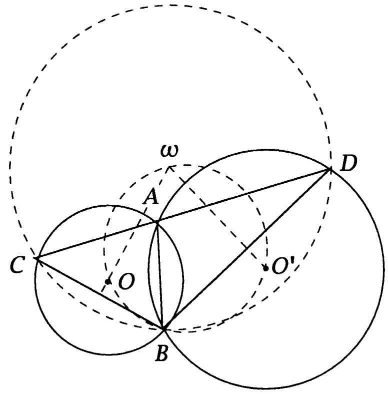
169. Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{QOP}$ étant droits, le quadrilatère $AQOP$ est inscriptible ; les cordes OQ et OP étant égales, les angles $\widehat{OAQ}$ et $\widehat{OAP}$ sont égaux. La droite AO est bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.



170. Notons H l'intersection des droites MG et AB. On a les égalités suivantes :

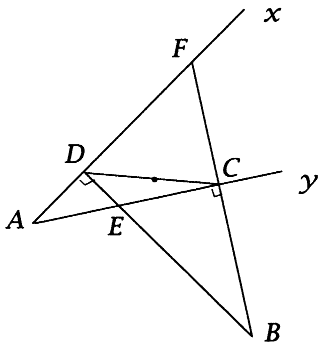
$\widehat{BGH} = \widehat{MGD} = \widehat{MDG} = \widehat{CAB}$

Comme $\widehat{BAC} + \widehat{ABG} = 1$droit, l'angle $\widehat{H}$ est droit (95).



171. Les droites ωO et BC, respectivement $\omega O'$ et BD, sont perpendiculaires : les angles $(\omega O, \omega O')$ et (BD, BC) sont égaux.

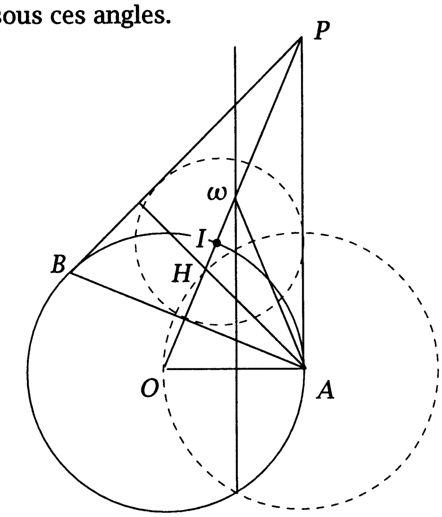
Comme l'angle (BD, BC) est constant (les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BDC}$ sont constants), l'angle $(\omega O, \omega O')$ est constant : le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle BCD est le cercle circonscrit au triangle BOO' (la réciproque est immédiate).



172. 1º Le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible : le lieu géométrique des points C et D est la circonférence C de diamètre AB (la réciproque est immédiate).

2º L'angle $\widehat{A}$ étant constant, la corde DC est constante. La distance d de cette corde au centre de la circonférence C est constante : le lieu géométrique du milieu du segment CD est la circonférence de centre le centre de C, et de rayon d (Pour la réciproque mener par un point I de cette circonférence la tangente ; elle coupe C en deux points C et D).

3º Les angles (EA, EB) et (FA, FB) sont constants : les lieux géométriques de ces points sont des circonférences d'où l'on voit le segment AB sous ces angles.



173. Le centre du cercle inscrit au triangle APB est l'intersection des bissectrices des angles du triangle : il est situé sur la droite OP. D'autre part les arcs $\widehat{IB}$ et $\widehat{IA}$ sont égaux : la droite AI est bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. Le point I est situé sur la circonférence C, il est milieu de l'arc $\widehat{AB}$.

Le lieu géométrique du centre du cercle inscrit au triangle ABP est la circonférence C, moins les deux points correspondants au diamètre perpendiculaire au rayon OA (la réciproque est immédiate).

Il en est de même du centre du cercle ex-inscrit contenu dans l'angle $\widehat{P}$: ces deux centres sont diamétralement opposés.

• Soit ω le centre du cercle circonscrit au triangle ; le point ω est l'intersection des médiatrices des segments AB et AP. Les segments ωO et ωA sont égaux : le point ω est situé sur la médiatrice du segment OA.

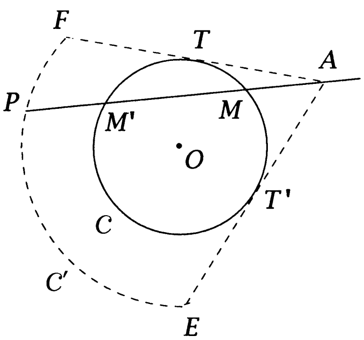
Réciproquement soient un point ω de la médiatrice du segment AO, et P l'intersection de la droite $O\omega$ avec la tangente à la circonférence menée de A. De P on mène l'autre tangente PB. Le triangle AOP est rectangle : les segments ωA et ωP sont égaux ($\omega A = \omega O$). Par symétrie, les segments ωB et ωA sont égaux : le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle PAB est la médiatrice du segment AO.

• Soit H l'orthocentre du triangle PAB ; les angles $\widehat{AHO}$ et $\widehat{ABP}$ sont égaux (99). La droite OHP étant bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$, les angles $\widehat{AOP}$ et $\widehat{ABP}$ sont égaux. Le triangle AOH est isocèle : le point H est situé sur la circonférence de centre A, et de rayon AO.

Réciproquement soient un point H de cette circonférence, et P l'intersection de la droite OH avec la tangente menée de A à C. Traçons l'autre tangente PB.

Le triangle OAH est isocèle et la droite OH est bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$: les droites OB et AH sont parallèles (89), d'où les droites AH et BP sont perpendiculaires (92). Le point H est l'orthocentre du triangle ABP : le lieu géométrique de l'orthocentre du triangle ABP est la circonférence de centre A de rayon AO, moins le point O et le point diamétralement opposé O'.

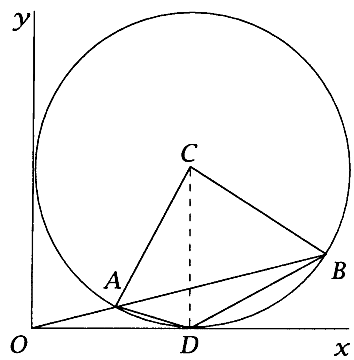
Autre solution : Le quadrilatère $OAHB$ est un parallélogramme, c'est un losange : le point H se déduit du point B par la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OA}}$.



174. Le centre O est situé sur la médiatrice du segment MM', et $AM = M'P$: le point O est situé sur la médiatrice du segment AP. Le point P est sur la circonférence de centre O et de rayon OA.

Soit $\widehat{EF}$ l'arc de cercle de la circonférence C' déterminé par les tangentes à C menées du point A, et ne passant pas par A. Pour tout point P de $\widehat{EF}$, la droite AP coupe la circonférence en M et M'. Le diamètre perpendiculaire à AP est médiatrice des segments AP et MM' : les segments AM et PM' sont égaux, et M est situé entre A et M'. On en déduit $AP = AM + AM'$.
Si le point P est sur l'autre arc de cercle, la droite AP n'est pas sécante avec la circonférence C.

Le lieu géométrique du point P est l'arc de cercle de centre O de rayon OA, défini par les tangentes menées du point A à la circonférence C et ne passant pas par le point A.



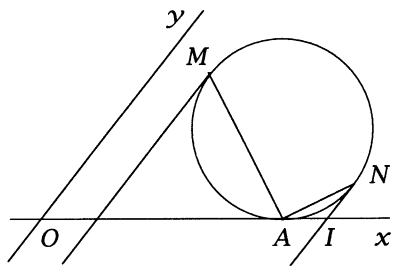
175. Comme $\widehat{BD} - \widehat{AD} = \widehat{AD}$, les angles $\widehat{DOB}$ et $\widehat{ABD}$ sont égaux (173)(178) : le triangle DOB est isocèle et $BD = CD = CB$. Le triangle BCD est équilatéral, et $\widehat{DBO} = \widehat{DOB} = 15°$.

Le triangle OAD est isocèle (176), $\widehat{ACD} = 30°$: l'angle $\widehat{ACB}$ est droit.

L'angle $\widehat{ADB}$ est égal à $90° - 15° + 60°$ soit $135°$ et l'angle $\widehat{DAC}$ est égal à $75°$.

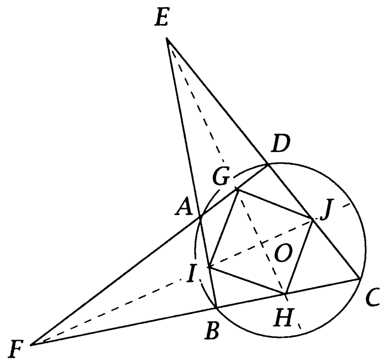
Tracer la circonférence de centre D de rayon DC ; son intersection avec la circonférence de centre C détermine le point B. Tracer la droite OB.

176. Les arcs $\widehat{AP}$, $\widehat{PM}$, $\widehat{MN}$, et $\widehat{BN}$ sont égaux. Le quadrilatère $MNIP$ est un parallélogramme (104) et même un losange (110) (La droite MI est axe de symétrie de la figure).



177. La tangente en N coupe le côté Ox en I ; le triangle IAN est isocèle, et les angles $\widehat{xIN}$ et $\widehat{xOy}$ sont égaux. Par suite $\widehat{NAI} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$: la droite AN est paralléle à une bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

On fait de même pour la droite AM et l'autre bissectrice (notons que l'angle $\widehat{NAM}$ est droit).



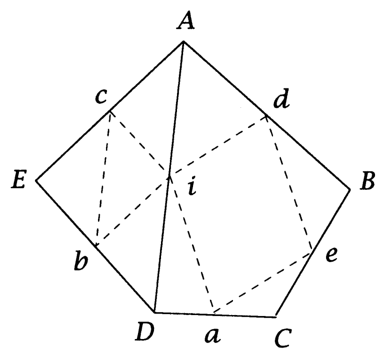
178. Considérons les triangles BEH et DEG. Les angles $\widehat{AEG}$ et $\widehat{GED}$ sont égaux, ainsi que les angles $\widehat{EBH}$ et $\widehat{GDE}$ (175). D'où les angles $\widehat{BHE}$ et $\widehat{DGE}$, et donc $\widehat{AGH}$, sont égaux. Le triangle FGH est isocèle et la droite FIJ est médiatrice du segment GH.

De même la droite EGH est médiatrice du segment IJ, et le quadrilatère $IHJG$ est un losange (110).

179. i) C'est immédiat (123).

ii) le quadrilatère $abcd$ est un parallélogramme (exercice n° 51) : l'isométrie $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$ est l'identité du plan. Soit A un point quelconque du plan ; on construit $B = \mathcal{S}_a(A)$, $C = \mathcal{S}_b(B)$, $D = \mathcal{S}_c(C)$. Le quadrilatère $ABCD$ répond à la question (on peut aussi utiliser (123)).

Note : pour obtenir un quadrilatère convexe prendre un point A' intérieur au quadrilatère $abcd$, et A le symétrique de A' par rapport à un côté.



iii) Pour un point p notons $\mathcal{S}_p$ la symétrie centrale de centre p, et soit $\mathcal{S}$ l'isométrie $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_a$. Alors $\mathcal{S}(D) = D$ et $\mathcal{S}$ est un déplacement avec un point fixe : c'est une rotation d'angle 180° (sinon $\mathcal{S}$ est l'identité du plan, et $\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_a$; comme $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$ et $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_a$ sont des translations, $\mathcal{S}_b$ est une translation avec seul un point fixe, ce qui est absurde).

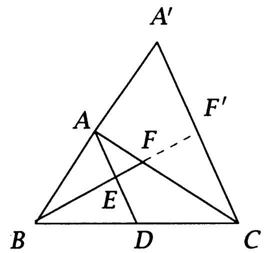
L'isométrie $\mathcal{S}$ est une rotation de centre D et d'angle 180°. Tracer $\mathcal{S}(a) = a''$: le point D est le milieu du segment aa''. Terminer la construction par symétrie centrale.

◇ *Autre solution* : Une diagonale quelconque AD divise le pentagone en un quadrilatère $ABCD$ et un triangle ADE.

Construire avec les trois milieux a, e, d un parallélogramme $aedi$: les points i, b, c, sont les milieux des côtés du triangle ADE. Tracer la parallèle à bc passant par i, et porter les longueurs iA et iD égales à bc. Terminer la construction par symétrie centrale.

181. Utiliser (256) ; On note 1, 2, 3, 4 etc ... les sommets du polygone ; si le point P_i appartient au côté $i(i+1)$ on mène la parallèle à la droite $i(i+2)$. Si le nombre de côtés du polygone est impair il faut faire deux "tours" pour revenir au point initial, si le nombre de côtés est pair un tour suffit.

182. $\frac{\overline{EA}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EA}}$.

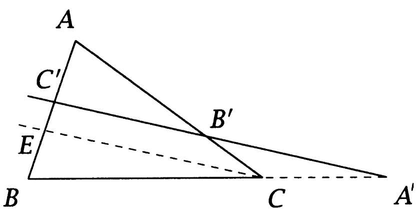


183. Considérons A' le point du plan tel que A soit le milieu du segment $A'B$ et F' le point intersection des droites $A'C$ et BE.

Les droites AD et $A'C$ sont parallèles (123), d'où $\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'C}}$ et F' est le milieu du segment $A'C$. Le point F est le point d'intersection des médianes du triangle $A'BC$: le segment AF est le tiers du segment AC.

Autre solution : Prolonger FD d'une longueur égale DA'. Le quadrilatère $BA'CF$ est un parallélogramme ; utiliser le théorème de Thalès (ou voir exercice n° 83).

184. Supposons les points A', B', C' alignés ; par le point C menons la parallèle à cette droite, elle coupe la droite AB au point E. Par suite $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'E}}$; $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'E}}{\overline{C'A}}$ d'où $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$ $(*)$.

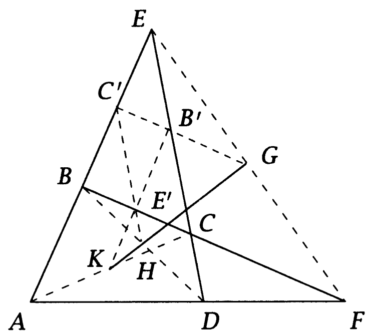


Réciproquement : Supposons que les trois points A', B', C' vérifient la relation $(*)$. La droite $A'B'$ coupe la droite AB en un point C'_1 tel que $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'_1A}}{\overline{C'_1B}} = +1$; d'où $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C'_1A}}{\overline{C'_1B}}$ et les points C' et C'_1 sont confondus.

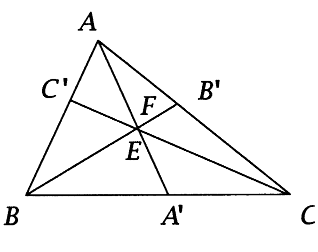
Les points A', B', C' sont alignés.

185. Soient $ABCDEF$ un quadrilatère complet et H le milieu de la diagonale BD, K le milieu de la diagonale AC, G le milieu de la diagonale EF. Notons E', B', C' les milieux des côtés du triangle EBC.

Les droites joignant ces milieux deux à deux passent chacune par un des milieux d'une diagonale. Des relations $\frac{\overline{KB'}}{\overline{KE'}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$; $\frac{\overline{HE'}}{\overline{HC'}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}}$; $\frac{\overline{GC'}}{\overline{GB'}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}}$; $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \times \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = 1$ on déduit $\frac{\overline{KB'}}{\overline{KE'}} \times \frac{\overline{HE'}}{\overline{HC'}} \times \frac{\overline{GC'}}{\overline{GB'}} = 1$ et les points G, H, K sont alignés.

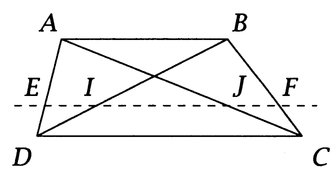


186. Soient E et F les points de concours de la droite AA' avec les droites BB' et CC' respectivement.



Le triangle $AA'C$ est coupé par la transversale $BB'E$ et il en est de même du triangle $AA'B$ par la transversale $CC'F$; le théorème de Ménélaüs donne les relations $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{EA}}{\overline{EA'}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = 1$ et $\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FA'}} \times \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} = 1$. Les points E et F sont confondus si et seulement si les rapports $\frac{\overline{EA}}{\overline{EA'}}$ et $\frac{\overline{FA}}{\overline{FA'}}$ sont égaux, c'est à dire si $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \times \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}$ et cette égalité donne $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

188. *Note* : Indication $\frac{MI}{AB} = \frac{DI}{DB} = \frac{CI}{CA} = \frac{IN}{AB}$ et $IM = IN$.

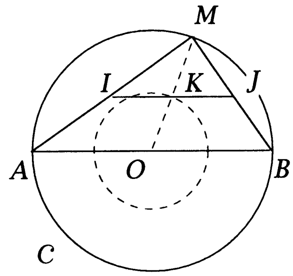


189. • On a $\frac{\overline{EI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{JF}}{\overline{AB}}$ (267) (253) ; d'où $\overline{EI} = \overline{JF}$

• De même $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{k}{k+1}$ d'où $\overline{EJ} = \frac{k}{k+1}\overline{DC}$ et $\frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{1}{k+1}$.

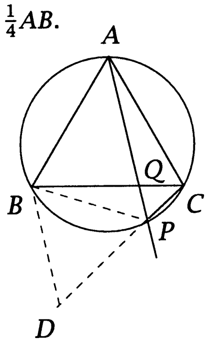
Par suite $\overline{JF} = \frac{1}{k+1}\overline{AB}$ et $\overline{EF} = \frac{k\overline{DC}+\overline{AB}}{1+k}$.

190. Les points O, K, M sont alignés (258), et $\frac{\overline{OK}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$. Le point K est situé sur la circonférence C' de centre O et de rayon $\frac{1}{4}AB$.



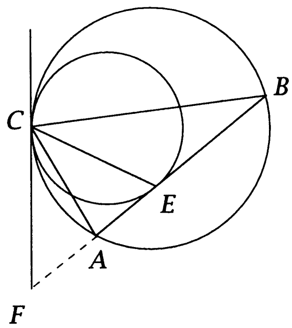
Réciproquement soit K un point de la circonférence C' ; notons M le point intersection de la demi-droite OK avec la circonférence C, I le milieu de AM et J celui de MB. Le point K est le milieu de IJ. En effet le segment IK est parallèle au segment AO et est égal à sa moitié, et le segment KJ est parallèle au segment OB et est égal à sa moitié.

Le lieu du milieu K du segment IJ lorsque le point M décrit la circonférence C est la circonférence C' de centre O et de rayon $\frac{1}{4}AB$.



191. L'angle $\widehat{BPC}$ valant 120° on peut prolonger la demi-droite CP jusqu'à un point D tel que le triangle BDP soit équilatéral.

Les triangles BCD et QCP sont semblables (268) et $\frac{BD}{QP} = \frac{CD}{CP} = 1 + \frac{PD}{CP}$. En divisant cette égalité par $BD = PB = PD$ on obtient $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$.

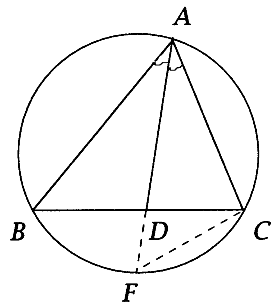


192. Soit F le point intersection de la corde AB avec la tangente commune.

Les triangles FAC et FCB sont semblables et FC égale FE ; par suite $\frac{CA}{CB} = \frac{FE}{FB} = \frac{FA}{FE} = \frac{FE-FA}{FB-FE} = \frac{AE}{EB}$ et la droite CE est bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ (261).

Autre solution : voir exercice n$^{\text{o}}$ 168, ou utiliser l'homothétie de centre C transformant une circonférence en l'autre et (148).

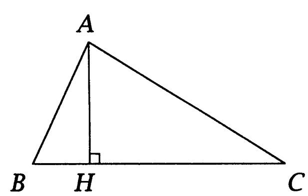
194. Utiliser (262) et (279). On obtient : $AD^2 = b \cdot c\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}$ et $AE^2 = \frac{a^2-(c-b)^2}{(c-b)^2}$ si $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$; si $2\mathcal{P}$ est le périmètre du triangle ABC on a $AD^2 = \frac{4b\cdot c\cdot \mathcal{P}(\mathcal{P}-a)}{(2\mathcal{P}-a)^2}$ et $AE^2 = \frac{4b\cdot c(\mathcal{P}-b)(\mathcal{P}-c)}{(b-c)^2}$.



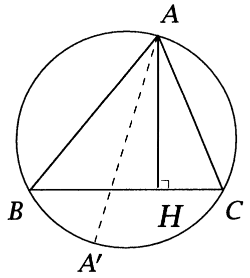
195. Soient un triangle ABC, D le pied de la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ et F l'intersection de la droite AD avec le cercle circonscrit au triangle ABC.

Les triangles AFC et ABD sont semblables d'où $\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{AD}$ et comme $AF = AD + DF$ on a $AD^2 + DF \cdot AD = AB \cdot AC$. D'autre part les triangles ADB et CDF sont semblables et $\frac{DF}{DB} = \frac{CD}{AD}$. Par suite $AB \cdot AC = AD^2 + DB \cdot DC$.

196. Soient ABC un triangle et AH la hauteur ; supposons que l'angle $\hat{B}$ soit aigu, ce qui est toujours possible. Notons a, b, c, les longueurs des côtés du triangle opposés aux sommets A, B, C respectivement.

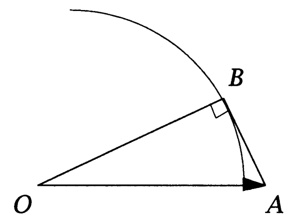


D'après le théorème de Pythagore on a $AH^2 = c^2 - BH^2$. D'autre part $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BH$ (282) ; d'où $AH^2 = c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$. Si $\mathcal{P}$ désigne le demi-périmètre du triangle on a : $AH^2 = (c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a})(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}) = \frac{[b^2-(a-c)^2]\cdot[(a+c)^2-b]}{4a^2}$ et $AH^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4a^2} = \frac{4\mathcal{P}(\mathcal{P}-a)(\mathcal{P}-b)(\mathcal{P}-c)}{a^2}$.



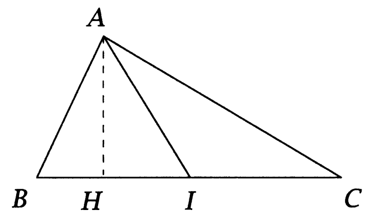
197. Soient ABC un triangle, AH la hauteur et AA' le diamètre du cercle circonscrit au triangle.

Les triangles HAC et BAA' sont semblables (268) ; par suite $\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AA'}$ et $AB \cdot AC = AA' \cdot AH$. De l'exercice (**196**) on déduit, si on note R le rayon du cercle circonscrit, $R = \frac{AA'}{2} = \frac{b \cdot c}{2AH} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P}-a)(\mathcal{P}-b)(\mathcal{P}-c)}}$ où $\mathcal{P}$ est le demi-périmètre.



198. Soient A le sommet du pic d'Aneto et B le point situé à l'horizon. On a : $AB^2 = OA^2 - OB^2 = (\frac{12\,750}{2} + 3{,}404)^2 - (\frac{12\,750}{2})^2 = 43\,412{,}587\,216$. Pour cet observateur l'horizon se situe à une distance égale au mètre près à 208 356 mètres par défaut.

199. Soient un triangle ABC, AI la médiane issue du sommet A et H la projection orthogonale du point A sur le côté BC.



Si les points I et H sont confondus c'est évident (277). Dans le cas contraire les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIC}$ sont supplémentaires, l'un est aigu l'autre est obtus ; supposons que l'angle $\widehat{AIB}$ soit aigu. On a les égalités $AC^2 = AI^2 + IC^2 + 2IC \cdot IH$ et $AB^2 = AI^2 + IB^2 - 2BI \cdot IH$. Comme IB égale IC on a $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

En écrivant cette égalité pour les trois médianes il vient : la somme des carrés des médianes d'un triangle est égale au trois quarts de la somme des carrés des côtés du triangle.

200. Avec les notations de l'exercice n° 199, on a $AC^2 - AB^2 = 2BC \cdot IH = 2a \cdot IH$.

201. Les points B, D, E, F, C se trouvent dans cet ordre, et on a :
$AD = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 3c^2 + \frac{1}{2}a^2}$, $AE = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2)}$, $AF = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 3b^2 + \frac{1}{2}a^2}$.

202. Soient A et B les deux points fixes et I le milieu de AB. Pour tout point M du plan on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$; si $MA^2 + MB^2 = k^2$ alors $IM^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$.

◇ Si $k^2 \geq \frac{AB^2}{2}$ le lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances aux points A et B est égale à k^2 est une circonférence de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}$.

◇ Si $k^2 < \frac{AB^2}{2}$ il n'y a pas de point M tel que $MA^2 + MB^2$ égale k^2.

205. Soit ω le centre d'un cercle intersectant les cercles C et C' aux extrémités des diamètres AA' et BB' respectivement. On a $\omega A = \omega A' = \omega B = \omega B'$; d'autre part $\omega A^2 = \omega O^2 + R^2$ et $\omega B^2 = \omega O'^2 + R'^2$. Par suite $\omega O^2 - \omega O'^2 = R'^2 - R^2$.

Le point ω est situé sur la droite ∂ perpendiculaire à la droite OO' passant par le point H tel que $HO^2 - HO'^2 = R'^2 - R^2$ (285). Si les circonférences sont sécantes en E et F, cette droite passe par les points d'intersection.

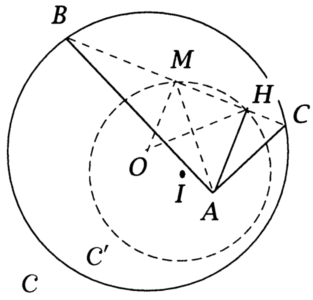
Réciproquement soit ω un point du segment EF. La droite passant par ω et perpendiculaire à $O\omega$ coupe C en A et A', et celle perpendiculaire à $O'\omega$ coupe C' en B et B'. On a $\omega A^2 = \omega A'^2 = R^2 - 0\omega^2$ et $\omega B^2 = \omega B'^2 = R'^2 - 0'\omega^2$ d'où $\omega A = \omega A' = \omega B = \omega B'$.

Si ω est extérieur au segment EF et si $\omega A = \omega A'$, l'angle $\widehat{A\omega A'}$ est aigu.

Le lieu géométrique cherché est le segment EF (voir aussi exercice 209).

206. $PS^2 - PR^2 = OR^2 - OS^2 = OT^2 - OS^2 = ST^2 = RU^2$.

207. La puissance du point H par rapport au cercle est égale à $\overline{HB} \cdot \overline{HC} = \overline{OH}^2 - R^2$. D'autre part $\overline{HB} \cdot \overline{HC} = -\overline{AH}^2$ (279) ; d'où $HA^2 + HO^2 = R^2$.



La puissance du point M par rapport au cercle est égale à $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = OM^2 - R^2$. De plus $MB = MC = MA$ d'où $MA^2 + MO^2 = R^2$.

Notons I le milieu de OA alors exercice n° 199 : $HA^2+HO^2 = 2IH^2 + \frac{1}{2}OA^2$. D'où $IH^2 = IM^2 = \frac{1}{2}(R^2 - \frac{1}{2}OA^2)$. Lorsque les points B et C décrivent la circonférence C les points H et M décrivent la circonférence C' de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}(R^2 - \frac{1}{2}OA^2)}$. Le cercle C' est intérieur au cercle C.

Réciproquement : Soit H un point de la circonférence C' ; notons B et C les intersections de la perpendiculaire élevée du point H à la droite HA avec la circonférence C.

On a $HI^2 = \frac{1}{2}(R^2 - \frac{1}{2}OA^2)$ et $R^2 = 2 \cdot IH^2 + \frac{1}{2}OA^2 = HA^2+HO^2$ exercice n° 199. Par suite $-AH^2 = OH^2 - R^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$ et le triangle ABC est rectangle en A.

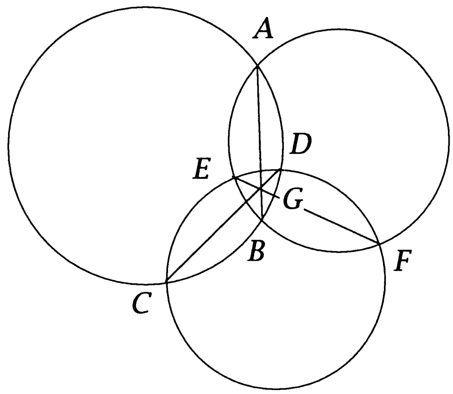
Le lieu géométrique du point H lorsque les points B et C décrivent la circonférence C est la circonférence C'.

Soit M un point de la circonférence C' et B un point de la circonférence C tel que MB égale MA : le point M étant intérieur il suffit de vérifier que $MO + MA \geq R$ pour montrer l'existence d'un tel point (67). Or $MO + MA > 2MI$ exercice n° 16. Ainsi $MO + MA > 2\sqrt{\frac{1}{2}(R^2 - \frac{1}{2}OA^2)} > \sqrt{2R^2 - OI^2} > \sqrt{R^2} = R$ et le point B existe.

On a $MI^2 = \frac{1}{2}(R^2 - \frac{1}{2}OA^2)$ d'où $R^2 = 2 \cdot IM^2 + \frac{1}{2}OA^2 = MA^2 + MO^2$ et $-MA^2 = MO^2 - R^2 = -MB \cdot MC$; comme $MA = MB$ on a $MA = MC$ et le triangle est rectangle en A.

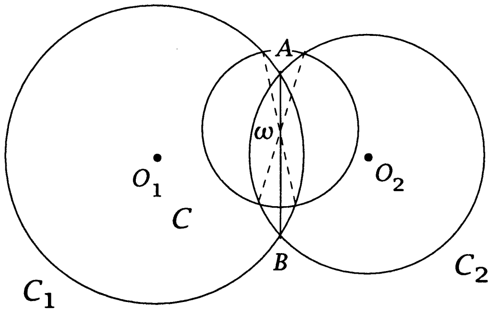
Le lieu géométrique du point M lorsque les points B et C décrivent la circonférence C est la circonférence C'.

208. Soient AB, CD, EF trois cordes communes à trois cercles sécants et notons G le point intersection des cordes AB et CD.



La droite EG coupe les deux circonférences où est situé le point E en deux autres points P et Q. Les puissances du point G par rapport à ces trois cercles étant égales on a $\overline{GE} \cdot \overline{GP} = \overline{GE} \cdot \overline{GQ}$ et les points P et Q sont confondus (c'est le point F) (Ceci est une conséquence directe de (293)(294)).

Autre solution : utiliser (295).



209. Soient C_1 et C_2 deux circonférences données de centre O_1 et O_2 et C une circonférence de centre ω de rayon r coupée en deux points opposés par ces circonférences. Alors les puissances du point ω par rapport à ces trois cercles sont les mêmes et égales à $-r^2$.

Le lieu géométrique du point ω est contenu dans la partie intérieure de l'axe radical aux circonférences C_1 et C_2. Si les deux circonférences ne sont pas sécantes, il n'existe pas de point de ce lieu géométrique.

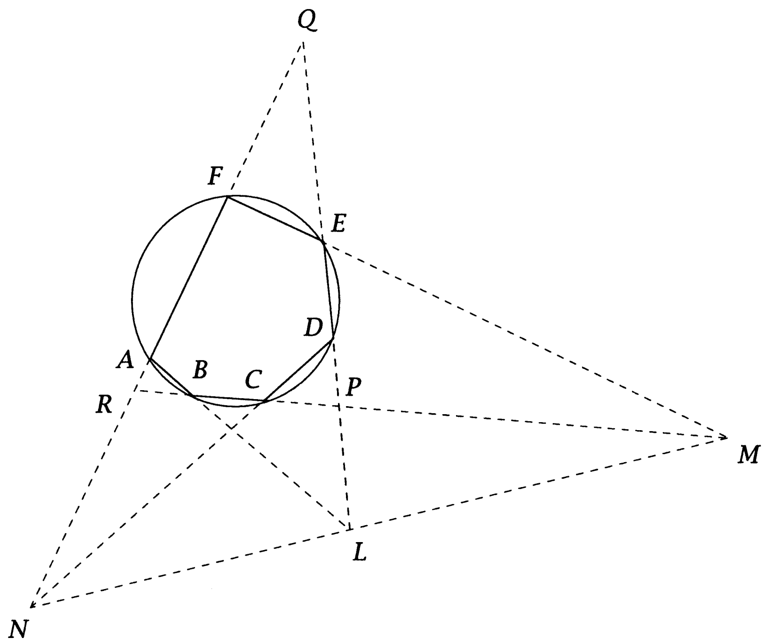
Réciproquement supposons que les deux circonférences données C_1 et C_2 soient sécantes en A et B et soit ω un point du segment AB. Considérons C_1D_1 la corde de la circonférence C_1 passant par ω et perpendiculaire à ωO_1 et C_2D_2 la corde de la circonférence C_2 passant par ω et perpendiculaire à ωO_2. On a $\omega C_1 = \omega D_1$ et $\omega C_2 = \omega D_2$; de plus $\overline{\omega C_1} \cdot \overline{\omega D_1} = \overline{\omega A} \cdot \overline{\omega B} = \overline{\omega C_2} \cdot \overline{\omega D_2}$: les points C_1, C_2, D_1, D_2 sont situés sur une même circonférence de centre ω. Un point extérieur à une circonférence ne convenant pas, on a :

Le lieu géométrique du point ω est la partie de l'axe radical intérieure aux deux circonférences.

Cas particulier : Les deux circonférences C_1 et C_2 sont tangentes en un point A. Si les deux circonférences sont égales, le point A est le seul point du lieu cherché et il existe une infinité de circonférences de centre A coupées par les deux circonférences données en des points diamétralement opposés. Si les deux circonférences ne sont pas égales, il n'existe pas de point de ce lieu géométrique à moins de considérer la circonférence de rayon nul.

210. Prolongeons les trois côtés non consécutifs BC, DE, AF de l'hexagone inscrit : on détermine le triangle PQR. Ce triangle est coupé par les transversales MEF, LBA et NCD. Par suite $\frac{\overline{FQ}}{\overline{FR}} \times \frac{\overline{MR}}{\overline{MP}} \times \frac{\overline{EP}}{\overline{EQ}} = 1$ (1), $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \times \frac{\overline{BR}}{\overline{BP}} \times \frac{\overline{LP}}{\overline{LQ}} = 1$ (2), $\frac{\overline{NQ}}{\overline{NR}} \times \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} \times \frac{\overline{DP}}{\overline{DQ}} = 1$ (3). En multipliant membre à membre ces égalités et en remarquant que :

$\overline{QF} \cdot \overline{QA} = \overline{QE} \cdot \overline{QD}$, $\overline{PE} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$, $\overline{RB} \cdot \overline{RC} = \overline{RA} \cdot \overline{RF}$ il vient $\frac{\overline{MR}}{\overline{MP}} \times \frac{\overline{NQ}}{\overline{NR}} \times \frac{\overline{LP}}{\overline{LQ}} = 1$ et les points M, N, L sont alignés.

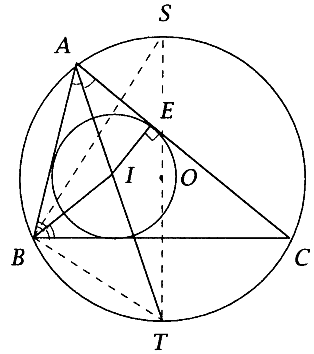


Remarques : Ce théorème est vrai quelle que soit la longueur des côtés et s'applique lorsque certains côtés de l'hexagone se réduisent à zéro ; dans ce cas on doit les remplacer par la tangente à la circonférence. Il en résulte d'autres théorèmes comme :

◇ Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, les deux points de rencontre des côtés opposés et les deux points de rencontre des tangentes aux sommets opposés sont quatre points en ligne droite.

◇ Si on inscrit un triangle dans un cercle les points de concours des tangentes menées à chaque sommet avec les côtés opposés sont en ligne droite.

211. L'angle $\widehat{BIT}$ est égal à $\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B})$; comme l'angle $\widehat{TBC}=\frac{1}{2}\hat{A}$ les angles $\hat{B}$ et $\hat{I}$ du triangle BIT sont égaux et le triangle BIT est isocèle : les segments BT et TI sont égaux.



Notons E la projection orthogonale du point I sur le côté AC, les triangles rectangles EAI et BST sont semblables et $\frac{BT}{TS}=\frac{EI}{AI}$. La valeur de la puissance du point I par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC donne les égalités :

$R^2-d^2 = IT\cdot IA = BT\cdot IA = TS\cdot EI = 2rR$

et $d^2 = R^2-2rR$.

Par suite $d^2 = R(R-2r)$; comme R et d^2 sont des nombres positifs, le rayon R est au moins double du rayon r.

Notes :

1º) Si deux cercles vérifient la relation $d^2=R^2-2rR$ il existe une infinité de triangles à la fois inscrits à l'un et circonscrits à l'autre ;

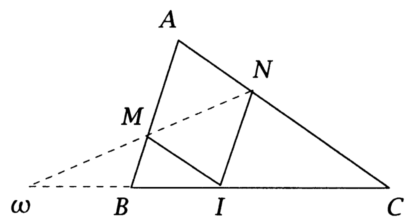
2º) Si J est le centre d'un cercle ex-inscrit au triangle on a la relation $OJ^2=R^2+2rR$.

212. On a $BE=\frac{2}{3}BM$ et les points B, E, M sont alignés ; le lieu géométrique du point E se déduit de la ligne décrite par le point M par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$. C'est soit la droite, soit la circonférence, déduite de la courbe initiale par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.

213. Les points A, M, I, J sont alignés et $\overline{AI}=\frac{d}{d+R}\overline{AM}$ et $\overline{AJ}=\frac{d}{d-R}\overline{AM}$. Le point I est image du point M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{d}{d+R}$, et le point J est image du point M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{d}{d-R}$.

Les lieux géométriques des points I et J sont des circonférences C et C' respectivement de centre ω et ω' tels que les points A, O, ω, ω' sont alignés et $\overline{A\omega}=\frac{d}{R}\overline{\omega O}$ et $\overline{A\omega'}=\frac{d}{R}\overline{O\omega'}$, et de rayons $r=\frac{dR}{d+R}$ et $r'=\frac{dR}{|d-R|}$.

Si le point O décrit la droite d, il faut remplacer R par la mesure du segment déterminé entre les droites d et d' par la direction donnée.

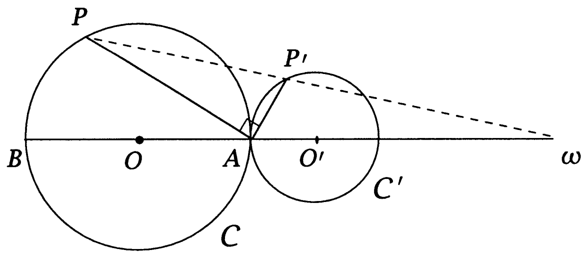


214. Les côtés des triangles BIM et ICN sont parallèles deux à deux : ces triangles sont homothétiques. Le centre d'homothétie ω se situe à l'intersection des droites BC et MN et le rapport k d'homothétie est égal à $\frac{\overline{IB}}{\overline{CI}}$. Le point I étant fixe, le point ω l'est aussi car $\frac{\overline{\omega B}}{\overline{\omega I}}=k$ ou $\frac{\omega B}{\omega C}=k^2$. La droite MN passe par le point fixe ω.

◇ Si le point I est situé au milieu du segment BC, les triangles BMI et INC sont égaux et la droite MN reste parallèle à la droite BC.

215. Construire un carré quelconque. Il est semblable au carré demandé, le rapport de similitude est donné par le rapport entre la différence de la diagonale et le côté avec la longueur donnée. Il suffit de réaliser l'homothétie adéquate.

216. Supposons que le rayon R soit supérieur au rayon R'. Les circonférences C et C' se déduisent l'une de l'autre par deux homothéties l'une de centre A, l'autre de centre ω situé sur la droite OO' ; le point ω est le conjugué harmonique du point A par rapport à O et O'. L'image du point A par l'homothétie de centre ω est le point B diamétralement opposé au point A.



Les droites BP et AP' sont parallèles comme droites perpendiculaires à AP. Si $\frac{R'}{R} \neq 1$(resp. si $\frac{R'}{R} = 1$), les points P et P' sont homologues dans l'homothétie de centre ω et de rapport $\frac{R'}{R}$ (resp. par la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{O'O}}$) : la droite PP' passe par le point fixe ω (resp. est de direction constante).

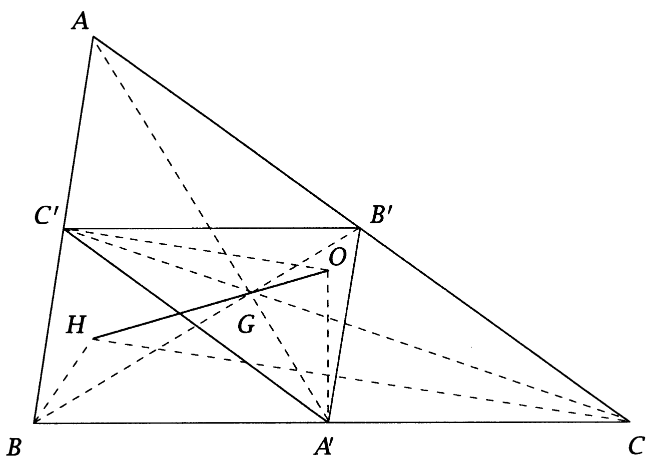
◇ *Autre solution* : Si on additionne les égalités suivantes :

$$\frac{\pi}{2} + \widehat{O'AP'} = \widehat{PAO'} = \widehat{APO} + \widehat{POA} = \widehat{OAP'} + \widehat{POA}$$
$$\frac{\pi}{2} + \widehat{OAP'} = \widehat{P'AO} = \widehat{AP'O'} + \widehat{AO'P'} = \widehat{P'AO'} + \widehat{P'O'A}$$

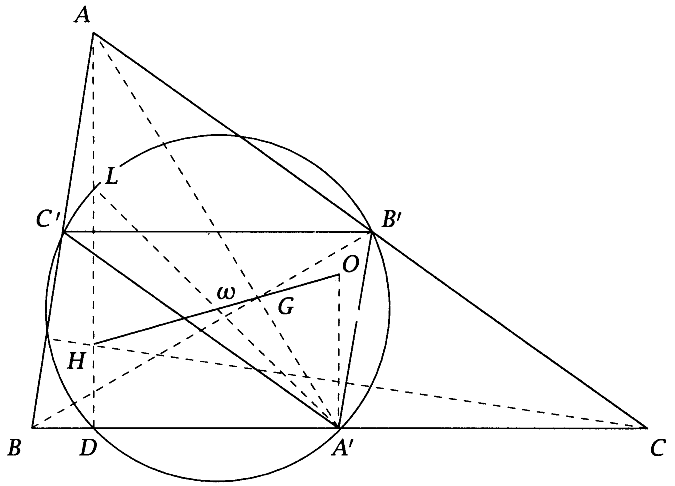
on obtient $\widehat{POA} + \widehat{P'O'A} = \pi$. Les droites OP et $O'P'$ sont parallèles.

Le quadrilatère $OPP'O'$ est un parallélogramme ou un trapèze selon que les rayons des circonférences sont égaux ou non. Si les rayons sont distincts les droites PP' et OO' se coupent en un point ω tel que $\frac{\omega O'}{\omega O} = \frac{R}{R'}$ (267) : le point ω est fixe.

217. Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC. On a $\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{A'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Le triangle $A'B'C'$ se déduit du triangle ABC par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ **(305)** ; ainsi les droites AA', BB', CC', concourent en un même point G tel que $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}} = -\frac{1}{2}$ **(298)** (Propriété connue **(124)**).



L'orthocentre du triangle $A'B'C'$ étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (les hauteurs du triangle $A'B'C'$ sont les médiatrices du triangle ABC), le point H et le point O se correspondent par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$: ces points sont alignés et $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\frac{1}{2}$.

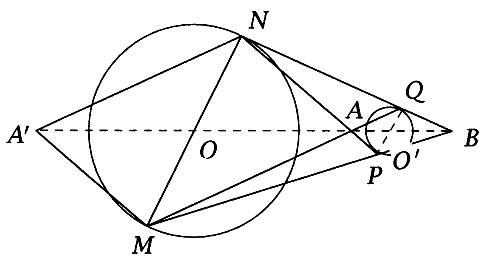


L'homothétie $\mathcal{H}$ transforme le cercle circonscrit au triangle ABC en le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. Son centre ω vérifie la relation $\overrightarrow{G\omega} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GO}$: le point ω est le milieu de OH. Ces deux cercles se correspondent par une homothétie $\mathcal{H}'$ directe de rapport $\frac{1}{2}$ (309) ; par suite le centre de l'homothétie $\mathcal{H}'$ est le point H, et le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ coupe le segment AH en son milieu L.

Comme $\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LH}$, les vecteurs $\overrightarrow{LH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont égaux et le point ω est situé au milieu du segment $A'L$ (107), et $A'L$ est un diamètre de la circonférence de centre ω. Par suite le point D, pied de la hauteur issue du sommet A, est situé sur cette circonférence. On fait de même pour les pieds des deux hauteurs du triangle.

218. Soit A' le point du plan tel que O soit milieu du segment AA'. Le quadrilatère convexe $AMA'N$ est un parallélogramme et AN est parallèle à $A'M$, et AM est parallèle à $A'N$. D'où $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BM}}$.

Les points P et Q se déduisent des points M et N par l'homothétie de centre B de rapport $\frac{\overline{BA}}{\overline{BA'}}$. Le lieu géométrique de ces points est l'image par cette homothétie de la figure décrite par les points M et N : c'est soit une circonférence, soit un parallélogramme.



Le centre O' de ces figures, image du centre O, est situé sur la droite AB.

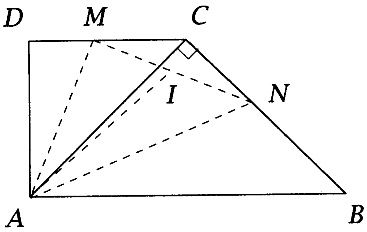
219. Les droites d et d' étant sécantes, les similitudes $\mathcal{S}$ telles que $\mathcal{S}(d) = d'$ ne sont ni des translations, ni des homothéties, et elles ont pour angle θ ou $\theta + \pi$, si $\theta = (d, d')$. Comme $\mathcal{S}(\omega) = \omega$, le point ω ne peut être qu'en O ou hors des droites d et d'. Ainsi :

◇ Toute similitude de centre O et d'angle θ, ou $\theta + \pi$, transforme la droite d en la droite d' ;

◇ Soit ω un point du plan non situé sur les droites d et d', et H et K ses projections orthogonales sur ces droites. Une similitude $\mathcal{S}$ de centre ω transforme la droite d en la droite d' si et seulement si elle transforme le point H en le point K.

Il n'existe qu'une seule similitude $\mathcal{S}$ de centre un point donné ω, non situé sur les droites d et d' et transformant la droite d en la droite d'.

Si le point M est en O, il est évident que les points ω, O, M, M', sont cocycliques. Soit M un point situé sur la droite d distinct du point O, alors $(OM, OM') = \theta = (\omega M, \omega M') + K\pi$. L'angle θ n'étant pas nul, les points ω, O, M, M' sont cocycliques.



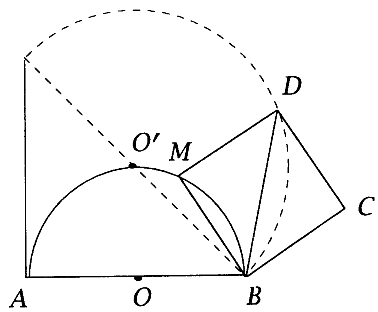
220. On considère $\mathcal{S}$ la similitude de centre A, d'angle $45°$ et de rapport $\sqrt{2}$; on a $\mathcal{S}(D) = C$, $\mathcal{S}(C) = B$. De plus $\mathcal{S}(M) = N$ car le point $\mathcal{S}(M)$ étant situé sur BC, il suffit pour le point N de voir que les droites MA et $M\,\mathcal{S}(M)$ sont perpendiculaires : une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $45°$ transforme tout point P en un point P' tel que le triangle OPP' est rectangle isocèle.

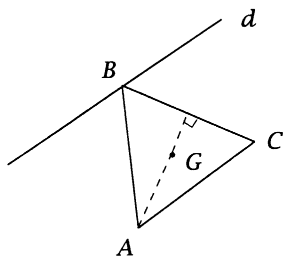
Le triangle AMN est rectangle isocèle et le milieu I de MN est tel que $IM = \frac{1}{2}AM$; par suite l'angle $\widehat{MAI}$ reste constant, notons le θ ; de plus $AI = \frac{\sqrt{5}}{2}AM$.

Le lieu géométrique du point I lorsque M décrit la droite DC est la droite déduite de DC par la similitude $\mathcal{S}'$ de centre A d'angle θ et de rapport $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

221. Le triangle MBD est rectangle isocèle. Le point D se déduit du point M par une similitude de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-45°$.

Notons O' le milieu de la circonférence ; le lieu géométrique du point D lorsque le point M décrit la demi-circonférence est la demi-circonférence de centre O' et de rayon $O'B$.

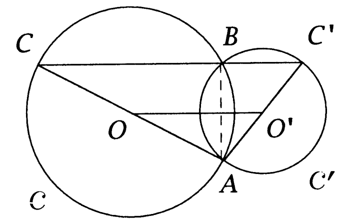




222. L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$ est constant et égal à $-30°$ (ou $30°$), et le rapport $\frac{AG}{AB}$ est égal à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Le point G se déduit du point B par une similitude de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $-30°$. Le lieu géométrique du point G lorsque le point B décrit une droite (resp. une circonférence) est une droite (resp. une circonférence) déduite de celle-ci par la similitude de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $30°$ ou $-30°$ selon le cas.

223. 1º) La similitude directe $\mathcal{S}$ transforme la circonférence $\mathcal{C}$ en une circonférence $\mathcal{C}_1$ de centre O' et passant par le point A : la circonférence $\mathcal{C}_1$ est confondue avec la circonférence $\mathcal{C}'$ (voir le rapport des rayons).



D'autre part l'homothétie de centre A de rapport 2 transforme le point O en un point C et le point O' en un point C', points diamétralement opposés au point A. La droite CC' passe par le point B (135)(123)(302), et la similitude $\mathcal{S}$ transforme le point C en le point C'.

Soient P un point distinct des points A et B, et P' le point image de P par la similitude $\mathcal{S}$.
On a les égalités angulaires :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) + (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AP'}) + (\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AP'}) + K\pi \quad (*)$$

$$(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BP'}) = (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}) + (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BP'} + K\pi$$

et $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BP'}) = (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}) + (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AP'}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}) + K\pi$.

Les points B, P, P' sont alignés.

On peut aussi montrer qu'il existe une similitude directe $\mathcal{S}'$ transformant C en P et C' en P' d'où $(*)$.

2º) L'angle $\widehat{AHB}$ est droit : le lieu géométrique de la projection orthogonale H du point A lorsque le point P varie est la circonférence de diamètre AB privée du point A.

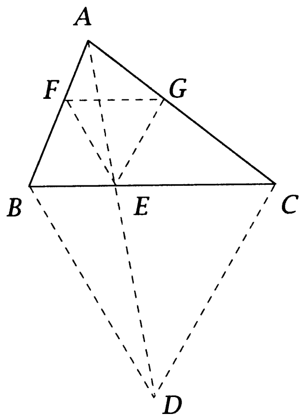
Comme $\mathcal{S}'(B) = H$, il existe une similitude directe $\mathcal{S}''$ de centre A telle que $\mathcal{S}''(C) = B$ et $\mathcal{S}''(P) = H$. La circonférence de diamètre AB est l'image de la circonférence C par la similitude $\mathcal{S}''$.

3º Soient G le centre de gravité et ω le centre du cercle circonscrit au triangle ACC'. Par un raisonnement analogue on montre que les lieux cherchés sont les circonférences de diamètre AG et $A\omega$ respectivement privées du point A.

Note : Le triangle APP' reste toujours semblable au triangle AOO' et les lieux des points correspondants de ces triangles s'en déduisent par cette similitude.

Ceci suggére la solution suivante :

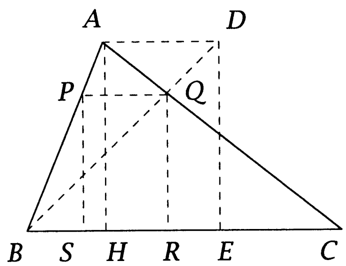
Soit P' le point intersection de PB avec la circonférence C', on a : $(PA, PB) = (OA, AB) + K\pi$, $(P'A, P'B) = (O'A, O'O) + K\pi$. Les triangles OAO' et PAP' sont semblables par une similitude de centre A : c'est la similitude $\mathcal{S}$.



224. Sur le côté BC du triangle, tracer extérieurement un triangle équilatéral BCD ; ce triangle est homothétique au triangle EFG cherché par une homothétie de centre A. Le point E est situé à l'intersection du côté BC avec la droite AD, et les côtés EF et EG sont respectivement parallèles à BD et à DC.

La construction n'est possible, au sens strict, que si aucun des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle n'est obtus.

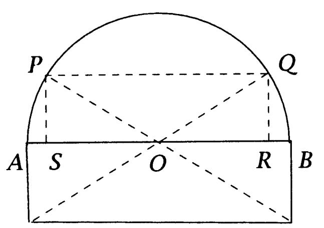
◇ Pour circonscrire un triangle équilatéral, une fois inscrit le triangle équilatéral EFG, il suffit de mener par les sommets A, B, C, du triangle les parallèles aux côtés FG, FE, EG, respectivement.



225. 1º méthode : Comme pour (344) construire sur un côté du triangle, extérieurement à celui-ci un rectangle semblable au rectangle donné.

2º méthode : Tracer la hauteur AH, puis le rectangle $AHED$ semblable au rectangle donné ; ce rectangle est homothétique au rectangle $PQRS$ demandé par une homothétie de centre B. Le point Q se situe à l'intersection du côté AC et de la droite BD.

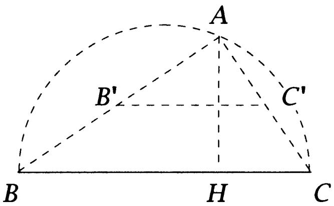
Remarque : si les angles du triangle sont tous aigus ce problème admet six solutions qui peuvent être confondues, et trois si le rectangle est un carré.



226. Considérer l'homothétie de centre O.

227. Si a, b, c, sont les longueurs données ceci revient à construire la longueur x telle que $\frac{x}{a} = \frac{b^2}{c^2}$. Considérer ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = b$ et $AB = c$. Notons AH la hauteur ; alors $\frac{HC}{HB} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{b^2}{c^2}$.

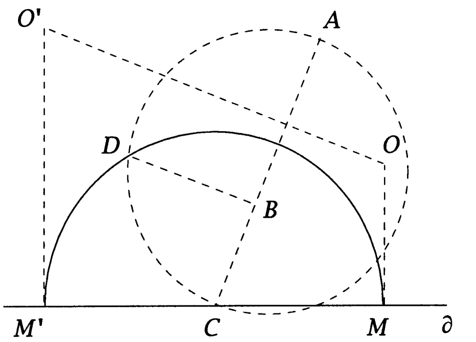
Le problème revient à construire la quatrième proportionnelle aux longueurs HB, HC, a (voir (337)).



228. Si a, b et c sont les longueurs données ceci revient à construire la longueur x telle que $\frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{c}$. Soient un segment BC de longueurs $b + c$ et H le point du segment BC tel que $BH = c$.

La demi-circonférence de diamètre BC coupe la perpendiculaire élevée du point H au segment BC au point A, et on a $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{b}{c}$.

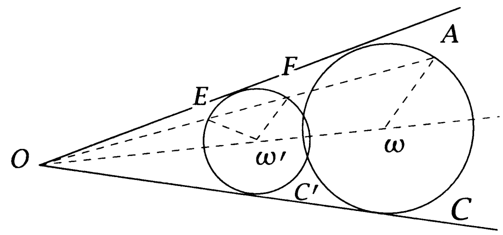
Le problème revient à construire la longueur x telle que $\frac{x}{a} = \frac{AC}{AB}$. Soient B' le point de la demi-droite AB tel que $AB' = a$; la parallèle au côté BC issue du point B' coupe la droite AC au point C'. La longueur AC' est la longueur cherchée et la construction est toujours possible.



229. Soit O le centre d'une circonférence passant par les points A et B et tangente en M à la droite ∂.

Si le point C est le point intersection des droites AB et ∂ on a $CM^2 = CB \cdot CA$: on est ramené au problème (338).

Si les points A et B sont situés d'un même côté de la droite ∂, il y a deux solutions, à moins que la droite AB ne soit parallèle à la droite ∂ et, dans ce cas, il y en a une (tracer la médiatrice de AB pour déterminer le point M). Si les points A et B sont situés de part et d'autre de la droite ∂, il n'y a pas de solution.



230. 1º Les droites ∂ et ∂' sont sécantes en un point O. Le centre ω d'une circonférence tangente aux droites ∂ et ∂' est situé sur la bissectrice d de l'angle qu'elles forment, angle contenant le point donné A. Le symétrique du point A par rapport à cette bissectrice est aussi sur la circonférence : on est ramené à l'exercice nº 229 ; si le point A est sur la bissectrice, mener la perpendiculaire d' à d passant par A. La circonférence cherchée est le cercle inscrit au triangle ainsi déterminé.

2º Les droites ∂ et ∂' sont parallèles. Le centre d'une circonférence tangente aux droites ∂ et ∂' est situé sur la droite $\triangle$ équidistante de ces droites et le rayon R est égal à la moitié de la distance les séparant.

Le centre O de la circonférence cherchée se situe à l'intersection de la circonférence de rayon R, de centre le point donné, et de la droite $\triangle$.

Il y a deux solutions si le point est compris entre les deux droites, une s'il est situé sur une des droites et zéro sinon.

• Autre méthode : Construire une circonférence C' tangente aux deux droites données ; cette circonférence est homothétique de la circonférence demandée par une homothétie de centre O.

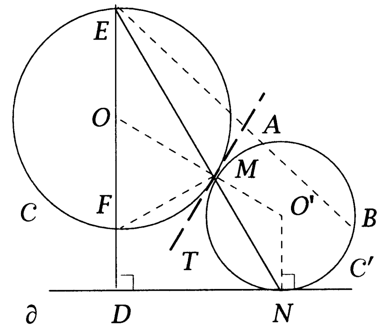
La droite OA coupe la circonférence C' aux points E et F et les droites $E\omega'$ et ωA, respectivement $F\omega'$ et ωA, sont parallèles (303).

Le point ω se situe à l'intersection de la bissectrice de l'angle formé par ces droites et de la parallèle issue du point A à la droite $\omega' E$ ou $\omega' F$.

231. Soient O et O' les centres des circonférences C et C' ; les angles $\widehat{FOO'}$ et $\widehat{OO'N}$ étant supplémentaires, l'angle $\widehat{FMN}$ est droit (176) et l'angle $\widehat{EMN}$ est plat : les points E, M, N sont alignés.

Soit A le point où la circonférence C doit passer.

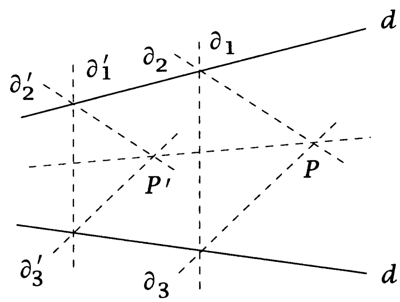
◇ *Analyse* : La droite EA recoupe la circonférence C' au point B et on a $EA \cdot EB = EM \cdot EN$ (286). Notons D le point intersection des droites EF et ∂ ; les points F, M, N, D, sont cocycliques (185), d'où $EM \cdot EN = EF \cdot ED$ et $EA \cdot EB = EF \cdot ED$.



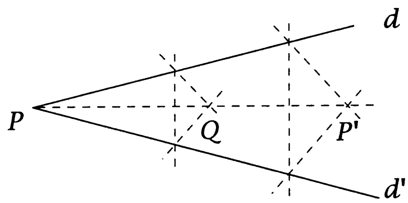
◇ *Construction* : Construire le point B tel que $EA \cdot EB = EF \cdot ED$ (337) ; tracer la circonférence C' passant par les points A et B et tangente à la droite ∂ (exercice nº 229).

◇ *Discussion* : Le nombre de solutions dépend du nombre de circonférences passant par les points A et B et tangentes à la droite ∂ ; dans le cas "général" on obtient quatre solutions, deux tangentes extérieurement et deux tangentes intérieurement à la circonférence donnée.

232. 1º Soient P le point et d et d' les deux droites.



Mener deux droites parallèles ∂_1 et ∂_1' intersectant les droites d et d'. Tracer les droites ∂_2 et ∂_3 joignant le point P aux intersections de la droite ∂_1 avec les droites d et d'. Par les intersections de la droite ∂_1' avec les droites d et d' mener les parallèles ∂_2' et ∂_3' aux droites ∂_2 et ∂_3. Ces droites se coupent en un point P' et la droite PP' passe par le point intersection des droites d et d' : les triangles formés par les droites $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ et $\partial_1', \partial_2', \partial_3'$ sont homothétiques et le centre d'homothétie est le point intersection des droites d et d'.



2º Soient P et P' les deux points à joindre ; tracer deux droites d et d' se coupant au point P ; on est ramené au cas précédent, il suffit de construire un point d'appui Q.

233. ◇ *Analyse* : Le point E' se déduit du point E par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre A et de rapport k.

◇ *Construction* : Construire la droite d_1 image de la droite d par l'homothétie $\mathcal{H}$. La droite d_1 coupe la droite d' au point E' qui est le point cherché. Tracer la droite AE'.

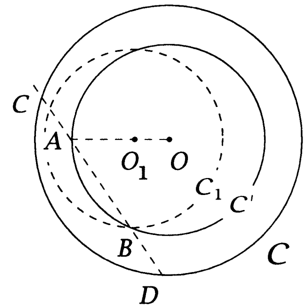
◇ *Discussion* :

i) Si les droites d et d' sont concourantes, il y a une solution.

ii) Si les droites d et d' sont parallèles, et les droites d_1 et d' sont confondues : toute droite passant par le point A est solution. Si les droites d_1 et d' sont distinctes, il n'y a pas de solution.

234. ◇ *Analyse* : Soient C et C' les deux circonférences, la droite d coupe ces circonférences en A, B, C et D, tels que $AB = \frac{1}{2}CD$; par suite, pour des raisons de symétrie, $AB = \frac{2}{3}AD$.

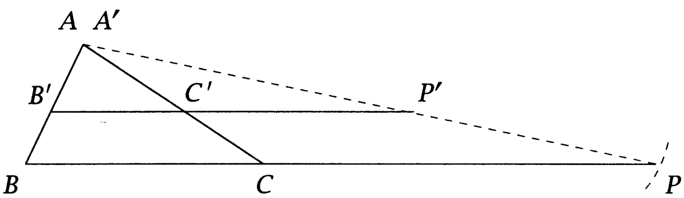
◇ *Construction* : Construire l'homothétique de la circonférence extérieure C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$. Cette circonférence C_1 coupe la circonférence C' au point B et la droite AB est la droite cherchée.



◇ *Discussion* : Notons R le rayon de la circonférence C, R' celui de la circonférence C', et O_1 le centre de la circonférence C_1. Il y a solution si et seulement si les circonférences C_1 et C' sont sécantes ; comme $AO_1 = \frac{2}{3}R$ et $OO_1 = \frac{1}{3}R$, il y a solution si et seulement si $|R' - \frac{2}{3}R| < \frac{1}{3}R < R' + \frac{2}{3}R$, c'est à dire si $(R' - \frac{2}{3}R)^2 < \frac{R^2}{9}$ $(*)$. L'inégalité $(*)$ donne $(\frac{R}{3} + \frac{2}{3}R - R')(\frac{R}{3} - \frac{2}{3}R + R') > 0$ d'où $(R - R')(-\frac{R}{3} + R') > 0$. Il y a solution si et seulement si $R > R' > \frac{R}{3}$.

235. Construire un triangle $AB'C'$ ayant les angles du triangle ABC. Ces deux triangles sont semblables et le rapport de similitude k est le rapport de leurs périmètres.

Le triangle ABC se déduit du triangle $A'B'C'$ par l'homothétie de centre A et de rapport k.



Soient P' le point de la droite $B'C'$ tel que $A'P'$ soit le périmètre du triangle $AB'C'$, et P le point de la droite AP' tel que AP soit le périmètre du triangle ABC. La parallèle au côté $B'C'$ passant par le point P coupe les côtés de l'angle $\widehat{B'A'C'}$ aux points B et C : le triangle ABC est le triangle cherché.

On fait de même avec la somme des médianes, des bissectrices, etc. . .

236. Les segments OK et AD sont parallèles et de sens contraire. La longueur du segment OK est la moitié de celle du segment AD.

Notons J le point de OA tel que $\overline{JO} = -\frac{1}{2}\overline{JA}$. Le point K se déduit du point D par l'homothétie de centre J (qui est fixe) et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Lorsque le point D décrit une droite (resp. une circonférence), le lieu géométrique du point K est une droite (resp. une circonférence) déduite de cette courbe par l'homothétie de centre J et de rapport $-\frac{1}{2}$.

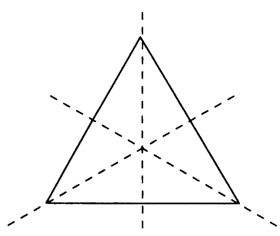
237. i) Se reporter aux exercices n^{o} 133, 134.

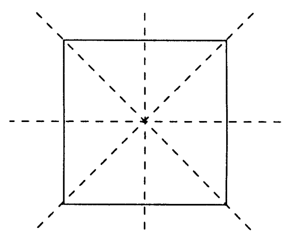
ii) ◇ Le nombre n est impair : il y a n axes de symétries et les rotations de C_n opèrent transitivement sur ces axes de symétries (Pour 2 axes de symétrie donnés d'une même classe il existe une rotation de C_n transformant un axe de symétrie en l'autre axe de symétrie).

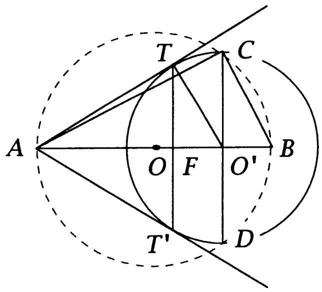
Un axe de symétrie passe par un sommet et est médiatrice du côté opposé.

◇ Le nombre n est pair : il y a n axes de symétries se divisant en deux classes : les axes de symétrie passant par deux sommets diamétralement opposés et les axes de symétrie qui sont médiatrices de deux côtés parallèles. Les rotations de C_n opèrent transitivement dans chaque classe séparément.

Pour n "petit" reportons-nous aux figures ci-contre :

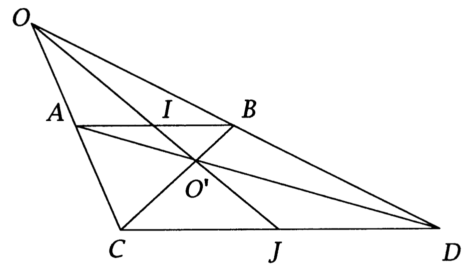






238. Le triangle ABC est rectangle, on a la relation $O'C^2 = O'B \times O'A$. De même, le triangle $O'AT$ est rectangle et $O'T^2 = O'F \times O'A$.

Comme $O'C = O'T$, on a $O'B = O'F$ et le point O' est milieu du segment BF.

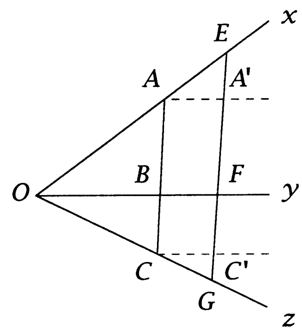


239. Utiliser l'exercice n$^{\text{o}}$ 188, et le théorème de Thalès.

Autre solution : Par l'homothétie $\mathcal{H}_1$ de centre O de rapport $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$ on voit que les points O, I, J, sont alignés. De même par l'homothétie $\mathcal{H}_2$ de centre O' de rapport $\frac{\overline{O'D}}{\overline{O'A}}$ on voit que les points O', I, J sont alignés (298).

Autre solution : Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$; on a $\mathcal{H}(A) = B$ et $\mathcal{H}(B) = A$. La transformation $\mathcal{H}$ est une homothétie de rapport -1 ($k^2 = 1$ et $\mathcal{H}$ n'est pas une translation) de centre ω situé à l'intersection de AB et OO' (315). Par suite les points ω et I sont confondus.

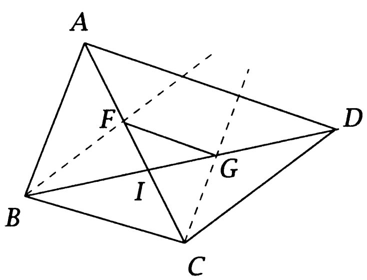
Pour l'alignement des points O, O', J utiliser $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$.



240. Les parallèles à la droite Oy passant par les points A et C coupent la droite EG aux points A' et C'. On a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{A'F}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{GO}} = \frac{\overline{C'F}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}}$$

Autre solution : Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre O de rapport $\frac{\overline{OA}}{\overline{OE}}$; alors $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}}$.



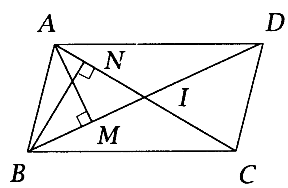
241. Soit I l'intersection des diagonales AC et BD. Par (253) on a les égalités suivantes :

$\frac{IA}{IC} = \frac{IB}{IG}$ et $\frac{IF}{IC} = \frac{IB}{ID}$

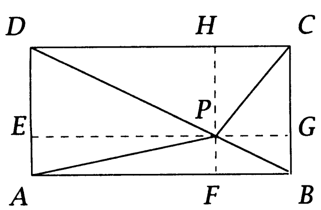
En multipliant membres à membres ces égalités on obtient :

$\frac{IA}{IF} = \frac{ID}{IG}$

Les droites AD et FG sont parallèles (255) ou (256).

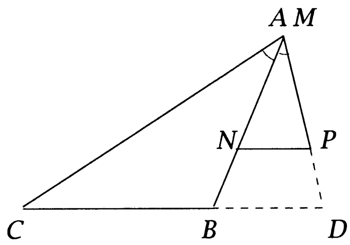


242. Notons I l'intersection des diagonales. Les triangles INB et IMA sont semblables, on a $\frac{AM}{BN} = \frac{IA}{IB} = \frac{AC}{BD}$.

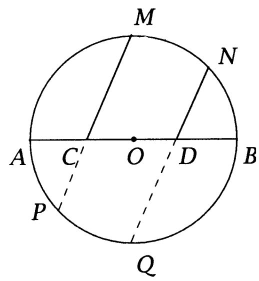


243. Du point P abaissons les perpendiculaires PE, PF, PG, PH, sur les côtés AD, AB, BC, CD, respectivement : on divise le rectangle initial en quatre rectangles. Par suite $PA^2 = PE^2+PF^2$, $PB^2 = PF^2+PG^2$, $PC^2 = PG^2+PH^2$, $PD^2 = PE^2+PH^2$; en additionnant ces égalités, on obtient la relation désirée.

244. Les triangles rectangles MCD et BMA sont semblables (99) : $\frac{DM}{AB} = \frac{CD}{AM}$. Par suite $DM \times AM = AB \times CD$. On fait de même avec le point N.

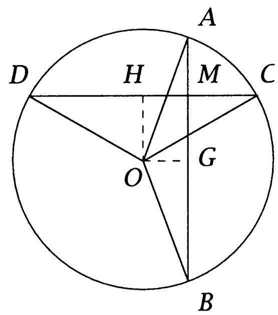


245. Soient ABC et MNP deux triangles tels que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{M}$ soient égaux et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{N}$ supplémentaires. Prolongeons le côté CB jusqu'au point D tel que AB soit bissectrice de l'angle $\widehat{CAD}$. On a $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD}$ (259), soit $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$; comme les triangles MNP et ABD sont semblables, on obtient $\frac{BD}{AD} = \frac{PN}{MP}$. Ainsi $\frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$.



246. Les droites MC et ND recoupent la circonférence en P et Q respectivement. La symétrie centrale de centre O envoie le point C sur le point D, et les droites MC et ND sont parallèles : l'image de la droite MC par cette symétrie centrale est la droite ND. Par suite les segments CP et DN sont égaux. On a $CA \times CB = CM \times CP = CM \times DN$, et pour des raisons de symétrie $CA \times CB = DA \times DB$.

247. Par le point C, centre de la circonférence, on trace les perpendiculaires OH et OG aux cordes CD et AB. On a les égalités suivantes :



$$\overline{MA}^2 = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + 2\overline{MG} \times \overline{GA}$$
$$\overline{MB}^2 = (\overline{MG} + \overline{GB})^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GB}^2 + 2\overline{MG} \times \overline{GB}$$
$$\overline{MC}^2 = (\overline{MH} + \overline{HC})^2 = \overline{MH}^2 + \overline{HC}^2 + 2\overline{MH} \times \overline{HC}$$
$$\overline{MD}^2 = (\overline{MH} + \overline{HD})^2 = \overline{MH}^2 + \overline{HD}^2 + 2\overline{MH} \times \overline{HD}$$

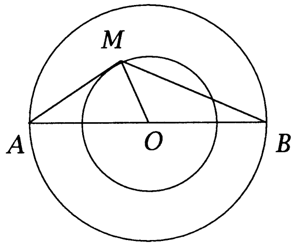
En faisant la somme des quatre égalités, les doubles produits s'annulent et on obtient :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2(\overline{AG}^2 + \overline{MG}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{MH}^2) \quad (*)$$

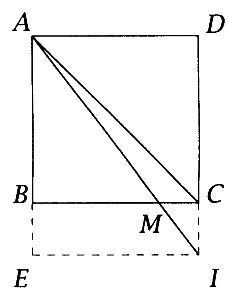
D'autre part les triangles OAG et OCH sont rectangles d'où $\overline{AG}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{MH}^2$ et $\overline{CH}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OH}^2$.

Le quadrilatère $OGMH$ étant un rectangle on a $\overline{AG}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{MH}^2$ et $\overline{CH}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{MG}^2$. Portons ces valeurs dans l'égalité (*), il vient, si R est le rayon de la circonférence :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2(\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2) = 4R^2.$$

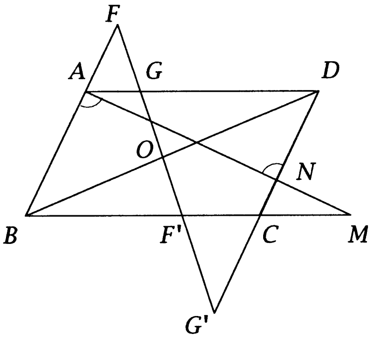


248. On a $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MO}^2 + \frac{1}{2}\overline{AB}^2$ (cf. exercice n° 199); par suite, si r et R sont les rayons des circonférences on a $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2(r^2 + R^2)$.



249. Soit E l'intersection de la perpendiculaire menée du point I au côté AB. On a $AI^2 = AE^2 + EI^2 = AE^2 + AB^2$; comme $\frac{AE}{AB} = \frac{EI}{BM} = \frac{AB}{BM}$, on a $AI^2 = \frac{AB^4}{BM^2} + AB^2 = AB^2\left(\frac{AB^2+BM^2}{BM^2}\right) = AB^2\frac{AM^2}{BM^2}$.

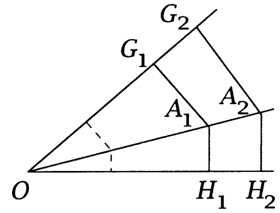
Par suite $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{AB^2+BM^2}{AM^2 \cdot AB^2} = \frac{1}{AB^2} = \frac{2}{AC^2}$.



250. Les triangles ABM et ADN sont semblables (268) : $\frac{BM}{AB} = \frac{AD}{DN}$, d'où $BM \cdot DN = AB \cdot AD$ qui est une quantité constante.

Les triangles OFB, ODG' sont semblables, ainsi que les triangles $OF'B$, et OGD ; on a donc $\frac{OF}{OG'} = \frac{OB}{OD} = \frac{OF'}{OG}$. Par suite $OF \cdot OG = OF' \cdot OG'$.

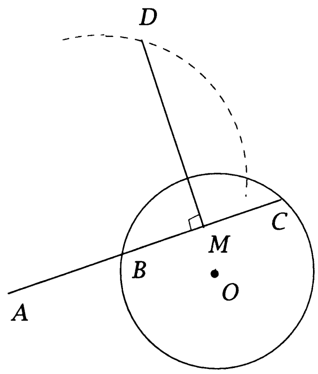
On peut aussi utiliser (256).



251. Soient $\widehat{xOy}$ l'angle considéré, et A un point du lieu géométrique. Tracer la demi-droite OA ; tout point A_i de cette demi-droite est un point du lieu géométrique cherché (abaisser les perpendiculaires des points A et A_i sur les côtés de l'angle et utiliser (303)).

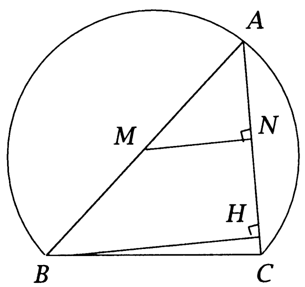
Réciproquement si M est un point non situé sur cette demi-droite, la droite OM coupe une de ces perpendiculaires, et le rapport des distances du point M aux côtés de l'angle n'est pas dans le rapport donné (303).

Le lieu géométrique cherché est la demi-droite OA.



252. Le point D se déduit du point M par la similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle 45°. L'angle $\widehat{AMO}$ étant droit, le lieu géométrique du point M est l'arc de cercle de diamètre AO contenu dans la circonférence donnée.

Le lieu géométrique cherché est l'image de cet arc de cercle par cette similitude.

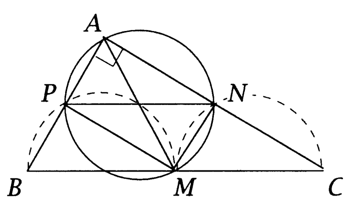


253. Soient M le milieu de AB, N la projection de M sur AC, et H le pied de la hauteur relative au sommet B.

L'angle $\hat{A}$ étant constant, l'angle $\widehat{ABH}$ l'est aussi et le triangle ABH reste semblable à lui-même lorsque le point A varie (il reste sur un arc de cercle) ; il en est de même du triangle ABN (le point N est milieu de AH) d'où le rapport $\frac{BN}{BA}$ est constant ainsi que l'angle (BA, BN).

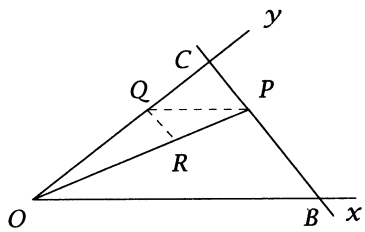
Le point N se déduit du point A par la similitude de centre B, de rapport $\frac{BN}{BA}$ et d'angle (BA, BN).

Le lieu géométrique de la projection du milieu du côté AB sur le côté AC, lorsque le sommet A varie, est l'arc de cercle déduit de l'arc de cercle que décrit le point A par cette similitude.



254. Les angles $\hat{P}$ et $\hat{N}$ étant droits (182), les droites PM et AC (resp. NM et AB) sont parallèles : les points P et N sont les milieux respectifs des côtés AB et AC.

Les lieux géométriques des points P et N lorsque le point A parcourt la circonférence de diamètre BC sont les circonférences de diamètres MB et MC respectivement (la réciproque est immédiate), et le segment PN reste parallèle au côté BC et égal à sa moitié.

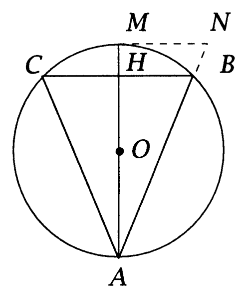


255. La parallèle à Ox passant par P coupe Oy en Q, et la parallèle à BC passant par Q coupe OP en R.

Le triangle OQR est semblable au triangle OPC, et le triangle PQR est semblable au triangle OBP ; il vient $\frac{QR}{CP} = \frac{OR}{OP}$ et $\frac{QR}{PB} = \frac{RP}{OP}$. Par suite :
$\frac{QR}{PB} + \frac{QR}{CP} = \frac{OR+RP}{OP} = 1.$

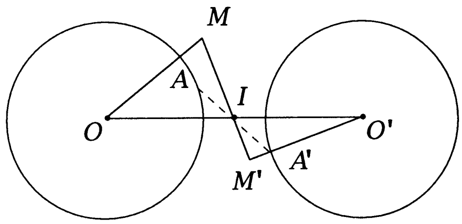
Ainsi $\frac{1}{BP} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{QR}$; cette somme est maximum si QR est minimum, c'est à dire si QR est perpendiculaire à OP. La droite ∂ cherchée est la perpendiculaire passant par P à OP.

256. ◇*Analyse* : Supposons le problème résolu et soit ABC le triangle cherché de base BC. La hauteur AH coupe la circonférence au point M, et la tangente en M à la circonférence coupe la droite AB au point N tel que $MN = \frac{1}{2}AM$ (303).



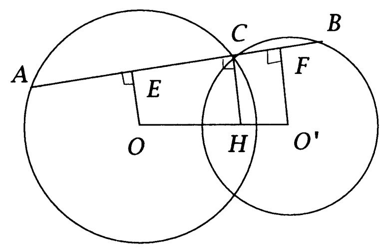
◇ Tracer un diamètre AM, puis porter sur la tangente en M à la circonférence le point N tel que MN soit égal au rayon.

La droite AN coupe la circonférence au point B ; la perpendiculaire au diamètre AM passant par B coupe la circonférence au point C. Le triangle ABC est le triangle cherché.



257. La droite OM coupe la circonférence C au point A, et la droite IA coupe la circonférence C' au point A' symétrique du point A par rapport au point I. Le point M', symétrique du point M par rapport au point I, se situe à l'intersection des droites IM et $O'A'$.

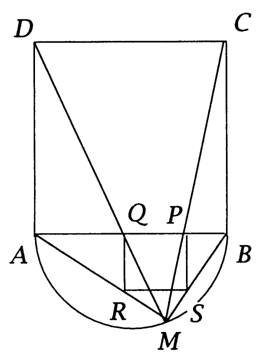
Si les circonférences C et C' sont inégales, cette construction donne l'image du point M par l'homothétie de centre I, de rapport $-\frac{R}{R'}$.



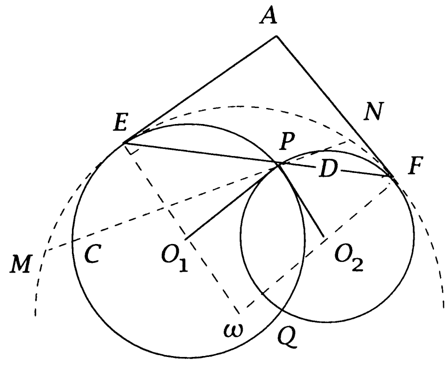
258. ◇ *Analyse* : Supposons le problème résolu et soient E et F les pieds des perpendiculaires abaissées des centres O et O' sur la sécante ACB. On a $\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CF} = \frac{m}{n}$, et si le point H de OO' divise le segment OO' dans ce rapport les droites OE, HC, $O'F$, sont parallèles.

◇ *Construction* : Tracer le point H divisant le segment OO' dans le rapport donné ; la perpendiculaire à CH passant par le point C est la sécante cherchée.

◇ *Discussion* : La construction est toujours possible, sauf si les circonférences sont tangentes et, dans ce cas, la division est de rapport constant égal au rapport des rayons.



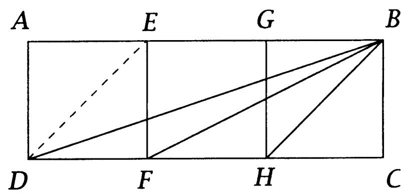
259. Le quadrilatère $RSPQ$ se déduit du carré $ABCD$ par l'homothétie de centre M, de rapport $\frac{MQ}{MD}$: c'est un carré. Les triangles AQR et SPB sont semblables, on a les relations $\frac{AQ}{SP} = \frac{QR}{PB}$ d'où $PQ^2 = PB \times QA$.



260. Les tangentes en E et F se coupent au point A. La droite ωO_1 est perpendiculaire en E à AE, et la droite ωO_2 est perpendiculaire en F à AF. Les triangles O_1EP, ωEF, O_2PF sont isocèles et leurs angles à la base sont égaux ; le triangle AEF étant isocèle, et les angles $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$ droits, on en déduit que les angles $\widehat{O_1\omega O_2}$ et $\widehat{O_1PO_2}$, d'une part et, $\widehat{PO_1\omega}$ et $\widehat{PO_2\omega}$ d'autre part, sont égaux. Le quadrilatère $O_1\omega O_2P$ est un parallélogramme (104).

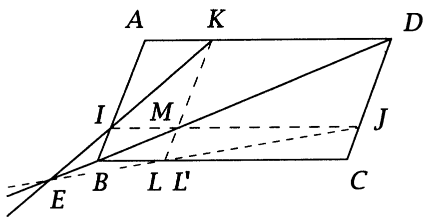
Considérons EPF une sécante telle qu'il existe une telle circonférence (tracer le parallélogramme $O_1\omega O_2P$, la droite ωO_1 coupe C_1 au point E : tracer EPF). Soit une autre sécante commune CPD aux circonférences C_1 et C_2; elle coupe la circonférence C en M et N.

On a $PC \cdot PD < PM \cdot PN$ et $PM \cdot PN = PE \cdot PF$ (286) : la sécante EPF est la sécante cherchée.



261. Les angles $\widehat{DEB}$ et $\widehat{FHB}$ sont égaux (104), et $\frac{DE}{FH} = \sqrt{2} = \frac{EB}{BH}$: les triangles DEB et FHB sont semblables (269).

Les angles $\widehat{EDB}$ et $\widehat{BFH}$ sont égaux et l'angle $\widehat{BHC}$ est égal à la somme des angles $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BFC}$.

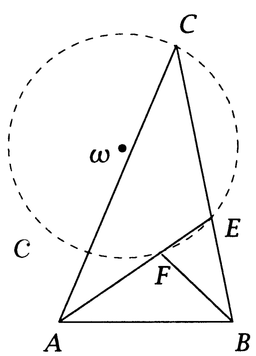


262. Si les droites IK et BD sont parallèles on a $\frac{\overline{JC}}{\overline{JD}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{KD}}{\overline{KA}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{LB}}$ (253); les droites IK, BD, JL, sont parallèles.

Supposons que les droites IK et BD se coupent au point E, et soit L' le point intersection des droites EJ et KM.

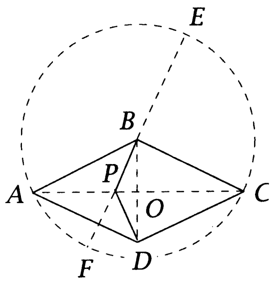
On a les relations $\frac{\overline{ML}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{MI}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{ML'}}{\overline{JD}} = \frac{\overline{ML'}}{\overline{MK}}$. Les mesures algébriques $\overline{ML}$ et $\overline{ML'}$ sont égales et les points L et L' sont confondus : les droites IK, BD, LJ sont concourantes.

263. Soit A' tel que I soit milieu de AA' ; le quadrilatère $AB'A'C'$ est un parallélogramme. La droite parallèle à BC passant par A' coupe les côtés AB et AC aux points B'' et C'', et les triangles isocèles $A'C'C''$, $B''B'A'$ sont semblables. On a $\frac{AC'}{A'B''} = \frac{A'B'}{A'B''} = \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{A'C'}{A'C''} = \frac{AB'}{A'C''}$. Ainsi $\frac{AC'}{AB'} = \frac{A'B''}{A'C''} = \frac{DB}{DC}$ (exercice n^o 240).



264. Soient C le cercle circonscrit au triangle CEF et ω son centre. Les triangles ABF et AEB sont semblables, par suite :
$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF}$ d'où $AE \cdot AF = AB^2$.
Les triangles AEB et CAB sont semblables, par suite :
$\frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BC}$ d'où $BE \cdot BC = AB^2$.
Les points A et B ont même puissance par rapport à la circonférence C, par suite ωA égale ωB et le centre ω est situé sur la médiatrice ∂ du segment AB.

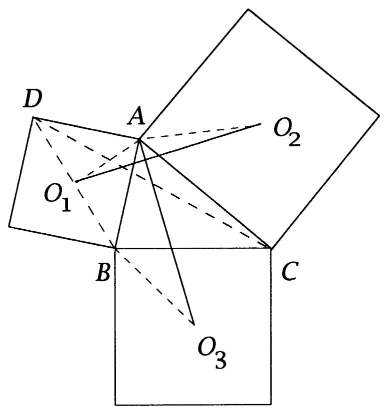
Les points C', E', F' se déduisent des points C, E, F respectivement par la symétrie orthogonale d'axe ∂. La circonférence C est globalement invariante par cette transformation : les points C, E, F, C', E', F' sont cocycliques.



265. La droite PB coupe la circonférence de centre B de rayon BA aux points E et F. On a les relations $PA \cdot PC = PE \cdot PF = (PB + AB)(AB - PB) = AB^2 - PB^2$.

Autre démonstration : Le point B se projette orthogonalement sur le centre O de la diagonale AC du losange. Calculer la différence des carrés du point O aux deux mêmes points A et P.

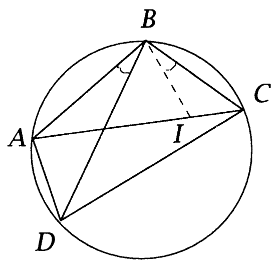
266. Les notations sont celles de la figure ci-contre ; la similitude de centre B de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $45°$ transforme le triangle ABO_3 en le triangle DBC, et la similitude de centre A de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-45°$ transforme le triangle AO_1O_2 en le triangle ADC.



Les triangles DBC et ADC ayant le côté DC en commun, on en déduit que les segments O_1O_2 et AO_3 sont égaux et perpendiculaires (325)(326).

Les droites AO_3, BO_2, CO_1 sont concourantes comme étant les hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$.

Autre solution : utiliser la composition des similitudes $\mathcal{S}(B, \sqrt{2}, 45°)$ et $\mathcal{S}(A, \frac{1}{\sqrt{2}}, 45°)$.

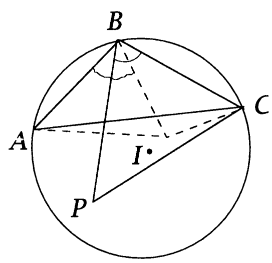


267. Considérons $ABCD$ un quadrilatère inscriptible et I le point de la diagonale AC tel que l'angle $\widehat{IBC}$ soit égal à l'angle $\widehat{ABD}$.

Les triangles ABD et IBC sont semblables (268) et $\frac{AD}{IC} = \frac{BD}{BC}$, d'où $AD \cdot BC = IC \cdot BD$ $(*)$. De même les triangles ABI et DBC sont semblables et $\frac{AB}{DB} = \frac{AI}{DC}$, d'où $AB \cdot DC = AI \cdot DB$ $(**)$.

En sommant membres à membres les égalités $(*)$ et $(**)$, on obtient : $AD \cdot BC + AB \cdot DC = BD\,(AI + IC) = BD \cdot AC$.

268. Soient ABC un triangle et P un point non situé sur l'arc $\overset{\frown}{CA}$ de son cercle circonscrit. Notons I le point du plan tel que l'angle $\widehat{ABI}$ égale l'angle $\widehat{PBC}$ et l'angle $\widehat{BAI}$ égale $\widehat{BPC}$; le point P n'étant pas situé sur la circonférence, le point I n'est pas situé sur AC.



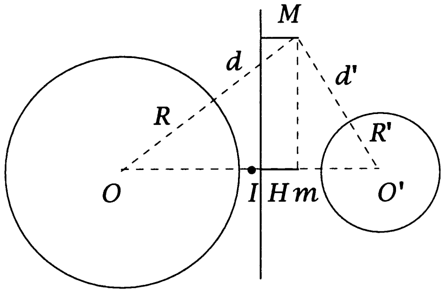
Les triangles ABI et PBC sont semblables (268) d'où $\frac{AB}{PB} = \frac{AI}{PC}$ et $AB \cdot PC = AI \cdot PB$ $(*)$. De plus $\frac{AB}{PB} = \frac{BI}{BC}$; comme les angles $\widehat{ABP}$ et $\widehat{IBC}$ sont égaux, les triangles ABP et IBC sont semblables (269). Par suite $\frac{AP}{IC} = \frac{BP}{BC}$ et $AP \cdot BC = BP \cdot IC$ $(**)$.

Des égalités $(*)$ et $(**)$ on déduit $BP\,(AI + IC) = AP \cdot BC + AB \cdot PC$. Comme $AI + IC > AC$, on obtient $AB \cdot CP + BC \cdot AP > AC \cdot BP$.

269. Utiliser le théorème de Ptolémée.

270. Appliquer le théorème de Ptolémée aux quadrilatères $ABCP$ et $DABP$; alors $PA + PC = PB\sqrt{2}$ et $PB \cdot PD = PA\sqrt{2}$.

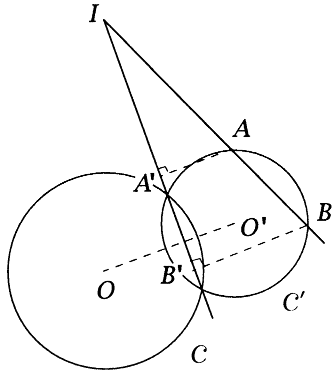
271. Soient p et p' les puissances d'un point M aux cercles C et C' respectivement ; notons d et d' les distances du point M aux centres de ces cercles, m sa projection orthogonale sur la ligne des centres, et H l'intersection de l'axe radical avec la ligne des centres.



Si I est le milieu de OO' on a :

$$\begin{aligned} p - p' &= d^2 - R^2 - (d'^2 - R'^2) \\ &= d^2 - d'^2 - (R^2 - R'^2) \\ &= 2\overline{OO'} \cdot \overline{Im} - 2\overline{OO'} \cdot \overline{IH} \\ &= 2\overline{OO'}(\overline{Im} - \overline{IH}) \end{aligned}$$

Ainsi $\quad p - p' = 2\overline{OO'} \cdot \overline{Hm}.$



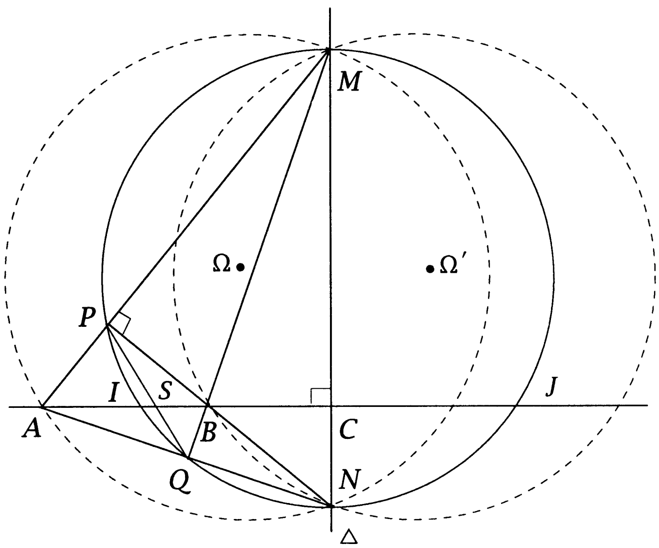
272. Soient C' un circonférence de centre O' passant par les points A et B, et A' et B' les projections orthogonales de ces points sur l'axe radical de C et de C'.

Notons $(M)_C$ la puissance d'un point M par rapport à une circonférence C, et écrivons la différence des puissances du point A, puis du point B par rapport aux cercles C et C' :

$$(A)_C - 0 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{AA'}$$
$$(B)_C - 0 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{BB'}$$

Par suite $k = \frac{(A)_C}{(B)_C} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IB}}$, si I est le point intersection de l'axe radical avec la droite AB (le point O n'est pas situé sur la médiatrice de AB, l'axe radical et la droite AB sont sécantes (292)). Les points A et B étant fixes, le point I est fixe.

273. 1º) Le point B est l'orthocentre du triangle AMN : les droites BM et AN sont perpendiculaires.



2º) Soient I et J les intersections de la droite AC avec le cercle de diamètre MN ; par symétrie le point C est milieu de IJ. De plus les triangles CMB et CAN sont semblables, on en déduit $\frac{CA}{CM} = \frac{CN}{CB}$ et $\overline{CM} \cdot \overline{CN} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$. La puissance du point C par rapport au cercle $IJMN$ est constante et égale $-IC^2$ et à $-JC^2$: les points I et J sont fixes.

Des points I et J on voit le segment MN sous un angle droit.

3º) Les points P et Q sont situés sur la circonférence de diamètre AB ; notons S l'intersection de PQ avec IJ, le point S est situé sur l'axe radical du cercle de diamètre AB et du cercle $IJMN$. Comme IJ est l'axe radical des cercles passant par I et J, le point S est d'égale puissance par rapport à tous ces cercles et par rapport au cercle de diamètre AB. Il est situé sur tous leurs axes radicaux respectifs : il est fixe.

Les droites PQ passent par le point fixe S.

4º) Le point C est situé sur l'axe radical des cercles AMN, $IJMN$ et BMN ; si on note Ω et Ω' le centre des cercles AMN et BMN, et ω et ω' les projections orthogonales respectives sur la droite AC, on a les relations suivantes :

$-IC^2 = C\omega^2 - A\omega^2 = C\omega^2 - A\omega^2$ et $\overline{C\omega} = \frac{CI^2 - AC^2}{2\overline{AC}}$

Le point ω est fixe et le centre Ω est situé sur la droite ∂ perpendiculaire à la droite AC, du côté de A par rapport à la droite $\triangle$, à une distance égale à $\frac{AC^2 - IC^2}{2\,AC}$.

De même $\overline{C\omega'} = \frac{CI^2 - BC^2}{2\overline{BC}}$, et Ω' est situé sur la droite ∂' perpendiculaire à la droite AC, du côté opposé à A par rapport à la droite $\triangle$, à une distance égale à $\frac{CI^2 - BC^2}{2\,BC}$.

Réciproque : Considérons Ω un point de ∂, et N et M les points de $\triangle$ tels que $\Omega N = \Omega A$ et BN soit perpendiculaire à AM (Le point N existe car $\overline{A\omega} = \overline{AC} + \overline{C\omega} = \frac{AC^2 + CI^2}{2\overline{AC}} > \overline{\omega C}$). Le centre du cercle circonscrit au triangle AMN est, de par l'étude directe, situé sur ∂ ; comme il est situé sur la médiatrice de AM, c'est le point Ω.

Le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle AMN est la droite ∂.

On montre de même que le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle BMN est la droite ∂'.

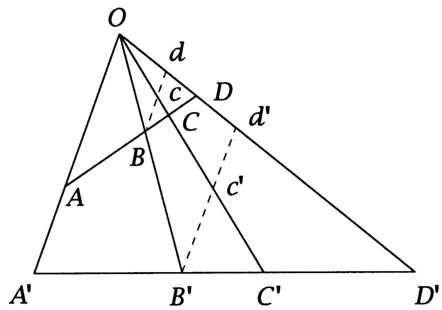
274. Les parallèles issues des points B et B' à la droite OAA' coupent les droites OCC' et ODD' aux points c, c' et d, d' respectivement. On a les égalités suivantes :

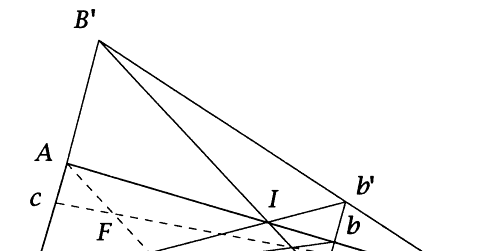
$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{cB}$ et $\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{dB}$

d'où par division $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{dB}{cB}$.

De même $\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{d'B'}{c'B'}$.

La relation est démontrée (exercice nº 240).



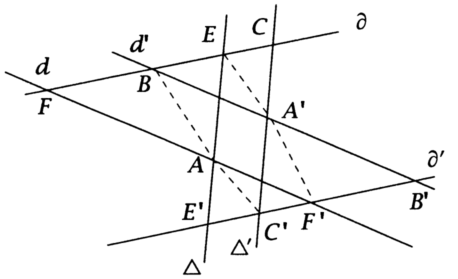


275. Soit ABC un triangle, I le milieu de AC et B'le point tel que A soit milieu de BB'.

Le point b' intersection des droites BI et $B'C$ est au tiers de $B'C$, et le point a' intersection des droites BC et $B'I$ est au tiers de BC : le point b intersection des droites $a'b'$ et AC est au tiers de AC.

Notons E le point intersection des droites Bb et $B'a'$ et c le point intersection des droites CE et BB' ; les points (B', I, E, a') forment une division harmonique (Le quadrilatère $B'IBa'Cb'$ est un quadrilatère complet). Par suite les points (B', A, c, B) forment une division harmonique et le point c est au tiers de AB.

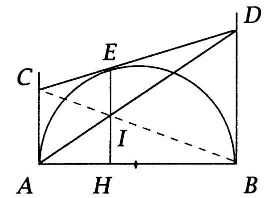
Soit a le point situé au tiers de BC (a distinct de a') et F le point intersection des droites Cc et Aa ; par le théorème de Thalès le point E est situé au milieu de FC. On fait de même pour les points F et G.



276. On a les égalités suivantes :

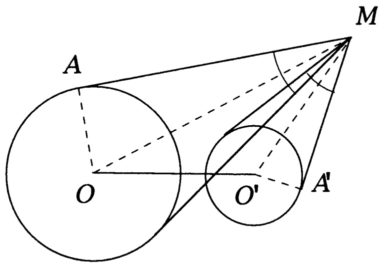
$$\frac{B'F'}{F'C'} = \frac{BA}{AC'} = \frac{BE}{EC}$$

Par le théorème réciproque du théorème de Thalès on déduit que les points E, A', F' sont alignés.



277. On a les rapports suivants :
$\frac{EI}{EC} = \frac{EI}{AC} = \frac{DE}{DC}$ et $\frac{IH}{DE} = \frac{IH}{DB} = \frac{EC}{DC}$. Par suite $\frac{EI}{IH} = \frac{EC \cdot DE \cdot DC}{DC \cdot EC \cdot DE} = 1$ et I est milieu de EH.

De même BC passe par le milieu I du segment EH : les droites AD, BC, EH sont concourantes.



278. Soient C et C' deux cercles donnés de centres O et O', et M un point du lieu cherché. Menons les tangentes MA et MA' à ces cercles. Les triangles MOA et $MO'A'$ sont semblables (268) : le rapport $\frac{MO}{MO'}$ est constant et égal à $\frac{OA}{O'A'}$. Le lieu géométrique cherché est contenu soit dans une droite (la médiatrice du segment OO'), soit dans une circonférence (263).

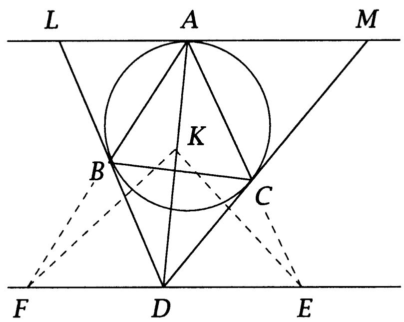
Réciproquement soit M un point de cette ligne. Les rapports $\frac{MO}{MO'}$ et $\frac{OA}{OA'}$ étant égaux, les triangles rectangles MOA et $MO'A'$ sont semblables (270) : les angles $\widehat{OMA}$ et $\widehat{O'MA'}$ sont égaux entre eux et égaux à la moitié des angles d'où l'on voit du point M ces circonférences.

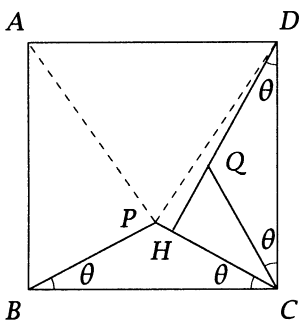
Le lieu géométrique cherché est soit une droite, soit une circonférence selon que les cercles sont égaux ou ne le sont pas.

279. Les droites DB et DC coupent la tangente menée du point A en L et M respectivement.

L'angle $\widehat{MAC}$ égale l'angle $\widehat{CFD}$ (93), et l'angle $\widehat{ACM}$ égale l'angle $\widehat{FCD}$ (35). Le triangle MAC étant isocèle (188), les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{MCA}$ sont égaux : le triangle DFC est isocèle et DF égale DC.

De même, le triangle EDB est isocèle et DE égale DB. Comme DB égale DC (188), le point D est milieu du segment EF et l'angle $\widehat{EKF}$ est droit (183).



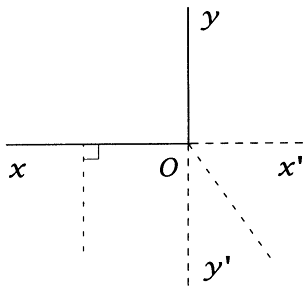


280. L'angle $\widehat{DCP}$ est égal à $90° - \theta$, et l'angle $\widehat{QDC}$ est égal à θ ; par suite si H est le point d'intersection des droites DQ et CP, l'angle $\widehat{CHD}$ est égal à 90° (95).

Les droites CP et DQ sont perpendiculaires.

Le point P est situé sur la médiatrice de BC qui est celle de AD : le triangle APD est isocèle de base AD. Ce triangle est équilatéral si et seulement si PD égale AD, c'est à dire si et seulement si PD égale CD ; en d'autres termes si et seulement si DQ est médiatrice du segment PC.

Or le triangle PCQ étant isocèle de base PQ : le triangle ADP est équilatéral si et seulement si le triangle PCQ est équilatéral, c'est à dire si et seulement si $90° - 2\theta = 60°$ ou $\theta = 15°$.

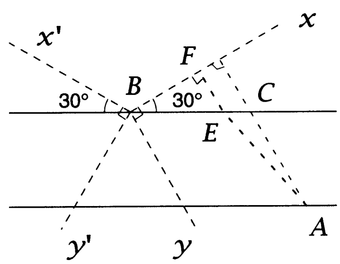


281. Notons $\widehat{xOy}$ l'angle fait par le lac, et $x'Ox$ et $y'Oy$ ses côtés prolongés.

Si le Cow-boy se trouve dans un des deux angles droits $\widehat{xOy'}$ et $\widehat{x'Oy}$ le plus court chemin s'obtient en menant la perpendiculaire aux côtés Ox ou Oy de l'angle formé par les rives du lac ; s'il se trouve dans l'angle droit $\widehat{x'Oy'}$, le plus court chemin s'obtient en traçant la ligne droite allant du Cow-boy au sommet de l'angle formé par les rives du lac.

Note : On peut généraliser cet exercice à des rives faisant un angle quelconque.

282. Du point B menons deux demi-droites Bx et Bx', extérieurement aux rives du canal faisant avec celles-ci un angle égal à 30°.

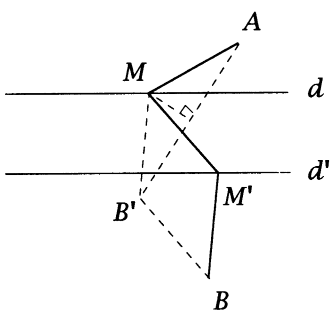


Si le chien aborde la rive opposée en un point E, le temps qui lui est nécessaire pour nager du point A au point E et marcher du point E au point B est le même que celui qui lui serait nécessaire pour nager du point A au point E, puis du point E au point F, où F désigne la projection orthogonale du point E sur Bx ou Bx' selon le cas.

Le point C où le chien doit aborder la rive opposée s'obtient en menant la perpendiculaire à la droite Bx ou Bx'.

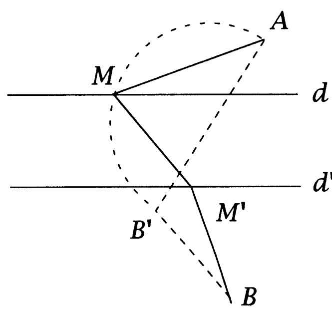
Le problème de la singularité de la solution est le même que celui de l'exercice précédent. Soient By et By' les demi-droites perpendiculaires aux demi-droites Bx et Bx' respectivement et situées dans le demi-plan ne les contenant pas. Si le chien se trouve dans l'angle $\widehat{yBy'}$, le chien doit aborder la rive opposée au point B.

Note : On peut traiter ce problème pour des rapport de vitesse différents entre la marche et la nage ; il suffit de choisir les "bonnes" demi-droites Bx et Bx', c'est à dire d'utiliser des droites ayant entre elles les rapports de projection orhogonale adéquats, en d'autres termes faisant des angles adéquats aux tangentes appropriées (cf. un cours de trigonométrie).



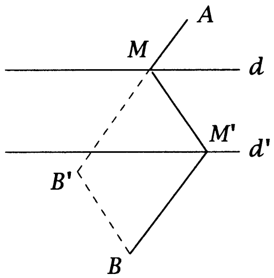
283. 1º Supposons le problème résolu et soit B' le point tel que les vecteurs $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{M'M}$ soient égaux ; alors $B'M$ égale BM' qui est égal à AM.

Construction : La direction ∂ détermine le vecteur $\overrightarrow{BB'}$. Le point M se situe à l'intersection de la médiatrice du segment AB' et de la droite d. Il y a une solution si et seulement si ces droites se coupent.



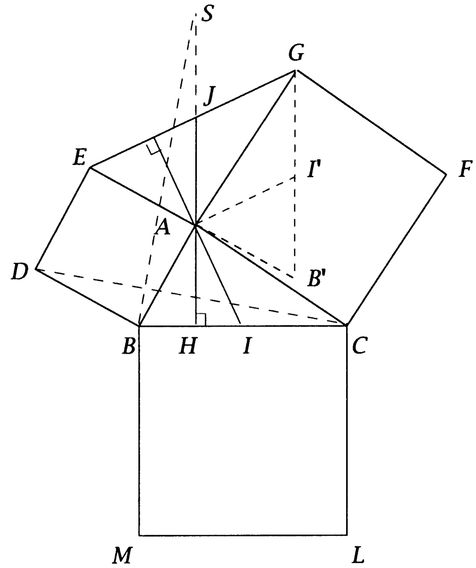
2º La direction ∂ détermine le vecteur $\overrightarrow{MM'}$. Construire le point B' tel que les vecteurs $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{M'M}$ soient égaux.

Le point M se situe à l'intersection de la circonférence de diamètre AB' avec la droite d : il y a deux solutions.



3º La direction ∂ détermine le vecteur $\overrightarrow{MM'}$. Construire le point B' tel que les vecteurs $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{M'M}$ soient égaux.

Le point M se situe à l'intersection des droites AB' et d : il existe une solution.



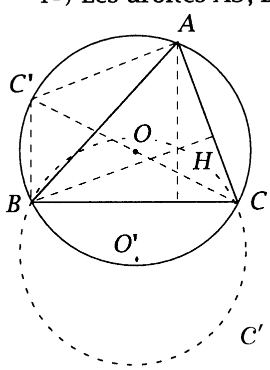
284. 1º) Notons I le milieu de BC, et considérons la rotation $\mathcal{R}$ de centre A et d'angle 90°.

L'image par $\mathcal{R}$ du point B est le point B' tel que A soit milieu du segment EB', et l'image du point I est le point I' milieu du segment $B'G$. Par suite AI' est parallèle à EG et est égal à sa moitié ; comme les segments AI et AI' sont égaux et perpendiculaires, AI est perpendiculaire à EG et égal à sa moitié. De même AJ est perpendiculaire à BC et égal à sa moitié.

2º) La rotation de centre B et d'angle 90° amène le point A sur le point D et le point M sur le point C : les segments CD et AM sont égaux et perpendiculaires. Pour les segments BF et AL, considérer la rotation de centre C et d'angle 90°.

3º) Les segments AS et BM sont égaux (cf. 1º) et parallèles (86) ; le quadrilatère $ASBM$ est un parallélogramme. Par suite les droites BS et CD sont perpendiculaires (cf. 2º).

4º) Les droites AS, BF, CD sont hauteurs du triangle SBC : elles sont concourantes.

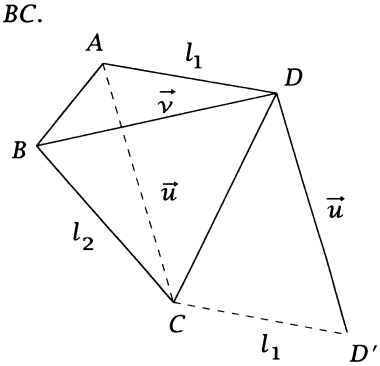


285. Notons C' le point diamétralement opposé à C. Les droites $C'A$ et BH sont perpendiculaires à AC : elles sont parallèles. De même les droites $C'B$ et AH sont perpendiculaires à BC : elles sont parallèles.

Le quadrilatère convexe $C'BHA$ est un parallélogramme et les points C' et B sont fixes : le point H se déduit du point A par la translation $\mathcal{T}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{C'B}$.

Le lieu géométrique du point H lorsque le point A décrit la circonférence $\mathcal{C}$ est la circonférence $\mathcal{C}'$ de centre O' déduite de la circonférence $\mathcal{C}$ par la translation $\mathcal{T}$.

Note : Le symétrique de H par rapport à la droite BC étant sur $\mathcal{C}$, la circonférence $\mathcal{C}'$ est l'image de la circonférence $\mathcal{C}$ par la symétrie d'axe la droite BC.

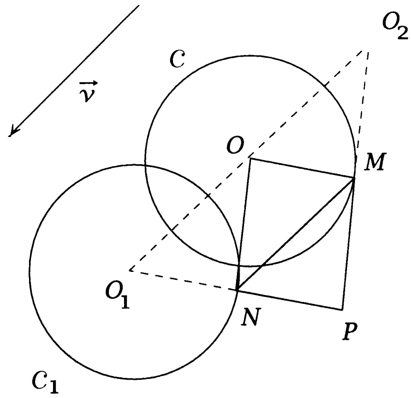


286. *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit $ABCD$ un tel quadrilatère. Considérons le point D' tel que $\overrightarrow{DD'} = \vec{u}$; le quadrilatère convexe $ACD'D$ est un parallélogramme et CD' égale l_1.

Construction : Par un point B tracer les points D et D' tels que $\overrightarrow{BD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{DD'} = \vec{u}$. Le point C se situe à l'intersection de la circonférence de centre B de rayon l_2, et de la circonférence de centre D' de rayon l_1. Tracer le point A tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

Discussion : La construction est possible si et seulement si on peut construire le triangle $BD'C$. Notons l la longueur du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$, alors BD' est de longueur l, et on a :

- ◇ Si $| l_1 - l_2 | < l < l_1 + l_2$, il y a deux solutions ;
- ◇ Si $| l_1 - l_2 | = l$, ou $l_1 + l_2 = l$, il y a une solution ;
- ◇ Sinon il n'y a pas de solution.



287. Lorsque le point M décrit la circonférence C le point N décrit la circonférence C_1 de centre O_1 déduite de la circonférence C par la translation $\mathcal{T}$ de vecteur directeur $\vec{v}$.

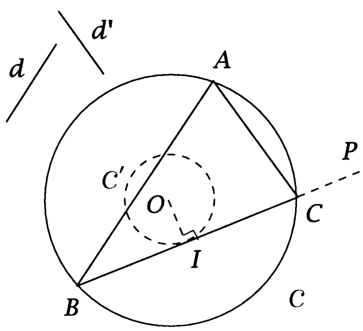
L'image de la droite OM par $\mathcal{T}$ est une droite passant par N et parallèle à OM : c'est la droite NP.

Comme la droite OM passe par le point fixe O, la droite NP passe par le point fixe O_1.

Le point M se déduit du point N par la translation $\mathcal{T}'$ de vecteur directeur $\overrightarrow{O_1O} = \vec{v}$. On montre de même que la droite MP passe par le point fixe O_2 déduit de O par la translation $\mathcal{T}'$ lorsque le point M décrit la circonférence C.

Le point O est situé au milieu du segment O_1O_2.

◇ On démontre de la même manière un résultat similaire si le point M décrit un quadrilatère convexe dont l'intersection des diagonales est le point O.



288. *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit ABC un triangle inscrit dans une circonférence C de centre O tel que les directions de AB et AC soient celles données, et tel que le côté BC passe par un point fixe P.

L'angle $\widehat{BAC}$ étant donné, on connait la longueur de la corde BC et la distance OI du point O à cette corde (le côté BC est tangent au cercle C' de centre O et de rayon OI (158)).

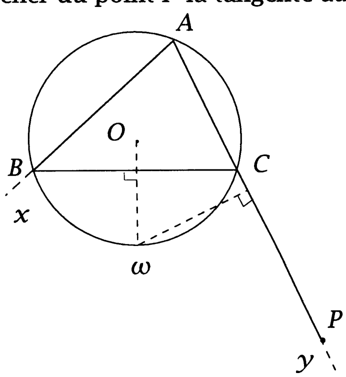
Construction : i) D'un point N de la circonférence C tracer un angle inscrit égal à l'angle $\widehat{BAC}$. La corde sous-tendant l'arc obtenu détermine la longueur BC : du point O abaisser la perpendiculaire OI à cette corde.

ii) Tracer le cercle C' de centre O et de rayon OI ; la tangente menée par P à ce cercle coupe la circonférence C aux points B et C. Des points B et C mener les droites de direction les directions données : elles se coupent en un point A situé sur la circonférence C.

Le triangle ABC est le triangle cherché.

Discussion : La construction n'est possible que si on sait mener du point P la tangente au cercle C', d'où :

1º) Si $OP < OI$, il n'y a pas de solution ;
2º) Si $OP = OI$, il y a une solution ;
3º) Si $OP > OI$, il y a deux solutions.



289. *Analyse* : Supposons le problème résolu et soit P le point de la demi-droite Ay tel que $AP = AB + AC$. Les segments AB et PC sont égaux et se déduisent l'un de l'autre par la rotation $\mathcal{R}$ de centre ω et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PC})$ (exercice nº 118).

De plus, si O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, la droite ωO est perpendiculaire à BC et est médiatrice du segment BC.

Construction : Construire le centre ω (223). Le point O se situe à l'intersection de la médiatrice de $A\omega$ et de la droite orthogonale à la direction donnée passant par ω.

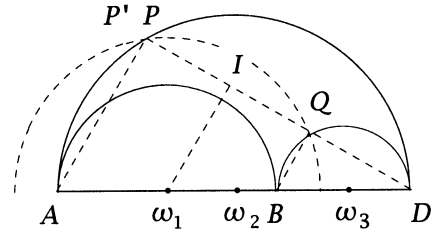
Discussion : La construction du point O est possible si la direction donnée n'est pas celle de la demi-droite Ax ou Ay ; dans ces cas le triangle ABC est un triangle aplati (AP).

Une variante pour construire le point ω :

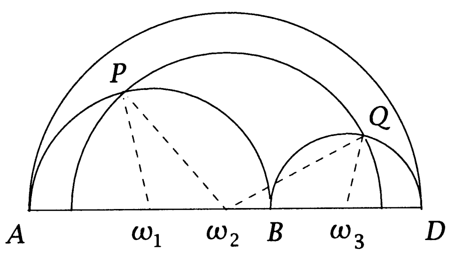
Soient B_1 un point de la demi-droite Ax tel que AB_1 soit moindre que la longueur donnée, et C_1 le point du segment AP tel que $PC_1 = AB_1$: les points B_1 et C_1 se correspondent par la rotation $\mathcal{R}$.

Le point ω se situe à l'intersection des médiatrices des segments B_1C_1 et AP.

290. 1º) On considère le point P' intersection de la droite DQ avec la circonférence C_2; on montre que les points P et P' sont confondus.



Notons I le milieu de $P'Q$. Comme les droites AP' et BQ sont parallèles (elles sont perpendiculaires à la droite DQ), la droite $\omega_1 I$ est parallèle à BQ (255), et donc perpendiculaire à $P'Q$: c'est la médiatrice du segment $P'Q$ et $\omega_1 P' = \omega_1 Q$. Le point P' est situé sur la circonférence C: les points P et P' sont confondus.



2º) Soit P' le point de la circonférence C_1 tel que l'angle $\widehat{B\omega_1 P'}$ soit égal à $\pi - \widehat{D\omega_3 Q}$.

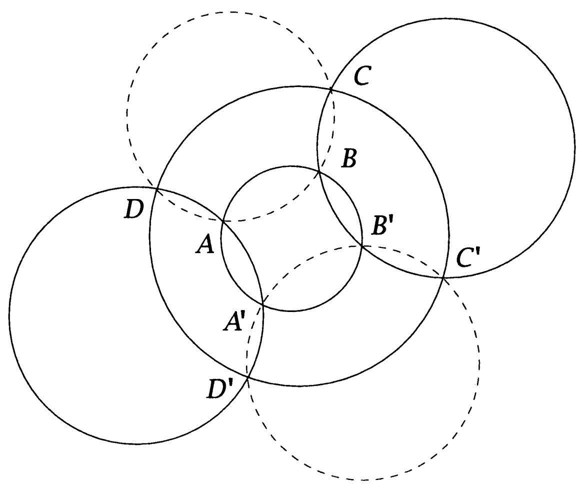
Comme $\omega_2\omega_1 = A\omega_2 - A\omega_1 = R_3$ et $\omega_2\omega_3 = D\omega_2 - D\omega_3 = R_1$, les triangles $\omega_1\omega_2 P'$ et $\omega_3\omega_2 Q$ sont égaux; d'où $\omega_2 P'$ égale $\omega_2 Q$, et le point P' est sur la circonférence C. Les points P et P' sont confondus : les angles $\widehat{D\omega_3 Q}$ et $\widehat{D\omega_1 P}$ sont supplémentaires.

291. On a les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
(AB, AA') &= (BB', B'A') &+ k\pi\\
(CC', BC) &= (B'C', B'B) &+ k\pi\\
(CD, CC') &= (D'D, D'C') &+ k\pi\\
(AA', DA) &= (D'A', D'D) &+ k\pi\\
(BC, DC) &= (AB, AD) &+ k\pi
\end{aligned}
$$

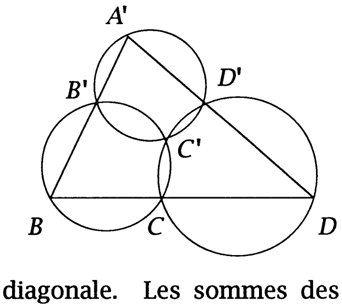
Ajoutons membre à membre ces égalités, il vient :
$(B'C', B'A') + (D'A', D'C') = k\pi$.

Les points A', B', C', D' sont cocycliques.

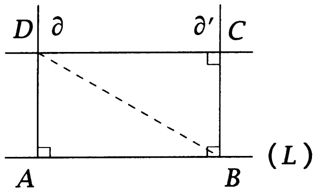


Note : Si un point, par exemple A, est rejeté à l'infini, c'est à dire les points B, C, D sont alignés on peut énoncer le lemme de Miquel de la manière suivante :

Si trois points C, D', B' sont pris respectivement d'une manière quelconque sur les côtés BD, DA', $A'B$ d'un triangle $A'BD$, les cercles circonscrits aux triangles $B'BC$, CDD', $D'A'B'$ passent par un même point.



292. *I* i) Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe et AC une diagonale. Les sommes des angles des triangles ABC et ADC étant égales à deux angles droits, la somme des angles du quadrilatère $ABCD$ est égale à quatre angles droits.



ii) Considérons A et B deux points d'une droite L ; par ces points élevons les perpendiculaires ∂ et ∂' à la droite L. Prenons C un point de la droite ∂' et abaissons la perpendiculaire CD à la droite ∂. D'aprés i) le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Considérons les triangles rectangles ABD et DCB. Ils ont le côté BD commun et les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ (resp. $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$) égaux : $\widehat{ADB} + \widehat{BDC} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{ADB} + \widehat{ABD} = \frac{\pi}{2}$.

Ces triangles sont égaux (48) et les côtés AB et CD, respectivement AD et BC, sont égaux.

II i) voir (86)

ii) La somme des angles $\widehat{xA_0H_0}$ et $\widehat{H_0A_0x'}$ est égale à deux droits ; les droites $x'A_0x$ et L' étant distinctes un des deux angles est aigu, et l'autre est obtus (39).

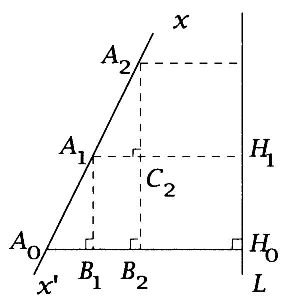
a) Les droites A_1B_1 et L' sont parallèles (86) : les points A_1 et H_0 sont du même côté par rapport à la droite L'.

b) Les droites A_1B_1 et L sont parallèles (86) ; les points A_1 et B_1 sont situés du même côté par rapport à L. Par suite les points A_0 et A_1 sont de part et d'autre de la droite L et les droites A_0A_1, c'est à dire $x'A_0x$ et L sont sécantes.

c) On a $B_1H_0 = A_0H_0 - A_0B_1$. Si les points A_0 et B_2 sont de part et d'autre de la droite L les droites xA_0x' et L sont sécantes (cf. b)).

Sinon $B_2H_0 = A_0H_0 - 2A_0B_1$. En effet les triangles $A_0A_1B_1$ et $A_1A_2C_2$ sont égaux (48) :

Du théorème (95) pris en hypothèse, on déduit que les angles $\widehat{H_0A_0A_1}$ et $\widehat{A_0A_1B_1}$, respectivement $\widehat{H_0A_0A_1}$ et $\widehat{A_1A_2C_2}$ sont complémentaires. Par suite $\widehat{A_0A_1B_1} = \widehat{A_1A_2C_2}$; de même $\widehat{B_1A_0A_1} = \widehat{C_2A_1A_2}$.



Les côtés A_1C_2 et A_0B_1 sont égaux et par *I*- ii) on a A_1C_2 égal à B_1B_2 : $B_2H_0 = A_0H_0 - 2A_0B_1$.

d) Il existe un entier n tel que $nA_0B_1 \leq A_0H_0 < (n+1)A_0B_1$ $(*)$.

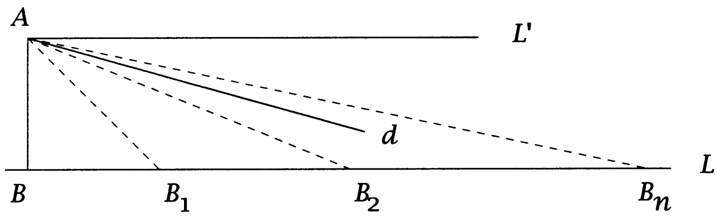
Portons les points $A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sur la demi-droite A_0x tels que A_iA_{i+1} soit égal à A_0A_1 pour $i = 3, \ldots, n$, et notons B_i la projection orthogonale de A_i sur A_0H_0. Comme en c) on montre que $A_0B_m = mA_0B_1$.

Par suite les points A_0 et A_{n+1} sont de part et d'autre de la droite L : les droites xA_0x' et L sont sécantes.

Toute droite passant par A_0, distincte de L' est sécante avec la droite L : c'est le postulat d'Euclide.

Note : $(*)$ C'est la propriété archimédienne de la droite, propriété utilisée implicitement en (20).

293. Les triangles ABB_1, $AB_1B_2, \ldots, AB_{n-1}B_n$ sont isocèles. La somme des angles intérieurs à ces triangles étant égale à deux droits, les angles intérieurs $\widehat{A}$ et $\widehat{B_1}$ du triangle isocèle seront égaux à la moitié d'un angle droit.

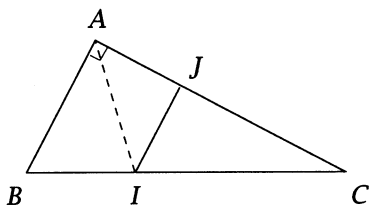


L'angle de sommet B_1 intérieur au triangle ABB_1, est angle extérieur du triangle AB_1B_2 ; ce dernier triangle étant isocèle, ses angles à la base sont égaux. D'aprés l'hypothése que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, l'angle extérieur est égal à leur somme. Par suite les angles intérieurs $\widehat{A}$ et $\widehat{B_2}$ au triangle AB_1B_2 sont égaux à $\frac{1}{4}$ d'angle droit. En continuant ainsi, on voit que pour $n \geq 1$, la mesure de l'angle $\widehat{AB_nB_{n-1}}$ est égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$ d'angle droit, et celle de l'angle $\widehat{BAB_n}$ est égale à 1droit $-\frac{1}{2^{n-1}}$ droit.

ii) L'angle β étant aigu, on pose $\beta = 1\text{droit} - \epsilon$ avec $\epsilon > 0$. Choisissons n suffisamment grand tel que $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$, alors $\beta < \widehat{BAB_n}$.

La droite d passe alors entre les côtés AB et AB_n du triangle BAB_n et, d'aprés l'axiome de Pasch, a un point commun avec la droite L situé entre B et B_n.

294. La bissectrice issue de l'angle droit A coupe l'hypoténuse BC en un point I ; notons J la projection orthogonale de ce point sur le côté AC. On a les relations suivantes :



$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$ (259), d'où $1 + \frac{IB}{IC} = 1 + \frac{AB}{AC}$ et $\frac{BC}{IC} = \frac{AC+AB}{AC}$. Par suite IC a pour mesure un nombre rationnel, ainsi que IB.

D'autre part $\frac{IJ}{AB} = \frac{CI}{CB}$ et IJ est un nombre rationnel.

Comme le triangle JIA est isocèle rectangle on a $AI = IJ\sqrt{2}$, et la bissectrice AI n'est pas commensurable aux côtés du triangle ABC.

Note : De nombreux problèmes de géométrie ont été regardés de cette manière : peut-on trouver des triangles aux côtés commensurables ayant le plus de lignes possibles commensurables par exemple médianes, hauteurs, etc... ?

295. i) L'image, par une telle similitude, du centre O de la circonférence C est le centre O' de la circonférence C'. Le rapport de la similitude est égal au rapport des rayons $\frac{R'}{R}$: le centre ω de la similitude vérifie $\frac{\omega O'}{\omega O} = \frac{R'}{R}$.

Soit ω un point du plan tel que $\frac{\omega O'}{\omega O} = \frac{R'}{R}$; il existe une unique similitude directe de centre ω, de rapport $\frac{R'}{R}$ transformant le point O en le point O', et par suite la circonférence C en la circonférence C'. Cette similitude est d'angle $(\omega O, \omega O')$.

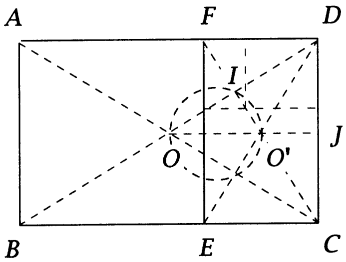
◇ Si $\frac{R}{R'} \neq 1$, le centre de ces similitudes décrit une circonférence (263) ;

◇ Si $\frac{R}{R'} = 1$, les similitudes cherchée sont les rotations de centres situés sur la médiatrice du segment OO' et la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OO'}}$.

ii) L'image, par une telle similitude, du centre de gravité G du triangle ABC est le centre de gravité G' du triangle $A'B'C'$: ayant trois possibilités pour l'image du sommet A, on a trois similitudes directes répondant à la question. Pour les déterminer utiliser (333).

On peut décomposer ces similitudes en la translation $\mathcal{T}_{\overrightarrow{GG'}}$, la rotation $\mathcal{R}(G',\theta)$ où $\theta = (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'E})$ et E sommet du triangle $A'B'C'$, et l'homothétie $\mathcal{H}(G', \frac{A'B'}{AB})$.

iii) On fait de même et on obtient quatre similitudes de rapport le rapport des côtés $\frac{c'}{c}$. Les centres de ces similitudes sont situés sur une circonférence (263), où sur la médiatrice du segment joignant les centres des carrés.



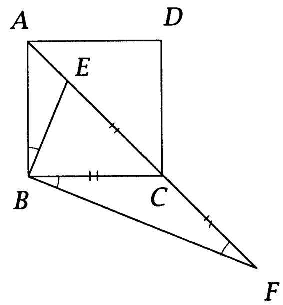
296. On a $\frac{EC}{AB} = \frac{EF}{BC}$ soit $\frac{BE}{BC} = \frac{EC}{BE}$: le rapport cherché k est égal au nombre d'or $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Le transformé du côté AB est le côté EC ou FD : l'angle de la similitude est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. De plus les centres O et O' de ces rectangles se correspondent par ces similitudes : le centre ω d'une de ces similitudes est sur la circonférence C de diamètre OO'. De même ce centre ω est sur la circonférence de diamètre AE ou AD ; on peut aussi utiliser (333) pour le déterminer.

Notons I l'intersection de BD avec la circonférence C et J l'intersection des droites DC et OO' ; les triangles OIO' et OJD sont semblables et $\frac{IO'}{IO} = \frac{JD}{JO} = k$. Le point I est le point ω. On montre de même que le point ω est situé sur la diagonale du rectangle $DFEC$: le centre ω de la similitude est à l'intersection des diagonales des rectangles $ABCD$ et $DFEC$.

Autre solution : les diagonales homologues des rectangles $ABCD$ et $DFEC$ se correspondant par la similitude sont perpendiculaires. Si elles se coupent au point I, les triangles IFD et ICB sont semblables et $\frac{IF}{ID} = \frac{IC}{IB} = \frac{FC}{BD} = k$: le point I est le centre ω de la similitude.

Note : La perpendiculaire élevée au point d'intersection de la diagonale BD et du côté EF détermine sur le rectangle $CDFE$ un carré. On fait de même avec la diagonale FC ; ce processus détermine une *spirale logarithmique* qui converge vers le centre de similitude.



297. I : i) On a $AF = AE + 2R$.

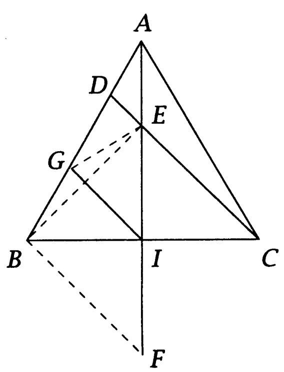
ii) Les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{AFB}$ ayant même complément sont égaux ; comme le triangle CBF est isocèle, les triangles AEB et ABF sont semblables (268). Par suite $\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AE}$.

iii) Soit $a = \frac{AF}{AB}$; alors :

$$a = \frac{1}{-2+a} = \frac{1}{-2+\frac{1}{-2+a}} = \frac{1}{-2+\frac{1}{-2+\cdots}}$$

La décomposition en fraction continue de $1 + \frac{AC}{R}$ est infinie : il en est de même de $\frac{AC}{R}$ et la diagonale du carré est incommensurable à son côté.

On a $AC = R\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.



II : i) La droite GI est médiatrice du segment BE, et le point G est le milieu du segment BD : $BG = GD = GE$. Le triangle BEC est rectangle isocèle et $\widehat{GBE} = 15°$, d'où l'angle $\widehat{AGE} = 30° = \widehat{GAE}$: $AE = GE$.

Par suite $AB = 2AE + AD$, et $AF = AE + AB = 3AE + AD$.

ii) Le quadrilatère $EBFC$ est un parallélograme (107) : $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD}$. Alors :

$$\frac{AF}{AB} = \frac{3AE+AD}{2AE+AD} = 1 + \frac{AE}{2AE+AD} = 1 + \frac{1}{2+\frac{AD}{AE}}$$

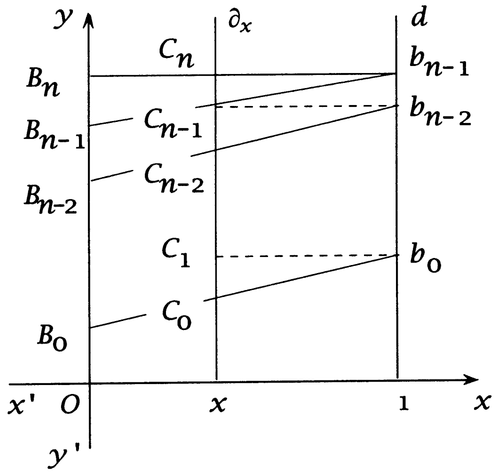
$$= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{AE}{AD}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{AF}{AB}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\cdots}}}$$

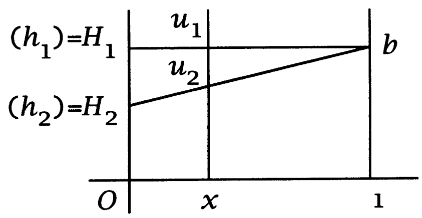
La décomposition en fraction continue de $\frac{AF}{AB}$ est infinie : il en est de même de $\frac{AI}{AB}$ et la hauteur d'un triangle équilatéral est incommensurable à son côté.

On a $AI = AB\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Note : Pour $\sqrt{5}$ prendre le côté et la diagonale d'un pentagone régulier : les diagonales d'un pentagone régulier se coupent dans le rapport du nombre d'or (la plus grande des divisions est égale au côté) et définissent un pentagone régulier.

298. Avec les notations de la figure, les triangles bu_1u_2 et bH_1H_2 sont homothétiques, par suite $\frac{\overline{u_1u_2}}{\overline{H_1H_2}} = \frac{1-x}{1}$.





Comme $\overline{xu_1} = h_2 - \overline{u_1u_2}$, on a $\overline{xu_1} = h_1 + (h_2 - h_1)x$. De cette égalité, il vient :

$$\overline{xC_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n x$$

$$\overline{xC_{n-2}} = \sum_{i=0}^{n-2} a_i + (\sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n x - \sum_{i=0}^{n-2} a_i)x$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} a_i + (a_{n_1} + a_n x)x$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} a_i + a_{n_1}x + a_n x^2$$

Par récurrence $\overline{xC_{n-j}} = \sum_{i=0}^{j} a_i + (a_j + a_{j+1} + \cdots + a_n x^{n-j})x$, et donc $\overline{xC_0} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n$.

Notes : 1º) Il est à remarquer que cette machine génère un algorithme de type Hörner, algorithme utilisé en informatique pour calculer les valeurs prises par un polynôme car moins coûteux que la méthode directe.

2º) Ce principe de calcul s'étend sans difficulté pour une valeur de x non comprise entre 0 et 1 ; mais d'Alembert, ayant réalisé cette machine, n'avait considéré, pour des problèmes de réalisation, que des valeurs comprises entre 0 et 1.

299. On a $\frac{\overline{2B}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{2'B'}}{\overline{A'B}} = \frac{1}{2}$ (256). Le point 2 est le milieu de AB.

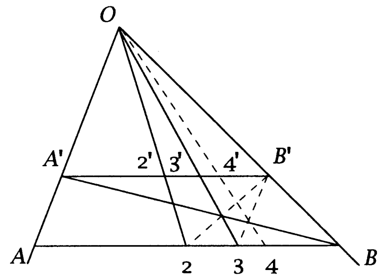
Hypothèse de récurrence : On suppose que pour tout $r \leq n$ on a $\frac{\overline{rB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{r}$.

- pour $r = n + 1$:

$$\frac{\overline{n(n+1)}}{\overline{(n+1)B}} = \frac{\overline{B'(n+1)'}}{\overline{(n+1)'A'}} = \frac{\overline{B(n+1)}}{\overline{(n+1)A}} \qquad (257)\ ;$$

d'où :

$$\frac{\overline{n(n+1)}}{\overline{(n+1)B}} = \frac{\overline{(n+1)B}}{\overline{A(n+1)}} = \frac{\overline{n(n+1)}+\overline{(n+1)B}}{\overline{(n+1)B}+\overline{A(n+1)}} = \frac{\overline{nB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{n}$$



et

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{(n+1)B}} = \frac{\overline{A(n+1)}}{\overline{(n+1)B}} + \frac{\overline{(n+1)B}}{\overline{(n+1)B}} = n+1$$

et

$$\frac{\overline{(n+1)B}}{\overline{AB}} = \frac{1}{n+1}.$$

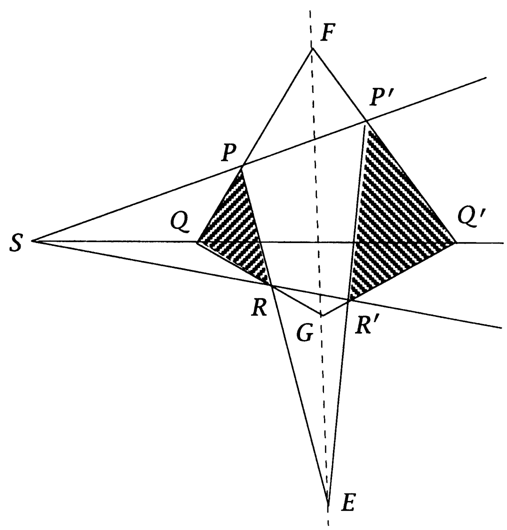
Ainsi pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\frac{\overline{nB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{n}.$$

300. Notons E le point intersection des droites PR et $P'R'$, F celui des droites QP et $Q'P'$, G celui des droites QR et $Q'R'$. On applique trois fois de suite le théorème de Ménélaüs :

◇ Avec le triangle SQR et la droite $Q'R'G$:

$$\frac{\overline{Q'Q}}{\overline{Q'S}} \times \frac{\overline{R'S}}{\overline{R'R}} \times \frac{\overline{GR}}{\overline{GQ}} = 1$$



◇ Avec le triangle SPQ et la droite $P'Q'F$:

$$\frac{\overline{Q'S}}{\overline{Q'Q}} \times \frac{\overline{P'P}}{\overline{P'S}} \times \frac{\overline{FQ}}{\overline{FP}} = 1$$

◇ Avec le triangle SPR et la droite $R'P'E$:

$$\frac{\overline{P'S}}{\overline{P'P}} \times \frac{\overline{R'R}}{\overline{R'S}} \times \frac{\overline{EP}}{\overline{ER}} = 1$$

En multipliant membre à membre ces égalités, il vient :

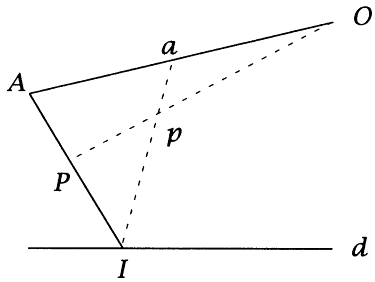
$$\frac{\overline{GR}}{\overline{GQ}} \times \frac{\overline{FQ}}{\overline{FP}} \times \frac{\overline{EP}}{\overline{ER}} = 1$$

Par suite les points E, F, G sont alignés.

Réciproquement soit S le point intersection des droites PP' et RR' ; on applique la proposition directe aux triangles FPP' et GRR' (les droites PR, $P'R'$, FG sont concourantes en E). Ainsi les points d'intersection des côtés homologues sont alignés et les points S, Q, Q' sont situés sur une même droite.

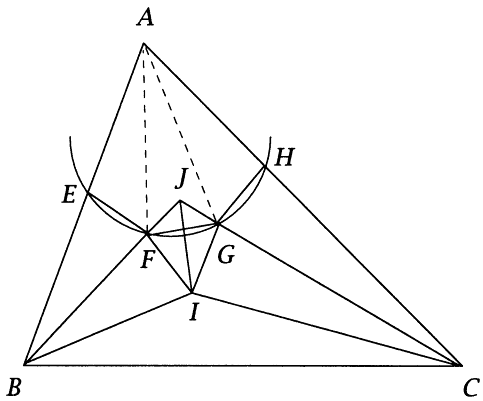
Note : On dit que les triangles PQR et $P'Q'R'$ sont *homologiques* , S étant le *centre d'homologie* et la droite EFG l'*axe d'homologie.* Les triangles homothétiques sont un cas particulier des triangles homologiques.

◇ Le mathématicien Desargues s'est intéressé aux problèmes de représentation et plus particulièrement de la représentation par les peintres de la perspective. La figure ci-contre montre cette représentation point à point :



Le point O est l'œil, la droite d est la ligne de terre, les points A et P sont des points donnés et a est la représentation en perspective du point A. Si le point I est le point intersection de AP avec la ligne de terre, le point p correspondant au point P dans cette perspective est le point intersection des droites aI et OP (cf. "La Place de J. H. Lambert dans l'histoire de la perspective" R. Laurent Cedic/Nathan).

301. 1º) Soit O (resp. O') le centre du cercle circonscrit au triangle isocèle EFG (resp. FGH) ; les triangles isocèles OFG et $O'FG$ sont égaux (48). Les points O et O' sont confondus et les points E, F, G, H sont cocycliques : le point A est situé sur cette circonférence (180).



2º a) La droite BI (resp. CI) est bissectrice de l'angle $\widehat{JBC}$ (resp. de l'angle $\widehat{JCB}$) ; par suite la droite JI est bissectrice de l'angle $\widehat{BJC}$, et les triangles JIF et JIG sont égaux. Ainsi le triangle IFG est isocèle ; comme l'angle $\widehat{I}$ est égal à $\frac{\pi}{3}$, il est équilatéral.

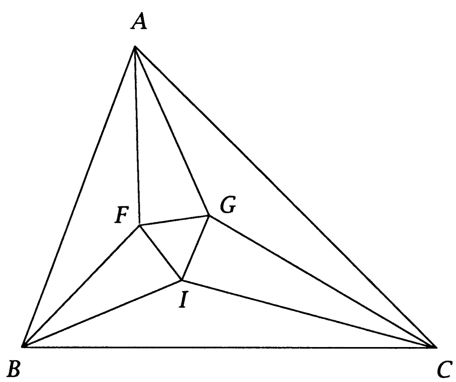
b) Le triangle JFG est isocèle (cf. a)) et l'angle $\widehat{J} = \pi - 2b - 2c$. Les angles $\widehat{F}$ et $\widehat{G}$ du triangle JFG sont égaux tous deux à $b + c$ soit à $\frac{\pi}{3} - a$. Et l'angle $\widehat{IFJ}$ est égal à $\frac{2\pi}{3} - a$.

c) Utiliser 1º. Sinon les triangles BEF et BIF, respectivement CGI et CGH, sont égaux d'où $EF = FI = FG = GI = GH$; on a les égalités angulaires (cf. b)) :

$$\widehat{EFG} = \widehat{EFJ} + \widehat{JFG} = (\pi - \widehat{BFI}) + \widehat{JFG} = \widehat{IFJ} + \widehat{JFG} = \pi - 2a$$

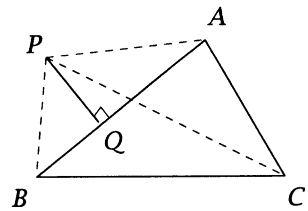
De même $\widehat{FGH} = \pi - 2a$, et les points A, E, F, G, H sont cocycliques.

d) Il suffit de montrer que les droites AF et AG divisent l'angle $\widehat{BAC}$ en trois angles égaux ; ce qui est immédiat car les cordes EF, FG, GH sont égales.

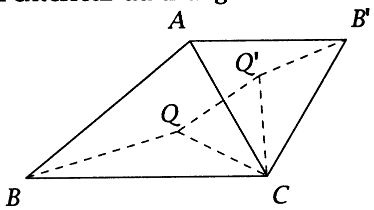


Note : Plus généralement on voit que les trissectrices des angles d'un triangle déterminent 27 triangles ; en utilisant des méthodes de démonstration automatique Shang-Ching Chou (cf. "Mechanical Geometry Theorem Proving - D. Reidel Publishing Company) a montré que 18 de ces triangles sont équilatéraux.

302. 1º Soit P un point extérieur au triangle ABC ; supposons qu'il soit situé du côté opposé au sommet C par rapport à la droite AB et notons Q sa projection orthogonale sur AB.



On a les inégalités suivantes $PA > QA$ et $PB > QB$. Comme l'angle $\widehat{PQC}$ est obtus $PC > QC$; par suite $PA + PB + PC > QA + QB + QC$. Le point P cherché ne peut être situé à l'extérieur du triangle ABC.

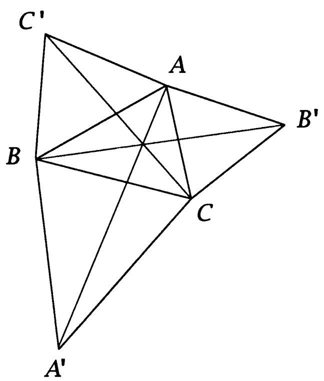


2º Par la rotation $\mathcal{R}$, le point B est image du point A', et le point B' est image du point A ; par suite AA' égale BB'. On montre de même que AA' égale CC' en considérant la rotation de centre B et d'angle 60°.

a) Par la rotation $\mathcal{R}$ le point B' est image du point A, et le point Q' est image du point Q : QA égale $Q'B'$. Le triangle CQQ' étant équilatéral QQ' égale QC et $QA + QB + QC = Q'B' + QB + QQ'$. La ligne brisée $BQQ'B'$ est plus longue que le segment BB' et $QA + QB + QC \geq BB'$; il y a égalité si et seulement si les points B, Q, Q', B' sont alignés.

b) Le point P est intérieur au triangle ABC si et seulement si les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ du triangle sont de mesure inférieure à 120°.
Le point P étant intérieur au triangle, il est situé sur les segments AA' et BB'. L'image du segment AA' par la rotation $\mathcal{R}$ est le segment BB' : le point P' est situé sur le segment BB'. Les points B, P, P', B' sont alignés et dans cet ordre.

c) Supposons que chaque angle du triangle ABC soit inférieur à 120° ; le point P, intersection des segments AA' et BB' est intérieur au triangle et $PA + PB + PC = BB'$: cette somme est minimum (cf. a)).



Note : Il y a unicité de ce point pour la propriété de minimum demandée : pour tout autre point Q du plan, les points B, Q, Q', B' ne sont pas alignés, et on peut noter que les droites AA', BB', CC' sont concourantes. Il suffit de considérer la rotation $\mathcal{R}_1$ de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$: si P_1 est l'image du point P par $\mathcal{R}_1$, les points C, P, P_1, C' sont alignés et dans cet ordre car $PA + PB + PC = CC'$.

◇ Si un angle du triangle est de mesure supérieure à 120°, le point cherché est le sommet de cet angle :

Pour tout point Q, intérieur au triangle on a $QA + QB + QC = B'Q' + QB + QQ'$, avec les notations de *a*). Le point C étant contenu dans le quadrilatère convexe $BQQ'B'$, on a $BC + CB' < BQ + QQ' + Q'B'$ et $CB + CA + CC < QA + QB + QC$.

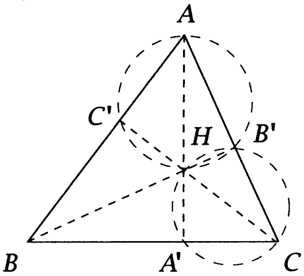
Le point P tel que la somme de ses distances aux trois sommets du triangle ABC est minimum est le point C.

303. i) On a les relations angulaires suivantes :

$$\begin{aligned}(AB, A_2B_2) &= (AB, AB_1) + (AB_1, A_1B_1) + (A_1B_1, A_1B_2) + (A_1B_2, A_2B_2) \quad (\pi)\\ &= 2(AB, AC) + 2(BC, BA) + 2(AC, AB) + 2(BA, BC) \quad (\pi)\\ &= 0 \quad (\pi)\end{aligned}$$

Les droites AB et A_2B_2 sont parallèles, et AB égale A_2B_2 (une symétrie orthogonale est une isométrie) : le quadrilatère convexe ABA_2B_2 est un parallélogramme.

ii) On montre de même que le quadrilatère convexe $AC'C_4'A_2$ est un parallélogramme ; d'où $C'C_4'$ égale AA_2 et $C'C_4'$ est inférieur ou égal au double du périmètre du triangle $A'B'C'$. Ce périmètre est minimum si la ligne brisée $C'B'A_1'C_2'B_2'A_3'C_4'$ est une ligne droite.



iii) Notons A', B', C' les pieds des hauteurs du triangle ABC et H son orthocentre.

Les points A, B', H, C' sont cocycliques :
$(B'C', B'H) = (AC', AH) \quad (\pi)$

Les points A', C, A, C' sont cocycliques :
$(AC', AH) = (CH, CA') \quad (\pi)$

Les points H, B', C, A' sont cocycliques :
$(CH, CA') = (B'H, B'A') \quad (\pi)$

Les angles $\widehat{C'B'H}$ et $\widehat{HB'A'}$ sont égaux, et la droite $B'B$ est bissectrice de l'angle $\widehat{A'B'C'}$. On fait de même pour les autres angles du triangle orthique. La ligne brisée $C'B'A_1'$ est une ligne droite : les points B, B', B_1 sont alignés et les angles $\widehat{C'B'B}$ et $\widehat{B_1B'A_1'}$ sont égaux. De proche en proche, on montre que la ligne brisée $C'B'A_1'C_2'B_2'A_3'C_4'$ est une ligne droite : le primètre du triangle orthique est égal à AA_2, il est minimum.

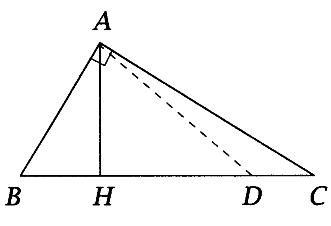
iv) Si le triangle $A'B'C'$ inscrit dans le triangle ABC est de périmètre minimum, la ligne brisée $C'B'A_1'C_2'B_2'A_3'C_4'$ est une ligne droite. La rotation de centre C et d'angle $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB_1})$ envoie le point C' sur le point C_2', et le point A' sur le point A_1' : les angles $\widehat{CC'A'}$ et $\widehat{CC_2'A_1'}$ sont égaux. De plus le triangle $CC'C_2'$ est isocèle : les angles $\widehat{CC'B'}$ et $\widehat{CC_2'A_1'}$ sont égaux (les points C', B', A_1', C_2' sont alignés). Par suite la droite CC' est bissectrice de l'angle $\widehat{A'C'B'}$; on fait de même pour les droites AA' et BB'.

Les angles $\widehat{C'B'B}$ et $\widehat{B_1B'A_1'}$ sont égaux et les points C', B', A_1' sont alignés : les points B, B', B_1 sont alignés et BB' est perpendiculaire à AC.

De même CC' (respectivement AA') est perpendiculaire à AB (respectivement à BC).

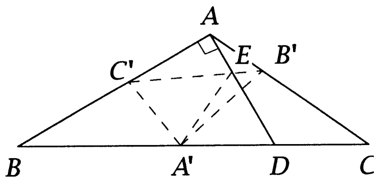
Le triangle orthique est le seul triangle de périmètre minimum.

2º cas *Le triangle ABC est rectangle en A* :



Si H est le pied de la hauteur issue de A, on peut voir le triangle aplati AHA comme la limite du triangle orthique du triangle ABD lorsque le point D tend vers le point C : par continuité le triangle aplati AHA est le triangle cherché.

Une démonstration utilisant les mêmes idées que pour le 1º cas peut être donnée.



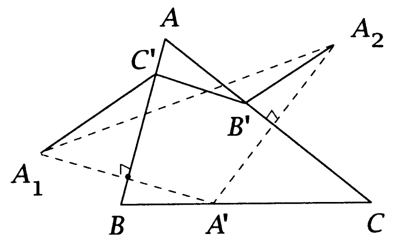
3º cas *L'angle $\hat{A}$ du triangle ABC est obtus* :

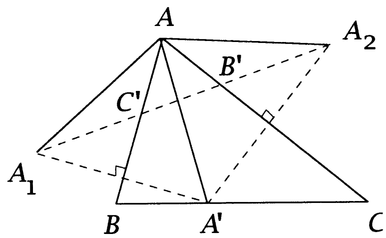
Inscrivons un triangle $A'B'C'$ dans le triangle ABC ; la perpendiculaire au côté AB issue du point A coupe la base BC au point D et le segment $B'C'$ au point E. Supposons, de plus, que le point A' soit sur le segment BD (sinon considérer la perpendiculaire au côté AC).

Le périmètre du triangle $A'B'C'$ est supérieur à celui du triangle $A'C'E$, qui est supérieur à celui du triangle aplati AHA.

Le triangle cherché est le triangle aplati AHA.

◇ i') Le périmètre du triangle $A'B'C'$ est de longueur la longueur de la ligne brisée $A_1C'B'A_2$: il sera minimum si cette ligne brisée est une ligne droite, et il y a unicité d'un tel triangle.





ii') Le triangle A_1AA_2 est isocèle et l'angle $\widehat{A_1AA_2}$ est le double de l'angle $\hat{A}$. L'angle $\widehat{A_1AA_2}$ étant constant, le périmètre du triangle $A'B'C'$ est minimum si, de plus, le côté AA_1 est minimum, c'est à dire si AA' est minimum. Cette condition est réalisée lorsque AA' est la hauteur du triangle ABC.

iii') Les droites BB' et CC' sont hauteurs du triangle, sinon le même raisonnement appliqué aux points B' ou C' donnerait des triangles $A''B''C''$ autres que le triangle $A'B'C'$ de ii') de périmètre minimum, ce qui serait contradictoire.

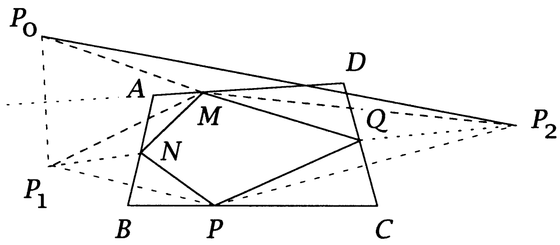
304. Le périmètre du quadrilatère $MNPQ$ est égal à la longueur de la ligne brisée $MNP_1Q_2M_3$; il est supérieur au segment MM' et égal si les points M, N, P_1, Q_2, M_3 sont alignés et dans cet ordre.

Comme les segments AM et A_2M_3 sont égaux et paralléles le quadrilatère AMA_2M_3 est un parallélogramme et MM_3 égale AA_2, c'est à dire à $2\,AC$.

Pour obtenir un quadrilatère de périmètre minimum (égal à $2\,AC$), par un point M du côté AB mener une paralléle à la diagonale AC ; elle coupe BC en N_0, CD_1 en P_0, D_1A_2 en Q_0. Construire les points P, Q donnant par le développement considéré les points P_0 et Q_0 : le quadrilatère MN_0PQ est de périmètre minimum, et il existe une infinité de solutions.

305. Les points M, N, P, Q, sont situés sur les côtés DA, AB, BC, CD, respectivement. Supposons donné les points M et P, et soient P_1 et P_2 les symétriques du point P par rapport au côtés AB et DC respectivement. Le quadrilatère $MNPQ$ est de périmètre minimum si les points N et Q sont les points intersections des segments MP_1 et AB d'une part, et des droites MP_2 et DC d'autre part.

Supposons un point P donné, et soit P_0 le symétrique du point P_1 par rapport à la droite AD. Le quadrilatère $MNPQ$ est de périmètre minimum (égal à la longueur P_0P_2) si le point M est l'intersection des droites AD et P_0P_2, et les points N et Q sont construits comme précédemment. S'il n'y a pas intersection il faut prendre comme sommet M ou N ou Q un sommet du quadrilatère $ABCD$, dans ce cas le quadrilatère $PQMN$ dégénére en un triangle ou un segment compté deux fois, et le périmètre minimum est supérieur à la longueur P_0P_2.



Le périmètre minimum est égal à la longueur du segment P_0P_2 : il suffit de déterminer P afin de minimiser cette longueur.

On passe du point P_0 au point P_2 par l'isométrie I, égale au produit des symétries $\mathcal{S}_{DC} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AD}$: l'isométrie I est soit une rotation, soit une translation. Le quadrilatère $ABCD$ étant inscriptible, l'isométrie I est une translation et la longueur du segment P_0P_2 ne dépend pas du point P choisi, c'est la longueur du vecteur de cette translation.

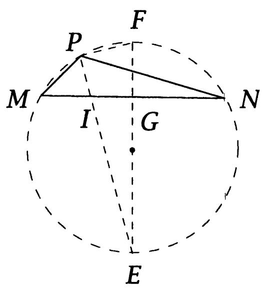
S'il existe un point P de BC tel que le quadrilatère $PQMN$ construit à l'aide des points P_0, P_1, P_2, ne dégénère pas en un triangle ou un segment, il existe une infinité de quadrilatères de périmètre minimum ; ce périmètre est de longueur la longueur du vecteur de la translation I (c'est la quatrième proportionnelle au rayon et aux diagonales du quadrilatère inscriptible – cf. B. Sollertinsky, à Gatschina. Journal de Longchamps 1891).

Dans le cas contraire, prendre comme point initial P les sommets du quadrilatère $ABCD$, refaire le processus, le quadrilatère dégénère en un triangle ou la diagonale AC ou BD comptée double, et comparer ces longueurs (elles sont supérieures à la longueur du vecteur de la translation I). Il existe une ou deux solutions à ce problème.

Note : On peut montrer que dans un polygone donné de n côtés il existe un polygone inscrit d'un même nombre de côtés de périmètre minimum et que tout polygone de lumière (c'est à dire un polygone donné par une trajectoire de lumière : le polygone se réfléchit sur lui-même) est un polygone de périmètre minimum.

Si le polygone de lumière existe (par exemple pour un triangle si les trois angles sont aigus), il est unique si le nombre de côtés du polygone donné est impair et il en existe une infinité si le nombre de côtés du polygone est pair (cf. M. Berger "Géométrie").

On étudie aussi les trajectoires de lumière pour des convexes compacts (des fermés bornés) non nécessairement polygonaux, par exemple le cercle, l'ellipse, etc... Cette étude pose des problèmes d'ergodicité, problèmes non complètement résolus.

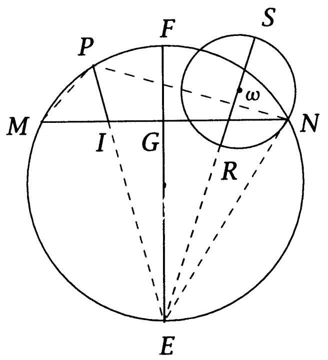


306. 1º) Soit PMN un triangle dont le côté MN, l'angle $\widehat{P}$ et la bissectrice PI sont donnés.

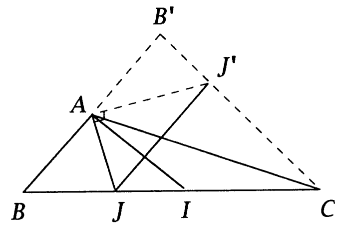
La médiatrice du côté MN coupe le cercle circonscrit au triangle PMN aux points E et F, et la bissectrice PI de l'angle $\widehat{P}$ passe par le point E. Si G est le milieu du côté MN, les triangles rectangles EIG et EFP sont semblables et $EI \cdot EP = EG \cdot EF$. Comme dans le triangle rectangle ENF on a $EG \cdot EF = EN^2$, on en déduit $EI \cdot EP = EN^2$.

◇ *Construction :* Tracer l'arc capable, et le prolonger en la circonférence, d'où l'on voit le côté MN sous l'angle donné $\widehat{P}$, puis la médiatrice du côté MN qui coupe cette circonférence en E et F respectivement (E n'étant pas situé sur cet arc capable).

Construire la circonférence de diamètre PI tangente en N à EN ; soit ω son centre. La droite $E\omega$ coupe cette circonférence en R et S respectivement tels que $ER \cdot ES = EN^2$. Le point I cherché (respectivement le point P) n'est autre que le point intersection de la circonférence de centre E de rayon ER avec la corde MN (respectivement l'intersection de la circonférence de rayon ES avec l'arc capable d'où l'on voit le segment MN sous l'angle $\hat{P}$.



◇ *Discussion* : Il y a une solution si ER égale EG, deux solutions symétriques par rapport à la médiatrice de MN si ER est supérieur à EG (c'est à dire si $MN^2 \geq 8PI \cdot EG$) et pas de solution si ER est moindre que EG (On peut remarquer que $EG = MNtan\frac{\hat{P}}{2}$).



2º) Soit ABC le triangle cherché, alors $\frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC} = \frac{J'B'}{J'C}$ et JJ' est paralléle à BB'. Le triangle JAJ' étant rectangle en A, la donnée de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la bissectrice AJ détermine le segment AJ' ($\widehat{AJJ'} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$) ; de plus $B'C$ est double de AI.

Construire le triangle ABC revient à construire le triangle $AB'C$: se rapporter en 1º).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. Boucheny, *Curiosités et récréations mathématiques*, Librairie Larousse (1939).
[2] G. Cagnac-L. Thiberge, *Géométrie*, Masson et C^{ie} (1957).
[3] Th. Caronnet, *Exercices de Géométrie*, Vuibert (1945).
[4] A. C. Clairaut, *Élémens de Géométrie (1743)*, Gauthier-Villars et C^{ie} (1922).
[5] C. De Comberousse, *Cours de Mathématiques-Géométrie*, Gauthier-Villars et C^{ie} (1914).
[6] F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, Maison A. Mame et Fils (1920), Éditions Gabay (1991).
[7] J. Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire*, Librairie Armand Colin (1917).
[8] E. J. Honnet, *Résolution des problèmes élémentaires de Géométrie*, Librairie Vuibert (1963).
[9] P. Laurent, *La Place de J. H. LAMBERT (1728-1777) dans l'étude de la perspective*, Cedic/Nathan.
[10] G. Maupin, *La Mathématique Opinions et curiosités XVI, XVII, XVIII Siècles*, Georges Carre et C. Naud éditeurs (1898).
[11] Abbé Th. Moreux, *Pour continuer la Géométrie plane*, G. Doin et C^{ie} (1949).
[12] B. Pascal, *De l'Esprit Géométrique*, Flammarion (1985).
[13] H. Poincarré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Éditeur.
[14] Réunion de Professeurs, *Cours de Géométrie*, Ligel (1956).
[15] P. Tannery, *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, Armand Colin (1917).

AUTRES RÉFÉRENCES.

[16] A. Amiot, *Éléments de Géométrie*, Delagrave (1883).
[17] M. Berger, *Géométrie*, Nathan (1990).
[18] E. Combette, *Cours de Géométrie élémentaire*, Felix Alcan (1882).
[19] R. Deltheil-D. Caire, *Compléments de Géométrie*, J. B. Baillière et Fils (1951).
[20] S. F. Lacroix, *Élémens de Géométrie*, Bachelier (1804).
[21] A. M. Legendre, *Éléments de Géométrie, douzième édition*, Firmin Didot, Père et fils (1823).
[22] E. Rouché-C. De Comberousse, *Traité de Géométrie*, Gauthiers-Villars (1891).
[23] M. Vacquant-M. Macé de Lépinay, *Éléments de Géométrie*, Masson (1917).

INDEX

Aubin Imprimeur
LIGUGÉ, POITIERS

Achevé d'imprimer en mars 1995
N° d'impression L 48684
Dépôt légal mars 1995 / Imprimé en France

Le livre de Michel CARRAL reprend le point de vue des anciens en partant de la notion de figures superposables et en construisant une théorie mathématique à la fois rigoureuse et proche de l'intuition. Ceci permet de développer une vision géométrique et de donner du sens à des développements ultérieurs.

Cet ouvrage est indispensable à ceux pour qui la géométrie n'est pas un pur jeu de l'esprit mais une science utilisable dans la vie courante et en particulier aux enseignants de mathématique en exercice ou en formation et aux étudiants de disciplines telles que l'architecture qui utilisent une géométrie "pratique".

Illustration de couverture : William Blake, *La Naissance des jours ou Dieu créant l'Univers*, 1794.

9 782729 895402

ISBN 2-7298-9540-X