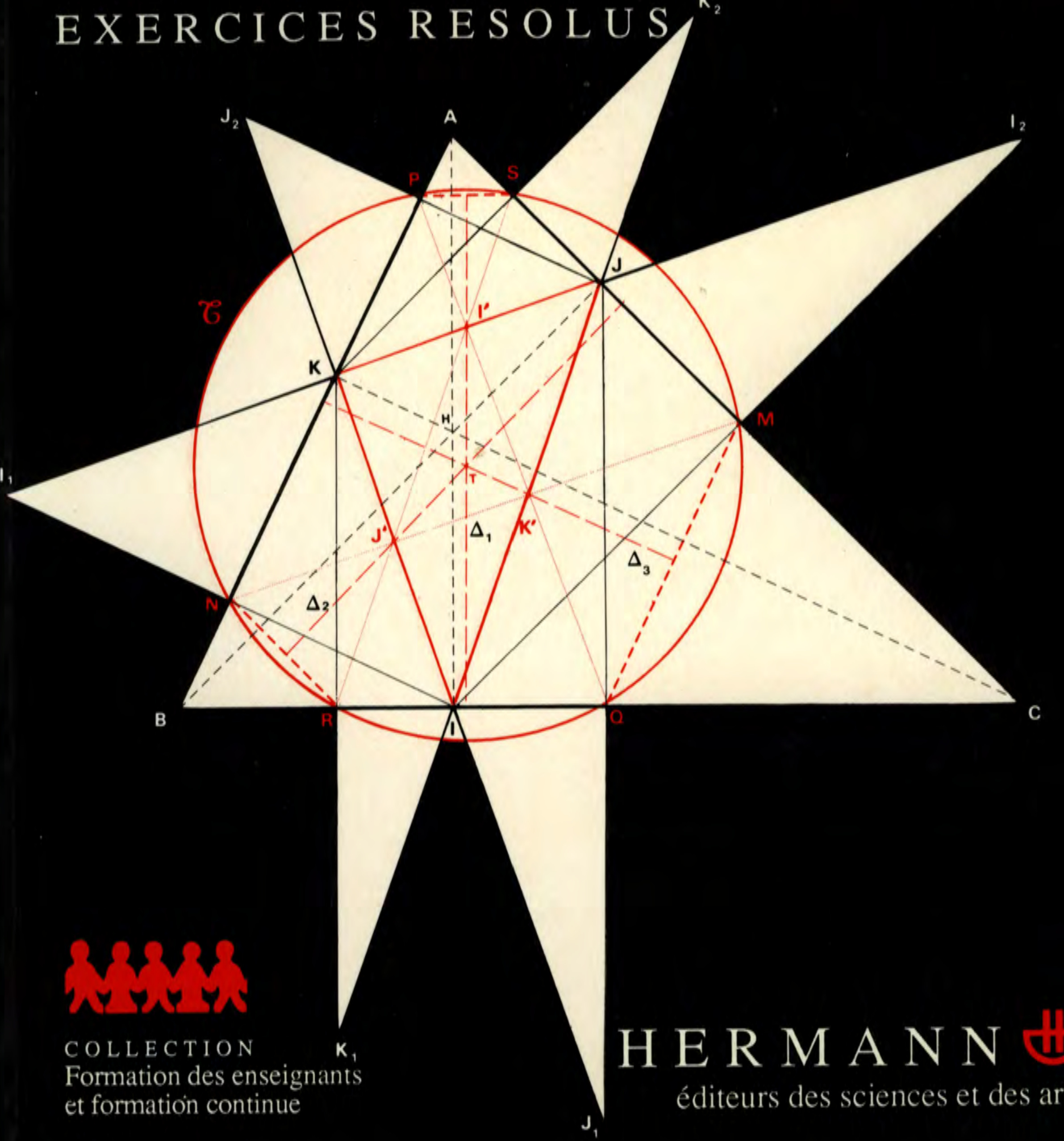
Yvonne et René Sortais

La géométrie du triangle

EXERCICES RESOLUS



COLLECTION
Formation des enseignants
et formation continue

HERMANN
éditeurs des sciences et des arts

La géométrie du triangle

EXERCICES RESOLUS

Actualités scientifiques et industrielles 1429

Formation des enseignants et formation continue

Yvonne et René Sortais

La géométrie du triangle

EXERCICES RESOLUS

HERMANN ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Nouveau tirage, 1997

ISBN 2 7056 1429 4

Sommaire

Pages

Notations utilisées

Les lettres A, B, C désignent des points d'un plan affine Euclidien .

Notation	signification
(A, B)	Couple de points, appelé bipoint, dont A est l'origine et B l'extrêmité .
$\overrightarrow{AB}$	vecteur dont un représentant est le bipoint (A, B) .
[AB]	segment de droite dont les extrêmités sont A et B .
AB ou $\|\overrightarrow{AB}\|$	distance de deux points A et B, ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
(AB)	Droite contenant les points A et B (si $A \neq B$) .
$\overline{AB}$	mesure algébrique du bipoint (A, B) relative à un vecteur $\vec{e}$ unitaire dirigeant la droite (AB)
m(A, B)	milieu du bipoint (A, B) .
med(A, B)	médiatrice du bipoint (A, B) (si $A \neq B$) .
[AB)	demi-droite fermée d'origine A, contenant B (si $A \neq B$) .
* $[\widehat{BAC}]$	secteur angulaire saillant dont les côtés sont les demi-droites [AB) et [AC) . $[\widehat{BAC}]$ est l'intersection du demi-plan fermé de frontière (AB) contenant C et du demi-plan fermé de frontière (AC) contenant B .
* $\widehat{BAC}$	mesure, en radians, du secteur $[\widehat{BAC}]$; le réel $\widehat{BAC}$ appartient à $[0, \pi]$.
* $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$	angle orienté du couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
* $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ (2π)	une mesure en radians, modulo 2π, (ou à $2k\pi$ près, $k \in Z$) de l'angle orienté du couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. .
$(\widehat{\Delta, \Delta'})$	angle orienté du couple de droites (Δ, Δ') .
$\overline{(\Delta, \Delta')}$ (π)	une mesure en radians, modulo π, (ou à $k\pi$ près, $k \in Z$) de l'angle orienté du couple de droites (Δ, Δ') .
* $(\widehat{AB, AC})$	Par souci de simplification, cette notation désigne l'angle orienté du couple de droites ((AB) , (AC)) , pour lequel la notation $(\widehat{(AB), (AC)})$ s'avère trop lourde à l'usage .
* $(\overline{AB, AC})$ (π)	une mesure en radians, modulo π, de l'angle orienté du couple de droites ((AB) , (AC)) . Cette notation remplace en fait la notation $(\overline{(AB), (AC)})$ qui se révèle trop lourde à l'usage .
S_{Δ}	symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ (parfois appelée symétrie axiale par rapport à la droite Δ .
S_{AB}	symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB) .
$T_{\overrightarrow{AB}}$	translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

les notations affectées d'une astérisque * ne peuvent être utilisées que si les points B et C sont différents du point A .

Droite et cercle d'Euler

1ère partie : droite d'Euler

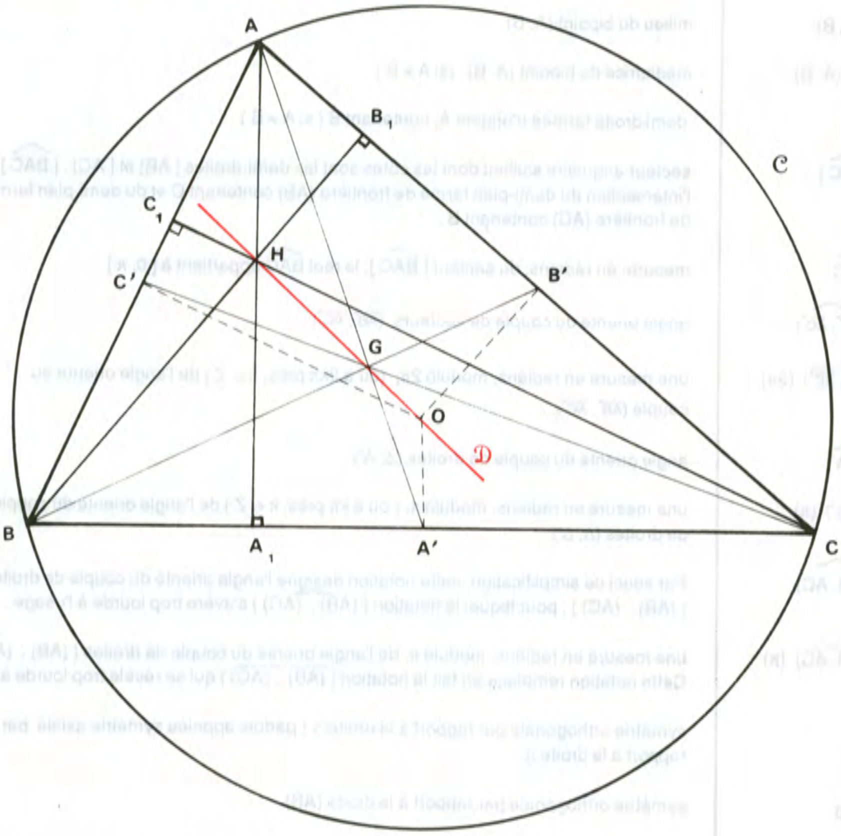
Soit O le centre du cercle C circonscrit à un triangle ABC.
Soit A', B', C' les milieux respectifs de (B,C), (C,A), (A,B).
Soit G l'isobarycentre de A, B, C.

Reconnaître le point X vérifiant : $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

En déduire que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes et que leur point H de concours vérifie : $\overrightarrow{OH} = 3.\overrightarrow{OG}$

Le point H est dit l'orthocentre du triangle ABC.

La droite $\mathcal{D}$ contenant O, G, H, est dite droite d'Euler du triangle ABC (s'il est non équilatéral)



Notions utilisées :

* Colinéarité de vecteurs
* Barycentre

Reconnaissons le point X

* Le point X vérifie : $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (1)

Le point A' est le milieu de (B, C) donc : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$

(1) s'écrit : $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OA'}$

Les points O et A' appartiennent à la médiatrice de (B, C)

Le point X appartient donc à la droite $\begin{cases}\text{contenant A}\\ \text{parallèle à la médiatrice de (B,C)}\end{cases}$

Donc X appartient à la hauteur h_A $\begin{cases}\text{contenant A}\\ \text{perpendiculaire à (BC)}\end{cases}$

* Le point X vérifie aussi : $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

donc : $\overrightarrow{BX} = 2\overrightarrow{OB'}$

Le point X appartient alors à la hauteur h_B

* Le point X vérifie encore : $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

donc : $\overrightarrow{CX} = 2\overrightarrow{OC'}$

Le point X appartient donc à la hauteur h_C

Les trois hauteurs h_A, h_B, h_C, du triangle ABC contiennent le point X et ces hauteurs sont trois droites distinctes ($h_A = h_B$) impliquerait en effet (CB) // (CA), or les points A,B,C, sont non alignés.

$\boxed{\text{Les trois hauteurs } h_A, h_B, h_C, \text{ sont donc concourantes en X}}$

Ce point X, orthocentre du triangle ABC, sera alors noté H .

Le point G étant l'isobarycentre de A, B, C,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ donc : $\boxed{\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}}$ (R)

La relation (R) prouve l'alignement de O, G, H, dans tout triangle ABC

Si ABC est un triangle équilatéral, alors les points O, G, H sont confondus..

Droite et cercle d'Euler

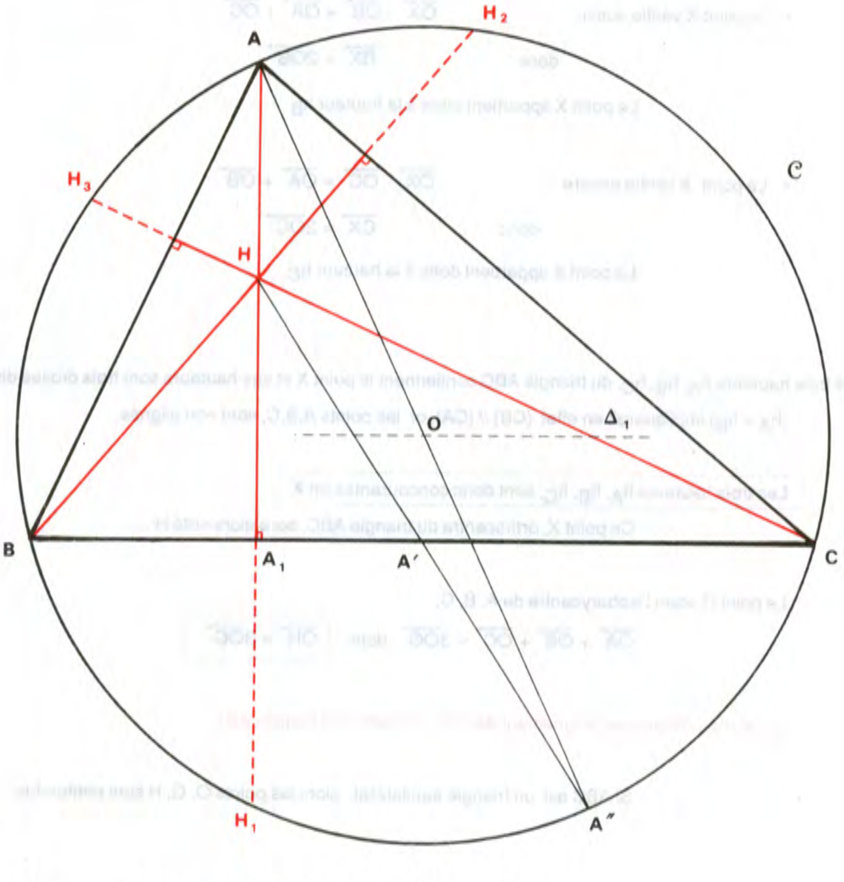
$2^{ème}$ partie : deux propriétés de l'orthocentre

Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle ABC .
Soit A', B', C' les milieux respectifs de (B, C), (C, A), (A, B) .
Soit H l'orthocentre du triangle ABC .

En remarquant que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$, démontrer que :

a) Les symétriques de H par rapport aux milieux des côtés de ABC appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

b) Les symétriques de H par rapport aux côtés de ABC appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.



Notion utilisée : * *Composée de symétries axiales d'axes parallèles .*

a) Soit $A'' = S_{A'}(H)$ — Démontrons que : $A'' \in \mathcal{C}$

voir page 9

Il a été démontré que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$

Par ailleurs $A' = m(H,A'')$, donc : $\overrightarrow{HA''} = 2\overrightarrow{A'A''}$

Par addition : $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HA''} = 2(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A''})$

$$\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OA''}$$

ce qui traduit que le point O est le milieu de (A,A")

$\boxed{\text{Le point A" appartient donc à } \mathcal{C} \text{ et A" est diamétralement opposé de A sur } \mathcal{C}}$

b) Soit $H_1 = S_{BC}(H)$. — Démontrons que $H_1 \in \mathcal{C}$.

$$H_1 \xleftarrow{S_{BC}} H \xrightarrow{T_{\overrightarrow{HA}}} A$$

Décomposons la translation $T_{\overrightarrow{HA}}$ en deux symétries axiales d'axes parallèles, l'un étant (BC).

$T_{\overrightarrow{HA}} = S_{\Delta_1} o\, S_{BC}$ où $\Delta_1 = T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}}(BC)$

Mais $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$, On a donc : $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}} = T_{\overrightarrow{A'O}}$

La droite (BC) contient le point A', donc la droite Δ_1 contient le translaté O de A' par $T_{\overrightarrow{A'O}}$

On a alors : $A = (T_{\overrightarrow{HA}}\ o\ S_{BC})(H_1)$

c'est à dire : $A = (S_{\Delta_1} o\, S_{BC} o\, S_{BC})(H_1)$

finalement : $A = S_{\Delta_1}(H_1)$

Puisque $O \in \Delta_1$, $O = S_{\Delta_1}(O)$

On en déduit : $AO = OH_1$ (puisque S_{Δ_1} est une isométrie).

$\boxed{\text{Le point } H_1 \text{ appartient donc au cercle } \mathcal{C} \text{ (de centre O, de rayon OA)}}$

On démontrerait de même que $S_{CA}(H)$ et $S_{AB}(H)$ appartiennent à $\mathcal{C}$.

Droite et cercle d'Euler

3eme partie : cercle d'Euler et triangle médian

Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle ABC
Soit A', B', C' les milieux respectifs de (B,C), (C,A), (A,B).
Soit G l'isobarycentre de A, B, C.

1°) Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre G, de rapport ($-\frac{1}{2}$).

a) Déterminer les images, par $\mathcal{H}$, des points A, B, C.

b) Quelle est l'image, par $\mathcal{H}$, de l'orthocentre H du triangle ABC

c) Justifier que $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ est un cercle $\mathcal{C}'$ dont le centre O' est le milieu de (O,H).

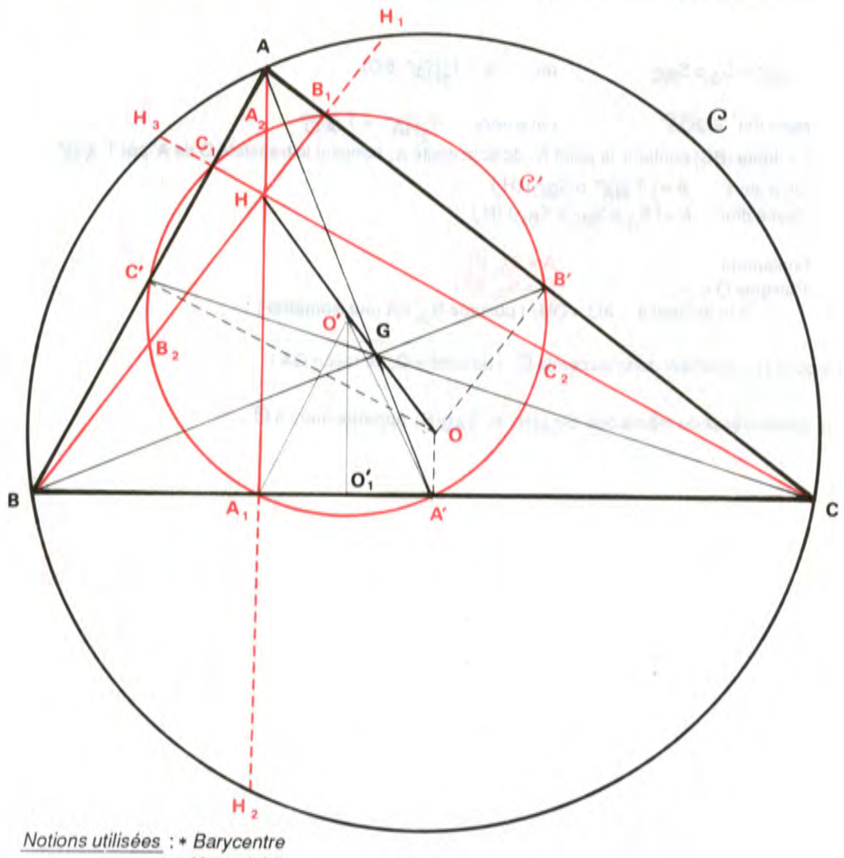
2°) a) Reconnaître le centre de l'homothétie positive transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

b) conclure que : le cercle $\mathcal{C}'$ contient :
- les milieux des côtés du triangle ABC
- les pieds des hauteurs de ABC
- les milieux des segments [AH], [BH], [CH]

$\mathcal{C}'$ est appelé cercle d'Euler du triangle ABC.

3°) Déduire de l'étude précédente que :
Les symétriques de l'orthocentre H de ABC par rapport aux côtés de ABC appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC.

Le triangle A'B'C' est dit triangle médian du triangle ABC.



Notions utilisées : * Barycentre
* Homothétie

1°) a) Le point G est isobarycentre de A, B, C, donc : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$ (1)

Le point A' est milieu de (B,C) donc : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$

(1) s'écrit alors : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{O}$ d'où : $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

On démontre de même : $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

$\mathcal{H}$ transforme donc A en A', B en B', C en C'

1°) b) Cherchons l'image de l'orthocentre H de ABC par $\mathcal{H}$

Soit h_A et h_B les hauteurs issues de A et B respectivement dans le triangle ABC : $H \in h_A \cap h_B$.

L'homothétique, par $\mathcal{H}$, de la hauteur h_A est une droite parallèle à h_A et qui contient l'image A' de A.

C 'est donc la médiatrice de (B,C). De même $\mathcal{H}(h_B)$ = med(A,C)

L'homothétique, par $\mathcal{H}$, de H appartient à med(B,C) $\cap$ med(A,C).

$\boxed{\mathcal{H}(H) \text{ est donc le centre O du cercle } \mathcal{C} \text{ circonscrit à ABC .}}$

1°) c) L'homothétique, par $\mathcal{H}$, du cercle $\mathcal{C}$ (de centre O, de rayon R, R = OA) est le cercle $\mathcal{C}'$ dont le centre O' est $\mathcal{H}$(O) et dont le rayon est $|-\frac{1}{2}|$.R

$\mathcal{H}(G, -\frac{1}{2})$: $H \longmapsto O$, $O \longmapsto O'$ On a donc : $\overrightarrow{OO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$ (2)

La relation : $\overrightarrow{OO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$ prouve que : $\boxed{\text{O' est milieu de (O,H)}}$

2°) a) Il existe deux homothéties transformant $\mathcal{C}$(O,R) en $\mathcal{C}'$(O', $\frac{1}{2}$R)

l'une est $\mathcal{H}$, de centre G et de rapport ($-\frac{1}{2}$)

l'autre, notée h, a pour rapport ($+\frac{1}{2}$) et vérifie : O' = h(O)

Puisque O' est milieu de (O,H), on a : $\overrightarrow{HO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$ (3)

La relation (3) exprime que H est centre de l'homothétie h.

$\boxed{\text{L'homothétie positive h de rapport } \frac{1}{2} \text{, qui transforme } \mathcal{C} \text{ en } \mathcal{C}' \text{ a pour centre H}}$

2°) b) Le cercle $\mathcal{C}$ contient A, B, C.

* $\mathcal{C}' = \mathcal{H}(\mathcal{C})$ donc : $\mathcal{C}'$ contient $\mathcal{H}$(A), $\mathcal{H}$(B), $\mathcal{H}$(C).

$\boxed{\mathcal{C}' \text{ contient A', B', C'.}}$

* $\mathcal{C}'$ = h($\mathcal{C}$) donc : $\mathcal{C}'$ contient h(A), h(B), h(C).

$h(H, \frac{1}{2})$:
$A \longmapsto h(A) = A_2$
$B \longmapsto h(B) = B_2$ définis par : $\overrightarrow{HA_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$
$C \longmapsto h(C) = C_2$

Les points A_2, B_2, C_2, sont donc les milieux respectifs de (A,H), (B,H), (C,H).

$\boxed{\mathcal{C}' \text{ contient donc m(A,H), m(B,H), m(C,H)}}$

Démontrons que $\mathcal{C}'$ contient les pieds des hauteurs de ABC.

Soit A_1 le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Rappelons que O' est le milieu de (O,H).

Soit p la projection orthogonale sur (BC).

p : $H \longmapsto A_1$
$O \longmapsto A'$ Utilisons le théorème de Thalès :
$O' \longmapsto O'_1$ le projeté O'_1 du milieu O' de (H, O) est donc le milieu de (A_1, A').

O' appartient donc à la médiatrice de (A_1, A') d'où : $O'A_1 = O'A'$

$\boxed{\text{Le cercle } \mathcal{C}' \text{ de centre O', qui contient A', contient donc aussi } A_1 .}$

On démontre de même que :

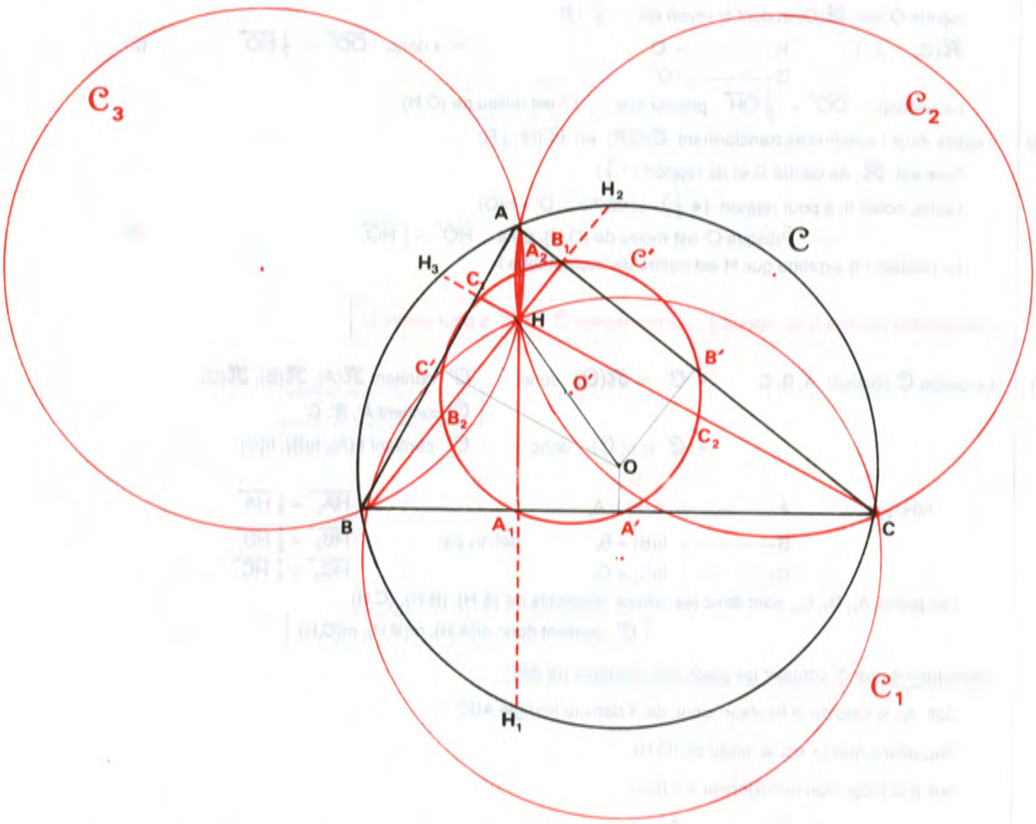
$\mathcal{C}'$ contient les pieds B_1 et C_1 des hauteurs issues respectivement de B et C dans le triangle ABC.

Droite et cercle d'Euler

3ème partie : cercle d'Euler et triangle médian (suite et fin)

4°) On suppose le triangle ABC non rectangle

Démontrer que les quatre cercles, circonscrits aux triangles ABC, ABH, BCH, et CAH, ont même rayon.



Notions utilisée : * *Homothéties*
* *Théorème de Thalès*

3°) Soit h^{-1} l'homothétie réciproque de l'homothétie h

h^{-1} est donc l'homothétie de centre H et de rapport 2 .

$\mathcal{C}' = h(\mathcal{C})$ donc $\mathcal{C} = h^{-1}(\mathcal{C}')$

$\mathcal{C}'$ contient A_1, B_1, C_1, donc : $\mathcal{C}$ contient $h^{-1}(A_1)$, $h^{-1}(B_1)$, $h^{-1}(C_1)$.

Soit H_1 le point symétrique de H par rapport à (BC) . $H_1 = S_{BC}(H)$

Le point A_1 est le milieu de $((H,H_1)$ donc : $\overrightarrow{HH_1} = 2\overrightarrow{HA_1}$ (4)

La relation (4) traduit que : $H_1 = h^{-1}(A_1)$

De même on justifie que : $h^{-1}(B_1) = S_{AC}(H)$ et $h^{-1}(C_1) = S_{BC}(H)$.

Le cercle $\mathcal{C}$ contient donc ainsi les symétriques de H par rapport aux trois côtés du triangle .

4°) Le triangle ABC n'est pas rectangle, donc son orthocentre H est distinct de A, de B, et de C .

Démontrons que les quatre triangles ABC, BHC, CHA, AHB ont même cercle d'Euler $\mathcal{C}'$.

voir figure Le cercle d'Euler du triangle BHC contient les milieux A', B_2 , C_2 respectifs de ses côtés [BC] , [BH] , [HC] . Or ces trois points sont distincts et appartiennent au cercle d'Euler $\mathcal{C}'$ de ABC .

Les triangles ABC et BHC ont donc même cercle d'Euler $\mathcal{C}'$.

On démontre de même que les cercles d'Euler des triangles CHA et HAB sont confondus avec celui du triangle ABC .

voir 2°) a) page 12

Les cercles circonscrits $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ respectivement à BHC, CHA et HAB ont donc même rayon que le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC (rayon double du rayon du cercle d'Euler $\mathcal{C}'$) .

remarque voir page 13

Le résultat du 3°) permet de démontrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_3$, circonscrits respectivement aux triangles ABH_3 et ABH sont symétriques par rapport à la droite (AB) .
Ils ont donc des rayons égaux ..

Théorème de Ménélaüs

1ère partie : Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle .
Soit M, N, P, trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets A, B, C du triangle ABC .

Démontrer que :

Une condition nécessaire et suffisante pour que les points M, N, P soient alignés est :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1 \qquad (m)$$

On appelle transversale du triangle ABC toute droite Δ coupant respectivement (BC), (CA), (AB), en des points M, N, P distincts des sommets A, B, C .

Remarque : la relation (m) confirme un renseignement intuitif :
si $P \in [AB]$ et $N \in [AC]$, alors $M \notin [BC]$.

hypothèse : M , N , P alignés .

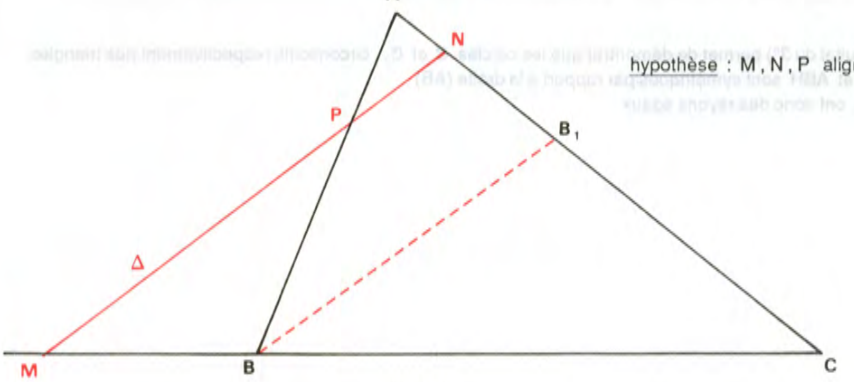


figure 1

Ménélaüs : Mathématicien et astronome grec (Alexandrie) , 1 siècle avant Jesus Christ .

Notions utilisées :
* *Théorème de Thalès*
* *Homothéties .*

Etape 1 — Supposons les points M, N, P alignés. Calculons le produit : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$

voir figure — 1ere méthode : Utilisons le théorème de Thalès.

Soit Δ la droite portant les points M, N, P.
Soit p la projection de la droite (BC) sur la droite (AC), suivant la direction de la droite (MN).
Notons B_1 l'image du point B par la projection p. Alors $B_1 \neq N$.

$$p : \begin{array}{l} B \longmapsto B_1 \\ M \longmapsto N \\ C \longmapsto C \end{array} \qquad \text{On en déduit : } \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NB_1}}{\overline{NC}} \qquad (1)$$

Soit q la projection de la droite (AB) sur la droite (AC), suivant la direction de la droite (MN).

$$q : \begin{array}{l} A \longmapsto A \\ P \longmapsto N \\ B \longmapsto B_1 \end{array} \qquad \text{On en déduit : } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB_1}} \qquad (2)$$

Multiplions membre à membre les égalités (1) et (2). On obtient :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \qquad \text{C'est à dire : } \boxed{\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1} \qquad (3)$$

2eme méthode : composée d'homothéties.

Soit $\mathcal{H}_1$ l'homothétie de centre M, qui transforme B en C. Son rapport k_1 est : $k_1 = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{MB}}$

Soit $\mathcal{H}_2$ l'homothétie de centre N, qui transforme C en A. Son rapport k_2 est : $k_2 = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$

Etudions $\mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_1$: $\mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_1$ est une homothétie ou une translation

* une translation si $k_1 k_2 = 1$.
* une homothétie si $k_1 k_2 \neq 1$.

Or $k_1 k_2 = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$

* Si on avait $k_1 k_2 = 1$, on aurait : $\dfrac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$

La réciproque du théorème de Thalès permettrait alors d'affirmer (MN) // (AB). Or (MN) et (AB) sont sécantes. donc ce cas est à écarter.

* On a donc $k_1 k_2 \neq 1$. $\mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_1$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$.

Les centres respectifs de $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_1$ étant les points N et M,
le centre de l'homothétie $\mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_1$ apppartient à (MN).

$$B \xmapsto{\mathcal{H}_1} C \xmapsto{\mathcal{H}_2} A \qquad \text{donc } \mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_1(B) = A$$

le centre de l'homothétie $\mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_1$ apppartient à (AB).

le centre de l'homothétie $\mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_1$ apppartient à (MN) et à (AB). C'est donc le point P.

Puisque $\mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_1(B) = A$, le rapport de $\mathcal{H}_2 o \mathcal{H}_1$ est donc : $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$

$$\text{On a donc : } \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \qquad \text{c'est à dire : } \boxed{\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1}$$

Théorème de Ménélaüs

1ere partie : Théorème de Ménélaüs (suite)

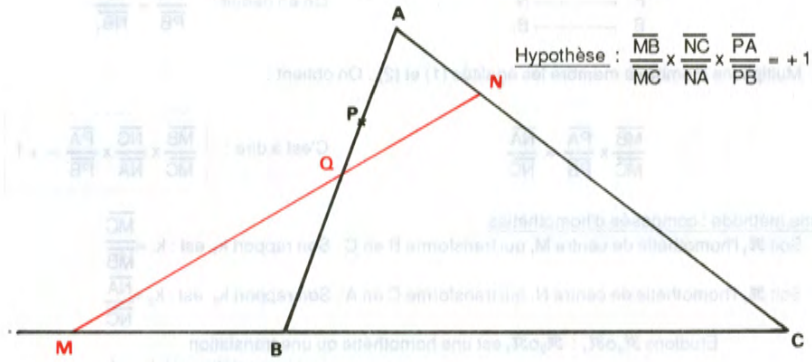


figure 2

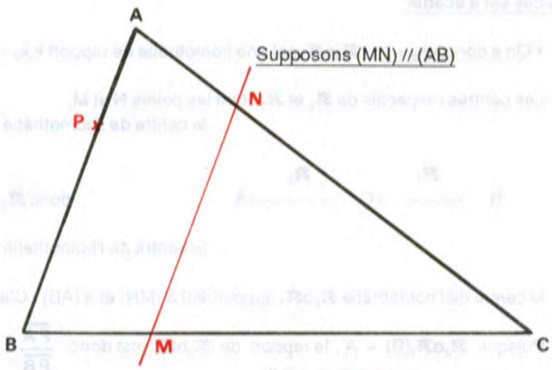


figure 3

La méthode de démonstration utilisée ci-contre pour établir la réciproque est parfois appelée méthode par coïncidence .
Elle suppose préalablement établi le théorème direct .

Etape 2
voir figure 2

Réciproquement :

Supposons que : les points M, N, P, appartiennent respectivement aux droites (BC), (CA), (AB), soient distincts de A, B, C, et vérifient :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1 \qquad (p)$$

Prouvons que (MN) coupe (AB) .

Supposons : (MN) // (AB)

Soit alors I la projection de la droite (BC) sur la droite (AC), suivant la direction de la droite (MN) . Utilisons le théorème de Thalès .

voir figure 3

$$I : \quad M \longmapsto N, \quad B \longmapsto A, \quad C \longmapsto C$$

On en déduit : $\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$ (e)

les relations (p) et (e) permettent d'écrire : $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1$ (g)

Or les points P, A, B sont alignés, donc (g) traduit : A = B,
ce qui est impossible .

Les droites (MN) et (AB) ne peuvent-être parallèles . Etant distinctes, elles sont donc sécantes .

Soit Q le point où (MN) coupe (AB) . On a $Q \neq A$ et $Q \neq B$.

Utilisons le résultat de l'étape 1 .

Les pointsM, N, Q étant alignés et appartenant respectivement à (BC), (CA), (AB) satisfont donc :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = +1 \qquad (q)$$

les égalités (p) et (q) permettent d'écrire : $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$

Soit $\lambda = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ alors $\lambda = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$ Remarquons que : $\lambda \neq 1$

Les points P, A, B sont alignés et distincts .

La relation ($\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \lambda$) implique donc : $\overrightarrow{PA} - \lambda\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{O}$

ce qui exprime que : P est le barycentre de { (A,1), (B,- λ) }
De même Q est le barycentre de { (A,1), (B,- λ) }

donc P = Q , ce qui traduit que : $\{P\} = (MN) \cap (AB)$.

Les points M, N, P sont donc alignés

Théorème de Ménélaüs

2ème partie : Droite de Newton d'un quadrilatère complet

Un quadrilatère complet est la figure déterminée par quatre droites distinctes, sécantes deux à deux, l'intersection de trois quelconques d'entre elles étant vide . Trois d'entre elles déterminent un triangle ABC. La quatrième, Δ , coupe les droites (BC), (CA), (AB) en respectivement D, E, F .

* Les quatre droites (BC), (CA), (AB), Δ, sont dites "côtés" du quadrilatère complet (qui admet ainsi six sommets A, B, C, D, E, F) .
* Les " diagonales " du quadrilatère complet sont les trois segments [AD] , [BE] , [CF] non portés par les côtés, ayant pour extrêm!tés deux sommets .

Soit M_1, M_2, M_3 les milieux respectifs de (A,D), (B,E), (C,F) .

1°) Soit A', E', F' les milieux respectifs de (E,F), (F,A), (A,E) ; démontrer que : M_1, E',F' sont alignés ; M_2, F', A' sont alignés; M_3, A', E' sont alignés

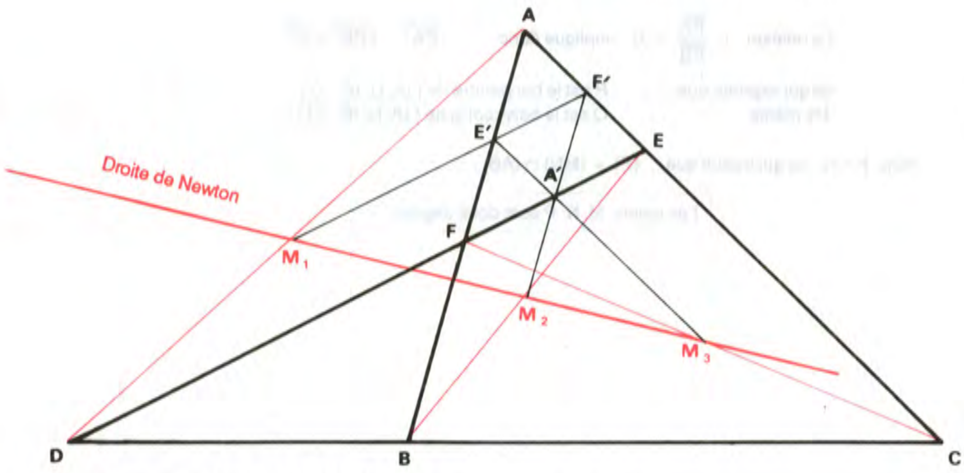
2°) Appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle AEF, coupé par la transversale (DBC) et établir la relation :

$$\frac{\overline{M_1F'}}{\overline{M_1E'}} \times \frac{\overline{M_3E'}}{\overline{M_3A'}} \times \frac{\overline{M_2A'}}{\overline{M_2F'}} = +1$$

3°) Conclure que :

Les milieux M_1, M_2, M_3 des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés

La droite qui porte M_1, M_2, M_3 est dite <u>Droite de Newton</u> du quadrilatère complet



<u>Notions utilisées</u> :
* *Théorème de Ménélaüs .*
* *Droite contenant les milieux de deux côtés d'un triangle .*

1°) Démontrons que M_1, E', F' sont alignés .

Dans le triangle ADF, on a : $\begin{cases} M_1 = m(A,D), \\ E' = m(A,F) \end{cases}$ donc $\overrightarrow{M_1E'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$

Dans le triangle ADE, on a : $\begin{cases} M_1 = m(A,D), \\ F' = m(A,E) \end{cases}$ donc $\overrightarrow{M_1F'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{M_1E'}$ et $\overrightarrow{M_1F'}$ sont donc colinéaires (puisque $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires),

ce qui démontre l'alignement de M_1, E', F' .

* On démontre de même l'alignement des points M_2, F', A' (puisque $\overrightarrow{M_2A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{M_2F'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$) .
* De même, l'alignement des points M_3, A', E' résulte des relations : $\overrightarrow{M_3E'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{M_3A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$.

2°) Appliquons le théorème de Ménélaüs au triangle AEF, coupé par la transversale (DBC) :

D ∈ (EF) et B ∈ (FA) et C ∈ (AE)
les points D, B, C sont alignés, et distincts de A, E, F donc : $\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \times \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} = +1$ (m)

Puisque $\overrightarrow{M_1F'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$, on a : $\overline{M_1F'} = \frac{1}{2}\overline{DE}$

On a ainsi : $\begin{cases} \overline{DE} = 2\overline{M_1F'} \\ \overline{DF} = 2\overline{M_1E'} \end{cases}$ et de même $\begin{cases} \overline{BF} = 2\overline{M_2A'} \\ \overline{BA} = 2\overline{M_2F'} \end{cases}$ et $\begin{cases} \overline{CA} = 2\,\overline{M_3E'} \\ \overline{CE} = 2\,\overline{M_3A'} \end{cases}$

La relation (m) s'écrit alors : $\frac{\overline{M_1F'}}{\overline{M_1E'}} \times \frac{\overline{M_3E'}}{\overline{M_3A'}} \times \frac{\overline{M_2A'}}{\overline{M_2F'}} = +1$ (m')

La relation (m') est une condition suffisante (réciproque de Ménélaüs) pour conclure que :

les points M_1, M_2, M_3 sont alignés

remarque Les points M_1, M_2, M_3 sont distincts,

en effet, si on avait, par exemple $M_2 = M_3$

le quadrilatère BCFE serait un parallèlogramme, ce qui contredirait l'hypothèse :

(FE) est sécante avec (BC) .

Théorème de Céva

Soit ABC un triangle

Soit A', B', C' trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA), (AB) et distincts des sommets A, B, C du triangle ABC .

1°) On suppose que les droites (AA') , (BB') , (CC') sont parallèles . Démontrer que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \qquad \text{relation de Céva (c)}$$

2°) On suppose que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes, en un point K .
Démontrer, par deux méthodes, que l'égalité (c) est encore vraie :

a) en utilisant le théorème de Ménélaüs

b) en considérant le point K comme barycentre de A, B, C affectés de coefficients dont la somme est égale à 1 .

3°) Réciproquement , démontrer que si les points A', B', C' vérifient la relation (c), alors les droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles ou concourantes .

Conclusion :

Pour que les droites (AA'), (BB'), (CC') soient parallèles ou concourantes, il faut et il suffit que : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

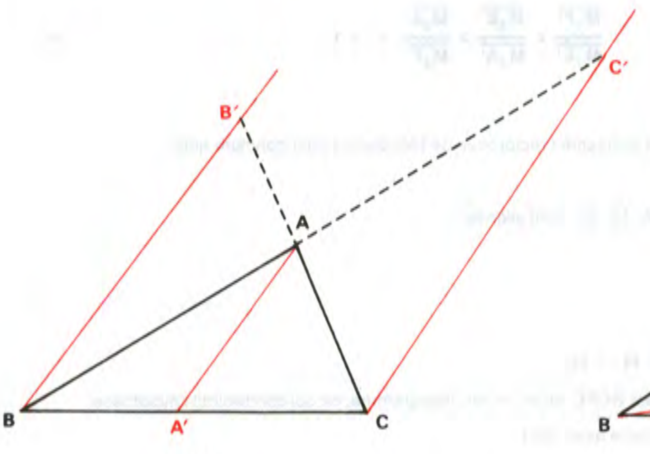


figure 1

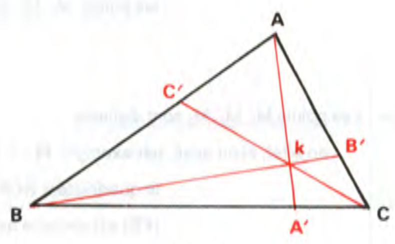


figure 2

Notions utilisées :
- *Théorème de Thalès*
- *Barycentre (Théorème d'associativité)*
- *Théorème de Ménélaüs (facultatif)*

Giovanni Céva : Mathématicien italien (1648 - 1734)

1°) <u>supposons (AA'), (BB'), (CC') parallèles</u> . Utilisons le théorème de Thalès .

voir figure 1

Soit p la projection de la droite (BC) sur la droite (AC), suivant la direction de (AA') .

$$p : \quad B \longmapsto B' \qquad A' \longmapsto A \qquad C \longmapsto C$$

On déduit : $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}$ (1)

Soit q la projection de la droite (BC) sur la droite (AB), suivant la direction de (AA') .

$$q : \quad C \longmapsto C' \qquad A' \longmapsto A \qquad B \longmapsto B$$

On déduit : $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}$ (2)

Multiplions membre à membre les égalités (1) et (2) . On obtient :

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = - \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} \qquad (3)$$

(3) s'écrit aussi : $\boxed{\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \dfrac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = -1}$ On reconnait la relation (c) .

2°) a) <u>supposons (AA'), (BB'), (CC') concourantes</u>, (en un point nommé K) .

voir figure 2

Utilisons le théorème de Ménélaüs en considérant :

* d'une part le triangle ACA' et la transversale (BKB') de ce triangle. On trouve :

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{KA}}{\overline{KA'}} = +1 \qquad (4)$$

* d'autre part le triangle ABA' et la transversale (CKC') de ce triangle. On trouve :

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{KA'}}{\overline{KA}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1 \qquad (5)$$

Multiplions membre à membre les égalités (4) et (5) . On obtient :

$$(-1) \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times (+1) \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1 \qquad (6)$$

(6) s'écrit aussi : $\boxed{\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1}$ On reconnait (c)

2°) b) <u>Déterminons trois réels α, β, γ de somme égale à 1 et tels que</u> :

K soit barycentre de : $\{ (A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma) \}$.

Soit (β,γ) le couple de coordonnées de K dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan ABC .

l'égalité : $\overrightarrow{AK} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ s'écrit : $(1 - \beta - \gamma)\,\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} + \gamma\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ (r)

Posons $\alpha = 1 - \beta - \gamma$

La relation (r) traduit alors que : K = Bar$\{ (A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma) \}$, où α, β, γ vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha \neq 0 \text{ (sinon K appartiendrait à (BC)} \\ \beta \neq 0 \text{ (puisque } K \notin \text{ (AC))} \\ \gamma \neq 0 \text{ (puisque } K \notin \text{ (AB))} \end{cases}$$

Théorème de Céva (Suite)

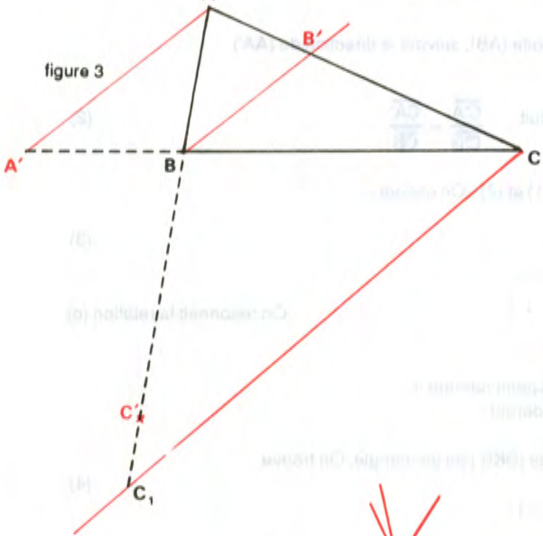


figure 3

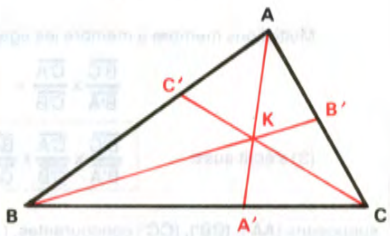


figure 2

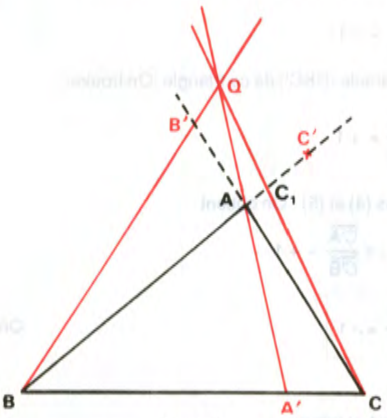


figure 4

voir figure 2

Démontrons que : $\beta + \gamma \neq 0$

Supposons $\gamma = -\beta$. Alors $\overrightarrow{AK} = \beta(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

c'est à dire : $\overrightarrow{AK} = \beta\,\overrightarrow{CB}$. On aurait donc : (AK) // (BC) .

Le point A' n'existerait donc pas, d'où l'absurdité .

Considérons donc le barycentre A_1 de $\{(B,\beta), (C,\gamma)\}$ — $A_1 \in (BC)$

Le théorème d'associativité barycentrique permet d'écrire :

$K = \text{Bar}\{(A,\alpha), (A_1, \beta + \gamma)\}$. Les points K, A, A_1 sont donc alignés. — $A_1 \in (AK)$

finalement, $A_1 \in (BC) \cap (AK)$ — A_1 est donc le point A' .

Puisque A' = Bar { (B,β), (C,γ) } , on a : $\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{O}$,

d'où $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\dfrac{\gamma}{\beta}$ (7)

De même, on démontre :

B' = Bar {(C,γ), (A,α) } d'où $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}$ (8)

C' = Bar {(A,α), (B,β) } d'où $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (9)

Multiplions membre à membre les égalités (7), (8), (9) . On obtient :

$$\boxed{\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1}$$

3°) Réciproquement, supposons que A', B', C' vérifient la relation : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$ (c)

voir figure 3

1[er]cas : si (AA') et (BB') sont parallèles .

Par le point C, menons la parallèle à (AA') qui coupe (AB) en un point noté C_1 .

D'après le 1°), A', B', C_1 vérifient : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1$ (10)

Des relations (c) et (10), on peut déduire : $\dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$

Soit $\mu = \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}$ alors $\mu = \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ Remarquons que : $\mu \neq 1$

Les points C_1, A, B sont alignés et distincts . ($\dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \mu$) implique donc : ($\overrightarrow{C_1A} - \mu\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{O}$) ,

ce qui exprime que : C_1 est le barycentre de { (A,1), (B,- μ) }
de même : C' est le barycentre de { (A,1), (B,- μ) }

donc C_1 = C'

Puisque (CC_1) = (CC'), alors $\boxed{\text{(CC') est parallèle à (AA')}}$

voir figure 4

2[eme] cas : si (AA') et (BB') sont sécantes en un point Q .

Soit alors C_1 le point où (CQ) coupe (AB) .

D'après le 2°), puisque (AA'), (BB'), (CC_1) sont concourantes (en Q) , on a :

$$\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1 \qquad (11)$$

Or, par hypothèse, A', B', C' vérifient la relation (c) .

Les relations (c) et (11) permettent d'écrire : $\dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ (12)

Par la même démonstration que dans le premier cas, on peut déduire de la relation (12) :

C_1 = C'

Puisque (CC_1) = (CC')
Q ∈ (CC_1) alors Q ∈ (CC')

$\boxed{\text{Les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont donc concourantes en Q .}}$

Triangle orthique

1ère partie : Théorème de Nagel et triangle orthique

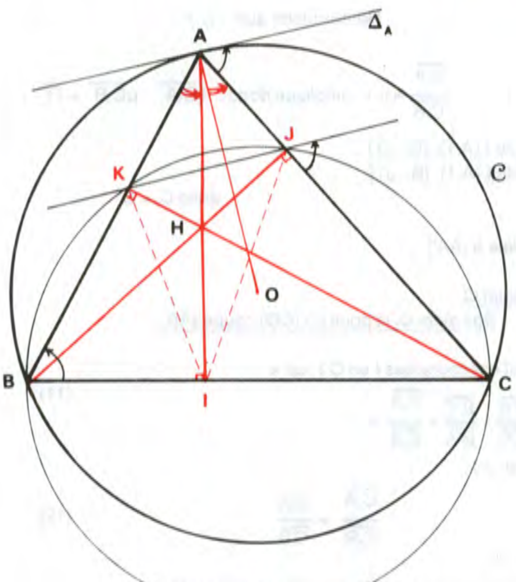
Soit ABC un triangle non rectangle .
Soit I, J, K les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B, C .
Soit H l'orthocentre de ABC et O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC .

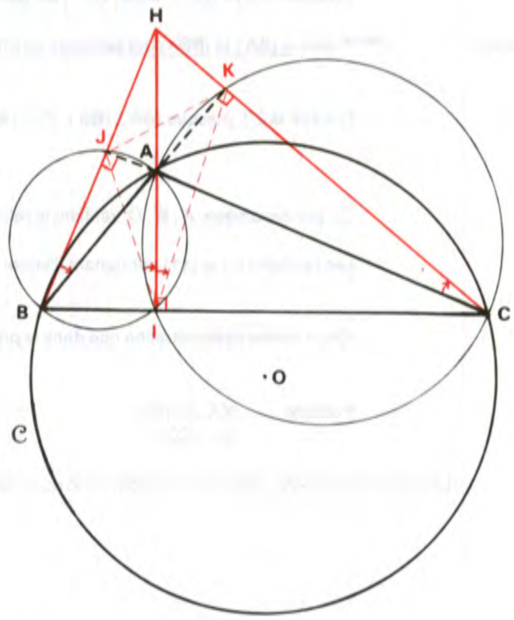
1°) Démontrer le " Théorème de Nagel " :
Les paires de droites { (AB), (AC) } et { (AH), (AO) } ont les mêmes bissectrices .
(On pourra orienter le plan et comparer les angles orientés de droites (AB, AH) et (AO, AC) , en utilisant la tangente Δ_A en A à $\mathcal{C}$.)

2°) Démontrer que les droites (OA), (OB), (OC), sont respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle orthique : (JK), (KI), (IJ) .
On pourra démontrer : (JK) // Δ_A pour justifier : (JK) $\perp$ (OA) .

3°) Démontrer que : (IJ) et (IK) sont symétriques par rapport à la hauteur (AI) .
On pourra comparer les angles orientés (IJ, IA) et (IA, IK) en observant que les points A, I, J, B sont cocycliques ainsi que A, K, I, C .

Le triangle IJK est dit triangle orthique du triangle ABC .





Notions utilisées :
- angles orientés de droites
- points cocycliques .

1°) Considérons le triangle ABI, rectangle en I : $\overline{(BC, BA)} + \overline{(BA, AI)} \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ (1)

La droite Δ_A tangente en A à $\mathcal{C}$, est perpendiculaire à (OA) : $\overline{(AO, AC)} + \overline{(AC, \Delta_A)} \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ (2)

La doite Δ_A vérifie en outre : $\overline{(BC, BA)} \equiv \overline{(AC, \Delta_A)}\ (\pi)$

En retranchant membre à membre (1) et (2), on obtient donc :

$\overline{(BA, AI)} - \overline{(AO, AC)} \equiv 0\ (\pi)$, que nous lisons : $\overline{(AB, AH)} \equiv \overline{(AO, AC)}\ (\pi)$ (3)

Soit δ une des bissectrices de la paire de droites { (AH), (AO) }. Elle vérifie : $\overline{(AH, \delta)} \equiv \overline{(\delta, AO)}\ (\pi)$ (4)

Additionnons membre à membre (3) et (4) . On trouve :

$\overline{(AB, AH)} + \overline{(AH, \delta)} \equiv \overline{(\delta, AO)} + \overline{(AO, AC)}\ (\pi)$ c'est à dire : $\overline{(AB, \delta)} \equiv \overline{(\delta, AC)}\ (\pi)$ (4 bis)

(4 bis) traduit alors que δ est aussi bissectrice de { (AB), (AC) }.

2°) Les points B, K, J, C sont cocycliques (sur un cercle de diamètre [BC]) donc :

$\overline{(BC, BK)} \equiv \overline{(JC, JK)}\ (\pi)$ lisons : $\overline{(BC, BA)} \equiv \overline{(AC, JK)}\ (\pi)$ (5)

Par ailleurs, Δ_A vérifie : $\overline{(BC, BA)} \equiv \overline{(AC, \Delta_A)}\ (\pi)$ (6)

De (5) et (6) on déduit : $\overline{(AC, JK)} \equiv \overline{(AC, \Delta_A)}\ (\pi)$

d'où : (JK) // Δ_A

Puisque $\Delta_A \perp$ (OA), on conclut : $\boxed{(JK) \perp (OA)}$

3°) <u>Les points A, I, J, B sont cocycliques,</u> sur un cercle de diamètre [AB] . On a donc : $\overline{(IJ, IA)} \equiv \overline{(BJ, BA)}\ (\pi)$ (7)

<u>Les points B, I, H, K sont cocycliques,</u> sur un cercle de diamètre [BH] . On a donc : $\overline{(BH, BK)} \equiv \overline{(IH, IK)}\ (\pi)$

que nous lisons : $\overline{(BJ, BA)} \equiv \overline{(IA, IK)}\ (\pi)$ (8)

De (7) et (8) on déduit, par transitivité : $\overline{(IJ, IA)} \equiv \overline{(IA, IK)}\ (\pi)$ (9)

La relation (9) exprime que :

les droites (IK) et (IJ) sont symétriques par rapport à la hauteur (IA) .

Triangle orthique

2^{eme} partie : triangle orthique et trajectoire de lumière

On considère un triangle ABC dont <u>les trois angles sont aigus</u>

On oriente le plan (ABC) en sorte que les angles $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$, $(\widehat{\vec{BC}, \vec{BA}})$, $(\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}})$ admettent pour mesures respectives les réels α, β, γ appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$.

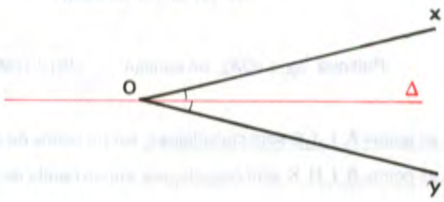
Soit I, J, K les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B, C .

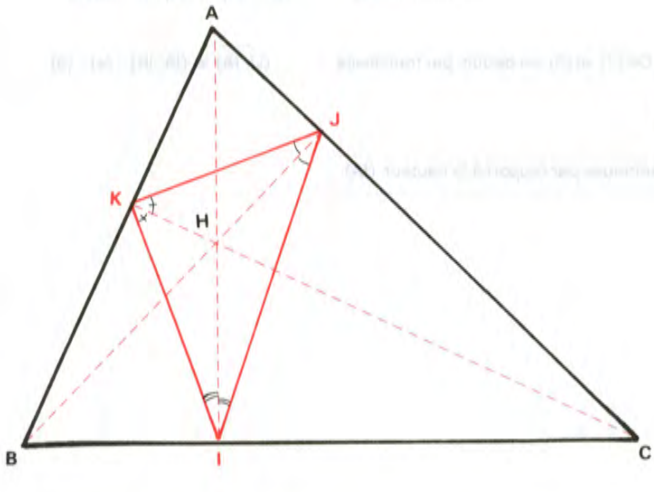
1°) a) Démontrer que le point I appartient au segment [BC] privé des points B et C .

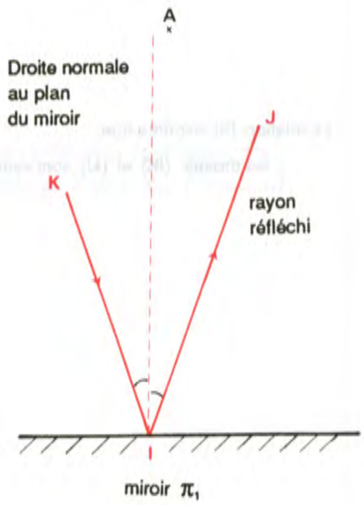
b) Justifier que la hauteur (AI) est bissectrice de l'angle $[\widehat{KIJ}]$

c) En déduire que les points I, J, K sont les sommets d'une ligne brisée fermée, qui est une " trajectoire de lumière "

<u>Rappel</u> : On appelle bissectrice d'un angle $[\widehat{xoy}]$ la droite Δ telle que la symétrie S_Δ échange les demi-droites [ox) et [oy)







<u>Notions utilisées</u> :

- *produit scalaire*
- *symétries axiales*
- *convexité d'un demi-plan*
- *bissectrices (voir page 210)*

1°) a) Calculons $\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{BA} = BC \times BA \times \cos\beta$

$\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{BA} = \overline{BC} \times \overline{BI}$

$\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\beta > 0$. On a donc $\overline{BC} \times \overline{BI} > 0$

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens .

Soit [BC) la demi-droite d'origine B, contenant C . Alors $I \in [BC) - \{B\}$.

Calculons $\overrightarrow{CB} . \overrightarrow{CA} = CB \times CA \times \cos\gamma$

$\overrightarrow{CB} . \overrightarrow{CA} = \overline{CB} \times \overline{CI}$

$\gamma \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\gamma > 0$. On a donc $\overline{CB} \times \overline{CI} > 0$. Alors $I \in [CB) - \{C\}$.

Or $[BC) \cap [CB) = [BC]$ donc $I \in [BC] - \{B, C\}$

De même, on démontre que $J \in [CA] - \{C, A\}$ et $K \in [AB] - \{A, B\}$.

1°) b) On a déja démontré que S_{AI} échange les droites (IJ) et (IK) .

voir page 26 Il s'agit maintenant de démontrer que S_{AI} échange les demi-droites [IK) et [IJ) .

n° 3 voir rappel page 28

Soit $\mathcal{P}_A$ le demi-plan fermé, de frontière (BC) , contenant le point A .

(BC) $\perp$ (AI) donc $\mathcal{P}_A$ est globalement invariant par S_{AI} .

$[AB] \subset \mathcal{P}_A$ donc $K \in \mathcal{P}_A$; $[AC] \subset \mathcal{P}_A$ donc $J \in \mathcal{P}_A$.

$S_{IA}([IK))$ est donc la demi-droite d'origine I , incluse dans $\mathcal{P}_A$, de support (IJ) .

Le point J appartient à $\mathcal{P}_A$ donc $\boxed{S_{IA}([IK)) = [IJ)}$.

(AI)est donc bissectrice de l'angle $[\widehat{KIJ}]$.

De même, on démontre que : $\begin{cases} \text{(BJ) est bissectrice de l'angle } [\widehat{IJK}] \\ \text{(CK) est bissectrice de l'angle } [\widehat{JKI}] \end{cases}$

1°) c) Considérons trois miroirs plans π_1 , π_2 , π_3 , perpendiculaires au plan (ABC) et coupés par le plan (ABC) suivant les droites respectives (BC) , (CA) , (AB) .

Selon la loi de réflexion de Descartes, les rayons lumineux incident et réfléchi sont symétriques par rapport à la normale au miroir passant par le point d'incidence

Un rayon lumineux incident, issu de K et dirigé par (KI) est donc réfléchi par le miroir π_1 suivant le rayon lumineux porté par (IJ) .

(JI) et (JK) étant symétriques par rapport à la normale (JB) en J à π_2 :

Par réflexion sur π_2 en J le rayon lumineux incident porté par (KJ) est réfléchi à son tour par π_3 suivant (KI) .

La ligne " brisée fermée " IJK est donc une " trajectoire de lumière " .

Triangle orthique

2^{eme} partie : périmètre du triangle orthique d'un triangle dont les trois angles sont aigus (suite)

On considère un triangle ABC dont les trois angles sont aigus .
Soit I, J, K les pieds des hauteurs issues respectivement des points A, B, C .

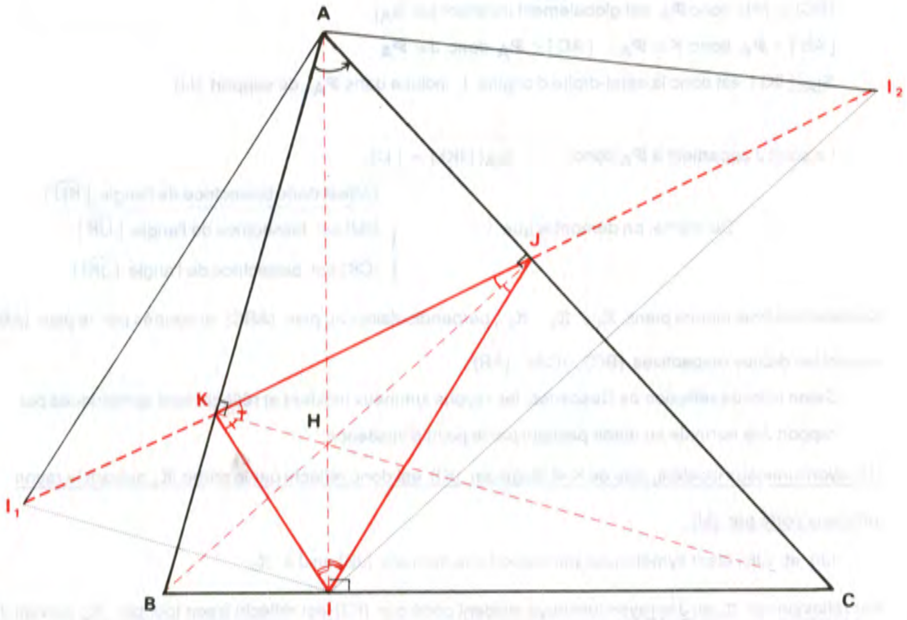
2°) Soit S_{AB} et S_{AC} les symétries orthogonales d'axes respectifs (AB) et (AC) .
On note : $I_1 = S_{AB}(I)$ et $I_2 = S_{AC}(I)$

a) Démontrer que I_1, K , J , I_2 sont alignés dans cet ordre .

b) démontrer que : $I_1I_2 = 2AI \cdot \sin\alpha$. (on pourra considérer $(\widehat{\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI_2}})$)

c) En déduire que le périmètre du triangle orthique IJK de ABC est égal à : $\dfrac{8S^2}{abc}$

où $\begin{cases} \text{S désigne l'aire du triangle ABC} \\ a = BC \;;\; b = CA \;;\; c = AB \;. \end{cases}$



Notions utilisées :
* *composée de deux symétries axiales d'axes sécants .*
* *Formule d'Al Kashi*

2°) a) On a : $[KJ) = S_{KC}([KI))$ et $[KI) = S_{KB}([KI_1))$

voir 1°) b) On obtient : $[KJ) = (S_{KC} \circ S_{KB})([KI_1))$

or $(KC) \perp (KB)$ donc $S_{KC} \circ S_{KB} = S_K$ (symétrie centrale de centre K) .

On trouve $[KJ) = S_K([KI_1))$

Les demi-droites $[KJ)$ et $[KI_1)$, de même origine K sont donc deux demi-droites opposées, ce qui justifie l'alignement de I_1, K, J dans cet ordre .

De même, on justifie l'alignement de K, J, I_2 dans cet ordre .

On a donc démontré l'alignement de I_1, K, J, I_2 dans cet ordre , lequel garantit l'égalité : $I_1I_2 = I_1K + KJ + JI_2$.

puisque : $\begin{cases} I_1K = IK \\ JI_2 = JI \end{cases}$ alors : $I_1I_2 = IK + KJ + JI$

$\boxed{I_1I_2 \text{ est donc le périmètre du triangle orthique IJK .}}$

2°) b) Considérons le triangle I_1AI_2 . La formule d'Al Kashi permet d'écrire :

$I_1I_2^2 = AI_1^2 + AI_2^2 - 2AI_1 \times AI_2 \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI_2}})$

• remarquons :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{S_{AB}} & A & \xrightarrow{S_{AC}} & A \\ I_1 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & I_2 \end{array}$$

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ mesure α et $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $2\alpha \in]0, \pi[$

par conséquent : $S_{AC} \circ S_{AB} = R(A, 2\alpha)$ (rotation de centre A et d'angle 2α)

On en déduit : $(\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI_2}) \equiv 2\alpha \ (2\pi)$

• en outre : $AI_1 = AI$ et $AI_2 = AI$ (car S_{AC} et S_{AB} sont des isométries).

$I_1I_2^2 = AI^2 + AI^2 - 2AI^2 . \cos 2\alpha$

$I_1I_2^2 = 2AI^2 . (1 - \cos 2\alpha)$ or : $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

$I_1I_2^2 = 4AI^2 . \sin^2\alpha$

$I_1I_2 = 2AI . |\sin\alpha|$ or $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin\alpha > 0$.

$I_1I_2 = 2AI \times \sin\alpha$ (1)

2°) c) S désigne l'aire du triangle ABC ; On a : $S = \dfrac{BC \times AI}{2}$ d'où $AI = \dfrac{2S}{a}$

On a aussi : $S = \dfrac{AC \times BJ}{2}$ donc : $S = \dfrac{AC \times AB \times \sin\alpha}{2}$ d'où $\sin\alpha = \dfrac{2S}{bc}$

(1) devient : $I_1I_2 = 2 \times \dfrac{2S}{a} \times \dfrac{2S}{bc}$

<u>finalement</u> $\boxed{\text{le périmètre du triangle IJK , (égal à } I_1I_2 \text{) est donc : } \dfrac{8S^2}{abc}}$

Inscrire un triangle de périmètre minimal dans un triangle ABC

On considère un triangle ABC dont les trois angles sont supposés aigus
On se propose de déterminer un triangle MNP tel que les points M, N, P appartiennent respectivement à] AB [,] BC [,] CA [et que le périmètre l de ce triangle soit minimal.

1°) Soit N un point arbitrairement choisi sur] BC [.
Soit N_1 et N_2 les symétriques respectifs de N par rapport à (AB) et (AC)

a) Etablir que : $N_1N_2 = 2AN \sin[\widehat{BAC}]$

b) Soit M et P deux points appartenant respectivement à] AB [et] CA [.
Démontrer que le périmètre l_N de MNP est : $l_N = N_1M + MP + PN_2$

c) Pour ce choix de N, déterminer les positions de M et P pour que l_N soit minimal.

2°) Démontrer que l_N est minimal si, et seulement si N est le projeté orthogonal I de A sur (BC)

voir figure 3 Conclusion : Le triangle orthique IJK du triangle ABC est l'unique triangle " inscrit " dans ABC, de périmètre minimal.

voir 2°) c) page 2 Ce périmètre est alors : $p = \dfrac{8S^2}{abc}$

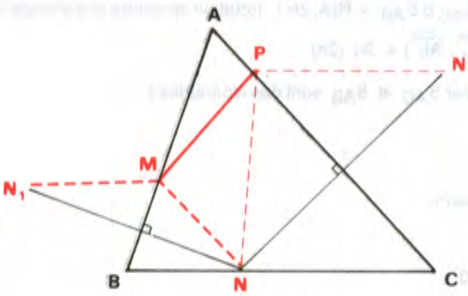


figure 1

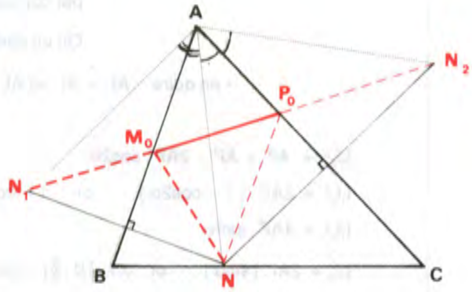


figure 2

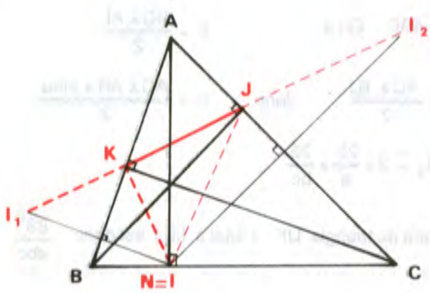


figure 3

Notion utilisée : Composée de symétries axiales d'axes concourants.

remarque : Une étude utilisant un choix arbitraire de M sur] AB [aboutirait à la même conclusion.

1°) a) Soit α la mesure, en radians de $[\widehat{BAC}]$; on a : $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

voir figure 2 Orientons le plan (ABC) en sorte que α soit une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$

$$S_{AC} \circ S_{AB} : \quad \begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{S_{AB}} & A & \xrightarrow{S_{AC}} & A \\ N_1 & \longmapsto & N & \longmapsto & N_2 \end{array}$$

or $S_{AC} \circ S_{AB} = R(A, 2\alpha)$ (rotation de centre A et d'angle 2α)

on a donc $\begin{cases} (\overrightarrow{AN_1}, \overrightarrow{AN_2}) \equiv 2\alpha \ (2\pi) \\ AN_2 = AN \text{ et } AN_1 = AN \end{cases}$ (puisque S_{AB} et S_{AC} sont des isométries)

Considérons le triangle N_1AN_2.

$$N_1N_2^2 = AN_1^2 + AN_2^2 - 2AN_1 . AN_2 . \cos(\widehat{\overrightarrow{AN_1}, \overrightarrow{AN_2}})$$

$$N_1N_2^2 = 2AN^2 - 2AN^2 \times \cos 2\alpha$$

$$N_1N_2^2 = 4AN^2 . \sin^2\alpha \qquad (\text{puisque} : 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha)$$

d'où : $N_1N_2 = 2AN . \sin\alpha$ (puisque : $\sin\alpha > 0$)

1°) b) Les symétries orthogonales S_{AB} et S_{AC} d'axes respectifs (AB) et (AC) étant des isométries, on a :

voir figure 2

$$MN_1 = MN \quad \text{et} \quad PN = PN_2$$

Le périmètre de MNP est : $NM + MP + PN$, c'est à dire $N_1M + MP + PN_2$.

1°) c) Le point N étant choisi sur $]BC[$, N_1 et N_2 sont alors deux points fixés.

voir figure 1 Le périmètre l_N de MNP est : $N_1M + MP + PN_2$, longueur de la " ligne brisée " N_1MPN_2 d'extrêmités N_1 et N_2.

l_N est donc minimal si, et seulement si N_1, M, P, N_2 sont alignés, dans cet ordre.

L'hypothèse " les trois angles du triangle ABC sont aigus " garantit que la droite (N_1N_2) coupe respectivement les droites (AB) et (AC) en deux points M_0 et P_0 qui vérifient :

$\begin{cases} \text{les points } N_1, M_0, P_0, N_2 \text{ sont alignés dans cet ordre.} \\ M_0 \in]AB[\text{ et } P_0 \in]AC[\text{.} \end{cases}$

voir annexe page 27 on a alors : périmètre de $M_0NP_0 = N_1M_0 + M_0P_0 + P_0N_2$

$$l_N = N_1N_2$$

2°) a) α est fixé et $l_N = 2AN\sin\alpha$

l_N est minimal si, et seulement si la distance AN est minimale, c'est à dire si :

$\boxed{\text{N est le projeté orthogonal I de A sur (BC)}}$

Précisons M_0 et P_0 lorsque N est en I. Posons $I_1 = S_{AB}(I)$ et $I_2 = S_{AC}(I)$.

voir 2°) a) page 30 Les pieds I, J, K des hauteurs issues de A, B, C dans le triangle ABC vérifient alors :

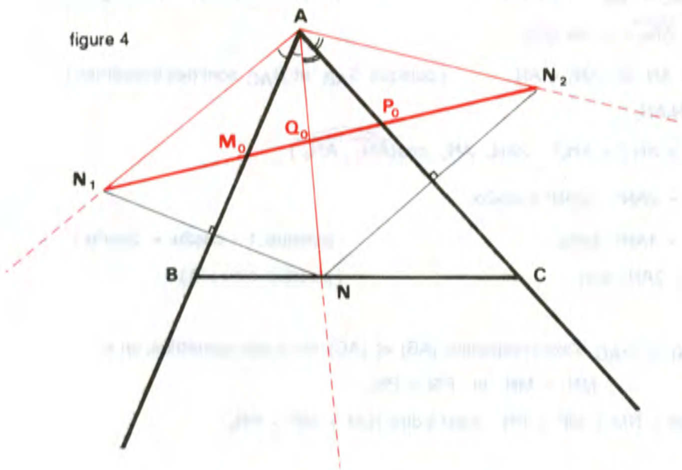
$\begin{cases} I_1 \in]BC[, \ J \in]CA[, \ K \in]AB[\text{.} \\ I_1, K, J, I_2 \text{ sont alignés dans cet ordre.} \end{cases}$

On a donc : $\boxed{M_0 = J \text{ et } P_0 = K}$

Triangle de périmètre minimal inscrit dans un triangle ABC

Annexe

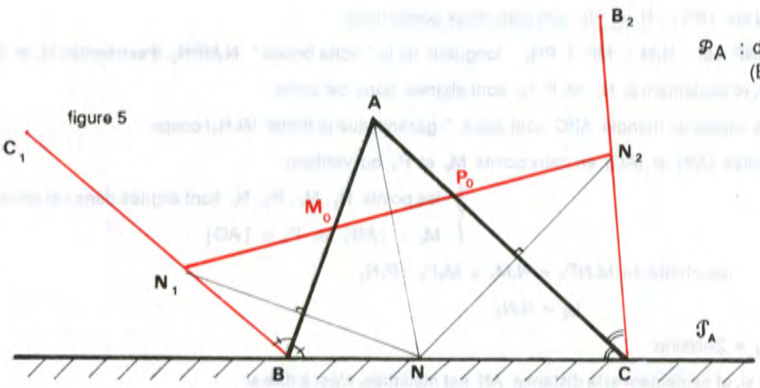
figure 4



$(\overrightarrow{AN_1}, \overrightarrow{AN_2}) \equiv 2\alpha \ (2\pi)$

$2\alpha \in \ ]0, \pi[$

figure 5

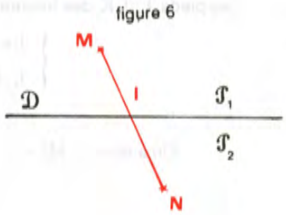


$\mathcal{P}_A$ demi-plan ouvert de frontière (BC) , contenant A .

<u>Rappel des propriétés de partage du plan</u> :
Toute droite $\mathcal{D}$ du plan $\mathcal{P}$ réalise une partition de $\mathcal{P}$ en 3 parties : la droite $\mathcal{D}$ et les deux demi-plans ouverts $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de frontière $\mathcal{D}$.
Soit M et N deux points distincts de $\mathcal{P}$:

* Si $M \in \mathcal{P}_1$ et $N \in \mathcal{P}_1$, alors $[MN] \subset \mathcal{P}_1$
* Si $M \in \mathcal{P}_2$ et $N \in \mathcal{P}_2$, alors $[MN] \subset \mathcal{P}_2$
* Si $M \in \mathcal{P}_1$ et $N \in \mathcal{P}_2$, alors $[MN] \cap \mathcal{D}$ est un singleton $\{I\}$

figure 6



<u>*Notions utilisées*</u> :
* *convexité*
* *secteurs angulaires adjacents*
* *propriétés de partage du plan*

voir figure 4

- Les secteurs angulaires $[\widehat{BAN_1}]$ et $[\widehat{BAN}]$, symétriques par rapport à (AB) ont donc même mesure et sont adjacents de côté commun [AB) .
- Les secteurs angulaires $[\widehat{CAN_2}]$ et $[\widehat{CAN}]$, symétriques par rapport à (AC) ont donc même mesure et sont adjacents de côté commun [AC) .
- $N \in]BC[$ donc $[\widehat{BAN}]$ et $[\widehat{NAC}]$ sont adjacents, de côté commun [AN)

Les propriétés précédentes permettent d'affirmer :

$\widehat{N_1AN} + \widehat{NAN_2} = 2\,\widehat{BAN} + 2\,\widehat{NAC}$ et $\widehat{BAN} + \widehat{NAC} = \widehat{BAC}$.

On a donc : $\widehat{N_1AN} + \widehat{NAN_2} = 2\,\widehat{BAC}$ avec $0 < 2\widehat{BAC} < \pi$

$[\widehat{N_1AB}] \cup [\widehat{BAN}] \cup [\widehat{NAC}] \cup [\widehat{CAN_2}]$ est donc le secteur angulaire saillant $[\widehat{N_1AN_2}]$ (4)

Démontrons que $[N_1N_2]$ coupe les trois demi-droites [AB), [AN), [AC) respectivement en M_0, Q_0, P_0 alignés dans cet ordre .

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les demi-plans ouverts de frontière (AB) .

voir rappel page 34

(4) permet d'affirmer : si $N_1 \in \mathcal{P}_1$, alors $N_2 \in \mathcal{P}_2$.

donc $[N_1N_2] \cap (AB) = \{M_0\}$ $M_0 \in [N_1N_2]$

De même on démontre : $Q_0 \in [M_0N_2]$ et $P_0 \in [Q_0P_2]$

$$\boxed{\text{Les trois demi-droites [AB), [AN), [AC) coupent donc } [N_1N_2] \text{ respectivement en } M_0, Q_0, P_0 \text{ alignés dans cet ordre .}}$$

remarquons que M_0 et P_0 sont distincts de A puisque le segment $[N_1N_2]$ ne contient pas A

$(\widehat{N_1AN_2} < \pi)$

Démontrons que $M_0 \in]AB[$ et $P_0 \in]AC[$.

On sait, d'après ce qui précède, que $M_0 \in]AB)$ et $P_0 \in]AC)$.

Démontrons que M_0 et P_0 appartiennent au demi-plan ouvert $\mathcal{P}_A$ de frontière (BC), contenant A .

voir figure 5

$[\widehat{ABC}]$ est aigu ; la demi-droite $]BC_1)$, symétrique de $]BC)$ par rapport à (AB) est donc incluse dans $\mathcal{P}_A$.

$]BC_1) \subset \mathcal{P}_A$

$N \in]BC)$ donc $N_1 \in]BC_1)$. On en déduit : $N_1 \in \mathcal{P}_A$.

De même on démontre : $N_2 \in \mathcal{P}_A$.

$\mathcal{P}_A$ étant une partie convexe, $[N_1N_2] \subset \mathcal{P}_A$.

$\left.\begin{array}{l} M_0 \in [N_1N_2] \\ N_0 \in [N_1N_2] \end{array}\right\}$ permettent donc d'affirmer : $\left\{\begin{array}{l} M_0 \in \mathcal{P}_A \\ N_0 \in \mathcal{P}_A \end{array}\right.$

$M_0 \in \mathcal{P}_A$ et $M_0 \in]AB)$ donc : $\boxed{M_0 \in]AB[}$

De même : $\boxed{P_0 \in]AC[}$

Triangle médian du triangle orthique . Cercle de Taylor .

1ère partie : triangle médian du triangle orthique

On considère un triangle ABC supposé non rectangle .
Soit I , J , K les pieds des hauteurs du triangle ABC , issues respectivement de A , B , C .
Soit M et N les projetés orthogonaux respectifs de I sur (AC) et (AB) .
On note : $I_1 = S_{AB}(I)$ et $I_2 = S_{AC}(I)$.

1°) Démontrer que : a) $(MN) // (I_1I_2)$.
b) Les points I_1 , K , J , I_2 sont alignés .
c) La droite (MN) contient les milieux respectifs J' et K' de (I, K) et (I, J) .

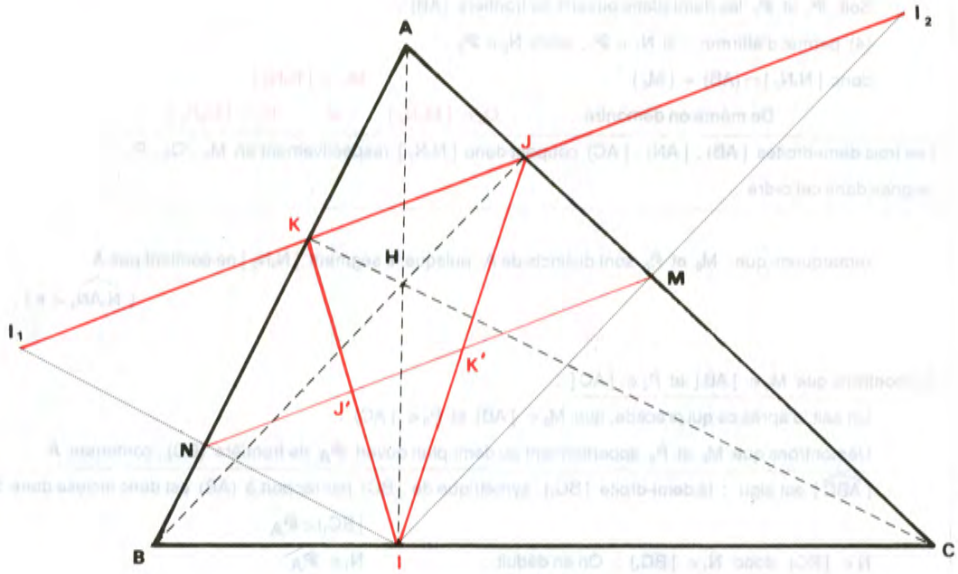


figure 1

Notions utilisées :
- *composées de symétries axiales*
- *symétrie centrale*
- *droite des milieux dans un triangle*

1°) a) Démontrons que : $(MN) // (I_1I_2)$

. $I_1 = S_{AB}(I)$. Le projeté orthogonal N de I sur (AB) est donc milieu de (I, I_1) .

. $I_2 = S_{AC}(I)$. Le projeté orthogonal M de I sur (AC) est donc milieu de (I, I_2) .

Considérons le triangle I_1II_2 : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN}$

$N = m(I, I_1)$ et $M = m(I, I_2)$ donc : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{I_2I} + \overrightarrow{II_1})$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{I_2I_1}$ et par conséquent : $\boxed{(MN) // (I_1I_2)}$

1°) b) Démontrons que les points I_1, K, J, I_2 sont alignés .

voir page 26

On sait que les droites (KI) et (KJ) sont symétriques par rapport à (KC) .

On a donc : $(KJ) = S_{KC}(KI)$

Par ailleurs, S_{KB} : $K \longmapsto K$, $I_1 \longmapsto I$ et, par conséquent : $(KI) = S_{KB}(KI_1)$

On en déduit : $(KJ) = S_{KC} \circ S_{KB}(KI_1)$ (1)

Les droites (KC) et (KB) sont perpendiculaires donc : $S_{KC} \circ S_{KB} = S_K$

où S_K désigne la symétrie centrale de centre K .

(1) s'écrit : $(KJ) = S_K(KI_1)$

Or la symétrie centrale S_K laisse globalement invariante toute droite contenant K .

Par conséquent : $(KJ) = (KI_1)$

Cette égalité de droites traduit l'alignement des points I_1, K, J .

De même, on démontre que les points K, J, I_2 sont alignés .

$\boxed{\text{Les quatre points } I_1, K, J, I_2 \text{ sont donc alignés .}}$

1°) c) Démontrons que : $J' \in (MN)$ et $K' \in (MN)$

On sait que $(MN) // (I_1I_2)$ et que I_1, K, I_2 sont alignés, donc $(MN) // (I_1K)$.

Considérons le triangle I_1KI :

La droite (MN), parallèle à (I_1K) et contenant le milieu N de (I, I_1) contient donc aussi le milieu J' de (I, K) .

$\boxed{J' \in (MN)}$

On démontre de même, en considérant le triangle I_2JI : $\boxed{K' \in (MN)}$

Triangle médian du triangle orthique . Cercle de Taylor .

2ème partie : cercle de Taylor .

Soit M et N les projetés orthogonaux respectifs de I sur (AC) et (AB) .
Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de J sur (AB) et (BC) .
Soit R et S les projetés orthogonaux respectifs de K sur (BC) et (CA) .

2°) Démontrer : (PS) // (BC) ; (NR) // (CA) ; (QM) // (AB) .

3°) Justifier que les six points M, N, P, Q, R, S sont cocycliques .

On établira que : M, N, P, S sont cocycliques ; R, N, P, Q sont cocycliques ; R, N, P, S sont cocycliques

Le cercle $\mathcal{C}$ qui contient M, N, P Q, R, S est dit cercle de Taylor du triangle ABC .

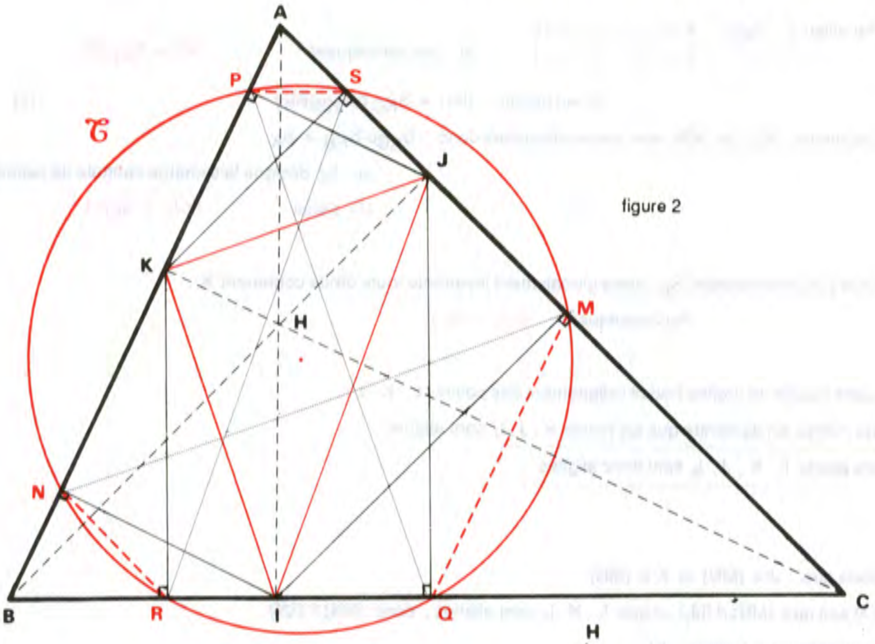


figure 2

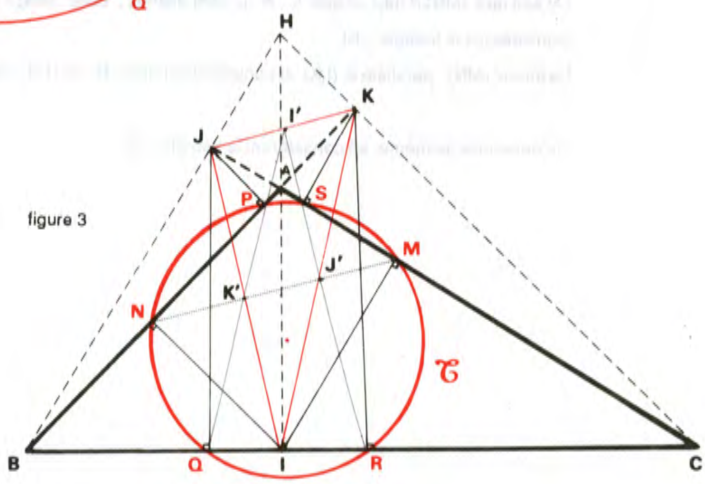


figure 3

Notion utilisée : cocyclicité

2°) Démontrons que les droites (PS) et (BC) sont parallèles

voir figure 2

* Les points B, K, J, C sont cocycliques (sur un cercle de diamètre [BC]),

donc $(\overline{KB, KJ}) \equiv (\overline{CB, CJ})$ (π) . Ecrivons : $(\overline{AB, KJ}) \equiv (\overline{CB, CA})$ (π) (1)

* Les points P, K, J, S sont cocycliques (sur un cercle de diamètre [KJ]) ,

donc $(\overline{KP, KJ}) \equiv (\overline{SP, SJ})$ (π) . Ecrivons : $(\overline{AB, KJ}) \equiv (\overline{SP, CA})$ (π) (2)

Des relations (1) et (2) , on déduit : $(\overline{CB, CA}) \equiv (\overline{SP, CA})$ (π)

Il en résulte : (CB) // (SP) . De même, on démontre : (NR) // (AC) et (QM) // (BA)

3°) a) Démontrons que les points M, N, P, S sont cocycliques .

* PSKJ est un quadrilatère inscriptible (dans un cercle de diamètre [KJ]),

donc : $(\overline{KP, KJ}) \equiv (\overline{SP, SJ})$ (π) (3)

voir 1°) a) page 36

* Par ailleurs, puisque (KJ) // (NM) , on a : $(\overline{KP, KJ}) \equiv (\overline{NP, NM})$ (π) (4)

Des relations (3) et (4) , on déduit : $(\overline{SP, SJ}) \equiv (\overline{NP, NM})$ (π)

qui peut se lire : $(\overline{SP, SM}) \equiv (\overline{NP, NM})$ (π)

Cette égalité traduit que : les points M, N, P, S sont cocycliques .

De même, on démontre que : les points P, Q, R, N sont cocycliques .

voir 2°) ci-dessus

Démontrons que les points R, N, P, S sont cocycliques .

Rappelons que : (NR) // (AC) donc $(\overline{NR, NP}) \equiv (\overline{AC, NP})$ (π) c'est à dire : $(\overline{NR, NP}) \equiv (\overline{AC, AB})$ (π) (5)

* Les points A, B, J , I sont cocycliques (sur un cercle de diamètre [AB] .

donc : $(\overline{AJ, AB}) \equiv (\overline{IJ, IB})$ (π) (6)

Puisqu'on sait : (IJ) // (RS) , on peut donc écrire : $(\overline{IJ, IB}) \equiv (\overline{RS, IB})$ (π) (7)

Des relations (6) et (7) on peut déduire : $(\overline{AJ, AB}) \equiv (\overline{RS, IB})$ (π)

c'est à dire : $(\overline{AC, AB}) \equiv (\overline{SR, CB})$ (π) (8)

* Puisque (BC) // (SP) , on a : $(\overline{SR, CB}) \equiv (\overline{SR, SP})$ (π) (9)

Des relations (8) et (9) on peut déduire : $(\overline{AC, AB}) \equiv (\overline{SR, SP})$ (π) (10)

Des relations (5) et (10) on déduit : $(\overline{NR, NP}) \equiv (\overline{SR, SP})$ (π)

Cette dernière égalité traduit que les points R, N, P, S sont cocycliques .

Les deux cercles MNPS et RNPS ont en commun les trois points N, P, S distincts (puisque le triangle ABC est supposé non rectangle) .

Les deux cercles MNPS et RNPS sont donc confondus . Le sixième point Q appartient à ce cercle $\mathcal{C}$ (puisque $\mathcal{C}$ contient P, R, N).

$\boxed{\text{Les six points M, N, P, Q, R, S sont donc cocycliques .}}$

Triangle médian du triangle orthique . Cercle de Taylor

3ème partie : centre du cercle de Taylor

> On considère un triangle **ABC** **supposé non rectangle** .
> Soit I, J, K les pieds des hauteurs du triangle ABC , issues respectivement de A, B, C .
> Soit I', J', K' les milieux respectifs des bipoints (J, K) , (K, I) , (I, J) .
> Démontrer que : Le centre T du cercle de Taylor $\mathcal{C}$ est le point de concours de trois bissectrices du triangle I'J'K' .

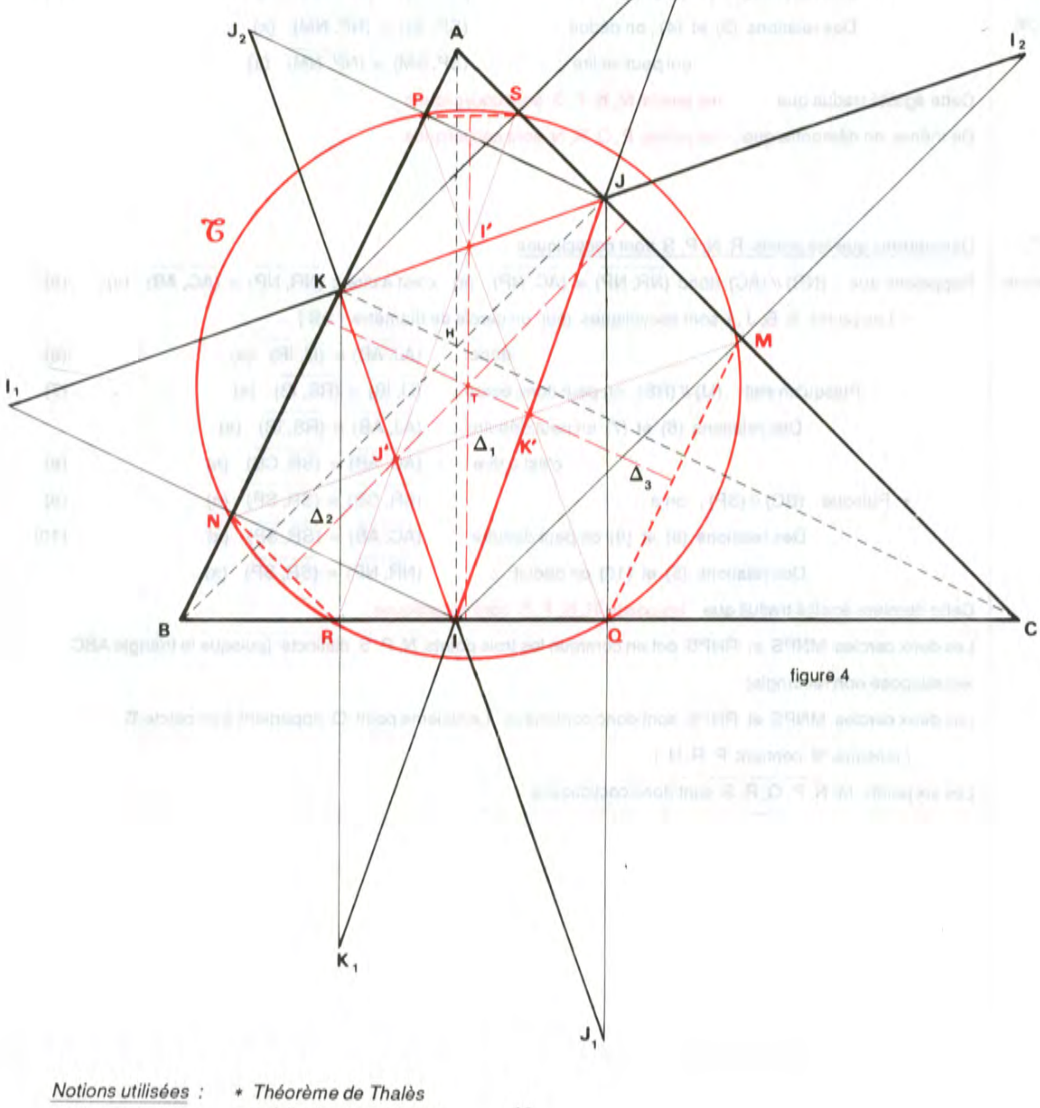


figure 4

Notions utilisées : * *Théorème de Thalès*
* *médiatrice d'un bipoint*

voir figure 4 — Recherche du centre T du cercle de Taylor $\mathcal{T}$.

* $\mathcal{T}$ contient les points P et S donc T appartient à la médiatrice de (P, S) .
* $\mathcal{T}$ contient les points R et Q donc T appartient à la médiatrice de (R, Q) .

Puisque (PS) // (RQ) , la médiatrice de (P, S) et la médiatrice de (R, Q) qui contiennent le point T sont alors confondues en une même droite Δ_1 .

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 \; // \; (KR) \\ \Delta_1 \; // \; (JQ) \\ \Delta_1 \text{ contient le milieu de } (R, Q) \end{array}\right\}$ Le théorème de Thalès assure donc que : Δ_1 contient le milieu I' de (K, J) .

voir 1°) c) page 36

* En outre I' ∈ (PQ) et I' ∈ (RS) .
* Puisque I' ∈ med(R, Q) , le triangle RI'Q est isocèle . Donc :

  la médiatrice Δ_1 de (R, Q) est aussi une bissectrice de la paire de droites { (I'R) , (I'Q) } ,

  qui est aussi la paire { (I'J') , (I'K') } .

Δ_1 est donc une bissectrice (intérieure ou extérieure) de $[\widehat{J'I'K'}]$.

De même on démontre que $\left\{\begin{array}{l} \text{la médiatrice } \Delta_2 \text{ de } (M, S) \text{ est une bissectrice de } [\widehat{K'J'I'}] \\ \text{la médiatrice } \Delta_3 \text{ de } (N, P) \text{ est une bissectrice de } [\widehat{I'K'J'}] \text{ .} \end{array}\right.$

Le centre T du cercle $\mathcal{T}$ appartient donc à trois bissectrices du triangle I'J'K' .

remarque

* Si les trois angles du triangle ABC sont aigus, T est le centre du cercle inscrit dans le triangle I'J'K' .
* Si $[\widehat{BAC}]$ est obtus, T est le centre du cercle exinscrit dans l'angle $[\widehat{J'I'K'}]$.

Droite de Simson . Droite de Steiner .

1ère partie : Droite de Simson .

Soit ABC un triangle, de cercle circonscrit $\mathcal{C}$.
Soit P un point quelconque du plan dont les projetés orthogonaux sur les droites (BC), (CA), (AB) sont respectivement nommés P_1, P_2, P_3 .

1°) On suppose que P n'appartient à aucune des droites (AB), (BC), (CA) .

a) Démontrer : $(\overline{P_1P_2 , P_1P_3}) \equiv (\overline{CA, CP}) + (\overline{BP, BA})\ (\pi)$

b) En déduire que : P_1, P_2, P_3 sont alignés si, et seulement si P appartient à $\mathcal{C}$ - { A, B, C } .

2°) On suppose que P appartient à $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$.
Justifier que : P_1, P_2, P_3 sont alignés si, et seulement si P appartient à { A, B, C } .

3°) Conclure que, pour tout point P du plan,
l'alignement de P_1, P_2, P_3 équivaut à l'appartenance de P au cercle $\mathcal{C}$.

A chaque point P de $\mathcal{C}$ on peut alors associer une droite Δ_P contenant P_1, P_2, P_3 .
Δ_P est dite droite de Simson associée au point P de $\mathcal{C}$, relativement au triangle ABC .

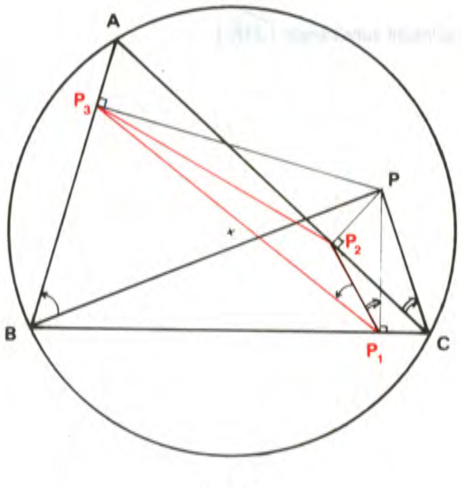


figure 1

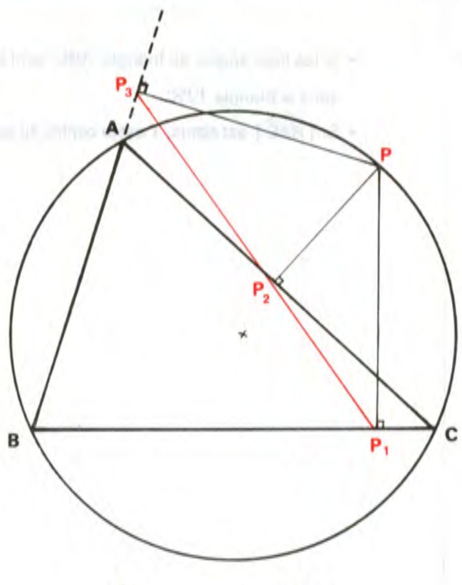


figure 2

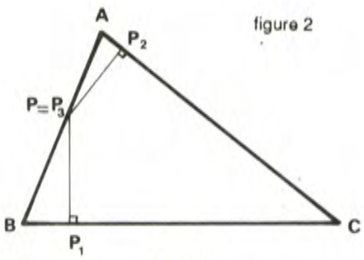


figure 3

Notions utilisées :
* *cocyclicité*
* *droites du plan perpendiculaires à une même troisième .*

1°) a) Si P n'appartient pas à (AB), ni à (BC), ni à (CA), alors : $P \neq P_1$ et $P \neq P_2$ et $P \neq P_3$.

voir figure 1

Les projetés P_1, P_2, P_3 sont distincts (si on avait, par exemple $P_1 = P_2$, alors les droites (CA) et (CB) seraient parallèles, ce qui traduirait que le triangle ABC est aplati)

* $\overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv \overline{(P_1P_2, P_1P)} + \overline{(P_1P, P_1P_3)}$ (π) relation de Chasles (1)
* P_1, P_2, P, C sont cocycliques, sur un cercle de diamètre [PC].

  ** Si $P_2 \neq C$, alors $\overline{(P_1P_2, P_1P)} \equiv \overline{(CP_2, CP)}$ (π) lisons : $\overline{(P_1P_2, P_1P)} \equiv \overline{(CA, CP)}$ (π)

  ** Si $P_2 = C$, alors $\begin{cases} (P_1P_2) = (P_1C) \text{ donc } \overline{(P_1P_2, P_1P)} \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi) \\ (CA) \perp (CP) \quad \text{donc } \overline{(CA, CP)} \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi) \end{cases}$

  Dans les deux cas, on a : $\overline{(P_1P_2, P_1P)} \equiv \overline{(CA, CP)}$ (π) (2)

* P_1, P_3, P, B sont cocycliques, sur un cercle de diamètre [PB]

  ** Si $P_3 \neq B$, alors $\overline{(P_1P, P_1P_3)} \equiv \overline{(BP, BP_3)}$ (π) lisons : $\overline{(P_1P, P_1P_3)} \equiv \overline{(BP, BA)}$ (π)

  ** Si $P_3 = B$, alors $\begin{cases} (P_1P_3) = (P_1B) \text{ donc } \overline{(P_1P, P_1P_3)} \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi) \\ (BA) \perp (BP) \quad \text{donc } \overline{(BP, BA)} \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi) \end{cases}$

  Dans les deux cas, on a : $\overline{(P_1P, P_1P_3)} \equiv \overline{(BP, BA)}$ (π) (3)

La relation (1) s'écrit alors, en utilisant (2) et (3) : $\overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv \overline{(CA, CP)} + \overline{(BP, BA)}$ (π)

1°) b) P_1, P_2, P_3 alignés $\Leftrightarrow$ $\overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv 0$ (π)

P_1, P_2, P_3 alignés $\Leftrightarrow$ $\overline{(CA, CP)} \equiv \overline{(BA, BP)}$ (π)

P_1, P_2, P_3 alignés $\Leftrightarrow$ A, B, C, P sont cocycliques ou alignés

Or les points A, B, C sont non alignés. On en conclut :

P_1, P_2, P_3 alignés $\Leftrightarrow$ $P \in \mathcal{C}_{ABC} - \{A, B, C\}$

2°) Si P appartient à $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$, par exemple supposons $P \in (AB)$.

* Si P = A alors $P_2 = P_3$ P_1, P_2, P_2 sont bien alignés.
* Si P = B alors $P_1 = P_3$ P_1, P_2, P_1 sont bien alignés.
* Si $P \in (AB) - \{A, B\}$ alors $P = P_3$ par contre $P \neq P_1$ et $P \neq P_2$

  Justifions que P_1, P_2, P_3 sont alors non alignés.

voir figure 3

S'ils étaient alignés, la droite d les portant vérifierait :

$\begin{cases} d = (PP_1) \\ d = (PP_2) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} d \perp (BC) \\ d \perp (AC) \end{cases}$ donc (CB) // (CA)

ce qui traduirait que le triangle ABC est aplati.

finalement : si $P \in (AB)$, l'alignement de P_1, P_2, P_3 n'est vérifié que si, et seulement si (P = A ou P = B).

Un même raisonnement, dans le cas où $P \in (BC)$ ou $P \in (CA)$ aboutit à : si $P \in (AB) \cup (BC) \cup (CA)$,

P_1, P_2, P_3 alignés $\Leftrightarrow$ (P = A ou P = B ou P = C)

3°) conclusion

Les deux études précédentes permettent de conclure, P étant un point quelconque du plan :

$\boxed{\text{Les points } P_1, P_2, P_3 \text{ sont alignés si, et seulement si P appartient au cercle } \mathcal{C}.}$

Droite de Simson . Droite de Steiner .

2ème partie : Droite de Steiner .

On suppose : $P \in \mathcal{C}$

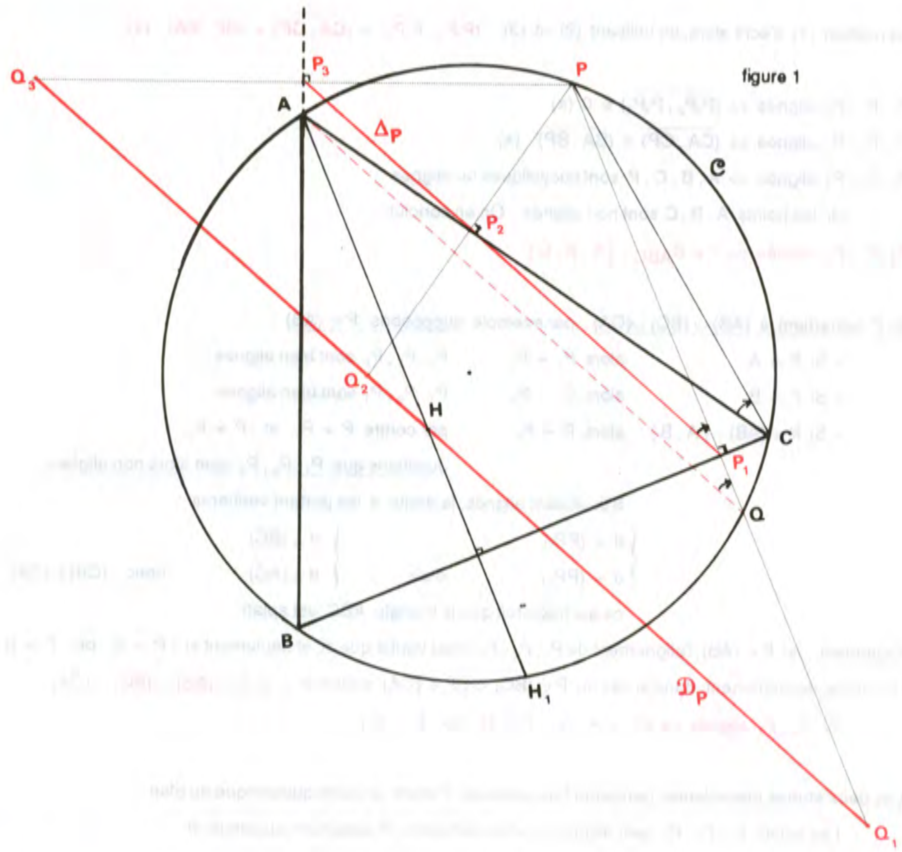
Les points P_1, P_2, P_3 sont alors alignés sur la droite de Simson Δ_P de P relative au triangle ABC .
On pose : $Q_1 = S_{BC}(P)$; $Q_2 = S_{AC}(P)$; $Q_3 = S_{AB}(P)$.
Soit H l'orthocentre du triangle ABC .
On pose : $H_1 = S_{BC}(H)$, et on rappelle : $H_1 \in \mathcal{C}$. (*voir page 10*)

1°) Justifier que les points Q_1, Q_2, Q_3 sont alignés sur une droite $\mathcal{D}_P$, parallèle à Δ_P .
$\mathcal{D}_P$ est dite droite de Steiner du point P de $\mathcal{C}$ relative au triangle ABC .

On suppose : $P \in \mathcal{C} - \{A, B, C, H_1\}$

Soit Q le point où (PP_1) recoupe $\mathcal{C}$. Si (PP_1) est tangente à $\mathcal{C}$, on pose Q = P .

2°) a) Démontrer : $(\overline{AQ}, \overline{PP_1}) \equiv (\overline{\Delta_P}, \overline{PP_1})$ (π) . En déduire : $(AQ) \,//\, \Delta_P$.



Notions utilisées :
* *Homothétie*
* *Cocyclicité*

1°) Par construction : $P_1 = m(P, Q)$; $P_2 = m(P, Q_2)$; $P_3 = m(P, Q_3)$.

Les points Q_1, Q_2, Q_3 sont donc homothétiques respectivement des points P_1, P_2, P_3 par l'homothétie $\mathcal{H}(P, 2)$.

Les points P_1, P_2, P_3 sont alignés sur la droite Δ_P , donc :

Les points Q_1, Q_2, Q_3 sont alignés sur la droite $\mathcal{D}_P$, homothétique de Δ_P par $\mathcal{H}(P, 2)$.

En outre $\mathcal{D}_P \mathbin{/\!/} \Delta_P$ (car l'image d'une droite, par une homothétie, est une droite qui lui est parallèle) .

2°) a) On suppose : $P \in \mathcal{C} - \{A, B, C, H_1\}$.

1er cas — voir figure 1

<u>Si (PP_1) recoupe $\mathcal{C}$ en Q , Q distinct de P</u> , alors $Q \neq A$ car $P \neq H_1$.

Les points Q, A, C, P sont cocycliques (sur $\mathcal{C}$) donc : $(\overline{QA}, \overline{QP}) \equiv (\overline{CA}, \overline{CP}) \quad (\pi)$ (1)

Les points P_1, P_2, C, P sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[CP]$, donc :

$(\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P}) \equiv (\overline{CA}, \overline{CP}) \quad (\pi)$ (2)

De (1) et (2) on déduit : $(\overline{QA}, \overline{QP}) \equiv (\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P}) \quad (\pi)$

qui peut se lire : $(\overline{AQ}, \overline{PP_1}) \equiv (\overline{\Delta_P}, \overline{PP_1}) \quad (\pi)$

d'où : $\boxed{(AQ) \mathbin{/\!/} \Delta_P}$.

2eme cas — voir figure 2

<u>Si (PP_1) est tangente en P à $\mathcal{C}$</u> . Posons $(PP_1) = T_P$.

$\mathcal{C}$ contient A, C, P donc la tangente en P à $\mathcal{C}$ vérifie : $(\overline{PA}, \overline{T_P}) \equiv (\overline{CA}, \overline{CP}) \quad (\pi)$ (3)

De (2) et (3) on déduit : $(\overline{PA}, \overline{T_P}) \equiv (\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P}) \quad (\pi)$

Or $Q = P$, nous lisons donc : $(\overline{AQ}, \overline{PP_1}) \equiv (\overline{\Delta_P}, \overline{PP_1}) \quad (\pi)$

d'où : $\boxed{(AQ) \mathbin{/\!/} \Delta_P}$

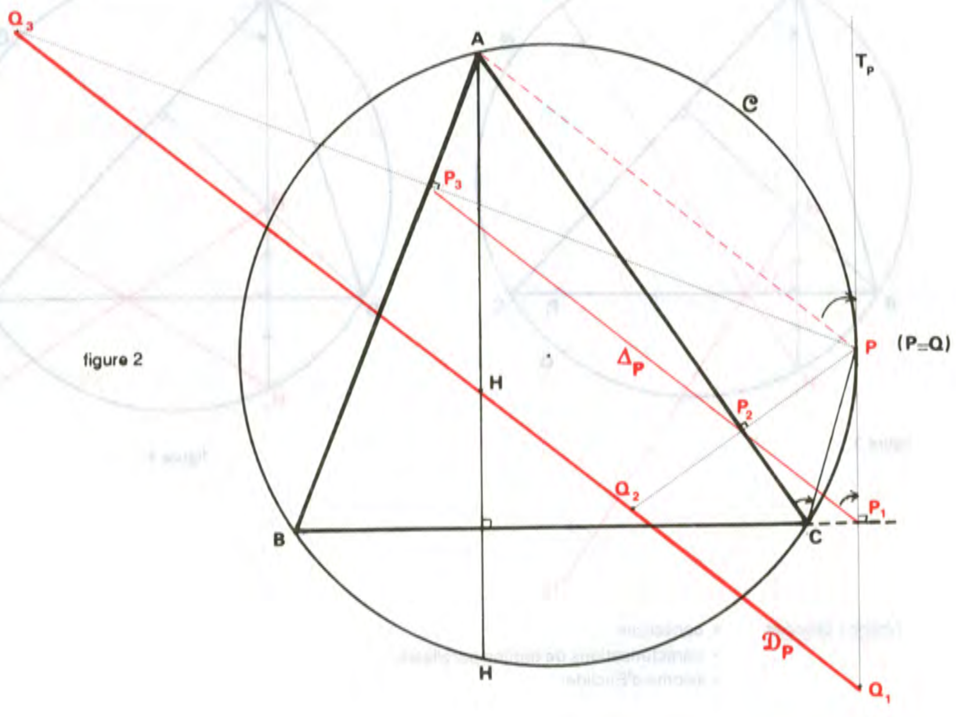


figure 2

Droite de Simson . Droite de Steiner .

2^{eme} partie (suite) : Droite de Steiner .

On suppose $P \in \mathcal{C} - \{A, B, C, H_1\}$.

Rappelons que : $\begin{cases} \mathcal{D}_P \text{ désigne la droite de Steiner du point } P . \\ \Delta_P \text{ désigne la droite de Simson du point } P \ (\mathcal{D}_P \, // \, \Delta_P) . \end{cases}$

Q est le point où (PP_1) recoupe $\mathcal{C}$. Si (PP_1) est tangente à $\mathcal{C}$, on pose $Q = P$.

2°) b) Démontrer : $\overline{(HQ_1, PP_1)} = \overline{(AQ, AH_1)}$ (π) . En déduire : $(HQ_1) \, // \, (AQ)$.

2°) c) Démontrer que la droite de Steiner $\mathcal{D}_P$ du point P contient le point H .

On suppose $P \in \{A, B, C, H_1\}$.

3°) a) Reconnaître les droites de Simson $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ des points A , B , C .
Vérifier que les droites de Steiner $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ contiennent le point H .

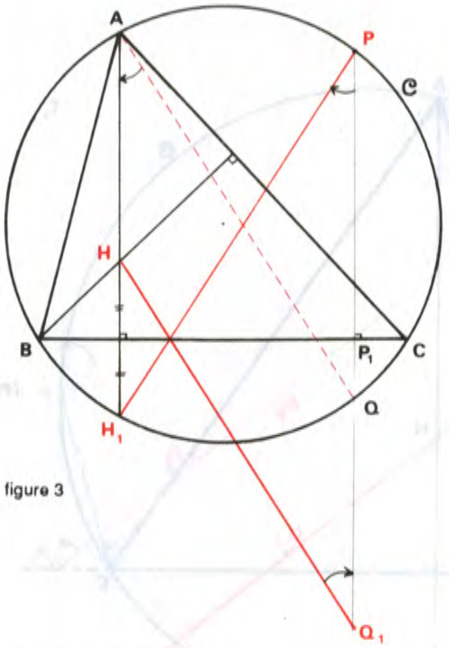


figure 3

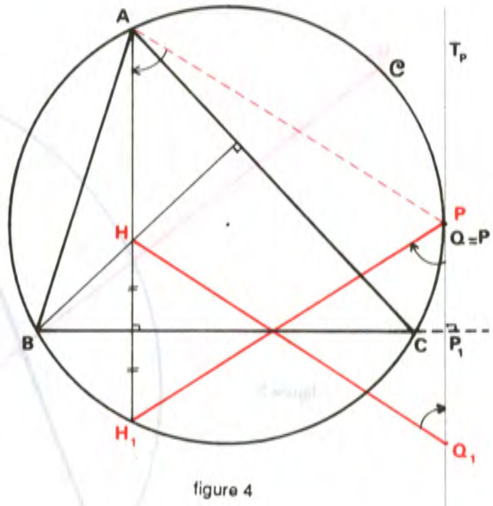


figure 4

Notions utilisées :
- cocyclicité
- caractérisations de droites parallèles
- axiome d'Euclide

2°) b) On a : $H = S_{BC}(H_1)$. Par ailleurs $Q_1 = S_{BC}(P)$ et $P \neq H_1$, donc : $Q_1 \neq H$.

$$S_{BC} : \begin{array}{l} H_1 \longmapsto H \\ P \longmapsto Q_1 \\ Q_1 \longmapsto P \end{array}$$

S_{BC} contrarie les angles orientés donc : $(Q_1H , Q_1P) \equiv - (PH_1 , PQ_1)$ (π)

que nous pouvons lire : $(\overline{HQ_1 , PP_1}) \equiv + (\overline{PP_1 , PH_1})$ (π) (5)

1^er^ cas voir figure 3

<u>Supposons que (PP_1) recoupe $\mathcal{C}$ en Q et Q distinct de P</u> .

H_1 , A , P , Q sont cocycliques , sur $\mathcal{C}$, donc : $(\overline{PQ , PH_1}) \equiv (\overline{AQ , AH_1})$ (π)

que nous lisons : $(\overline{PP_1 , PH_1}) \equiv (\overline{AQ , AH_1})$ (π) (6)

De (5) et (6) on déduit, par transitivité : $(\overline{HQ_1 , PP_1}) \equiv (\overline{AQ , AH_1})$ (π) (7)

Or $\left.\begin{array}{l} (PP_1) \perp (BC) \\ (AH_1) \perp (BC) \end{array}\right\}$ donc $(PP_1) // (AH_1)$

La relation (7) peut donc s'écrire : $(\overline{HQ_1 , PP_1}) \equiv (\overline{AQ , PP_1})$ (π)

relation qui traduit que : $\boxed{(HQ_1) // (AQ)}$

2^eme^ cas voir figure 4

<u>Supposons que (PP_1) soit tangente à $\mathcal{C}$ en P</u> , alors Q = P .

$\mathcal{C}$ contient A , H_1 , P . La tangente en P à $\mathcal{C}$ vérifie : $(\overline{T_P , PH_1}) \equiv (\overline{AP , AH_1})$ (π)

relation que nous pouvons lire : $(\overline{PP_1 , PH_1}) \equiv (\overline{AQ , AH_1})$ (π) (6')

De (5) et (6') , on déduit encore : $(\overline{HQ_1 , PP_1}) \equiv (\overline{AQ , AH_1})$ (π)

Puisque $(PP_1) // (AH_1)$, on trouve encore : $\boxed{(HQ_1) // (AQ)}$

2°) c) D'après 2°) b) et 2°) a) , on a : $(HQ_1) // (AQ)$ et $(AQ) // \Delta_P$ d'où $(HQ_1) // (\Delta_P$.

La droite (HQ_1) est donc parallèle à Δ_P et elle contient le point Q_1 .

Or $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}_P \text{ est parallèle à } \Delta_P \\ \text{et } \mathcal{D}_P \text{ contient le point } Q_1 \end{array}\right.$ donc : $\mathcal{D}_P = (HQ_1)$

$\mathcal{D}_P$ contient donc l'orthocentre H de ABC , quand P appartient à $\mathcal{C} - \{A , B , C , H_1\}$

3°) a) <u>Supposons P = A</u> , alors $P_2 = A$, $P_3 = A$.

La droite Δ_A est la hauteur issue de A dans le triangle ABC . Δ_A contient A .

La droite $\mathcal{D}_A$, homothétique de Δ_A par $\mathcal{H}(A , 2)$ est donc égale à Δ_A .

De même Δ_B et $\mathcal{D}_B$ sont confondues en la hauteur issue de B .

Δ_C et $\mathcal{D}_C$ sont confondues en la hauteur issue de C .

On a donc encore : $\boxed{H \in \mathcal{D}_A , H \in \mathcal{D}_B , H \in \mathcal{D}_C}$.

Droite de Simson . Droite de Steiner .

2ème partie (fin) : caractérisation de la droite de Steiner .

On suppose $P \in \{A, B, C, H_1\}$

3°) b) Démontrer que la tangente T_A en A à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ_{H_1} et à $\mathcal{D}_{H_1}$.
Vérifier que $\mathcal{D}_{H_1}$ contient H .

Conclusion générale .

* Pour tout point P de $\mathcal{C}$, la droite de Steiner $\mathcal{D}_P$ de P relative au triangle ABC contient l'orthocentre H de ABC et admet pour direction celle de la droite (AQ) (lorsque $Q \neq A$) .

** La droite de Simson d'un point P quelconque de $\mathcal{C}$ contient le milieu P_0 de (H , P) .

Remarque : quand P décrit $\mathcal{C}$, P_0 décrit le cercle d'Euler $\mathcal{C}'$ du triangle ABC .

Quand P décrit $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}_P$ pivote autour de l'orthocentre H du triangle ABC .
Δ_P reste parallèle à $\mathcal{D}_P$ et à (AQ) (ou à T_A) en contenant le milieu de (H , P) qui décrit le cercle d'Euler $\mathcal{C}'$ du triangle ABC .

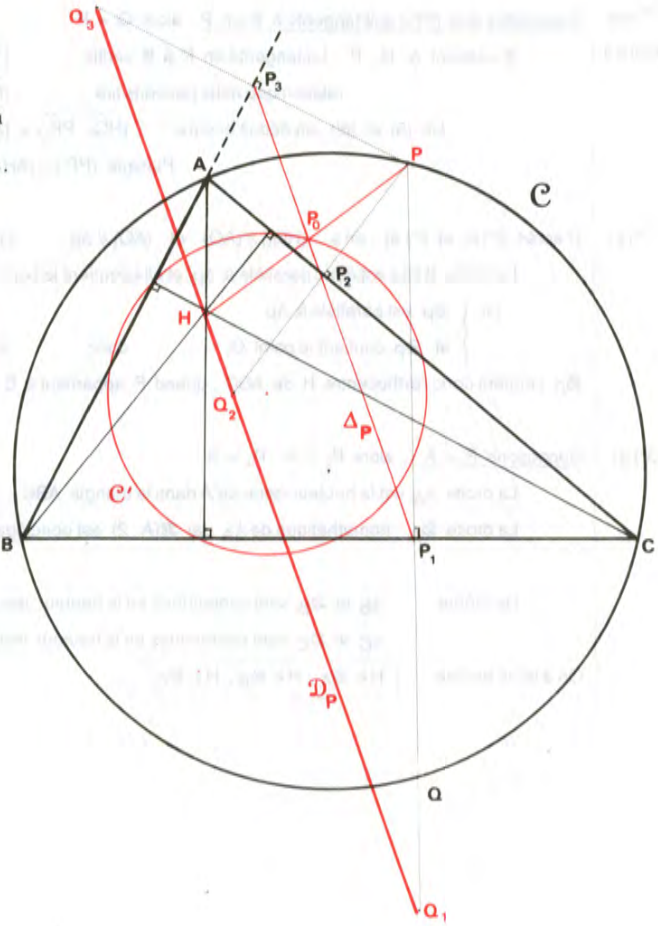


figure 5

Notions utilisées : * *Cocyclicité*
* *Homothéties*

3°) b) **Supposons : $P = H_1$** , alors $Q_1 = H$; or $\mathcal{D}_{H_1}$ contient Q_1, Q_2, Q_3 donc $\mathcal{D}_{H_1}$ contient H .

voir figure 6

La tangente T_A en A à $\mathcal{C}$ vérifie : $(\overline{T_A, AP}) \equiv (\overline{CA, CP})$ (π) (8)

Les points P_1, P_2, C, P sont cocycliques sur un cercle de diamètre [CP] , donc :

$(\overline{CP_2, CP}) \equiv (\overline{P_1P_2, P_1P})$ (π) que nous lisons : $(\overline{CA, CP}) \equiv (\overline{\Delta_{H_1}, AP})$ (π) (9)

Des relations (8) et (9) , on déduit : $(\overline{T_A, AP}) \equiv (\overline{\Delta_{H_1}, AP})$ (π) , ce qui traduit : $\Delta_{H_1} // T_A$.

Puisque $\mathcal{D}_{H_1} // \Delta_{H_1}$, $\boxed{\mathcal{D}_{H_1} \text{ est donc la parallèle à } T_A \text{, contenant le point H.}}$

4°) Les études du 2°) et du 3°) prouvent que pour tout point P de $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}_P$ contient le point H .

La droite Δ_P est l'image de $\mathcal{D}_P$ par l'homothétie $\mathcal{H}(P, \frac{1}{2})$, réciproque de l'homothétie $\mathcal{H}(P, 2)$.

$H \in \mathcal{D}_P$ donc $\mathcal{H}(P, \frac{1}{2})(H) \in \Delta_P$

Or $\mathcal{H}(P, \frac{1}{2})(H) = m(P, H)$. Par conséquent : $m(P, H) \in \Delta_P$.

Conclusion $\boxed{\text{La droite de Simson } \Delta_P \text{ de P relative au triangle ABC contient le milieu } P_0 \text{ de (H, P) .}}$

conséquence On sait que le cercle d'Euler $\mathcal{C}'$ du triangle ABC est homothétique du cercle $\mathcal{C}$ par l'homothétie $\mathcal{H}(H, \frac{1}{2})$.

voir figure 5

On a aussi : $P_0 = \mathcal{H}(H, \frac{1}{2})(P)$.

Lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$, le milieu P_0 de (H , P) décrit donc le cercle $\mathcal{C}'$ et :

* la droite de Simson Δ_P de P , contenant P_0 , reste parallèle à la droite de Steiner $\mathcal{D}_P$ de P qui , elle, pivote autour de l'orthocentre H du triangle ABC .
* la direction commune de ces deux droites est celle de la droite (AQ) (éventuellement dégénérée en la tangente en A à $\mathcal{C}$ lorsque Q = A) .

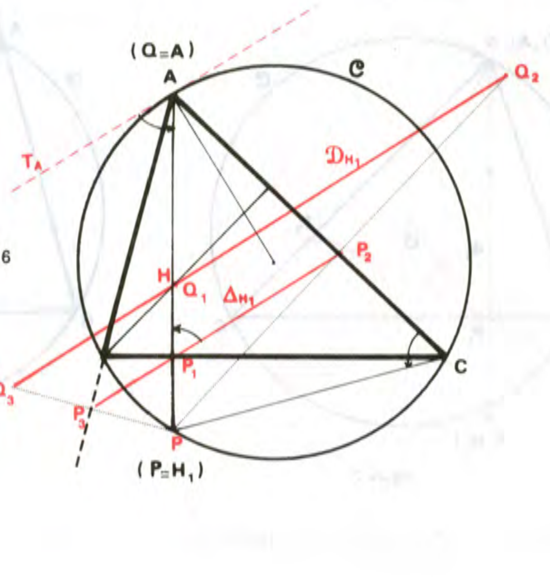


figure 6

Droite de Simson . Droite de Steiner .

3^{eme} partie : directions des droites de Simson .

1°)	Soit P un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$. Soit Δ_P la droite de Simson du point P . Soir d_1 la droite contenant P , et perpendiculaire à la droite (BC) . Soit Q le point où d_1 recoupe $\mathcal{C}$. Si d_1 est tangente en P à $\mathcal{C}$, on pose Q = P . δ_A désigne la droite (AQ) si Q ≠ A , la tangente en A à $\mathcal{C}$ si Q = A . Justifier que, quel que soit le point P de $\mathcal{C}$, on a : $\delta_A // \Delta_P$.
2°)	En déduire que : Il existe sur $\mathcal{C}$ un point et un seul dont la droite de Simson ait une direction imposée .

δ donnée

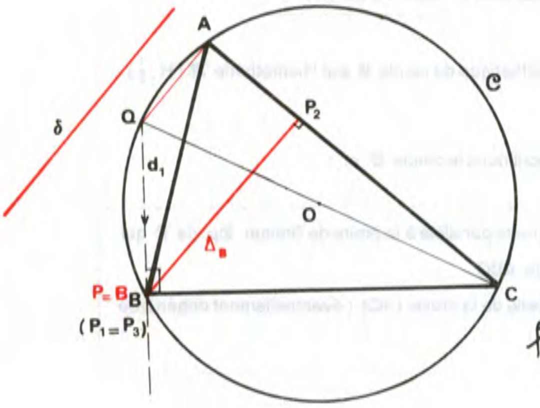


figure 1

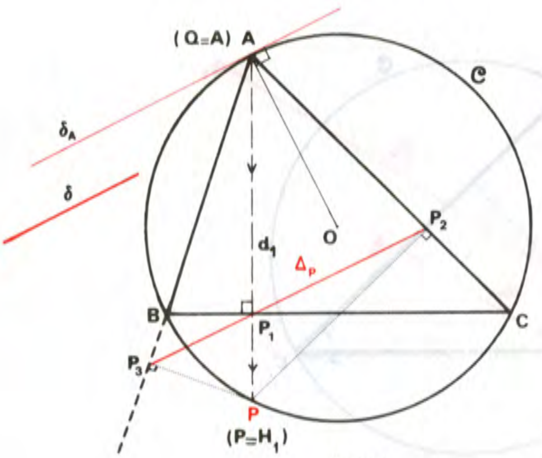


figure 2

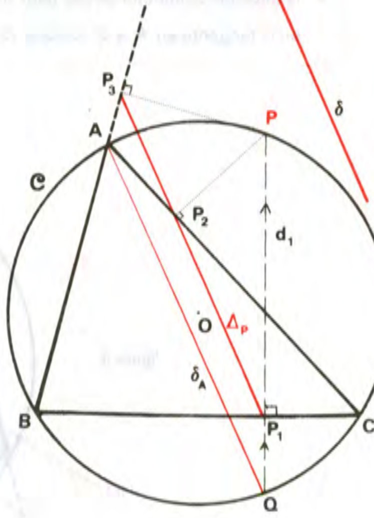


figure 3

Notions utilisées : * *droite de Simson d'un point de $\mathcal{C}$.*
* *tangente à un cercle .*

1°) a) Soit P un point quelconque de $\mathcal{C}$. Soit Δ_P la droite de Simson de P .

voir pages 46 et 48 — On a déja démontré :

* Si $P \in \mathcal{C} - \{A, B, C, H_1\}$ alors $(AQ) // \Delta_P$ et $(AQ) = \delta_A$.
* Si $P = H_1$ (c'est à dire $Q = A$) , alors $T_A // \Delta_{H_1}$, où T_A désigne la tangente en A à $\mathcal{C}$ ($T_A = \delta_A$) .

1°) b) <u>Il reste à démontrer que si $P \in \{A, B, C\}$, on a encore $\delta_A // \Delta_P$.</u>

* <u>Si $P = A$</u> alors $\begin{cases} Q = H_1 \\ \Delta_A \text{ est la hauteur issue de } A \text{ . On a donc : } \quad \delta_A = \Delta_A \text{ .} \end{cases}$
* <u>Si $P = B$</u> alors d_1 contient les points B et Q et d_1 est perpendiculaire à (BC) . Donc $\overrightarrow{BQ} \perp \overrightarrow{BC}$.

  Les points Q et C sont alors diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.

  voir figure 1

  ** <u>Si $A \neq Q$</u> , on en déduit $(AQ) \perp (AC)$ donc : $\delta_A \perp (AC)$

  ** <u>Si $A = Q$</u> , $\begin{cases} \delta_A \text{ désigne la tangente en } A \text{ à } \mathcal{C} \text{ .} \\ (AC) \text{ est alors un diamètre de } \mathcal{C} \text{ donc : } \quad \delta_A \perp (AC) \end{cases}$

  Dans les deux cas , on a : $\delta_A \perp (AC)$.

  Puisque Δ_B est la hauteur issue de B , alors $\Delta_B \perp (AC)$. On a donc bien : $\delta_A // \Delta_B$.
* <u>Si $P = C$</u> , on démontre (comme dans le cas $P = B$) , que : $\delta_A // \Delta_C$.

2°) <u>Soit δ une droite donnée</u> .

*1^ere^ étape : S'il existe un point P de $\mathcal{C}$ tel que : $\Delta_P // \delta$, alors la droite δ_A associée à P et définie au 1°) vérifie : $\delta_A // \Delta_P$ et $\Delta_P // \delta$.

δ_A est nécessairement la droite contenant A et parallèle à la droite donnée δ .

*2^eme^ étape : Considérons alors l'unique droite δ_A parallèle à δ et contenant A .

voir figure 2 — Puisque $A \in \mathcal{C}$ ** <u>ou bien</u> δ_A est tangente en A à $\mathcal{C}$, alors $Q = A$.

voir 1°) a) ci-dessus — La perpendiculaire à (BC) menée par Q recoupe $\mathcal{C}$ en H_1 .

La droite de Simson du point H_1 répond à la question .

** <u>ou bien</u> δ_A recoupe $\mathcal{C}$ en Q , Q distinct de A .

voir figure 3 — La perpendiculaire à (BC) menée par Q recoupe alors $\mathcal{C}$ en un unique point distinct de Q (nommons P ce point) ou bien est tangente à $\mathcal{C}$ en Q (dans ce cas prenons P en Q) .

voir page 44 — La droite de Simson de l'unique point nommé P répond à la question .

<u>conclusion</u>

Il existe sur $\mathcal{C}$ un et un seul point dont la droite de Simson ait une direction imposée , celle de δ .

Droite de Simson . Droite de Steiner .

4^{eme} partie : droites de Simson perpendiculaires .

Démontrer que les droites de Simson de deux points P et P' de $\mathcal{C}$ sont perpendiculaires si, et seulement si P et P' sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}$.

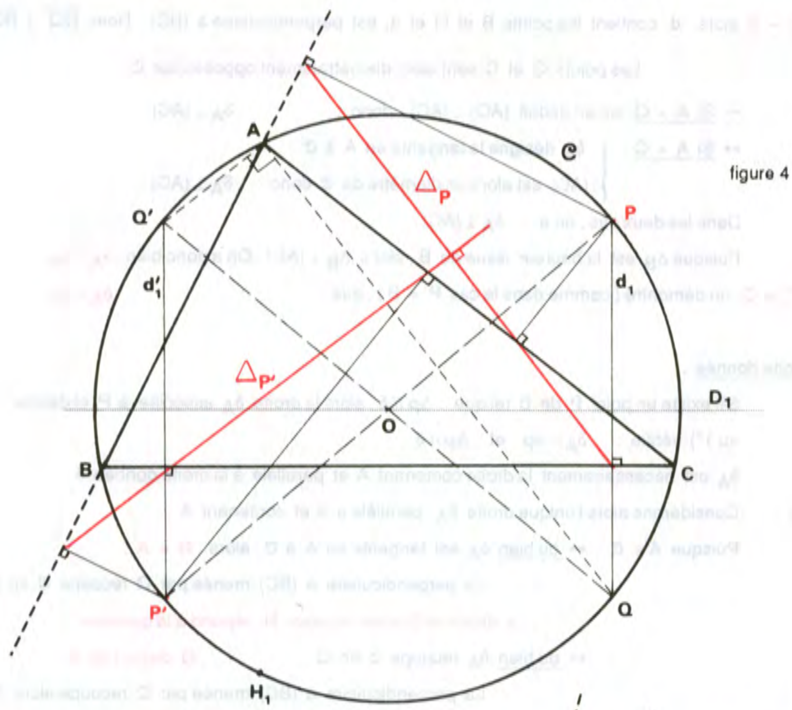
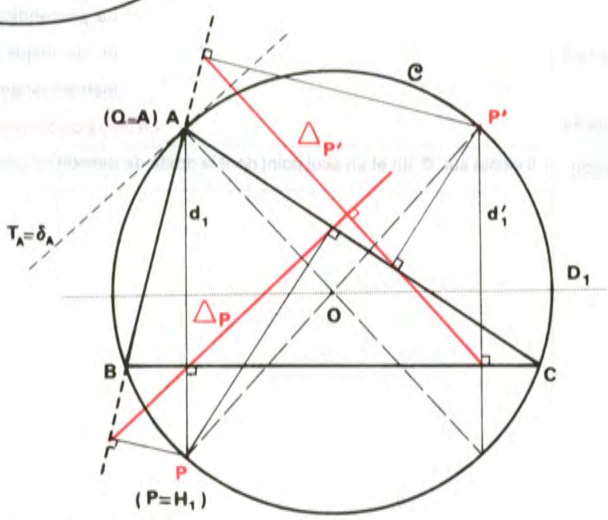


figure 4

figure 5



<u>Notions utilisées</u> :
- *Symétrie axiale*
- *points diamétralement opposés sur un cercle*

3°) Soit P et P' deux points distincts de $\mathcal{C}$. Les notations sont celles du 1°) .

* 1^{er} cas : <u>Si $P \neq H_1$ et $P' \neq H_1$</u> .

voir figure 4 — On a alors : $Q \neq A$; $Q' \neq A$; $\Delta_P \,//\, (AQ)$; $\Delta_{P'} \,//\, (AQ')$.

$\Delta_P \perp \Delta_{P'} \Leftrightarrow (AQ) \perp (AQ')$

$\Delta_P \perp \Delta_{P'} \Leftrightarrow Q$ et Q' sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}$.

* 2^{eme} cas : <u>Si $P = H_1$</u>, alors $P' \neq H_1$ (puisque $P' \neq P$) .

voir figure 5 — On a alors : $Q = A$; $Q' \neq A$; $\Delta_P \,//\, T_A$; $\Delta_{P'} \,//\, (AQ')$.

$\Delta_P \perp \Delta_{P'} \Leftrightarrow T_A \perp (AQ')$, or T_A est la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$, donc :

$\Delta_P \perp \Delta_{P'} \Leftrightarrow A$ et Q' sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}$

or : $A = Q$, d'où :

$\Delta_P \perp \Delta_{P'} \Leftrightarrow Q$ et Q' sont diamétralement oppposés sur le cercle $\mathcal{C}$.

* 3^{eme} cas : <u>Si $P' = H_1$</u>, alors $P \neq H_1$. On trouve de même :

$\Delta_P \perp \Delta_{P'} \Leftrightarrow Q$ et Q' sont diamétralement oppposés sur le cercle $\mathcal{C}$.

<u>résultat</u> — Dans les trois cas , ($\Delta_P \perp \Delta_{P'} \Leftrightarrow Q$ et Q' sont diamétralement oppposés sur le cercle $\mathcal{C}$)

<u>Il reste à démontrer l'équivalence : $O = m(Q, Q') \Leftrightarrow O = m(P, P')$</u> .

Soit D_1 la droite parallèle à (BC) , contenant le point O .

voir figures 4 et 5

* <u>Si $P \neq Q$</u> D_1 est la médiatrice de (P, Q) .

* <u>Si $P = Q$</u> D_1 est perpendiculaire en P à la tangente en P à $\mathcal{C}$.

Les points P et Q sont donc symétriques par rapport à D_1 .

De même, les points P' et Q' sont symétriques par rapport à D_1 .

On a alors : S_{D_1} :
$$\begin{aligned} Q &\longmapsto P \\ Q' &\longmapsto P' \\ O &\longmapsto O \end{aligned}$$

Puisque S_{D_1} conserve les milieux, on a :

$$O = m(Q, Q') \Leftrightarrow O = m(P, P')$$

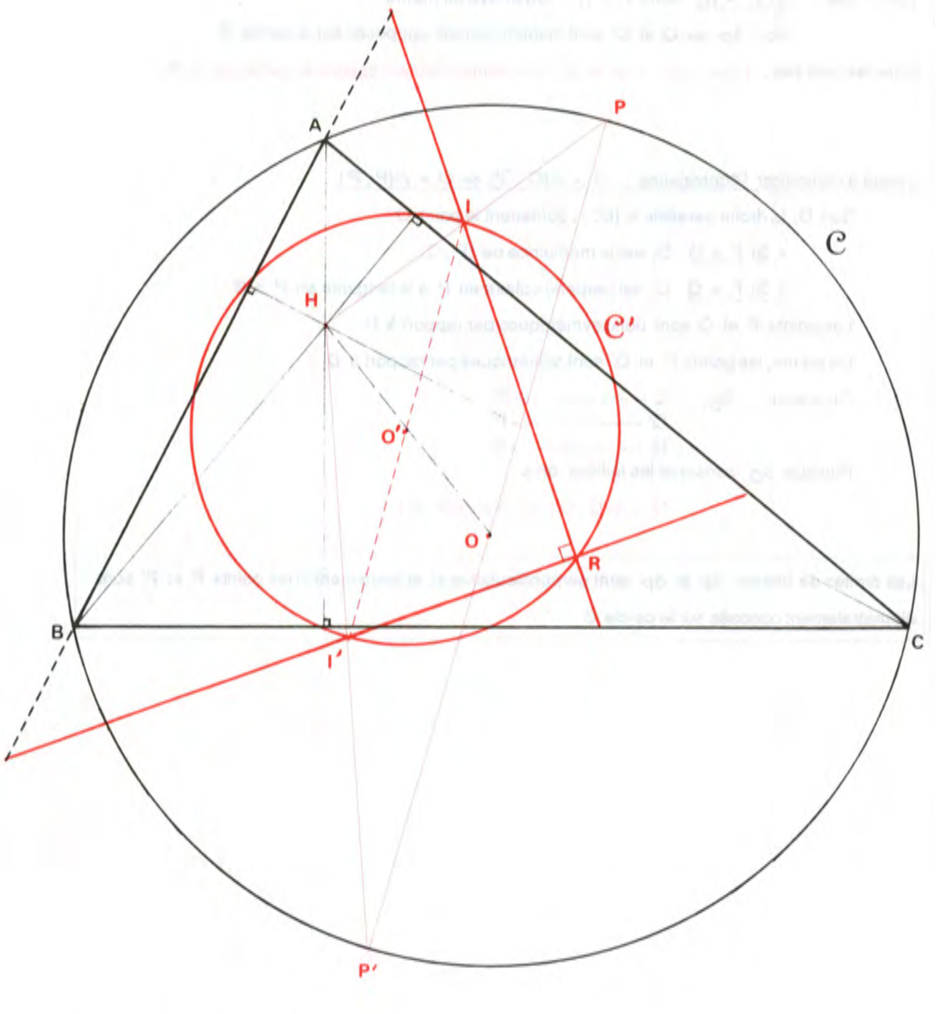
<u>conclusion</u>

Les droites de Simson Δ_P et $\Delta_{P'}$ sont perpendiculaires si, et seulement si les points P et P' sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}$.

Droite de Simson . Droite de Steiner .

$4^{\text{ème}}$ partie (suite) : droites de Simson perpendiculaires .

Soit H l'orthocentre du triangle ABC .
Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
Soit P et P' deux points diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}$.
4°) Démontrer que les droites de Simson Δ_P et $\Delta_{P'}$ (qui sont perpendiculaires) sont sécantes en un point R du cercle d'Euler $\mathcal{C}'$ du triangle ABC .



Notions utilisées :
* *homothéties*
* *cercle d'Euler*

4°) Les points P et P' sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}$, donc :

voir page 52 Δ_P et $\Delta_{P'}$, qui sont perpendiculaires, sont sécantes en un point R .

voir page 12 On sait que le cercle d'Euler $\mathcal{C}'$ du triangle ABC est l'homothétique par $\mathcal{H}(H, \frac{1}{2})$ du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ce triangle .

Soit I = m(H , P) ; I' = m(H , P')

$\mathcal{H}(H, \frac{1}{2})$: $P \longmapsto I$ $\qquad$ $P \in \mathcal{C}$ donc $I \in \mathcal{C}'$

$P' \longmapsto I'$ $\qquad$ $P' \in \mathcal{C}$ donc $I' \in \mathcal{C}'$

$O \longmapsto O'$

O est le centre du cercle $\mathcal{C}$, donc O' est le centre du cercle $\mathcal{C}'$;

l'homothétie " conserve les milieux " et, par conséquent :

O = m(P , P') implique : O' = m(I , I')

[II'] est donc un diamètre du cercle $\mathcal{C}'$.

$\Delta_P \perp \Delta_{P'}$ permet d'écrire : $\overrightarrow{RI} \perp \overrightarrow{RI'}$

Le point R appartient donc au cercle de diamètre [II'] , c'est à dire : $\boxed{R \in \mathcal{C}'}$

Droite de Simson . Droite de Steiner .

5^{eme} partie : une propriété des droites de Simson .

Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan euclidien . Soit M_1 , M_2 , M_3 , M_4 quatre points distincts du cercle $\mathcal{C}$ et (p , q , r , s) une permutation des indices 1 , 2 , 3 , 4 Démontrer que : Les quatre droites de Simson des points M_p par rapport aux triangles $M_qM_rM_s$ ont un point commun Ω .

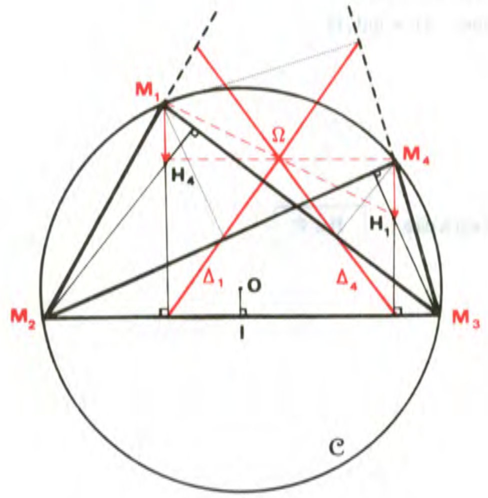


figure 1

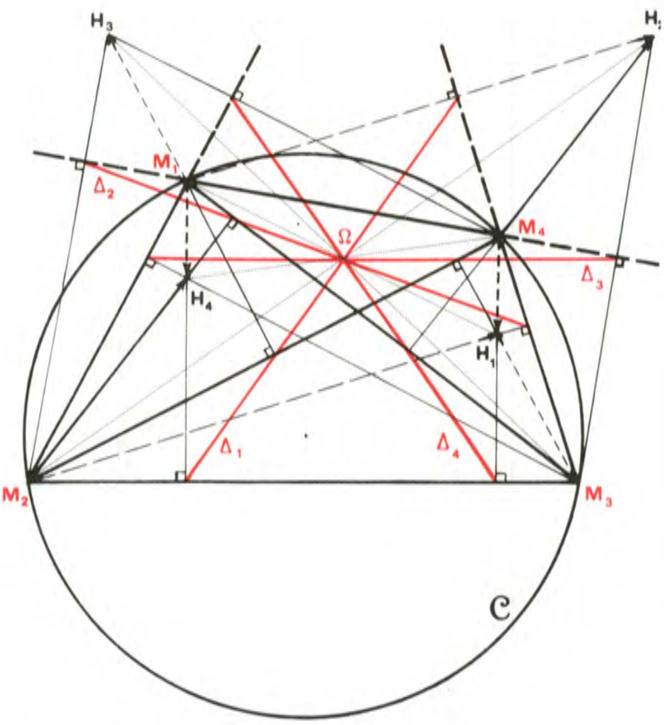


figure 2

Notions utilisées :
* *droites de Simson*
* *orthocentre d'un triangle*
* *équipollence de bipoints*

voir page 8	Rappels : * Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, l'orthocentre H de ce triangle vérifie : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

* La droite de Simson de tout point P de $\mathcal{C}$ par rapport au triangle ABC contient le milieu du bipoint (P, H) .

Soit Δ_1 la droite de Simson du point M_1 relative au triangle $M_2M_3M_4$ d'orthocentre H_1 .

Alors Δ_1 contient le milieu du bipoint (M_1, H_1) .

De même,

Soit Δ_p la droite de Simson du point M_p relative au triangle $M_qM_rM_s$ d'orthocentre H_p .

Alors Δ_p contient le milieu du bipoint (M_p, H_p) .

On va démontrer que : le milieu de (M_i, H_i) est un point Ω indépendant du choix de l'indice i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

voir page 49 Démontrons, par exemple, que : $m(M_1, H_1) = m(M_4, H_4)$.

Il suffit donc de prouver que : $\overrightarrow{M_1H_4} = \overrightarrow{M_4H_1}$.

Puisque H_4 est orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O,

voir figure 1

on a : $\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$

et, par conséquent : $\overrightarrow{OH_4} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$

c'est à dire : $\overrightarrow{M_1H_4} = 2\overrightarrow{OI}$ (où I désigne le milieu de (M_2, M_3)) (1)

Puisque H_1 est orthocentre du triangle $M_2M_3M_4$, lui aussi inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O,

on a également : $\overrightarrow{M_4H_1} = 2\overrightarrow{OI}$ (2)

Des relations (1) et (2), on déduit : $\overrightarrow{M_4H_1} = \overrightarrow{M_4H_1}$

ce qui démontre que : $m(M_1, H_1) = m(M_4, H_4)$

voir figure 2

De même, on démontre que : $\begin{cases} m(M_1, H_1) = m(M_2, H_2) \\ m(M_1, H_1) = m(M_3, H_3) \end{cases}$

Les quatre milieux des bipoints (M_1, H_1), (M_2, H_2), (M_3, H_3), (M_4, H_4) sont donc confondus en un point Ω .

conclusion

> Les quatre droites de Simson $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, qui contiennent les milieux respectifs des bipoints (M_1, H_1), (M_2, H_2), (M_3, H_3), (M_4, H_4) sont donc concourantes en Ω .

Point de Miquel . Cercle de Miquel .

1ère partie : point de Miquel .

Soit ABC un triangle .
Soit d une transversale de ce triangle, c'est à dire une droite coupant (BC) , (CA) , (AB) en des points respectifs D , E , F distincts des sommets A , B , C du triangle .

1°) Démontrer que :
les quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ respectivement circonscrits aux triangles ABC , DBF , AEF , DCE sont concourants .

Le point de concours K de ces quatre cercles est dit point de Miquel du quadrilatère complet ABCDEF .

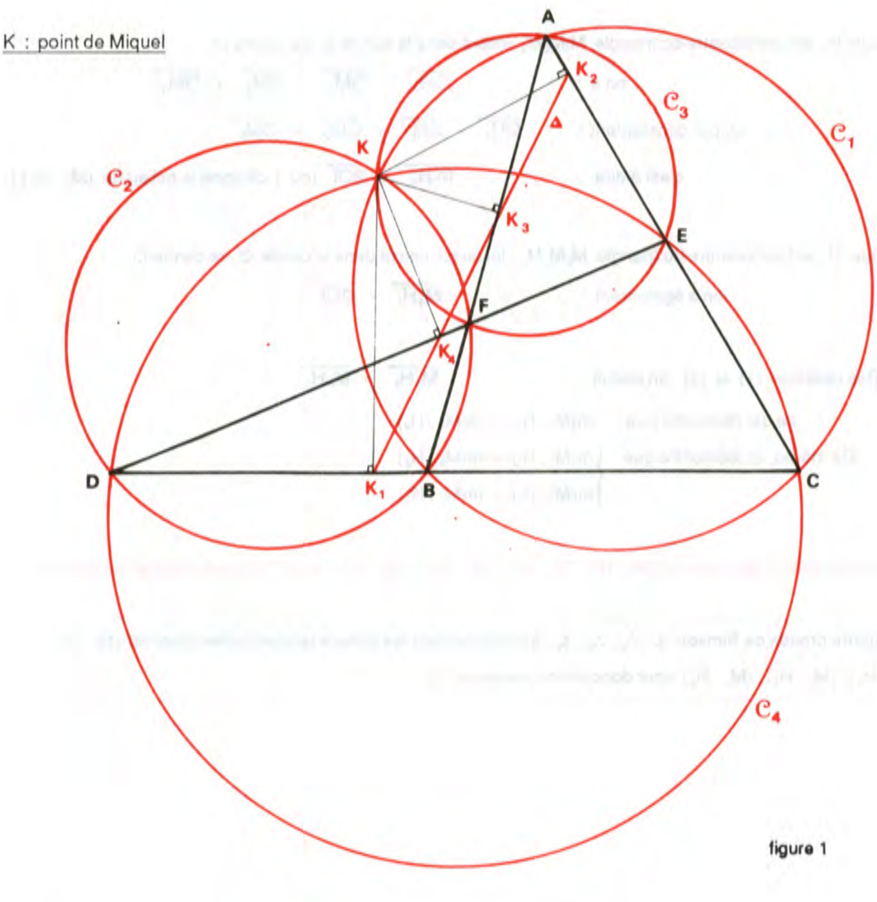


figure 1

Notions utilisées : • *droite de Simson*
• *homothétie .*

1°) a) Considérons seulement deux cercles parmi les quatre : par exemple $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

* $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont au moins le point B en commun .
* $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles distincts ($D \in \mathcal{C}_2$ mais $D \notin \mathcal{C}_1$) .
* Peut-on avoir $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents en B ?

Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ étaient tangents en B , alors B serait le centre d'une homothétie $\mathcal{H}$ transformant $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$. $\mathcal{H}$ laisserait globalement invariantes les droites (BC) et (BA) qui contiennent B .

On a : $C \in (BC) \cap \mathcal{C}_1$ et $A \in (BA) \cap \mathcal{C}_1$.

On aurait : $\mathcal{H}(C) \in (BC) \cap \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{H}(A) \in (BA) \cap \mathcal{C}_2$.

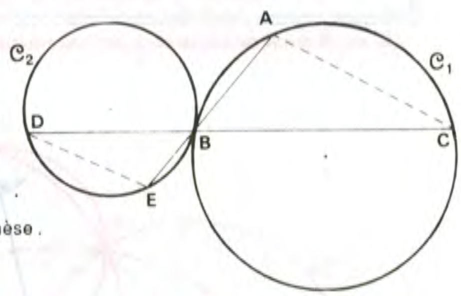
On aurait : $\mathcal{H}(C) \in \{B, D\}$ et $\mathcal{H}(A) \in \{B, E\}$.

Puisque B n'a qu'un antécédent par $\mathcal{H}$ (qui est B lui-même) ,

on aurait donc : $\mathcal{H}(C) = D$ et $\mathcal{H}(A) = E$.

L'image, par $\mathcal{H}$, de la droite (CA) serait la droite (DE) .

On aurait donc : (DE) // (CA) , ce qui contrarie l'hypothèse .



conclusion : Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont donc en commun exactement deux points : l'un est B ; nommons l'autre K .

1°) b)

voir page 42 Démontrons que : $K \in \mathcal{C}_3$ et $K \in \mathcal{C}_4$ (voir variante au b) bis)

* $K \in \mathcal{C}_1$, et $\mathcal{C}_1$ est le cercle circonscrit au triangle ABC . Donc :
  les projetés orthogonaux K_1, K_2, K_3 de K respectivement sur (BC) , (CA) , (AB) sont alignés sur la droite de Simson Δ de K relative au triangle ABC .
* $K \in \mathcal{C}_2$, et $\mathcal{C}_2$ est le cercle circonscrit au triangle DBF . Donc :
  les projetés orthogonaux K_1, K_3, K_4 de K respectivement sur (DB) , (BF) , (FD) sont alignés sur la droite de Simson de K relative au triangle DBF .

finalement : K_1, K_2, K_3, K_4 sont alignés sur la droite Δ (remarquer : $K_1 \neq K_3$ puisque $K \neq B$, et $\Delta = (K_1K_3)$)

** Puisque K_2, K_3, K_4 sont alignés et que K_2, K_3, K_4 sont projetés respectifs de K sur (AE) , (AF) , (FE) ,
alors : K appartient au cercle circonscrit $\mathcal{C}_3$ au triangle AEF .

** On a aussi $\begin{cases} K_1, K_2, K_4 \text{ alignés} \\ K_1, K_2, K_4 \text{ projetés respectifs de } K \text{ sur } (DC), (CE), (ED) \end{cases}$

conclusion donc : K appartient au cercle circonscrit $\mathcal{C}_4$ au triangle DCE .

$$\boxed{K \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4}$$

Remarquons que K est l'unique point commun à $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$.

S'il en existait un autre, J, J appartiendrait à $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ donc J serait le point B . Or B n'appartient pas à $\mathcal{C}_4$ puisque les points D , B , C sont alignés et distincts .

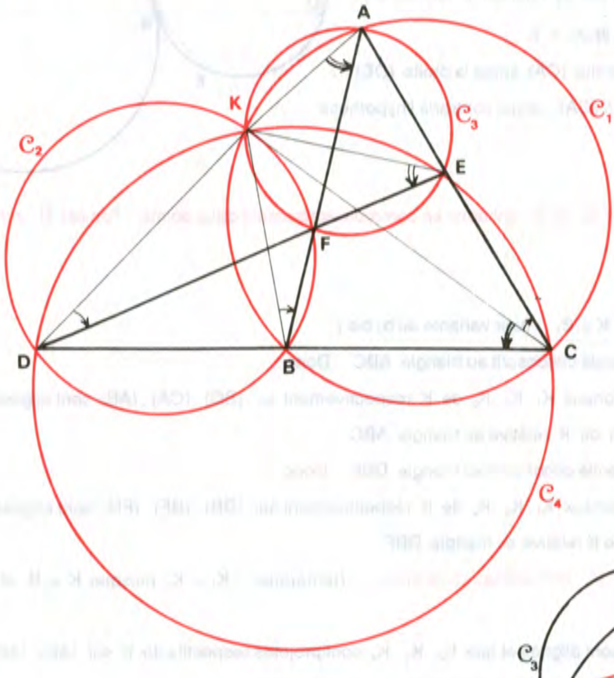
Point de Miquel . Cercle de Miquel .

2eme partie : cercle de Miquel .

> **Démontrer que :**
> 2°) Les centres respectifs Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ appartiennent à un même cercle.

$\mathcal{M}$ est dit cercle de Miquel du quadrilatère complet ABCDEF .

figure 2



K : point de Miquel

$\mathcal{M}$: cercle de Miquel
$\mathcal{M}$ contient Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, K

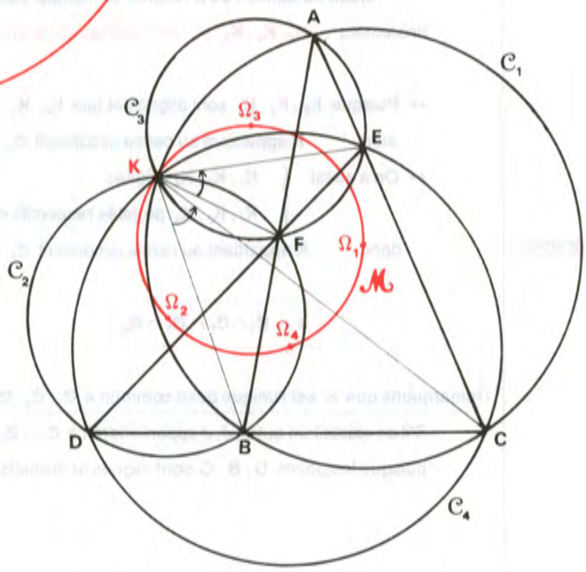


figure 3

Notions utilisées :
- *points cocycliques .*
- *angles orientés de droites à "côtés" respectivement perpendiculaires .*

1°) b) bis Démontrons que $K \in \mathcal{C}_3$ et $K \in \mathcal{C}_4$ sans utiliser la propriété de Simson .

voir page 59 On sait déjà que : $K \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 - \{B\}$.

Démontrons que K est distinct des points A , C , D , E , F .

voir figure 2 * Si on avait , par exemple $K = A$,

le cercle $\mathcal{C}_2$, contenant B , F , K contiendrait trois points distincts alignés B , F , A ,

* d'où l'absurdité

* Les points K , D , B , F sont cocycliques sur $\mathcal{C}_2$, donc : $\overline{(DK, DF)} \equiv \overline{(BK, BF)}$ (π) (1)

* Les points K , A , B , C sont cocycliques sur $\mathcal{C}_1$, donc : $\overline{(CK, CA)} \equiv \overline{(BK, BA)}$ (π) (2)

Des relations (1) et (2) , on déduit par transitivité (puisque (BF) = (BA)) :

$\overline{(DK, DF)} \equiv \overline{(CK, CA)}$ (π) , que nous lisons : $\overline{(DK, DE)} \equiv \overline{(CK, CE)}$ (π) (3)

La relation (3) traduit que les points K , D , C , E sont cocycliques (D , C , E étant non alignés)

donc : $K \in \mathcal{C}_4$.

* Les points K , A , B , C sont cocycliques sur $\mathcal{C}_1$, donc : $\overline{(AK, AB)} \equiv \overline{(CK, CB)}$ (π) (4)

La relation (3) ci-dessus assure que les points K , D , C , E sont cocycliques sur $\mathcal{C}_4$, donc que :

$\overline{(EK, ED)} \equiv \overline{(CK, CD)}$ (π) (5)

Des relations (4) et (5) , on déduit par transitivité (puisque (CD) = (CB)) :

$\overline{(AK, AB)} \equiv \overline{(EK, ED)}$ (π) , que nous lisons : $\overline{(AK, AF)} \equiv \overline{(EK, EF)}$ (π) (6)

La relation (6) traduit que les points K , A , E , F sont cocycliques (A , E , F étant non alignés)

donc : $K \in \mathcal{C}_3$

2°) Démontrons que les points $\Omega_1 , \Omega_2 , \Omega_3 , \Omega_4$ sont cocycliques .

Démontrons que les points $\Omega_1 , \Omega_2 , \Omega_3 , \Omega_4$ sont distincts .

* Si on avait $\Omega_1 = \Omega_2$, on aurait $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ puisque $B \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Le point D , qui appartient à $\mathcal{C}_2$, appartiendrait à $\mathcal{C}_1$.

Le cercle $\mathcal{C}_1$ contiendrait B , C , et ... D . Or les points B , C , D sont alignés et distincts .

* d'où la contradiction .

Démontrons que : $\overline{(\Omega_3\Omega_2 , \Omega_3\Omega_4)} \equiv \overline{(\Omega_1\Omega_2 , \Omega_1\Omega_4)}$ (π) (e)

voir figure 3 $\Omega_3 \in \text{med}(K, F)$ car $\mathcal{C}_3$ contient K et F .

$\Omega_2 \in \text{med}(K, F)$ car $\mathcal{C}_2$ contient K et F . donc : $(\Omega_3\Omega_2) = \text{med}(K, F)$

On a donc $(\Omega_3\Omega_2) \perp (KF)$, et , de même , $(\Omega_3\Omega_4) \perp (KE)$

On en déduit : $\overline{(KF, KE)} \equiv \overline{(\Omega_3\Omega_2 , \Omega_3\Omega_4)}$ (π) (7)

De même $(\Omega_1\Omega_2) \perp (KB)$ et $(\Omega_1\Omega_4) \perp (KC)$, donc : $\overline{(KB, KC)} \equiv \overline{(\Omega_1\Omega_2 , \Omega_1\Omega_4)}$ (π) (8)

Par ailleurs ,

* Les points K , A , B , C sont cocycliques sur $\mathcal{C}_1$, donc : $\overline{(KB, KC)} \equiv \overline{(AB, AC)}$ (π) (9)

* Les points K , A , E , F sont cocycliques sur $\mathcal{C}_3$, donc : $\overline{(KF, KE)} \equiv \overline{(AF, AE)}$ (π) (10)

Des relations (9) et (10) , on déduit , puisque (AB) = (AF) et (AC) = (AE) :

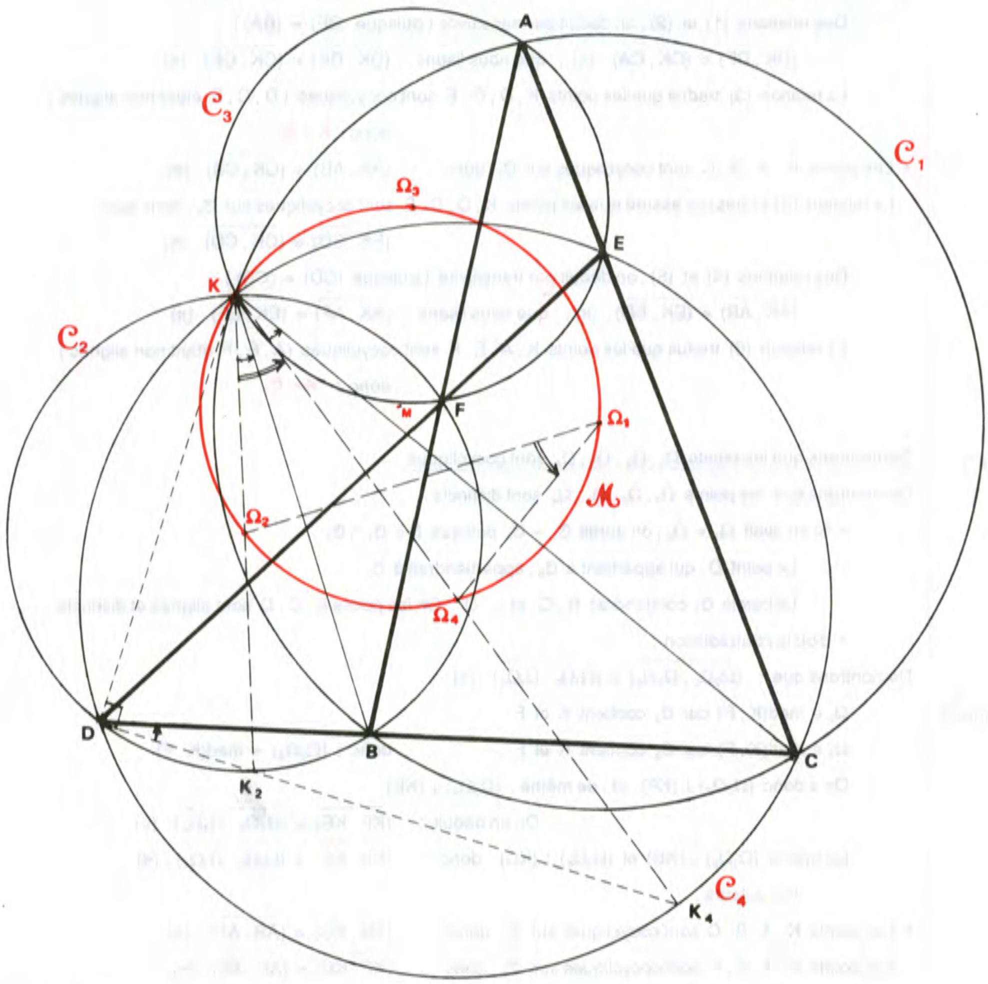
$\overline{(KB, KC)} \equiv \overline{(KF, KE)}$ (π) (11)

Les relations (7) , (8) et (11) démontrent que : $\overline{(\Omega_3\Omega_2 , \Omega_3\Omega_4)} \equiv \overline{(\Omega_1\Omega_2 , \Omega_1\Omega_4)}$ (π)

Point de Miquel . Cercle de Miquel

3[eme] partie : le point de Miquel appartient au cercle de Miquel .

Démontrer que :
3°) Le point de Miquel K appartient au cercle de Miquel $\mathcal{M}$ contenant les points $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$



Notion utilisée : • cocyclicité

figure 4

suite de la 2^{eme} partie

On a démontré que : $\overline{(\Omega_3\Omega_2 , \Omega_3\Omega_4)} \equiv \overline{(\Omega_1\Omega_2 , \Omega_1\Omega_4)}$ (π)

Les points $\Omega_1 , \Omega_2 , \Omega_3 , \Omega_4$ sont donc cocycliques ou alignés .

voir page 61

Démontrons qu'ils ne sont pas alignés .

$\Omega_3 \in$ med(K , A) car $\mathcal{C}_3$ contient K et A .

$\Omega_1 \in$ med(K , B) car $\mathcal{C}_1$ contient K et B .

$\Omega_4 \in$ med(K , C) car $\mathcal{C}_4$ contient K et C .

* Si les points $\Omega_1 , \Omega_3 , \Omega_4$ étaient alignés (sur une droite d) , les droites (KA) , (KB) , (KC) , perpendiculaires à d et contenant le point K , seraient confondues . Les points A , B , C seraient donc alignés ,
* d'où la contradiction .

conclusion

$\boxed{\text{Les points } \Omega_1, \Omega_2 , \Omega_3 , \Omega_4 \text{ sont cocycliques}}$. Soit $\mathcal{M}$ le cercle qui les porte .

3^{eme} partie

3°) Démontrons que : K $\in \mathcal{M}$.

Il suffit de démontrer que les points K , $\Omega_1, \Omega_2 , \Omega_4$ sont cocycliques (car $\Omega_1, \Omega_2 , \Omega_3 , \Omega_4$ sont distincts) .

Démontrons donc que : $\overline{(K\Omega_2 , K\Omega_4)} \equiv \overline{(\Omega_1\Omega_2 , \Omega_1\Omega_4)}$ (π) .

Soit K_2 et K_4 les points diamétralement opposés de K , respectivement sur les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$.

utilisons la relation de Chasles : $\overline{(K\Omega_2 , K\Omega_4)} \equiv \overline{(K\Omega_2 , KB)} + \overline{(KB , KC)} + \overline{(KC , K\Omega_4)}$ (π)

c'est à dire : $\overline{(K\Omega_2 , K\Omega_4)} \equiv \overline{(KK_2 , KB)} + \overline{(KB , KC)} + \overline{(KC , KK_4)}$ (π) (9)

voir figure 4

* D , K_2 , B , K sont cocycliques sur $\mathcal{C}_2$, donc : $\overline{(KK_2 , KB)} \equiv \overline{(DK_2 , DB)}$ (π)
* D , K_4 , C , K sont cocycliques sur $\mathcal{C}_4$, donc : $\overline{(KC , KK_4)} \equiv \overline{(DC , DK_4)}$ (π)

voir page 61

En outre, d'après 2°) relation (8) , on a : $\overline{(KB , KC)} \equiv \overline{(\Omega_1\Omega_2 , \Omega_1\Omega_4)}$ (π)

La relation (9) s'écrit alors : $\overline{(K\Omega_2 , K\Omega_4)} \equiv \overline{(DK_2 , DB)} + \overline{(\Omega_1\Omega_2 , \Omega_1\Omega_4)} + \overline{(DC , DK_4)}$ (π)

Or $\begin{cases} (DK_2) = (DK_4) \quad \text{puisque} \quad (DK_2) \perp (DK) \quad \text{et} \quad (DK_4) \perp (DK) \\ (DB) = (DC) \end{cases}$

La relation précédente s'écrit donc : $\overline{(K\Omega_2 , K\Omega_4)} \equiv \overline{(DK_2 ,DB)} + \overline{(\Omega_1\Omega_2 , \Omega_1\Omega_4)} + \overline{(DB , DK_2)}$ (π)

c'est à dire : $\overline{(K\Omega_2 , K\Omega_4)} = \overline{(\Omega_1\Omega_2 , \Omega_1\Omega_4)} + 0$ (π)

conclusion

$\boxed{\text{Le point K appartient au cercle contenant } \Omega_1, \Omega_2 , \Omega_4 : K \in \mathcal{M}}$

remarque

* Si K_2 = D , alors $K_4 \neq$ D , sinon on aurait m(K , K_2) = m(K , K_4) donc $\Omega_2 = \Omega_4$.

La démonstration précédente reste valable en y remplaçant la droite (DK_2) par la tangente en D à $\mathcal{C}_2$, qui est alors la droite (DK_4) .

Point de Miquel

4^{eme} partie : point de Miquel et centre de similitudes

Soit ABC un triangle dans un plan orienté .
Une transversale de ce triangle coupe les droites (BC) , (CA) , (AB) respectivement aux points D , E , F , distincts des sommets A , B , C .
Soit $\mathcal{S}_1$ la similitude <u>directe</u> transformant A en C et F en D .
Soit $\mathcal{S}_2$ la similitude <u>directe</u> transformant A en F et C en D .
4°) Démontrer que : les similitudes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ ont même centre de similitude, qui est le point K , K étant le point de Miquel du quadrilatère complet ABCDEF .

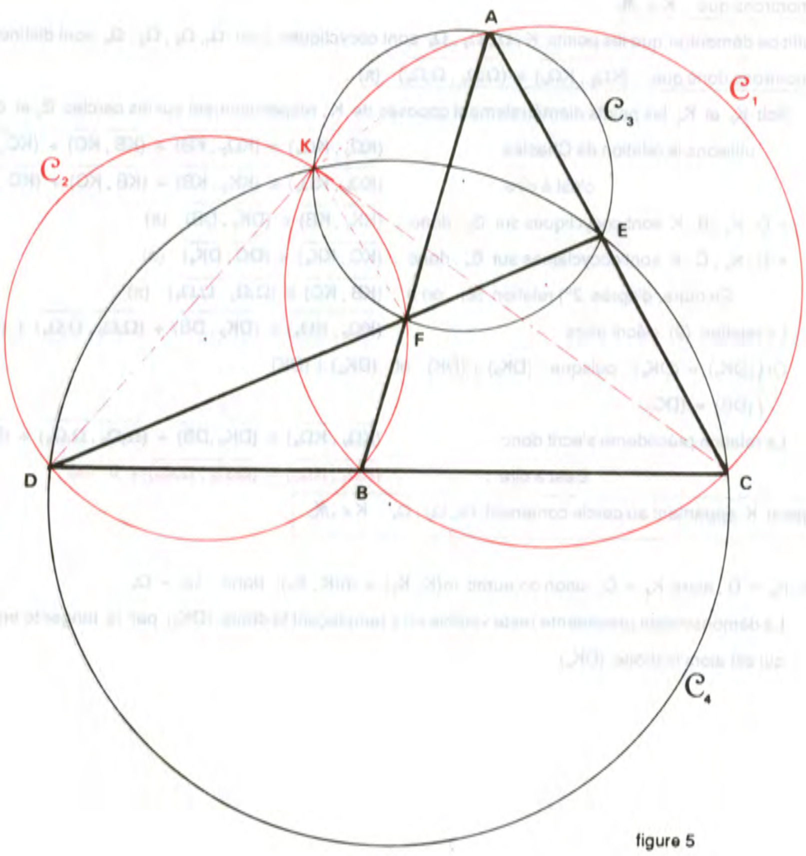


figure 5

<u>Notions utilisées</u> : * *points cocycliques*
* *similitude directe*

4°) a) On sait qu'il existe une unique similitude directe $\mathcal{S}_1$ transformant deux points donnés distincts A et F respectivement en C et D .

* $\mathcal{S}_1$ n'est pas une translation (puisque l'image de la droite (AF) est la droite (CD) , non parallèle à (AF)).

Soit donc : $\begin{cases} I_1 \text{ le centre de } \mathcal{S}_1 \\ \alpha \text{ une mesure de l'angle de } \mathcal{S}_1 \end{cases}$ $\qquad \mathcal{S}_1 : \begin{array}{l} A \longmapsto C \\ F \longmapsto D \\ I_1 \longmapsto I_1 \end{array}$

On a alors $\begin{cases} \overline{(\overrightarrow{I_1A}, \overrightarrow{I_1C})} \equiv \alpha \quad (2\pi) \\ \overline{(\overrightarrow{I_1F}, \overrightarrow{I_1D})} \equiv \alpha \quad (2\pi) \\ \overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CD})} \equiv \alpha \quad (2\pi) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \overline{(I_1A, I_1C)} \equiv \alpha \quad (\pi) & (1) \\ \overline{(I_1F, I_1D)} \equiv \alpha \quad (\pi) & (2) \\ \overline{(AF, CD)} \equiv \alpha \quad (\pi) & (3) \end{cases}$

La relation (3) s'écrit aussi : $\overline{(BA, BC)} \equiv \alpha \quad (\pi)$ (3')

Des relations (1) et (3') , on déduit : $\overline{(I_1A, I_1C)} \equiv \overline{(BA, BC)} \quad (\pi)$

Donc les points I_1 , A , B , C sont cocycliques (puisque A , B , C sont non alignés) .

* Le point I_1 appartient alors au cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle ABC .

La relation (3) s'écrit encore : $\overline{(BF, BD)} \equiv \alpha \quad (\pi)$ (3")

Des relations (2) et (3") , on déduit : $\overline{(I_1F, I_1D)} \equiv \overline{(BF, BD)} \quad (\pi)$

Donc les points I_1 , B , F , D sont cocycliques (puisque B , F , D sont non alignés) .

* Le point I_1 appartient alors au cercle $\mathcal{C}_2$ circonscrit au triangle BFD .

voir figure 5 finalement : $I_1 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Or on sait que : $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{ B , K \}$, où K est le point de Miquel du quadrilatère complet ABCDEF .

<u>Justifions que Ω_1 n'est pas le point B</u> .

* Si le centre de $\mathcal{S}_1$ était B , on aurait : $\qquad \mathcal{S}_1 : \begin{array}{l} A \longmapsto C \\ F \longmapsto D \\ B \longmapsto B \end{array}$

$\mathcal{S}_1$, similitude , conserve le barycentre .

Puisque B , A , F sont alignés et distincts, il existe un réel λ tel que $\lambda \neq 1$ et $\overrightarrow{BA} = \lambda \overrightarrow{BF}$ (4)

On reconnait : $B = \text{Bar}\{ (A , 1) , (F , -\lambda) \}$. Alors $\mathcal{S}_1(B) = \text{Bar}\{ (C , 1) , (D , -\lambda) \}$

Si on avait $\mathcal{S}_1(B) = B$, on aurait donc aussi : $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{BD}$ (5)

Des relations (4) et (5) , on déduirait : $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{FD}$ d'où (AC) // (FD) .

* ce qui contrarie l'hypothèse , puisque les droites (FD) et (AC) sont sécantes .

<u>conclusion</u> $\boxed{\text{Le centre } I_1 \text{ de la similitude } \mathcal{S}_1 \text{ est donc le point K .}}$

4°) b) On démontre, par la même méthode, que la similitude $\mathcal{S}_2$ transformant les points A et C respectivement en F et D n'est pas une translation .

Soit I_2 son centre . Alors $\begin{cases} \text{les points } I_2 , A , F , E \text{ sont cocycliques} \\ \text{les points } I_2 , C , D , E \text{ sont cocycliques .} \end{cases}$

Donc $I_2 \in \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$ ($\mathcal{C}_3$ étant le cercle circonscrit au triangle AFE et $\mathcal{C}_4$ le cercle circonscrit au triangle CDE) .

On a $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4 = \{ E , K \}$. On prouve, comme ci-dessus , que $\mathcal{S}_2(E) \neq E$.

<u>conclusion</u> $\boxed{\text{Le centre } I_2 \text{ de la similitude } \mathcal{S}_2 \text{ est donc le point K .}}$

Paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle .

Soit ABC un triangle donné . Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC . Démontrer :

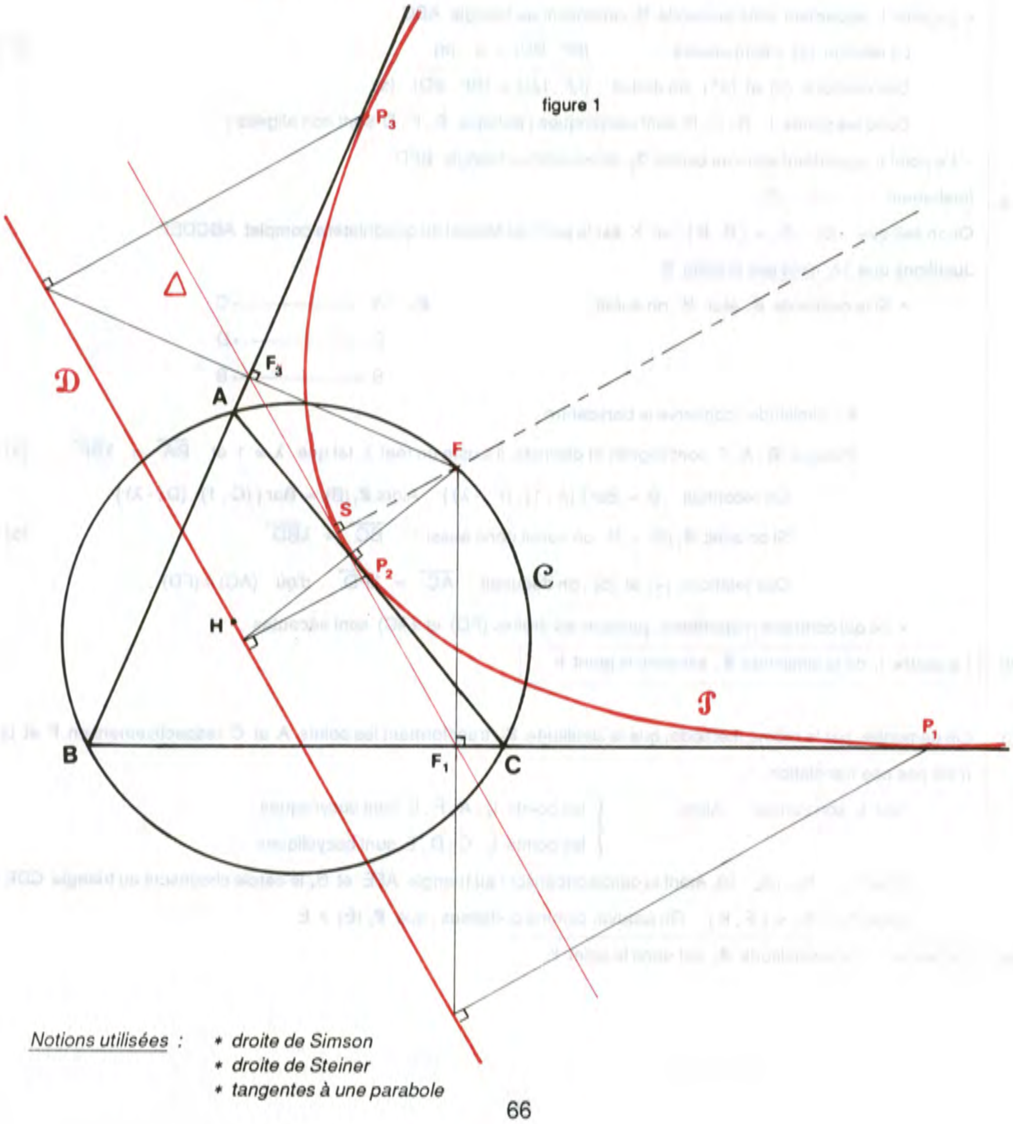
1°) Si $\mathcal{P}$ est une parabole tangente aux droites (AB) , (BC) , (CA) , alors :

* son foyer appartient au cercle $\mathcal{C}$ privé des points A , B , C .
* sa directrice $\mathcal{D}$ est la droite de Steiner de F relativement au triangle ABC .

2°) Réciproquement,

tout point M de $\mathcal{C}$ - { A , B , C } est foyer d'une parabole $\mathcal{P}_M$ tangente aux droites (AB) , (BC) , (CA).
La directrice $\mathcal{D}_M$ de cette parabole $\mathcal{P}_M$ est la droite de Steiner de M relativement au triangle ABC .

figure 1



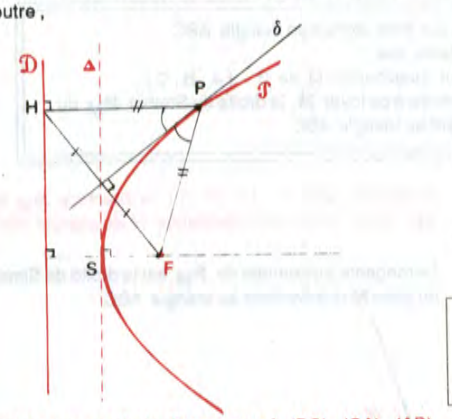
Notions utilisées :

* *droite de Simson*
* *droite de Steiner*
* *tangentes à une parabole*

rappel Tout point P d'une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, vérifie :

PF = PH où H désigne le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{D}$.

En outre,



* La tangente δ en P à $\mathcal{P}$ est la médiatrice de (H, F) .
* Le symétrique de F par rapport à δ est H ; il appartient donc à la directrice $\mathcal{D}$.
* Le projeté orthogonal de F sur δ, qui est m(H, F), est aussi homothétique de H par $\mathcal{H}(F, \frac{1}{2})$.
* Par $\mathcal{H}(F, \frac{1}{2})$, l'image de $\mathcal{D}$ est la tangente Δ au sommet S de la parabole $\mathcal{P}$, donc :

le projeté orthogonal du foyer F sur la tangente δ en un point quelconque P de $\mathcal{P}$ appartient à la tangente Δ au sommet de $\mathcal{P}$.

1°) S'il existe une parabole $\mathcal{P}$ tangente à (BC), (CA), (AB) , soit F le foyer de $\mathcal{P}$.

* les projetés orthogonaux F_1, F_2, F_3 du foyer F sur les tangentes respectives (BC), (CA), (AB) à $\mathcal{P}$

voir figure 1 appartiennent à la tangente Δ au sommet de $\mathcal{P}$. Puisque F_1, F_2, F_3 sont alors alignés,

Le foyer F appartient donc au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .

* la tangente Δ portant F_1, F_2, F_3 est alors la droite de Simson du point F relativement au triangle ABC .

La directrice $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$, homothétique de Δ par $\mathcal{H}(F, 2)$, est donc la droite de Steiner du point F relativement au triangle ABC .

Démontrons qu'on a : $F \neq A$; $F \neq B$; $F \neq C$.

* Supposons, par exemple : F = A,

la droite de Simson du point A relativement au triangle ABC est la hauteur issue de A dans ce triangle, donc contient le point A ;

le foyer F de $\mathcal{P}$ appartiendrait donc à la tangente Δ au sommet de $\mathcal{P}$,

* d'où l'absurdité ($F \notin \mathcal{D}$ donc $F \notin \Delta$) .

On a donc : $\boxed{F \in \mathcal{C} - \{A, B, C\}}$

Propriété : il existe une infinité de paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle ABC .
Ce sont toutes les paraboles , notées $\mathcal{P}_M$ telles que :

$\mathcal{P}_M$ admette :
- * pour foyer un point quelconque M de $\mathcal{C}$ - { A , B , C } .
- * pour directrice associée à ce foyer M , la droite de Steiner $\mathcal{D}_M$ du point M relativement au triangle ABC .

Quand M décrit $\mathcal{C}$ - { A , B , C } , la directrice $\mathcal{D}_M$ de $\mathcal{P}_M$ pivote autour de l'orthocentre H du triangle ABC .

La tangente au sommet de $\mathcal{P}_M$ est la droite de Simson du point M relativement au triangle ABC .

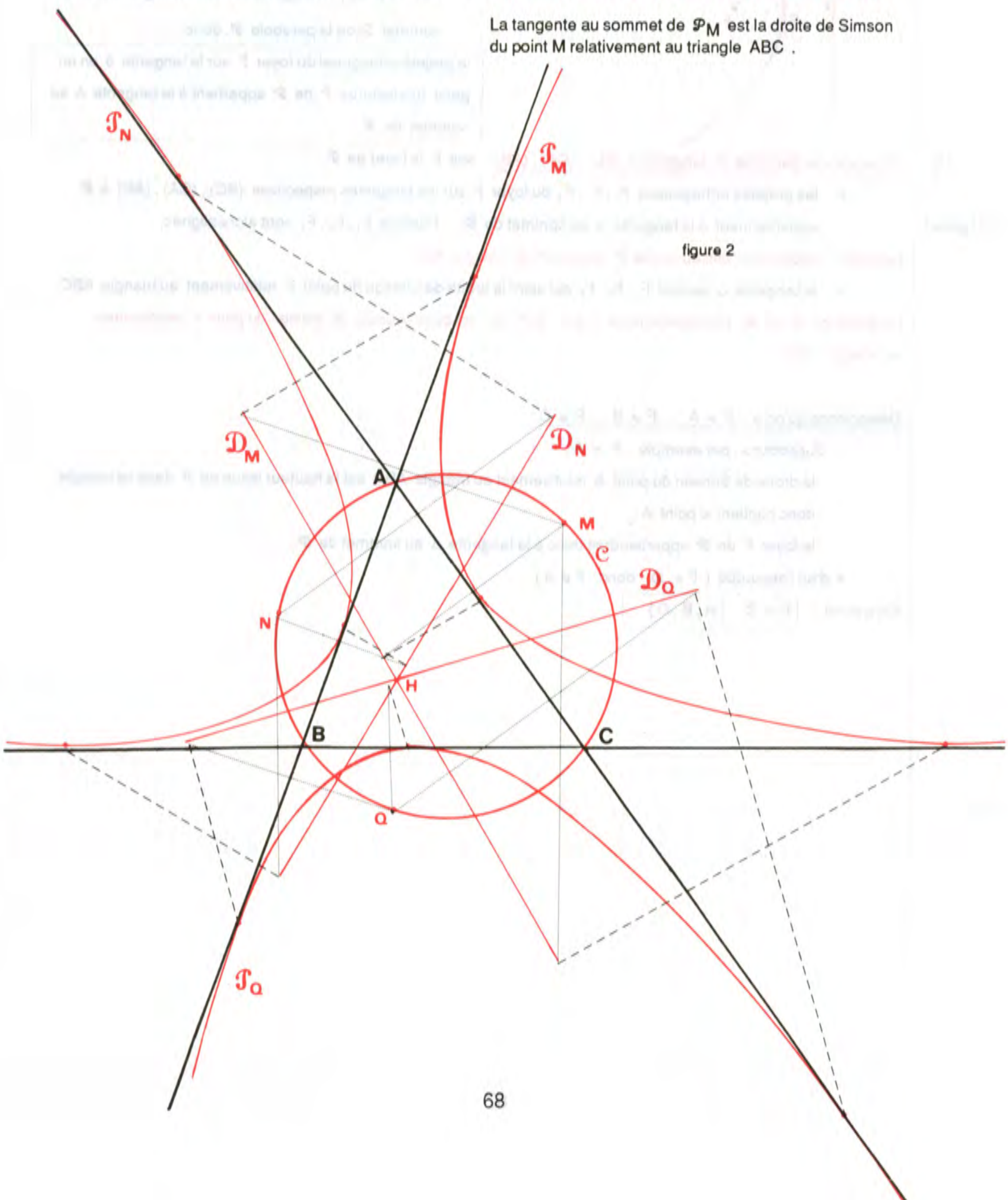


figure 2

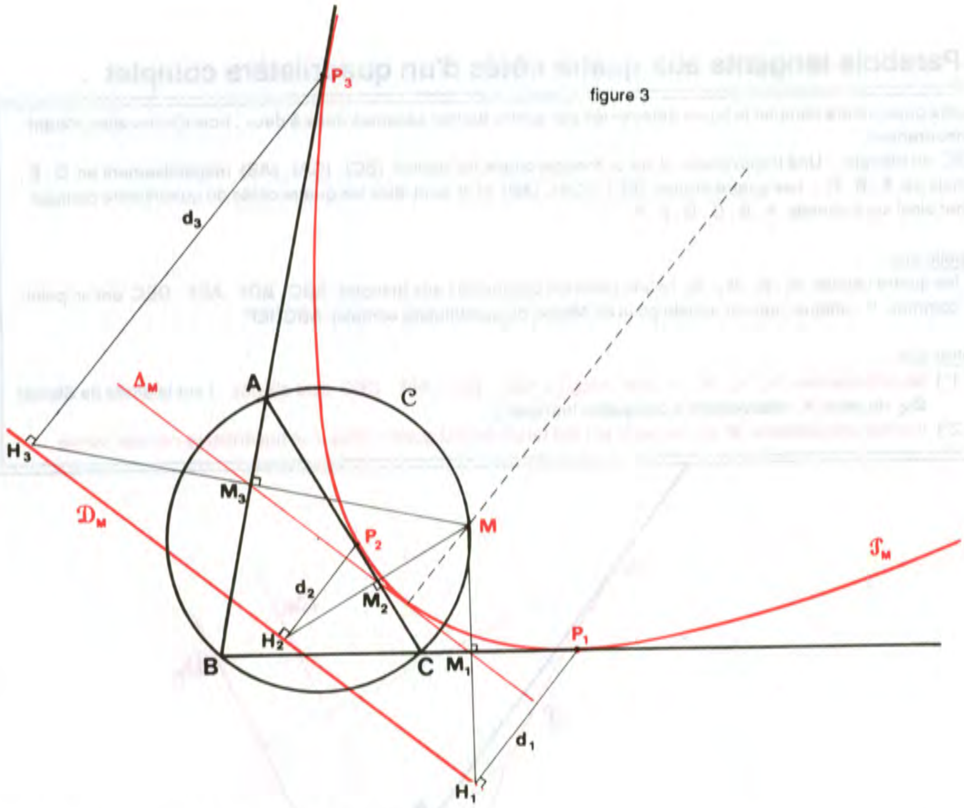


figure 3

2°) réciproque

On suppose $M \in \mathcal{C} - \{A, B, C\}$.
Démontrons que la droite de Simson Δ_M du point M relativement au triangle ABC ne contient pas M .

Rappelons : $M \neq A$, $M \neq B$, $M \neq C$.
Les projetés orthogonaux M_1, M_2, M_3 du point M respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB) sont donc distincts et distincts de M .

* Si on avait : $M \in \Delta_M$, on aurait $(AB) \perp (M_3M)$ donc $(AB) \perp \Delta_M$.
$(AC) \perp (M_2M)$ donc $(AC) \perp \Delta_M$

On aurait donc : $(AB) // (AC)$,

* d où l'absurdité . Donc $M \notin \Delta_M$.

voir figure 3 — Soit $\mathcal{D}_M$ l'homothétique de Δ_M par $\mathcal{H}(M, 2)$, alors $M \notin \mathcal{D}_M$

Considérons alors la parabole $\mathcal{P}_M$, de foyer M , de directrice $\mathcal{D}_M$.

Démontrons que $\mathcal{P}_M$ est tangente à (AB) . Posons $H_3 = S_{AB}(M)$.
Démontrons que la perpendiculaire d_3 en H_3 à $\mathcal{D}_M$ est alors sécante avec la droite (AB) .

* Supposons $d_3 // (AB)$.
Puisque $\mathcal{D}_M \perp d_3$, on aurait $\mathcal{D}_M \perp (AB)$.
$\mathcal{D}_M$ serait alors perpendiculaire à (AB) en contenant H_3 .
$\mathcal{D}_M$ serait (H_3M_3) donc $\mathcal{D}_M$ contiendrait le point M .

* d'où la contradiction. Posons $(AB) \cap d_3 = \{P_3\}$.
(AB) est médiatrice de (M, H_3) et $P_3 \in (AB)$, donc : $P_3M = P_3H_3$.

voir rappel page 67 Puisque $d(P_3, M) = d(P_3, \mathcal{D}_M)$, P_3 appartient à la parabole $\mathcal{P}_M$ de foyer M et de directrice $\mathcal{D}_M$.
En outre, la tangente en P_3 à $\mathcal{P}_M$ est la médiatrice de (M, H_3) . C'est la droite (AB) .

conclusion — $\mathcal{P}_M$ est tangente à (AB) en P_3 .

On démontre de même que : $\mathcal{P}_M$ est tangente à (BC) en P_1 et à (CA) en P_2 .

Parabole tangente aux quatre côtés d'un quadrilatère complet .

On appelle quadrilatère complet la figure déterminée par quatre droites sécantes deux à deux , trois d'entre elles n'étant pas concourantes .
Soit ABC un triangle . Une transversale d de ce triangle coupe les droites (BC) , (CA) , (AB) respectivement en D , E , F , distincts de A , B , C . Les quatre droites (BC) , (CA) , (AB) et d sont dites les quatre côtés du quadrilatère complet qui admet ainsi six sommets A , B , C , D , E , F .

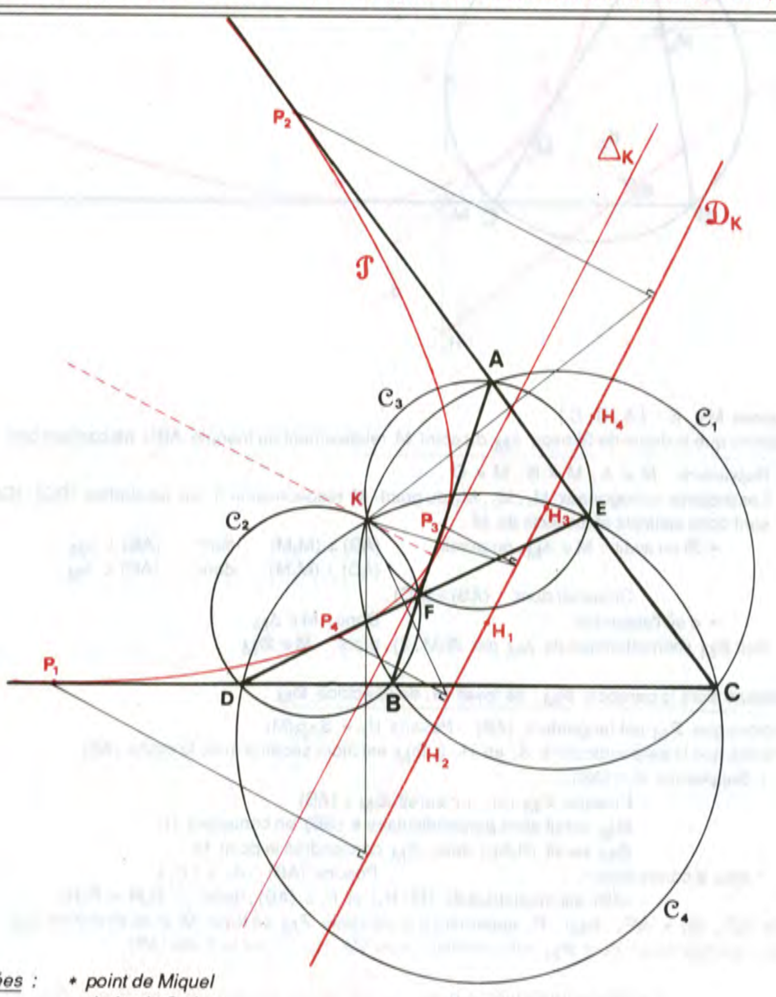
On rappelle que :

les quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ respectivement circonscrits aux triangles ABC , BDF , AEF , DEC ont un point commun K , unique , qui est appelé point de Miquel du quadrilatère complet ABCDEF .

Démontrer que :

1°) les orthocentres H_1 , H_2 , H_3 , H_4 des triangles ABC , BDF , AEF , DEC sont alignés (sur la droite de Steiner $\mathcal{D}_K$ du point K relativement à ces quatre triangles) .

2°) il existe une parabole $\mathcal{P}$ et une seule qui soit tangente aux quatre côtés d'un quadrilatère complet donné .



Notions utilisées :
- *point de Miquel*
- *droite de Steiner*
- *parabole tangente aux trois côtés d'un triangle*

1°) voir page 58

Puisque le point K appartient aux quatre cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$, les projetés orthogonaux de K sur (BC), (CA), (AB), (DE) sont alignés.

La droite Δ_K qui les porte est alors droite de Simson du point K relativement à l'un quelconque des quatre triangles ABC, BDF, AEF, DEC.

Soit $\mathcal{D}_K$ l'homothétique de la droite Δ_K par $\mathcal{H}(K, 2)$. Alors $\mathcal{D}_K$ est droite de Steiner du point K relativement à chacun des triangles ABC, BDF, AEF, DEC.

voir page 46

Donc $\mathcal{D}_K$ contient l'orthocentre de chacun de ces triangles.

<u>conclusion</u>

Les quatre orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 sont donc alignés sur la droite $\mathcal{D}_K$.

2°) S'il existe une parabole $\mathcal{P}$ tangente aux quatre droites (AB), (BC), (CA), d, soit F son foyer et $\mathcal{D}$ sa directrice.

voir page 67

Puisque $\mathcal{P}$ est tangente à (AB), (BC), (CA), alors $F \in \mathcal{C}_1 - \{A, B, C\}$.

Puisque $\mathcal{P}$ est tangente à (AB), (BC), (DE), alors $F \in \mathcal{C}_2 - \{B, D, E\}$.

Donc $F \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 - \{B\}$, d'où : $F = K$ (K : point de Miquel).

voir 2°) page 66

La directrice $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ est alors la droite de Steiner du point K relativement à ABC, et aussi à BDE.

donc : $\mathcal{D} = \mathcal{D}_K$

Une seule parabole $\mathcal{P}$ solution reste donc envisageable : celle de foyer K et de directrice $\mathcal{D}_K$.

Cette solution est-elle acceptée ?

voir 2°) page 69

Le point K appartient à chacun des cercles circonscrits aux triangles ABC, BDF, AEF, DEC.

Le point K est distinct des sommets de ces triangles.

$\mathcal{D}_K$ étant la droite de Steiner du point K relativement à chacun de ces triangles, nous avons établi que :

la parabole $\mathcal{P}$ est tangente aux trois côtés de chacun de ces triangles, c'est à dire aux quatre droites (BC), (CA), (AB), d.

La parabole $\mathcal{P}$ est donc tangente aux quatre côtés du quadrilatère complet donné.

<u>conclusion</u>

Il existe une unique parabole $\mathcal{P}$ tangente aux quatre côtés du quadrilatère complet ABCDEF.

* Son foyer est le point K de Miquel de ce quadrilatère complet.
* Sa directrice est la droite de Steiner $\mathcal{D}_K$ du point K relative à chacun des triangles ABC, BDF, AEF, DEC.

Bissectrices d'un triangle .

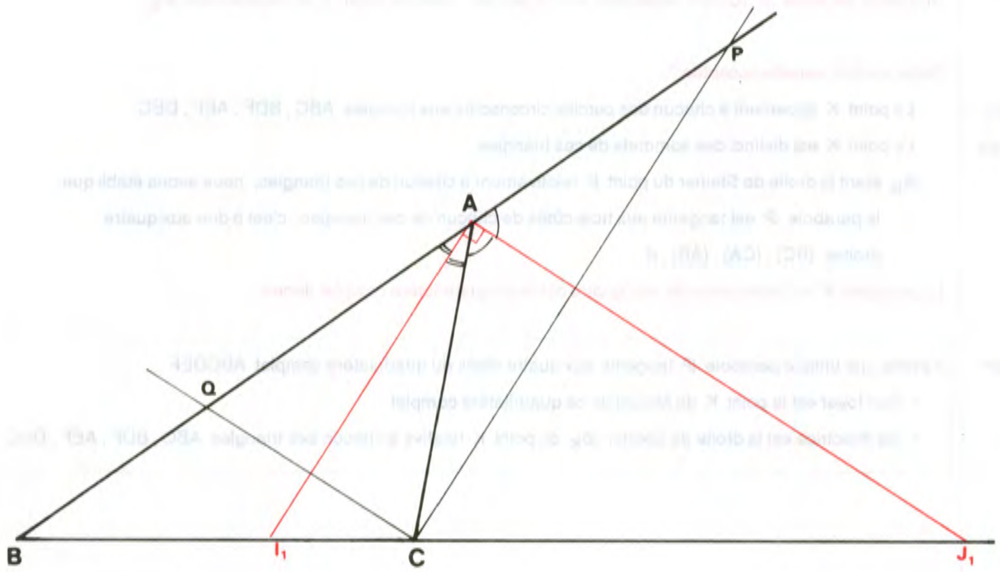
1ère partie : propriétés barycentriques des pieds des bissectrices .

Soit ABC un triangle supposé non isocèle .
On note : $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$.
Soit I_1 le point où la bissectrice de $[\widehat{BAC}]$ coupe la droite (BC) .

1°) a) Démontrer que la bissectrice extérieure de $[\widehat{BAC}]$ coupe (BC) en un point , noté J_1 .

1°) b) Démontrer : $\dfrac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\dfrac{c}{b}$ et $\dfrac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} = \dfrac{c}{b}$

En déduire que : $I_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, c)\}$ et que : $J_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, -c)\}$



On dit que le quadruplet des quatre points alignés distincts (B, C, I_1, J_1) constitue une division harmonique pour exprimer que :

$$\frac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\frac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}}$$

<u>Notions utilisées</u> :
- *bissectrices* *(voir page 210)*
- *barycentre*
- *théorème de Thalès*

1°) a) Démontrons l'existence du point J_1. Soit Δ la bissectrice extérieure de $[\widehat{BAC}]$.

* Supposons $\Delta \,//\, (BC)$.

On sait que : $(AI_1) \perp \Delta$. On aurait donc : $(AI_1) \perp (BC)$.

La bissectrice (AI_1) de $[\widehat{BAC}]$ étant perpendiculaire à (BC), le triangle ABC serait isocèle en A ;

* ce qui contrarie l'hypothèse.

La droite Δ coupe donc (BC) en un point J_1. (AJ_1) est bissectrice extérieure de $[\widehat{BAC}]$, donc $J_1 \notin [BC]$.

1°) b) * Par le point C, menons la parallèle d_1 à la bissectrice (AI_1).

Les droites (I_1A) et (BA) sont sécantes en A. Donc d_1 et (BA) sont sécantes en un point P.

Ce point P vérifie, d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$

Remarquons que $I_1 \in \,]BC[$ donc $\dfrac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} < 0$. Par conséquent : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} < 0$, donc $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = -\dfrac{AB}{AP}$.

Les demi-droites [AB) et [AP) sont donc opposées et (AJ_1) est bissectrice extérieure de $[\widehat{CAB}]$.

Donc (AJ_1) est bissectrice de $[\widehat{CAP}]$. (1)

Par ailleurs, $(AJ_1) \perp (AI_1)$ donc $(AJ_1) \perp (CP)$. (2)

Les relations (1) et (2) démontrent que le triangle CAP est isocèle en A, donc que : AP = AC.

Par conséquent : $\dfrac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\dfrac{AB}{AC}$ c'est à dire : $\boxed{\dfrac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\dfrac{c}{b}}$ (3)

* Par le point C, menons la parallèle d_2 à la bissectrice (AJ_1).

Les droites (J_1A) et (BA) sont sécantes en A. Donc d_2 et (BA) sont sécantes en un point Q.

Ce point Q vérifie, d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$

Remarquons que $J_1 \notin [BC]$ donc $\dfrac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} > 0$. Par conséquent $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} > 0$, donc $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} = \dfrac{AB}{AQ}$.

Les demi-droites [AB) et [AQ) sont confondues et (AI_1) est bissectrice de $[\widehat{CAB}]$.

Donc (AI_1) est bissectrice de $[\widehat{CAQ}]$. (4)

Par ailleurs, $(AI_1) \perp (AJ_1)$ donc $(AI_1) \perp (CQ)$. (5)

Les relations (4) et (5) démontrent que le triangle CAQ est isocèle en A, donc que : AQ = AC.

Par conséquent : $\dfrac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} = \dfrac{AB}{AC}$ c'est à dire : $\boxed{\dfrac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} = \dfrac{c}{b}}$ (6)

* (3) s'écrit : $b\overline{I_1B} + c\overline{I_1C} = 0$, d'où on déduit, puisque les points I_1, B, C sont alignés :

$b\overrightarrow{I_1B} + c\overrightarrow{I_1C} = \overrightarrow{O}$ donc : $\boxed{I_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, c)\}}$

* (6) s'écrit : $b\overline{J_1B} - c\overline{J_1C} = 0$, d'où on déduit, puisque les points J_1, B, C sont alignés :

$b\overrightarrow{J_1B} - c\overrightarrow{J_1C} = \overrightarrow{O}$ donc : $\boxed{J_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, -c)\}}$

Bissectrices d'un angle .

2^{eme} partie : cercles d'Apollonius .

Soit ABC un triangle supposé non isocèle .
On note : a = BC ; b = AC ; c = AB .

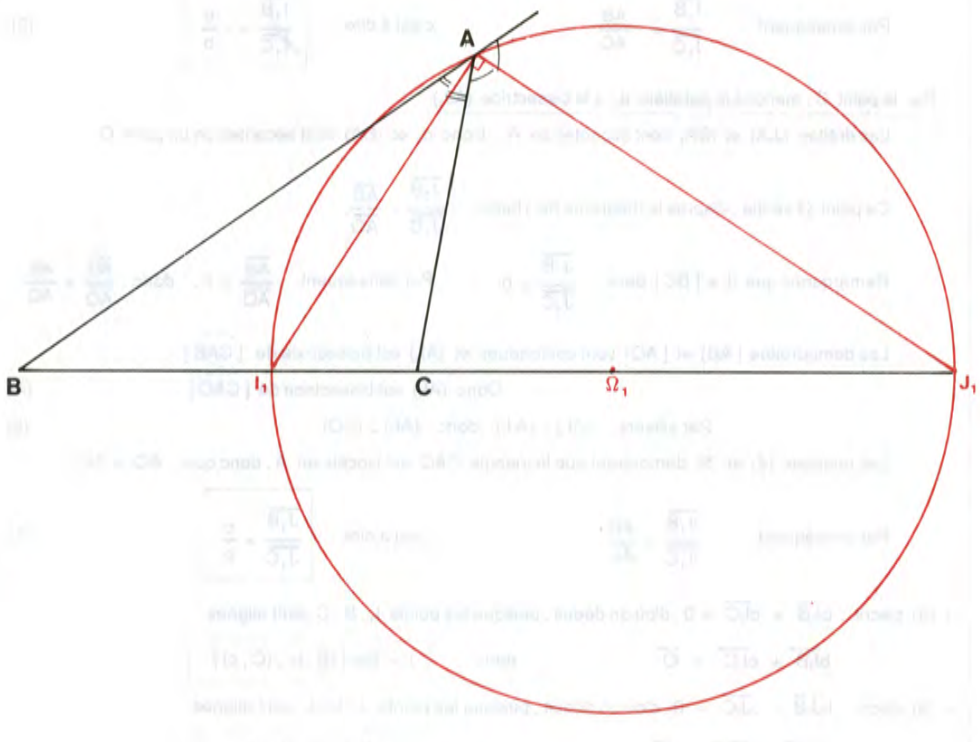
La bissectrice de $[\widehat{BAC}]$ coupe [BC] en I_1 . La bissectrice extérieure de $[\widehat{BAC}]$ coupe (BC) en J_1 .
On note Ω_1 le milieu du bipoint (I_1, J_1) .

1°) c) Démontrer que : $\overline{\Omega_1 B} \times \overline{\Omega_1 C} = \overline{\Omega_1 I_1}^2 = \overline{\Omega_1 J_1}^2$ (relation dite de Newton)
d) Justifier que Ω_1 est barycentre de $\{ (B, b^2), (C, -c^2) \}$.

Soit $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des points M du plan qui vérifient : $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b}$

2°) a) Démontrer que $\mathcal{C}_1$ est un cercle contenant le point A , dont un diamètre est $[I_1 J_1]$.
b) Démontrer que, pour tout point M de $\mathcal{C}_1 - \{ I_1, J_1 \}$, les droites (MI_1) et (MJ_1) sont bissectrices de la paire { (MB) , (MC) } .

$\mathcal{C}_1$ est un des trois cercles d'Apollonius du triangle ABC , qui feront l'objet d'une étude plus complète en fin d'ouvrage .



Notions utilisées : * *barycentre*
* *produit scalaire*

1°) c) voir page 73

Les relations (3) et (6) permettent d'écrire : $\dfrac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\dfrac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}}$ d'où : $\overline{I_1B} \times \overline{J_1C} + \overline{I_1C} \times \overline{J_1B} = 0$ (7)

Les points Ω_1, B, C, I_1, J_1 sont alignés. La relation (7) peut donc s'écrire :

$$(\overline{\Omega_1B} - \overline{\Omega_1I_1}) \times (\overline{\Omega_1C} - \overline{\Omega_1J_1}) + (\overline{\Omega_1C} - \overline{\Omega_1I_1}) \times (\overline{\Omega_1B} - \overline{\Omega_1J_1}) = 0$$

En remarquant que : $\overline{\Omega_1J_1} = -\overline{\Omega_1I_1}$, la relation précédente s'écrit : $2\overline{\Omega_1B} \times \overline{\Omega_1C} - 2\overline{\Omega_1I_1}^2 = 0$

d'où : $\boxed{\overline{\Omega_1B} \times \overline{\Omega_1C} = \overline{\Omega_1I_1}^2}$

1°) d) voir page 72

Puisque $I_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, c)\}$, on a : $b\overrightarrow{\Omega_1B} + c\overrightarrow{\Omega_1C} = (b + c)\overrightarrow{\Omega_1I_1}$ (8)

Puisque $J_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, -c)\}$, on a : $b\overrightarrow{\Omega_1B} - c\overrightarrow{\Omega_1C} = (b - c)\overrightarrow{\Omega_1J_1}$ (9)

Multiplions les deux membres de (8) par (b - c) et les deux membres de (9) par (b + c), puis additionnons terme à terme les deux relations ainsi obtenues, en tenant compte de : $\overrightarrow{\Omega_1I_1} = -\overrightarrow{\Omega_1J_1}$

On trouve : $\overrightarrow{O} = b^2\overrightarrow{\Omega_1B} - c^2\overrightarrow{\Omega_1C}$ (10)

La relation (10) traduit que : $\boxed{\Omega_1 = \text{Bar}\{(B, b^2), (C, -c^2)\}}$

remarque

Le point Ω_1 est donc extérieur à [BC], du même côté que J_1.

2°) a)

$M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow (b^2 MB^2 - c^2 MC^2 = 0)$. Remarquons que : $b^2 MB^2 - c^2 MC^2 = b^2 \overrightarrow{MB}^2 - c^2 \overrightarrow{MC}^2$

$M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow (b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}) \cdot (b\overrightarrow{MB} - c\overrightarrow{MC}) = 0$

voir page 72

Puisque $I_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, c)\}$, on a : $b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (b + c)\overrightarrow{MI_1}$

Puisque $J_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, -c)\}$, on a : $b\overrightarrow{MB} - c\overrightarrow{MC} = (b - c)\overrightarrow{MJ_1}$

Par conséquent :

$M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow (b^2 - c^2)\overrightarrow{MI_1} \cdot \overrightarrow{MJ_1} = 0$. Rappelons que $b \neq c$.

$M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI_1} \perp \overrightarrow{MJ_1}$

$\boxed{\mathcal{C}_1 \text{ est donc le cercle de diamètre } [I_1J_1].}$ Remarquons que $\mathcal{C}_1$ contient A puisque : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$

2°) b)

Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}_1 - \{I_1, J_1\}$. On a : $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{AC}$

Mais I_1 et J_1 vérifient : $\dfrac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\dfrac{AB}{AC}$ et $\dfrac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} = \dfrac{AB}{AC}$

I_1 et J_1 vérifient donc aussi : $\dfrac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\dfrac{MB}{MC}$ et $\dfrac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} = \dfrac{MB}{MC}$

Considérons le triangle MBC.

On a : $I_1 = \text{Bar}\{(B, MC), (C, MB)\}$ et $J_1 = \text{Bar}\{(B, MC), (C, -MB)\}$

voir page 72

I_1 est donc le point où la bissectrice de $[\widehat{BMC}]$ coupe (BC).

J_1 est donc le point où la bissectrice extérieure de $[\widehat{BMC}]$ coupe (BC)

conclusion

Pour tout point M de $\mathcal{C}_1 - \{I_1, J_1\}$, les droites (MI_1) et (MJ_1) sont bissectrices de la paire {(MB), (MC)}.

Bissectrices d'un triangle .

3eme partie : centre du cercle inscrit .

Soit ABC un triangle quelconque . On pose : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Soit d_1, d_2, d_3 les bissectrices respectives de $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{CBA}]$, $[\widehat{ACB}]$.

On pose : $I = \text{Bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$

1°) a) Démontrer que $I \in d_1 \cap d_2 \cap d_3$.

b) Justifier que I est intérieur strictement au triangle ABC et centre d'un cercle $\mathcal{J}$ tangent aux trois droites (AB), (BC), (CA) .

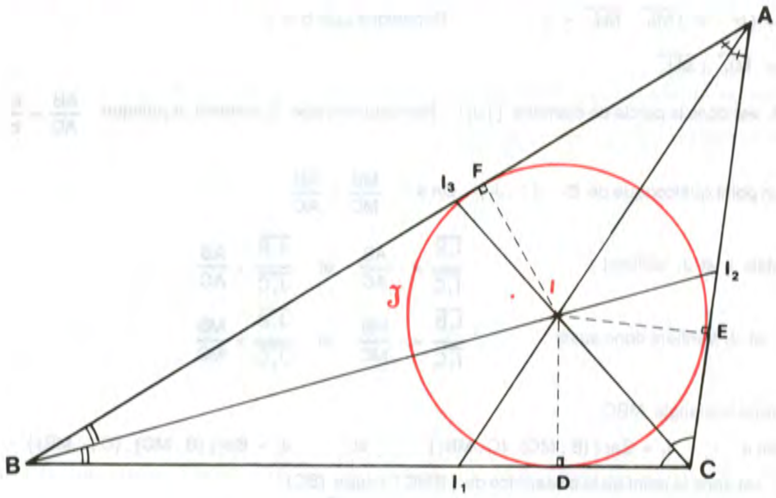
2°) Justifier que les points de contact de $\mathcal{J}$ avec (AB), (BC), (CA) appartiennent respectivement à]AB[,]BC[,]CA[.

3°) S désigne l'aire du triangle ABC et r le rayon de $\mathcal{J}$.

Démontrer que : $S = p \times r$ où $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

4°) Justifier que $\mathcal{J}$ est le seul cercle tangent à (AB), (BC), (CA) en des points appartenant à]AB[,]BC[,]CA[.

Le cercle $\mathcal{J}$ est dit le cercle inscrit dans le triangle ABC . Son centre I est le point de concours des bissectrices de $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{CBA}]$, $[\widehat{ACB}]$.



remarque : les droites d_1, d_2, d_3 sont souvent nommées les trois bissectrices " intérieures" du triangle ABC .

Notions utilisées :

- *associativité barycentrique*
- *produit scalaire*
- *bissectrices (voir page 210)*

1°) a) Utilisons les résultats établis dans la première partie .

voir page 72

La bissectrice d_1 de $[\widehat{BAC}]$ coupe (BC) en I_1, barycentre de $\{(B, b), (C, c)\}$.

La bissectrice d_2 de $[\widehat{CBA}]$ coupe (AC) en I_2, barycentre de $\{(C, c), (A, a)\}$.

La bissectrice d_3 de $[\widehat{ACB}]$ coupe (AB) en I_3, barycentre de $\{(A, a), (B, b)\}$.

Utilisons le théorème d'associativité barycentrique : $I = \text{Bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.

Associons B et C : $I = \text{Bar}\{(A, a), (I_1, b + c)\}$. Donc $I \in (AI_1)$.
Associons C et A : $I = \text{Bar}\{(B, b), (I_2, c + a)\}$. Donc $I \in (BI_2)$.
Associons A et B : $I = \text{Bar}\{(C, c), (I_3, a + b)\}$. Donc $I \in (CI_3)$.
finalement $I \in (AI_1) \cap (AI_2) \cap (AI_3)$, donc $\boxed{I \in d_1 \cap d_2 \cap d_3}$

remarque : Les trois bissectrices " intérieures " d'un triangle sont donc concourantes (au point I) .

1°) b) Le point I est barycentre de A , B , C affectés de coefficients strictement positifs , donc :
le point I est intérieur strictement au triangle ABC .

$I \in d_1$. Donc I est équidistant des droites (AB) et (AC) .
$I \in d_2$. Donc I est équidistant des droites (BA) et (BC) .
Soit r la valeur commune des distances de I aux droites (AB) , (BC) , (CA) .

Le cercle $\mathfrak{J}$ de centre I , de rayon r , est alors tangent aux droites (AB) , (BC) , (CA) , puisque la distance de son centre à chacune de ces trois droites est égale à son rayon .

2°) Soit D le point de contact de $\mathfrak{J}$ avec la droite (BC) . Démontrons que : $D \in]BC[$.

Le point D est le projeté orthogonal de I sur la droite (BC) .

D'une part : $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{BD} \times \overline{BC}$

D'autre part : $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} = BI \times BC \times \cos \widehat{IBC}$ $\qquad \widehat{IBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

$\widehat{ABC} \in]0, \pi[$ donc : $\widehat{IBC} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ $\qquad$ donc : $\cos \widehat{IBC} > 0$

On a donc : $\overline{BD} \times \overline{BC} > 0$, ce qui prouve : $D \in]BC)$.

De même , en considérant le signe de $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CB}$, on trouve : $D \in]CB)$.

On a , par conséquent $D \in]BC) \cap]CB)$, c'est à dire : $\boxed{D \in]BC[}$

On démontre de même que :

Le point de contact E de $\mathfrak{J}$ avec la droite (CA) appartient à $]CA[$.
Le point de contact F de $\mathfrak{J}$ avec la droite (AB) appartient à $]AB[$.

3°) Puisque I est intérieur strictement au triangle ABC , on a : aire(ABC) = aire(AIB) + aire(BIC) + aire(CIA) .

$$S = \frac{AB \times IF}{2} + \frac{BC \times ID}{2} + \frac{CA \times IE}{2} \qquad \text{c'est à dire :} \qquad S = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2}$$

$$S = \frac{(a + b + c)}{2} \times r \qquad \text{d'où :} \qquad \boxed{S = p \times r}$$

4°) Soit Γ un cercle de centre ω , tangent aux droites (AB) et (AC) en des points E et F appartenant respectivement à $]AB[$ et $]AC[$.

Alors : $\begin{cases} AE = AF , & \text{donc } A \in \text{med}(E, F) \\ \omega E = \omega F , & \text{donc } \omega \in \text{med}(E, F) \end{cases}$ $\qquad$ donc : $(A\omega) = \text{med}(E, F)$.

voir rappel page 210

Les demi-droites [AE) et [AF) sont donc symétriques par rapport à $(A\omega)$

Par conséquent : $(A\omega)$ est la bissectrice de $[\widehat{BAC}]$, donc : $\omega \in d_1$.

On démontre de même : $\omega \in d_2$ et $\omega \in d_3$.

voir ci-dessus

On sait , en outre que : $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{I\}$, donc : $\omega = I$

Γ est par conséquent le cercle de centre I et de rayon IE , c'est à dire que : $\boxed{\Gamma = \mathfrak{J}}$

Bissectrices d'un triangle .

4^{eme} partie : centres des cercles exinscrits .

Soit ABC un triangle quelconque . On pose : $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$
Soit d_1 , d_2 , d_3 les bissectrices respectives de $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{CBA}]$, $[\widehat{ACB}]$.
Soit δ_1 , δ_2 , δ_3 les bissectrices extérieures respectives de $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{CBA}]$, $[\widehat{ACB}]$.

On pose : $I_a = \text{Bar}\{(A, -a), (B, b), (C, c)\}$.

1°) Démontrer que : $I_a \in d_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3$.

2°) En déduire que d_1 , δ_2 , δ_3 sont concourantes en un point appartenant au secteur $[\widehat{BAC}]$ et extérieur strictement au triangle ABC .

3°) Justifier que I_a est centre d'un cercle $\mathcal{J}_a$ tangent aux droites (AB) , (BC) , (CA) .

$\mathcal{J}_a$ est dit cercle exinscrit " dans l'angle A " du triangle ABC .

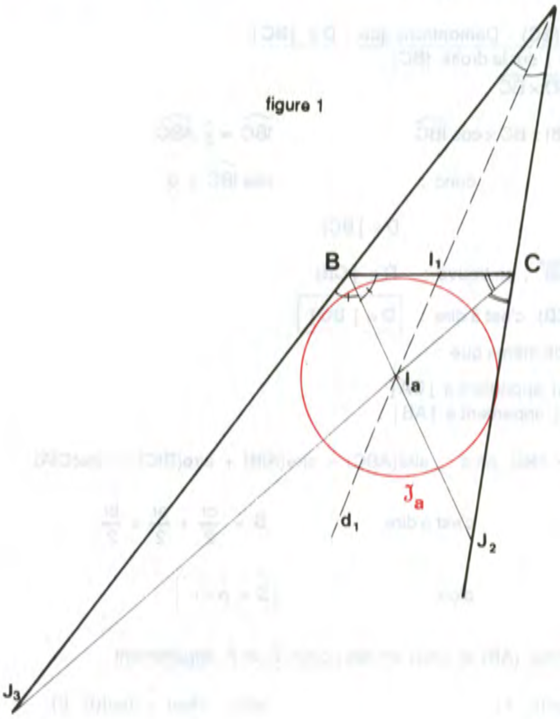


figure 1

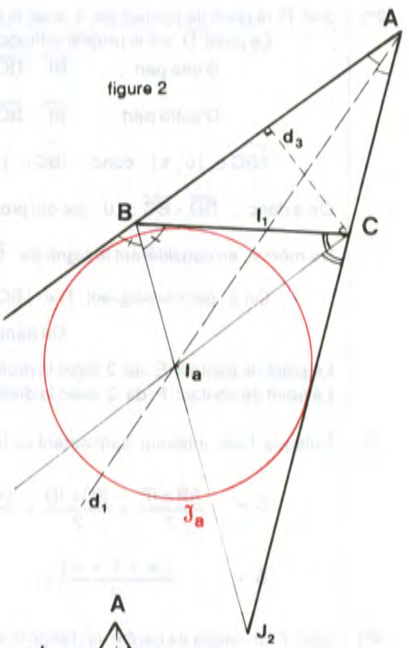


figure 2

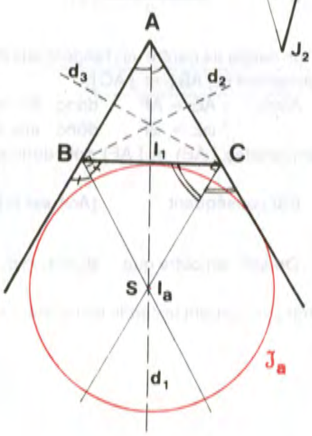


figure 3

<u>*Notions utilisées*</u> :
* *barycentre*
* *bissectrices (voir page 210)*

1°) a) Supposons le triangle ABC non isocèle . Utilisons les résultats établis dans la 1ère partie .

la droite d_1 coupe (BC) en I_1, barycentre de { (B , b) , (C , c) } .

la droite δ_2 coupe (CA) en J_2, barycentre de { (A , - a) , (C , c) } . On a : $\left\{ \begin{array}{l} c - a \neq 0 \\ b - a \neq 0 \end{array} \right.$

la droite δ_3 coupe (AB) en J_3, barycentre de { (A , - a) , (B , b) } .

voir figure 1

Utilisons le théorème d'associativité barycentrique : I_a = Bar { (A , - a) , (B , b) , (C , c) } .

Remarquons que $A \notin (BC)$, donc que : $BC < AB + AC$, c'est à dire : $b + c - a > 0$

* Associons B et C : I_a = Bar { (A , - a) , $(I_1 , b + c)$ } , donc $I_a \in (AI_1)$.
* Associons C et A : I_a = Bar { (B , b) , $(J_2 , c - a)$ } , donc $I_a \in (BJ_2)$.
* Associons A et B : I_a = Bar { (C , c) , $(J_3 , b - a)$ } , donc $I_a \in (CJ_3)$.

finalement : $I_a \in (AI_1) \cap (BJ_2) \cap (CJ_3)$ $\boxed{I_a \in d_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3}$

1°) b) La démonstration du 1°) a) n'est plus valable si (b = a ou c = a) .

voir figure 2

* Supposons (b = a et c ≠ a) . On a encore $I_a \in (AI_1)$ et $I_a \in (BJ_2)$.

Le point J_3 n'existe plus mais le triangle ACB est isocèle de sommet C .

On a alors $(\delta_3 \perp d_3)$ et $(d_3 \perp (AB))$, d'où $\delta_3 \,//\, (AB)$.

I_a = Bar { (A , - a) , (B , a) , (C , c) } d'où :

$\overrightarrow{CI_a} = \frac{1}{c} . (- a\overrightarrow{CA} + a\overrightarrow{CB})$. On a donc : $\overrightarrow{CI_a} = \frac{a}{c} . \overrightarrow{AB}$

I_a appartient à la droite parallèle à (AB) , contenant C . On reconnait : $I_a \in \delta_3$

* finalement $I_a \in d_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3$

voir figure 3

** Supposons (b = a et c = a) . Le triangle ABC est alors équilatéral ; d_1 est médiatrice de (B , C) .

Les droites δ_2 et δ_3 sont respectivement parallèles à (AC) et (AB) . Elles se coupent donc en un point S.

Le parallèlogramme CABS est un losange puisque AB = AC . On en déduit : SB = SC , donc : $S \in d_1$.

S appartient donc à $\delta_2 \cap \delta_3 \cap d_1$ et on a : $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

On reconnait S = Bar { (a , - a) , (B , a) , (C , a) } $(a \neq 0)$ donc $S = I_a$.

** On a encore prouvé que : $I_a \in d_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3$

conclusion Dans tous les cas , on a justifié que : $\boxed{I_a \in d_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3}$

2°) I_a = Bar { (A , - a) , $(I_1 , b + c)$ } donc : $\overrightarrow{AI_a} = \frac{b + c}{b + c - a} \overrightarrow{AI_1}$

Dans le triangle ABC , on a : BC < AB + AC , d'où : $b + c > b + c - a > 0$

$\frac{b + c}{b + c - a} > 0$ garantit que $I_a \in [AI_1)$ donc que $\boxed{I_a \text{ appartient au secteur } [\widehat{BAC}]}$.

$\frac{b + c}{b + c - a} > 1$ garantit que $I_a \notin [AI_1]$ donc I_a est extérieur au triangle ABC et $I_a \notin (BC)$.

Par ailleurs $I_1 \in]BC[$ donc $I_a \notin (AB)$ et $I_a \notin (AC)$

$\boxed{\text{Le point } I_a \text{ est donc extérieur strictement au triangle ABC .}}$

3°) Le point I_a appartient à δ_2 donc I_a est équidistant des droites (AB) et (BC) .

Le point I_a appartient à δ_3 donc I_a est équidistant des droites (BC) et (CA) .

Soit r_a la distance commune de I_a aux droites (AB) , (BC) , (CA) .

Le cercle $\mathcal{J}_a$, de centre I_a , de rayon r_a est alors tangent aux droites (AB) , (BC) , (CA)

(puisque la distance de son centre à chacune de ces trois droites est égale à son rayon) .

Bissectrices d'un triangle .

5ème partie : intersection du cercle circonscrit et des bissectrices d'un triangle .

Soit ABC un triangle et 𝒞 son cercle circonscrit

.La bissectrice d_1 de $[\widehat{BAC}]$ coupe 𝒞 en A et P_1 .

1°) Démontrer que P_1 appartient à la médiatrice Δ_1 de (B , C) .

a) en ayant recours uniquement aux symétries axiales .

b) en utilisant les propriétés des angles inscrits .

2°) Soit Q_1 le point , autre que P_1 , où Δ_1 recoupe le cercle 𝒞 .

Démontrer que Q_1 appartient à la bissectrice extérieure δ_1 de $[\widehat{BAC}]$.

3°) Soit $\begin{cases} I \text{ le centre du cercle } \mathcal{J} \text{ inscrit dans le triangle ABC} \\ I_a \text{ le centre du cercle } \mathcal{J}_a \text{ exinscrit " dans l'angle A " du triangle ABC .} \end{cases}$

* Démontrer que P_1 est milieu de (I , I_a) .

* En déduire que les points de contact respectifs D et D_1 de (BC) avec $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}_a$ sont symétriques par rapport au milieu A' de (B , C) .

figure 2

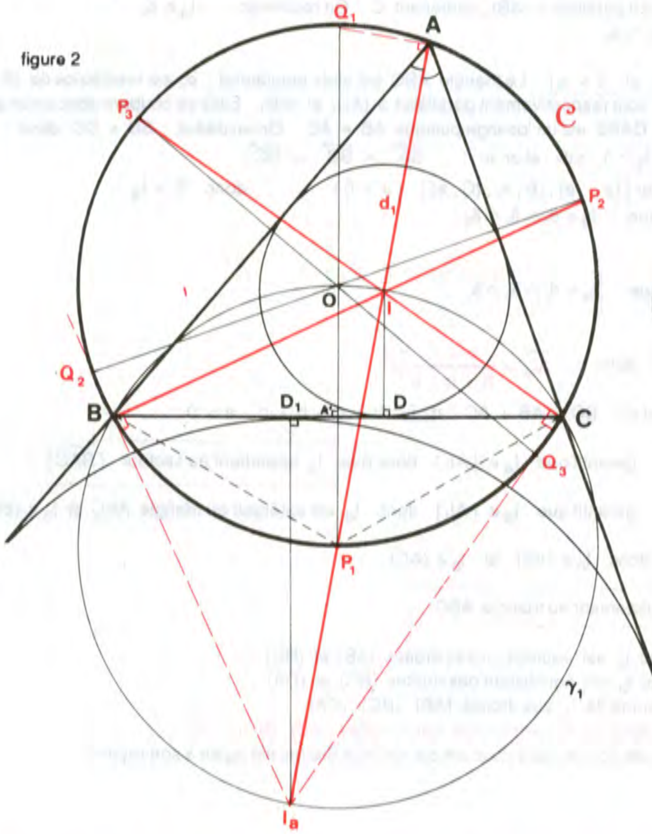


figure 1

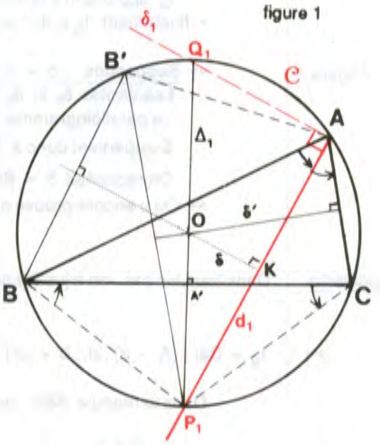
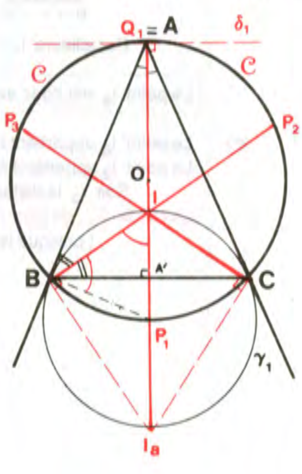


figure 3



La bissectrice d_1 de $[\widehat{BAC}]$ recoupe 𝒞 en P_1 . Alors $\begin{cases} * \ P_1 \text{ est milieu de l'arc } [\widehat{BC}] . \\ * \ P_1 \text{ est milieu de } (I , I_a) . \end{cases}$

Notions utilisées :
- *symétrie axiale*
- *angles inscrits*

1°) a)	Considérons la médiatrice δ de (A, P_1). Soit $B' = S_\delta(B)$.
	On a : $\begin{cases} A = S_\delta(P_1) \\ B = S_\delta(B') \\ B' = S_\delta(B) \end{cases}$ donc : $(AB) = S_\delta((P_1B'))$ et $\begin{cases} P_1B' = AB \ ; \ AB \neq 0 \\ AB' = P_1B \end{cases}$ (1)
voir figure 1	Mais on a aussi : $(AC) = S_{d_1}((AB))$ d'où : $(AC) = (S_{d_1} \circ S_\delta)((P_1B'))$
	$d_1 \perp \delta$, donc $S_{d_1} \circ S_\delta$ est la symétrie centrale de centre K, où K désigne le milieu de (A, P_1). On en déduit alors : $(AC) \mathbin{//} (P_1B')$.
	Considérons la médiatrice δ' de (A, C). δ' est perpendiculaire à (AC) et contient le point O ; δ' est donc perpendiculaire à (P_1B').
	Par ailleurs, $OP_1 = OB'$. δ' est donc aussi médiatrice de (P_1, B')
	On a alors : $\begin{cases} A = S_{\delta'}(C) \\ B' = S_{\delta'}(P_1) \end{cases}$ d'où : $AB' = CP_1$ (2)
	Des relations (1) et (2), on déduit : $P_1B = P_1C$ d'où : $\boxed{P_1 \in \text{med}(B, C)}$
1°) b)	Orientons le plan contenant les points A, B, C.
	A, B, C, P_1 sont cocycliques donc : $\begin{cases} \text{d'une part } \ \overline{(CB, CP_1)} \equiv \overline{(AB, AP_1)} \ (\pi) & (3) \\ \text{d'autre part } \ \overline{(BC, BP_1)} \equiv \overline{(AC, AP_1)} \ (\pi) & (4) \end{cases}$
	(AB) et (AC) sont symétriques par rapport à (AP_1) donc : $\overline{(AB, AP_1)} \equiv -\overline{(AC, AP_1)}$ (π) (5)
	Des relations (3), (4), (5) on déduit : $\overline{(CB, CP_1)} \equiv -\overline{(BC, BP_1)}$ (π) (6)
	La relation (6) démontre que (CP_1) et (BP_1) sont symétriques par rapport à la médiatrice Δ_1 de (B, C).
	$\boxed{\text{Leur point commun } P_1 \text{ appartient donc à } \Delta_1 .}$
2°)	La médiatrice Δ_1 de (B, C) contient O. Le point Q_1 est donc diamétralement opposé de P_1 sur le cercle $\mathcal{C}$.
	$A \in \mathcal{C}$, donc on a : $\overrightarrow{AQ_1} \perp \overrightarrow{AP_1}$.
	Le point Q_1 appartient à la droite contenant A et perpendiculaire à (AP_1), c'est à dire : $\boxed{Q_1 \in \delta_1}$
remarque 1	Si le triangle ABC est isocèle de sommet A, alors $Q_1 = A$. Dans ce cas, δ_1 est tangente à $\mathcal{C}$ en A.
remarque 2	Les points P_1 et Q_1 sont donc les milieux des deux arcs de $\mathcal{C}$ d'extrémités B et C.
3°)	Les points I, B, I_a, C sont cocycliques sur le cercle γ_1 de diamètre $[II_a]$.
	Le centre ω de γ_1 est le milieu de (I, I_a). Le point ω appartient donc à (II_a), qui est la droite d_1.
	Par ailleurs, le point ω appartient à la médiatrice de (B, C), qui est la droite Δ_1, donc $\omega \in d_1 \cap \Delta_1$.
voir figure 2	* Si le triangle ABC est non isocèle, alors les droites d_1 et Δ_1 sont sécantes. Le point P_1 est alors leur unique point commun, donc $\omega = P_1$, d'où : $m(I, I_a) = P_1$.
voir figure 3	** Si le triangle ABC est isocèle, alors $d_1 = \Delta_1 = (AP_1)$. Démontrons que : $P_1B = P_1I$.
	A et P_1 sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$, donc le triangle ABP_1 est rectangle en B.
	On a donc : $\widehat{P_1BI} = \frac{\pi}{2} - \widehat{IBA}$ (7)
	Soit $A' = m(B, C)$; $A' \in [IP_1)$ donc $\widehat{BIP_1} = \widehat{BIA'}$
	Or, dans le triangle rectangle BIA', on a : $\widehat{BIA'} = \frac{\pi}{2} - \widehat{IBA'}$ donc : $\widehat{BIP_1} = \frac{\pi}{2} - \widehat{IBA'}$ (8)
	La droite (BI) est bissectrice de $[\widehat{ABC}]$, donc : $\widehat{IBA} = \widehat{IBA'}$. (9)
	Les relations (7), (8) et (9) prouvent que le triangle P_1BI est isocèle, de sommet P_1.
	On a donc : $P_1B = P_1I$. Or on sait déjà que : $P_1B = P_1C$.
voir 1°) a) ci-dessus	Le cercle de centre P_1, de rayon P_1B contient donc les points B, C, I. C'est γ_1. Les points I et I_a appartiennent à γ_1, dont $[II_a]$ est un diamètre. Donc : $P_1 = m(I, I_a)$
conséquence	Les projetés orthogonaux des points I, I_a, P_1 sur (BC) sont respectivement D, D_1, A', et $P_1 = m(I, I_a)$.
	Le théorème de Thalès assure alors que : $\boxed{A' = m(D, D_1) .}$

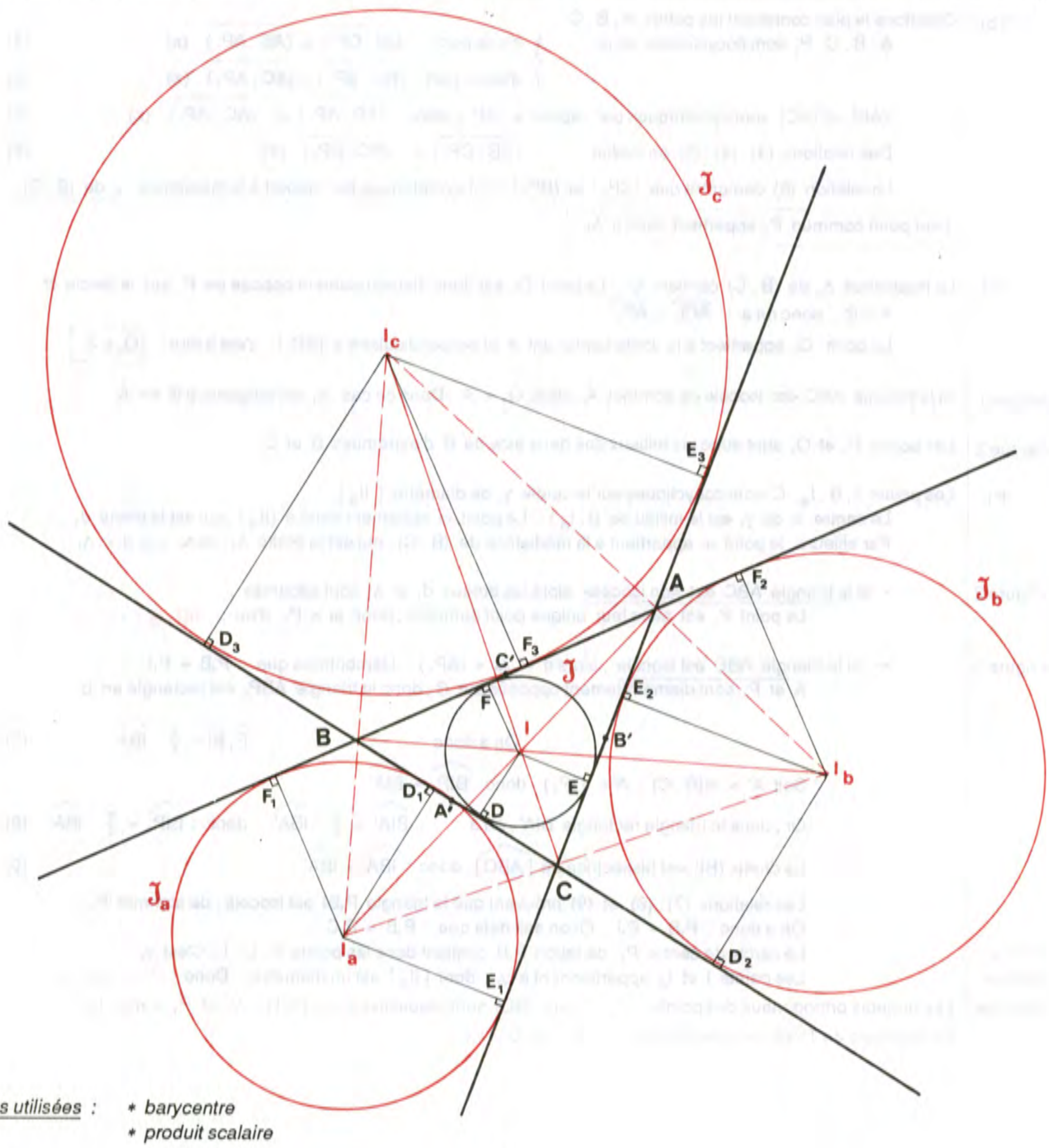
Bissectrices d'un triangle .

6ème partie : **segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les points de contact du cercle inscrit et des cercles exinscrits .**

Soit ABC un triangle quelconque . On pose : $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

1°) Soit D_1, E_1, F_1 les points de contact du cercle exinscrit $\mathcal{J}_a$ avec les droites respectives (BC) , (CA) , (AB) .
Démontrer que : $D_1 \in\ ]BC[$; $B \in\ ]AF_1[$; $C \in\ ]AE_1[$.

2°) Calculer les longueurs des segments déterminés sur les droites (BC) , (CA) , (AB) par les points de contact de ces droites avec le cercle inscrit $\mathcal{J}$ et les cercles exinscrits $\mathcal{J}_a$, $\mathcal{J}_b$, $\mathcal{J}_c$.



Notions utilisées :
* *barycentre*
* *produit scalaire*

1°) Soit A' = m(B , C) .

voir page 80 Les points de contact respectifs D_1 et D de (BC) avec les cercles $\mathcal{J}_a$ et $\mathcal{J}$ sont symétriques par rapport à A' .

voir page 76 $D \in]BC[$ donc $\boxed{D_1 \in]BC[}$.

Le point F_1 est le projeté orthogonal de I_a sur la droite (AB) , donc : $\overline{BF_1} \times \overline{BA} = \overrightarrow{BI_a} \cdot \overrightarrow{BA}$

Le centre I_a de $\mathcal{J}_a$ est barycentre de { (A , - a) , (B , b) , (C , c) } , donc : $\overrightarrow{BI_a} = \frac{1}{b + c - a} \cdot (- a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC})$

Par conséquent : $\overline{BF_1} \times \overline{BA} = \frac{1}{b + c - a} \cdot (- a\overrightarrow{BA}^2 + c\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA})$

voir 2°) page 79

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = c \cdot a \cdot \cos\widehat{ABC}$; $\overrightarrow{BA}^2 = c^2$; $b + c - a > 0$; $1 - \cos\widehat{ABC} > 0$.

On obtient : $\overline{BF_1} \times \overline{BA} = \frac{- ac^2}{b + c - a} \cdot (1 - \cos\widehat{ABC})$ et par conséquent : $\overline{BF_1} \cdot \overline{BA} < 0$

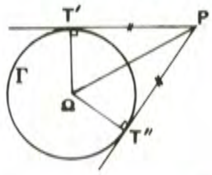
On en déduit : $\boxed{B \in]AF_1[}$. On établit de même : $\boxed{C \in]AE_1[}$.

2°) Les points D_2 , E_2 , F_2 sont les points de contact respectifs de $\mathcal{J}_b$ avec les droites (BC) , (CA) , (AB) .

notations Les points D_3 , E_3 , F_3 sont les points de contact respectifs de $\mathcal{J}_c$ avec les droites (BC) , (CA) , (AB) .

Les points D , E , F sont les points de contact respectifs de $\mathcal{J}$ avec les droites (BC) , (CA) , (AB) .

rappel



Soit T' et T" les points de contact d'un cercle Γ avec deux droites sécantes en P .

Appliquons le théorème de Pythagore aux triangles PT'Ω et PT"Ω .

$$\left.\begin{aligned} PT'^2 &= P\Omega^2 - \Omega T'^2 \\ PT''^2 &= P\Omega^2 - \Omega T''^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Par conséquent : } PT' = PT'' .$$

On a : $\boxed{AE = AF = x \ ; \ BF = BD = y \ ; \ CD = CE = z}$

$D \in]BC[$ donc BD + DC = BC c'est à dire : $y + z = a$.

$E \in]CA[$ donc CE + EA = CA c'est à dire : $z + x = b$.

$F \in]AB[$ donc AF + FB = AB c'est à dire : $x + y = c$.

Par conséquent : $2x + 2y + 2z = a + b + c$, c'est à dire : $x + y + z = p$

On trouve alors : $\boxed{x = p - a \ ; \ y = p - b \ ; \ z = p - c}$

Les points D_1 et D sont symétriques par rapport au milieu A' de (B , C) , donc : $\boxed{\begin{aligned} CD_1 &= BD = p - b \\ BD_1 &= CD = p - c \end{aligned}}$

Puisque $CE_1 = CD_1$, on a : $CE_1 = p - b$

Puisque $BF_1 = BD_1$, on a : $BF_1 = p - c$.

$B \in]AF_1[$ donc $AF_1 = AB + BF_1$; $AF_1 = c + (p - c)$ d'où : $AF_1 = p$.

On trouve ainsi : $\boxed{AF_1 = AE_1 = p}$ et de même : $BF_2 = BD_2 = p$; $CE_3 = CD_3 = p$.

Remarquons alors : $B \in]F_1F_2[$ donc : $F_1F_2 = BF_1 + BF_2$. $F_1F_2 = p + (p - c)$ d'où : $\boxed{F_1F_2 = a + b}$

On trouve de même : $\boxed{D_2D_3 = b + c \ ; \ E_1E_3 = c + a}$

Triangle dont les sommets sont les centres des cercles exinscrits.
Triangle dont les sommets sont les points de contact du cercle inscrit.

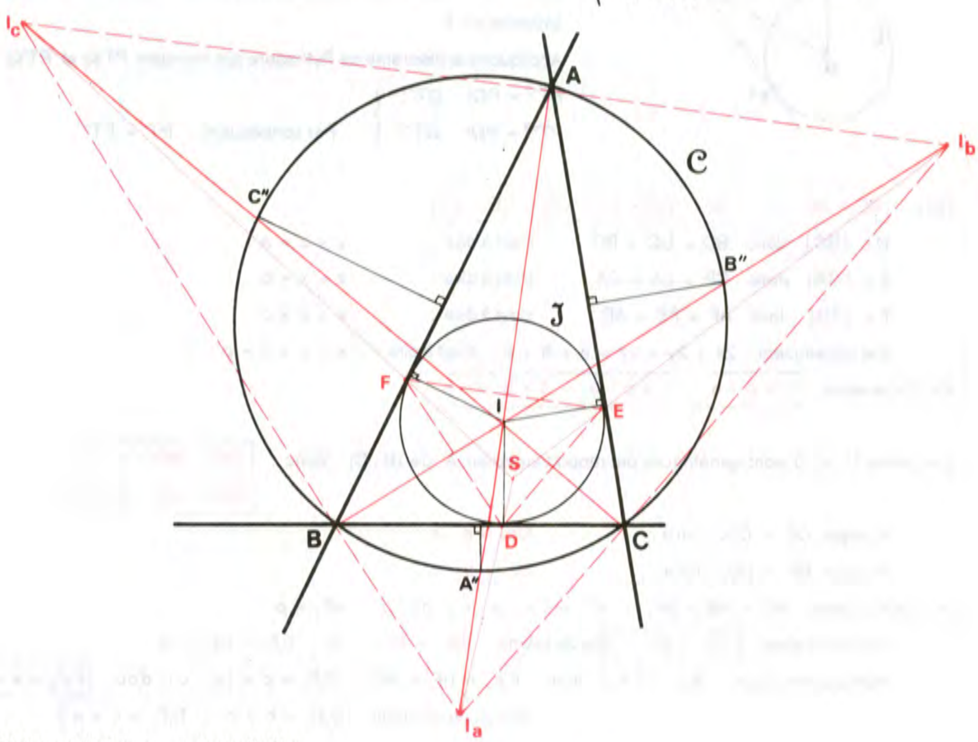
$1^{ère}$ **partie** : **ces deux triangles sont homothétiques** .

Soit I le centre du cercle $\mathcal{J}$ inscrit dans un triangle ABC . a = BC ; b = AC ; c = AB .
Soit I_a , I_b , I_c les centres des cercles exinscrits du triangle ABC .
Soit R le rayon du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC et r le rayon du cercle $\mathcal{J}$.

1°) a) Reconnaître l'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$ et le cercle d'Euler de ce triangle .
b) Soit A", B", C" les milieux respectifs de (I , I_a), (I , I_b), (I , I_c) .
Justifier que : * A", B", C" appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .
* A", B", C" appartiennent aux médiatrices respectives de (B , C) , (C , A) , (A , B) .

2°) Soit D , E , F les points de contact du cercle $\mathcal{J}$ avec les droites (BC) , (CA) , (AB) .
Démontrer que les triangles DEF et $I_aI_bI_c$ sont homothétiques .
Justifier que le rapport de l'homothétie transformant respectivement D , E , F en I_a , I_b , I_c est égal à $\frac{2R}{r}$.

rappel : $\begin{cases} S = \text{aire du triangle ABC} . \\ p = \dfrac{a + b + c}{2} \end{cases}$ On a : $\begin{cases} S = \dfrac{abc}{4R} \\ S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \\ S = p.r \end{cases}$



Notions utilisées :
* *homothéties*
* *cercle d'Euler*
* *barycentre*
* *relations métriques dans un triangle (voir page 98)*

1°) a) Les points I_c et I appartiennent à la bissectrice d_3 de $[\widehat{BCA}]$.

Les points I_a et I_b appartiennent à la bissectrice extérieure δ_3 de $[\widehat{BCA}]$.

$d_3 \perp \delta_3$. La hauteur issue de I_c dans le triangle $I_aI_bI_c$ est donc la droite d_3.

De même, la hauteur issue de I_b dans le triangle $I_aI_bI_c$ est la droite d_2. Or $d_2 \cap d_3 = \{I\}$

L'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$ est donc le point I, centre du cercle $\mathcal{J}$ inscrit dans le triangle ABC.

1°) b) Le cercle d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$ contient les pieds des hauteurs de ce triangle, qui sont les points A, B, C.

$\boxed{\text{Le cercle d'Euler du triangle } I_aI_bI_c \text{ est donc le cercle } \mathcal{C} \text{ circonscrit au triangle ABC}}$

voir page 12 Le point I est l'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$. Le cercle d'Euler $\mathcal{C}$ du triangle $I_aI_bI_c$ contient donc les milieux de (I, I_a), (I, I_b), (I, I_c), c'est à dire que : le cercle $\mathcal{C}$ contient les points A", B", C".

Par ailleurs, les points I, B, I_a, C sont cocycliques sur un cercle γ de diamètre $[II_a]$.

Le point A", milieu de (I, I_a) est donc centre du cercle γ.

Le point A" appartient donc aussi à la médiatrice de (B, C). De même : B" ∈ med(C, A) et C" ∈ med(A, B).

remarque Cette propriété a déjà été établie directement, sans recourir au cercle d'Euler (voir page 80).

2°) voir rappel page 83

$$\left.\begin{array}{l} CE = CD \text{ donc } C \in \text{med}(E, D) \\ IE = ID = r \text{ donc } I \in \text{med}(E, D) \end{array}\right\} \text{ Par conséquent : } (IC) = \text{med}(E, D)$$

Donc $(DE) \perp d_3$. Mais on a aussi $(I_aI_b) \perp d_3$, d'où : $(I_aI_b) \,//\, (DE)$.

On démontre de même que : $(I_bI_c) \,//\, (EF)$ et $(I_cI_a) \,//\, (FD)$.

voir page 123 Les triangles DEF et $I_aI_bI_c$ ont leurs côtés respectivement parallèles.

Il existe donc une homothétie-translation φ transformant D en I_a, E en I_b, F en I_c. Soit k son rapport.

remarque Le cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$ a pour rayon 2R (double du rayon R du cercle d'Euler $\mathcal{C}$ du triangle $I_aI_bI_c$).

Le rapport k vérifie donc : $|k| = \dfrac{2R}{r}$ Mais nous ne connaissons pas le signe de k.

Déterminons donc le réel k tel que : $\overrightarrow{I_aI_b} = k\,\overrightarrow{DE}$

$I_a = \text{Bar}\{(A, -a), (B, b), (C, c)\}$. Donc : $\overrightarrow{CI_a} = \dfrac{1}{b + c - a}(b\overrightarrow{CB} - a\overrightarrow{CA})$

$I_b = \text{Bar}\{(A, a), (B, -b), (C, c)\}$. Donc : $\overrightarrow{CI_b} = \dfrac{1}{c + a - b}(a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{CB})$

Remarquons que : $(b + c - a) = 2(p - a)$ et $(c + a - b) = 2(p - b)$.

$$\overrightarrow{I_aI_b} = \overrightarrow{CI_b} - \overrightarrow{CI_a} \text{ d'où : } \overrightarrow{I_aI_b} = \frac{c}{2(p - a)(p - b)}(a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{CB}) \quad (1)$$

voir page 83 $E \in\,]CA[$ donc : $\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -\dfrac{EC}{EA}$, c'est à dire : $\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -\dfrac{p - c}{p - a}$ (2)

Puisque les points E, C, A sont alignés, la relation (2) équivaut à :

$(p - a)\overrightarrow{EC} + (p - c)\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{O}$, d'où : $E = \text{Bar}\{(C, p - a), (A, p - c)\}$.

De même, on établit que : $D = \text{Bar}\{(B, p - c), (C, p - b)\}$.

Remarquons que : $(p - a) + (p - c) = b$ et que : $(p - c) + (p - b) = a$.

$$\text{On a alors : } \overrightarrow{CE} = \frac{p - c}{b}\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{CD} = \frac{p - c}{a}\overrightarrow{CB} \text{ d'où : } \overrightarrow{DE} = \frac{p - c}{ab}.(a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{CB}) \quad (3)$$

Comparons les expressions de $a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{CB}$ dans les relations (1) et (3).

$$\frac{2(p - a)(p - b)}{c}\overrightarrow{I_aI_b} = \frac{ab}{p - c}\overrightarrow{DE}. \text{ On a donc : } \overrightarrow{I_aI_b} = k\,\overrightarrow{DE}, \text{ avec } k = \frac{abc}{2(p - a)(p - b)(p - c)}$$

voir page 84 Or on sait que : $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$; $S = \dfrac{abc}{4R}$ et $S = p.r$

On trouve alors : $\boxed{k = \dfrac{2R}{r}}$; puisque $r \neq 2R$, on a $k \neq 1$

$k \neq 1$, donc φ est une homothétie et non une translation.

Son centre S est barycentre de $\{(D, \frac{2R}{r}), (I_a, -1)\}$. $S \in (DI_a) \cap (EI_b) \cap (FI_c)$.

Triangle dont les sommets sont les centres des cercles exinscrits .
Triangle dont les sommets sont les points de contact du cercle inscrit .

2^{eme} partie : droite d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$.

Soit ABC un triangle supposé non équilatéral

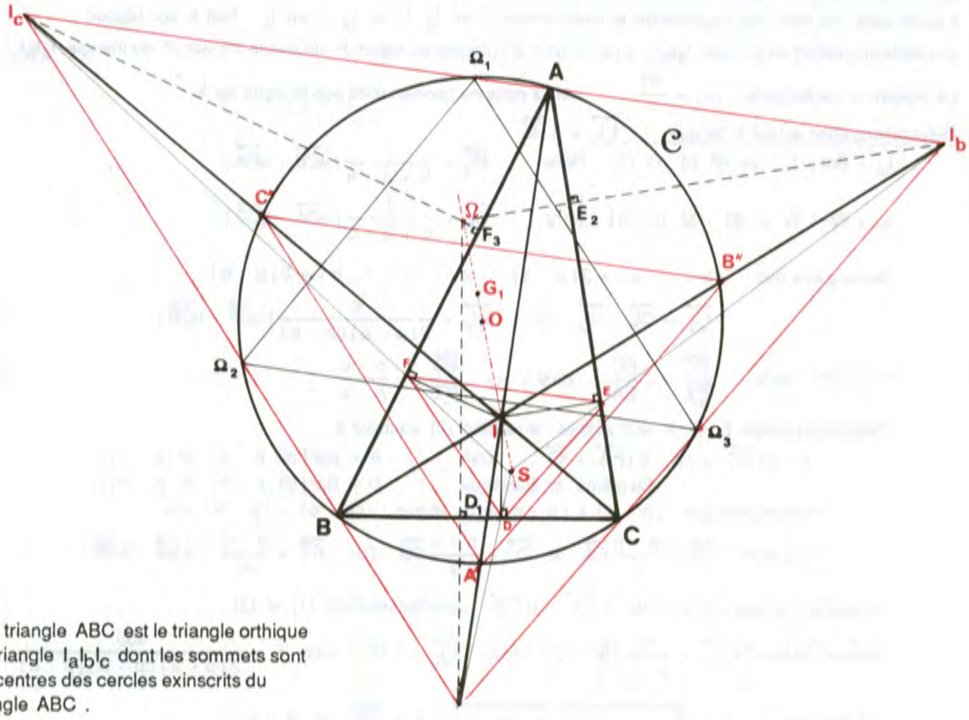
Soit
- O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .
- I le centre du cercle $\mathcal{J}$ inscrit dans le triangle ABC .
- I_a , I_b , I_c les centres des cercles exinscrits du triangle ABC .

Soit
- D , E , F les points de contact du cercle $\mathcal{J}$ avec les droites (BC) , (CA) , (AB) .
- A" , B" , C" les milieux respectifs de (I, I_a) , (I, I_b) , (I, I_c) .
- Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 les milieux respectifs de (I_b, I_c) , (I_c, I_a) , (I_a, I_b) .

1°) Démontrer que l'image , par une homothétie $\mathcal{H}$, de la droite d'Euler du triangle ABC est la droite d'Euler de son triangle image $A_0B_0C_0$.

2°) Démontrer que les quatre triangles DEF , $I_aI_bI_c$, A"B"C" , $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ sont homothétiques et qu'ils admettent (OI) pour droite d'Euler commune .

3°) Soit D_1 , E_2 , F_3 les points de contact respectifs de $\mathcal{J}_a$, $\mathcal{J}_b$, $\mathcal{J}_c$ avec (BC) , (CA) , (AB) . Démontrer que les trois droites (I_aD_1) , (I_bE_2) (I_cF_3) sont concourantes en Ω , centre du cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$.



Tout triangle ABC est le triangle orthique du triangle $I_aI_bI_c$ dont les sommets sont les centres des cercles exinscrits du triangle ABC .

Le centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC est orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$.

Notions utilisées :
- *homothéties*
- *droite d'Euler*
- *théorème de Nagel*

	ABC	$I_aI_bI_c$	DEF	A"B"C"	$\Omega_1\Omega_2\Omega_3$
I	centre du cercle inscrit	orthocentre	centre du cercle circonscrit	orthocentre	
O	centre du cercle circonscrit	centre du cercle d'Euler		centre du cercle circonscrit	centre du cercle circonscrit

1°) L'homothétie $\mathcal{H}$ conserve les barycentres .

Soit G et G_0 les isobarycentres respectifs de { A , B , C } et de { A_0 , B_0 , C_0 } . On a donc : $\mathcal{H}(G) = G_0$.

L'image , par $\mathcal{H}$, du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est le centre O_0 du cercle circonscrit au triangle $A_0B_0C_0$. On a donc : $\mathcal{H}(O) = O_0$.

Le triangle ABC étant non équilatéral , les points O et G , distincts , déterminent la droite d'Euler (OG) du triangle ABC .

De même , les points O_0 et G_0 , (distincts car $\mathcal{H}$ est bijective) déterminent la droite d'Euler (O_0G_0) du triangle $A_0B_0C_0$

Rappelons que l'image , par une homothétie , d'une droite est une droite qui lui est parallèle .

Par conséquent : $\boxed{\mathcal{H}((OG)) = (O_0G_0) \quad \text{et} \quad (OG) \,//\, (O_0G_0)}$

2°) Le cercle d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$ est le cercle $\mathcal{C}$, de centre O , circonscrit au triangle ABC .

La droite d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$ contient l'orthocentre I de ce triangle ainsi que le centre O du cercle d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$.

Le triangle ABC est non équilatéral , donc les points O et I sont distincts .

La droite d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$ est donc la droite (OI) .

voir page 85 L'homothétie $\varphi(S , \frac{2R}{r})$, qui transforme D , E , F en I_a , I_b , I_c transforme aussi la droite d'Euler $\mathcal{E}$ du triangle DEF en la droite d'Euler (OI) du triangle $I_aI_bI_c$. On a donc : $\mathcal{E} \,//\, (OI)$.

Le point I , centre du cercle circonscrit au triangle DEF appartient à $\mathcal{E}$. Par conséquent : $\mathcal{E} = (OI)$.

$\boxed{\text{Les triangles homothétiques DEF et } I_aI_bI_c \text{ ont même droite d'Euler (OI)}}$

remarque La droite (OI) étant globalement invariante par l'homothétie φ contient donc le centre S de celle-ci . $\boxed{S \in (OI)}$

L'isobarycentre G_1 de { I_a , I_b , I_c } appartient à la droite d'Euler (OI) du triangle $I_aI_bI_c$ . .

Le triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$, qui est le triangle médian du triangle $I_aI_bI_c$ se déduit donc de celui-ci par l'homothétie $H(G_1 , -\frac{1}{2})$.

La droite d'Euler (OI) du triangle $I_aI_bI_c$, qui contient le centre G_1 de l'homothétie H est donc globalement invariante par H .

conséquence Les triangles homothétiques $I_aI_bI_c$ et $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ ont même droite d'Euler (OI) .

De même , l'homothétie $K(I , \frac{1}{2})$ qui tranforme $I_aI_bI_c$ en A"B"C" laisse globalement invariante la droite (OI) .

$\boxed{\text{Les triangles homothétiques } I_aI_bI_c \text{ et A"B"C" ont donc même droite d'Euler (OI)}}$

$\overrightarrow{C\Omega_3} \perp \overrightarrow{CC"}$. Les points Ω_3 et C" sont donc diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}$. On a donc :

$\Omega_3 = S_O(C")$. De même : $\Omega_2 = S_O(B")$ et $\Omega_1 = S_O(A")$.

remarque Les triangles $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ et A"B"C" sont donc homothétiques , et en outre isométriques .

Leurs droites d'Euler , contenant toutes deux le point O , sont donc effectivement confondues .

3°) Le triangle ABC est le triangle orthique du triangle $I_aI_bI_c$. Or on sait (théorème de Nagel) que le centre

voir page 26 Ω du cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$ vérifie : $(\Omega I_a) \perp (BC)$.

Mais on sait aussi que la droite (BC) est tangente en D_1 à $\mathcal{J}_a$, donc : $(BC) \perp (D_1I_a)$.

Les deux droites parallèles (ΩI_a) et (D_1I_a) sont donc confondues , d'où : $\Omega \in (D_1I_a)$.

On démontre de même que : $\Omega \in (E_2I_b)$ et $\Omega \in (F_3I_c)$.

$\boxed{\text{Les trois droites } (I_aD_1) , (I_bE_2) , (I_cF_3) \text{ sont donc concourantes en } \Omega .}$

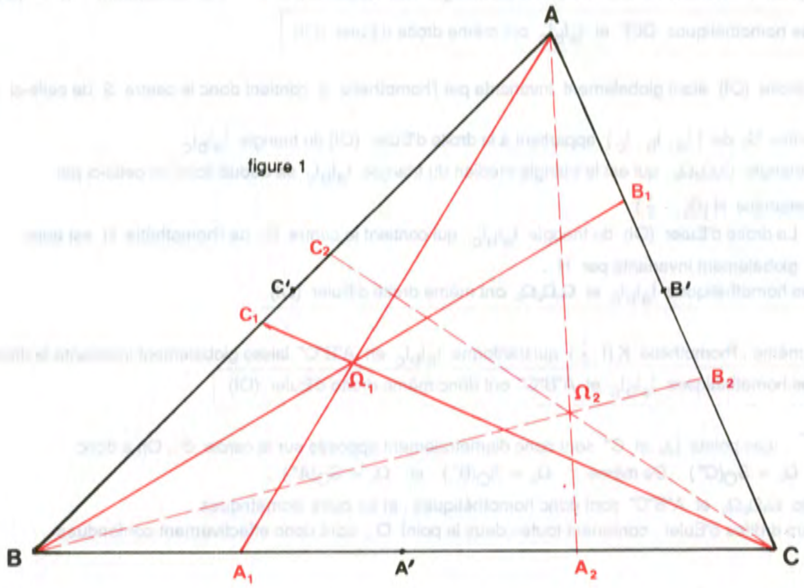
Point de Gergonne et point de Nagel .

1ère partie : céviennes isotomiques .

Vocabulaire :
- On appelle cévienne d'un triangle ABC toute droite Δ contenant un sommet de ce triangle et sécante avec le côté opposé .
- Le point où la droite Δ coupe ce côté opposé est dit pied de la cévienne Δ .
- Deux céviennes Δ_1 et Δ_2 issues d'un même sommet (A par exemple) sont dites isotomiques lorsque leurs pieds A_1 et A_2 sont symétriques par rapport au milieu A' de (B , C) .

Démontrer que les céviennes isotomiques de trois céviennes concourantes ou parallèles sont elles-mêmes trois céviennes concourantes ou parallèles .

figure 1



Lorsque les points Ω_1 et Ω_2 existent et n'appartiennent pas à $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$, on dit qu'ils sont points réciproques l'un de l'autre .

Notions utilisées :
- *théorème de Thalès*
- *théorème de Céva*

voir figure 1 Soit trois céviennes (AA_1), (BB_1), (CC_1) de pieds respectifs A_1, B_1, C_1.

Soit A', B', C' les milieux respectifs de (B, C), (C, A), (A, B).

Soit $\begin{cases} A_2 = S_{A'}(A_1) \\ B_2 = S_{B'}(B_1) \\ C_2 = S_{C'}(C_1) \end{cases}$ alors : $\begin{cases} \overline{A_1B} = -\overline{A_2C} \ ; \ \overline{B_1C} = -\overline{B_2A} \ ; \ \overline{C_1A} = -\overline{C_2B} \\ \overline{A_2B} = -\overline{A_1C} \ ; \ \overline{B_2C} = -\overline{B_1A} \ ; \ \overline{C_2A} = -\overline{C_1B} \end{cases}$ (α)

1^er cas Supposons les trois céviennes (AA_1), (BB_1), (CC_1) parallèles.

Démontrons que $A_1 \notin \{B, C\}$

* Supposons, par exemple, $A_1 = B$. Alors $(AA_1) = (AB)$. Or $(CC_1) // (AA_1)$ donc $(CC_1) // (AB)$.

Plus précisément : $(CC_1) \cap (AB) = \emptyset$ car $C \notin (AB)$.

* ce qui contrarie l'hypothèse puisque $(CC_1) \cap (AB) = \{C_1\}$.

De même, on démontre $B_1 \notin \{C, A\}$ et $C_1 \notin \{A, B\}$.

voir page 23 Les droites (AA_1), (BB_1), (CC_1) étant parallèles, le théorème de Céva assure que : $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \times \dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \times \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1$ (1)

Compte tenu des relations (α), la relation (1) s'écrit : $\dfrac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}} \times \dfrac{\overline{B_2A}}{\overline{B_2C}} \times \dfrac{\overline{C_2B}}{\overline{C_2A}} = -1$ (2)

ce qui démontre que les droites (AA_2), (BB_2), (CC_2), céviennes isotomiques respectives de (AA_1), (BB_1), (CC_1), sont concourantes ou parallèles.

2^ème cas Supposons les céviennes (AA_1), (BB_1), (CC_1) concourantes en un point Ω_1.

a) * Si $\Omega_1 \notin (AB) \cup (BC) \cup (CA)$,

le même raisonnement que ci-dessus permet de déduire la relation (2) de la relation (1).

Les céviennes (AA_2), (BB_2), (CC_2) sont donc concourantes ou parallèles.

b) * Si $\Omega_1 \in (AB) \cup (BC) \cup (CA) - \{A, B, C\}$. Supposons, par exemple $\Omega_1 \in (AB) - \{A, B\}$.

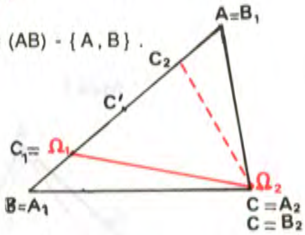
On a alors : $\begin{cases} (AA_1) = (A\Omega_1) & \text{donc :} \quad A_1 = B \\ (BB_1) = (B\Omega_1) & \text{donc :} \quad B_1 = A \\ (CC_1) = (C\Omega_1) & \text{donc :} \quad \Omega_1 = C_1 \end{cases}$

Les relations (α) assurent alors que : $\begin{cases} A_2 = C \\ B_2 = C \end{cases}$

Par ailleurs : $C_2 = S_{C'}(\Omega_1)$

Donc : $(AA_2) \cap (BB_2) \cap (CC_2) = (AC) \cap (BC) \cap (CC_2)$

Les droites (AA_2), (BB_2), (CC_2) sont donc concourantes en C



De même : si $\Omega_1 \in (BC) - \{B, C\}$, les droites (AA_2), (BB_2), (CC_2) sont concourantes en A.

si $\Omega_1 \in (CA) - \{C, A\}$, les droites (AA_2), (BB_2), (CC_2) sont concourantes en B.

c) * Si $\Omega_1 \in \{A, B, C\}$. Supposons par exemple : $\Omega_1 = A$

On a alors : $(BB_1) = (B\Omega_1) = (BA)$ donc : $B_1 = A$

$(CC_1) = (C\Omega_1) = (CA)$ donc : $C_1 = A$

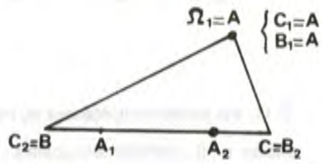
Les trois droites (AA_1), (BB_1), (CC_1) sont concourantes, donc distinctes.

Par conséquent : $(AA_1) \neq (AB)$ et $(AA_1) \neq (AC)$,

donc $A_1 \in (BC) - \{B, C\}$.

$B_1 = A$ donc $B_2 = C$

$C_1 = A$ donc $C_2 = B$



$\left.\begin{matrix} A_2 = S_{A'}(A_1) \\ A_1 \in (BC) - \{B, C\} \end{matrix}\right\}$ donc $A_2 \in (BC) - \{B, C\}$..

$(BB_2) \cap (CC_2) \cap (AA_2) = (BC) \cap (BC) \cap (AA_2) = \{A_2\}$

Les droites (AA_2), (BB_2), (CC_2) admettent donc un point commun A_2, $A_2 \in (BC) - \{B, C\}$.

On obtient un résultat analogue si $(\Omega_1 = B)$ ou si $(\Omega_1 = C)$.

Point de Gergonne et point de Nagel .

2^{eme} partie : points réciproques et coordonnées barycentriques .

Soit trois céviennes (AG_1), (BG_1), (CG_1) concourantes en un point G_1 n'appartenant pas à $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$.
Il existe alors trois réels α , β , γ de somme non nulle , tels que : $G_1 = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

1°) Vérifier que les trois réels α,β,γ sont non nuls .

2°) Démontrer que : $\alpha + \beta \neq 0$; $\beta + \gamma \neq 0$; $\alpha + \gamma \neq 0$.

3°) Soit $A_1 = \mathrm{Bar}\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$.
Démontrer que A_1 est le pied de la cévienne (AG_1) et que le barycentre de $\{(B,\frac{1}{\beta}),(C,\frac{1}{\gamma})\}$ est le pied de la cévienne isotomique de (AG_1) .

4°) Si $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$, alors les céviennes isotomiques de (AG_1), (BG_1), (CG_1) sont parallèles .

5°) Si $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\neq 0$, alors les céviennes isotomiques de (AG_1), (BG_1), (CG_1) sont concourantes et leur point de concours est le barycentre de $\{(A,\frac{1}{\alpha}),(B,\frac{1}{\beta}),(C,\frac{1}{\gamma})\}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$$

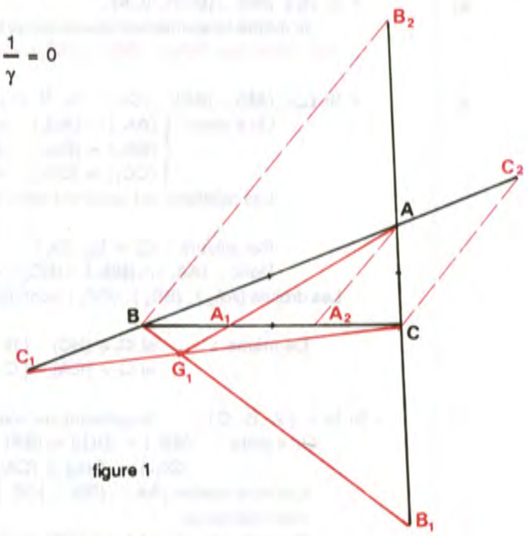
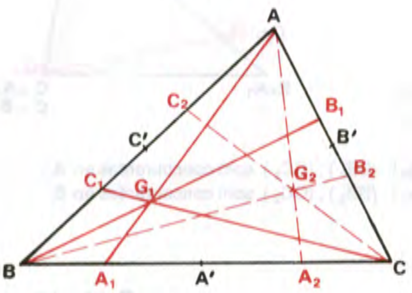


figure 1

figure 2



Si G_1 est strictement intérieur au triangle ABC , on peut choisir α,β,γ strictement positifs . Alors $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$ sont strictement positifs .Par conséquent :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\neq 0$$

Tout point G_1 , <u>strictement intérieur</u> au triangle ABC admet donc un unique point réciproque G_2 lui-même strictement intérieur au triangle ABC .

<u>Notion utilisée</u> : * *barycentre*

1°) * Supposons $\alpha = 0$. Alors $G_1 = \text{Bar}\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$, donc $G_1 \in (BC)$.

* Ce qui contrarie l'hypothèse $G_1 \notin (AB) \cup (BC) \cup (CA)$.

Par conséquent $\alpha \neq 0$; de même $\beta \neq 0$; $\gamma \neq 0$.

2°) * Supposons $\beta + \gamma = 0$. On a donc $\gamma = -\beta$.

Par définition du point G_1 , $\alpha \overrightarrow{G_1A} + \beta \overrightarrow{G_1B} - \beta \overrightarrow{G_1C} = \overrightarrow{O}$, c'est à dire : $\alpha \overrightarrow{G_1A} + \beta \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{O}$

α et β sont deux réels non nuls , donc $\overrightarrow{G_1A}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires . On a donc $(G_1A) // (CB)$.

Plus précisément $(G_1A) \cap (CB) = \varnothing$ puisque $A \notin (BC)$.

voir page 88 * Ceci est impossible puisque (G_1A) est une cévienne issue de A et donc sécante avec (BC) .

On a donc $\beta + \gamma \neq 0$; de même $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha + \gamma \neq 0$.

3°) Puisque : $\beta + \gamma \neq 0$, le point A_1 , barycentre de $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$ existe et : $\beta \overrightarrow{A_1B} + \gamma \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{O}$ (1)

Par ailleurs , le théorème d'associativité barycentrique permet d'écrire :

$G_1 = \text{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} = \text{Bar}\{(A,\alpha),(A_1,\beta+\gamma)\}$.

$G_1 \in (AA_1)$ et $A_1 \in (BC)$ donc A_1 est le pied de la cévienne (AG_1) .

voir page 89 relations (α) Soit A_2 le pied de la cévienne isotomique de (AG_1) . On a : $\overrightarrow{A_1B} = -\overrightarrow{A_2C}$ et $\overrightarrow{A_1C} = -\overrightarrow{A_2B}$

La relation (1) s'écrit alors : $\beta \overrightarrow{A_2C} + \gamma \overrightarrow{A_2B} = \overrightarrow{O}$

ce qui démontre que : $\boxed{A_2 = \text{Bar}\{(B,\gamma),(C,\beta)\} = \text{Bar}\{(B,\frac{1}{\beta}),(C,\frac{1}{\gamma})\}}$

4°) $\boxed{\text{On suppose : } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0}$

voir figure 1 $A_2 = \text{Bar}\{(B,\frac{1}{\beta}),(C,\frac{1}{\gamma})\}$. Par conséquent $(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})\overrightarrow{AA_2} = \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\gamma}\overrightarrow{AC}$

c'est à dire , puisque $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{1}{\alpha}$: $-\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AA_2} = \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\gamma}\overrightarrow{AC}$ (2)

De même , on démontre : $-\frac{1}{\beta}\overrightarrow{BB_2} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{\gamma}\overrightarrow{BC}$ (3)

Les relations (2) et (3) permettent d'écrire : $-\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AA_2} + \frac{1}{\beta}\overrightarrow{BB_2} = (\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha})\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\gamma}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$

c'est à dire : $-\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AA_2} + \frac{1}{\beta}\overrightarrow{BB_2} = \vec{0}$ (puisque $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\gamma}$)

Les vecteurs $\overrightarrow{AA_2}$ et $\overrightarrow{BB_2}$ sont colinéaires , et donc : $\boxed{(AA_2) // (BB_2)}$.

De même , on démontre : $\boxed{(AA_2) // (CC_2)}$

5°) $\boxed{\text{On suppose : } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \neq 0}$. Le point G_2 , barycentre de $\{(A,\frac{1}{\alpha}),(B,\frac{1}{\beta}),(C,\frac{1}{\gamma})\}$ existe .

voir figure 2 Utilisons le théorème d'associativité barycentrique en associant les points B et C .

$G_2 = \text{Bar}\{(A,\frac{1}{\alpha}),(A_2,\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})\}$ donc : $G_2 \in (AA_2)$ et $(AG_2) = (AA_2)$

De même , $\begin{cases} \text{La droite } (AG_2) \text{ est donc la cévienne isotomique de } (AG_1) . \\ \text{La droite } (BG_2) \text{ est donc la cévienne isotomique de } (BG_1) \\ \text{La droite } (CG_2) \text{ est donc la cévienne isotomique de } (CG_1) \end{cases}$

$\boxed{\text{Les céviennes isotomiques de } (AG_1), (BG_1), (CG_1) \text{ sont donc concourantes en } G_2 .}$

Point de Gergonne et point de Nagel .

3ème partie : existence et définition des points de Gergonne et de Nagel .

Soit { * $\mathfrak{J}$ le cercle inscrit dans un triangle ABC .
* $\mathfrak{J}_a$, $\mathfrak{J}_b$, $\mathfrak{J}_c$ les cercles exinscrits du triangle ABC .

Soit { * D , E , F les points de contact respectifs de $\mathfrak{J}$ avec les droites (BC) , (CA) , (AB) .
* D_1 , E_2 , F_3 les points de contact respectifs de $\mathfrak{J}_a$ avec (BC) , $\mathfrak{J}_b$ avec (CA) , $\mathfrak{J}_c$ avec (AB) .

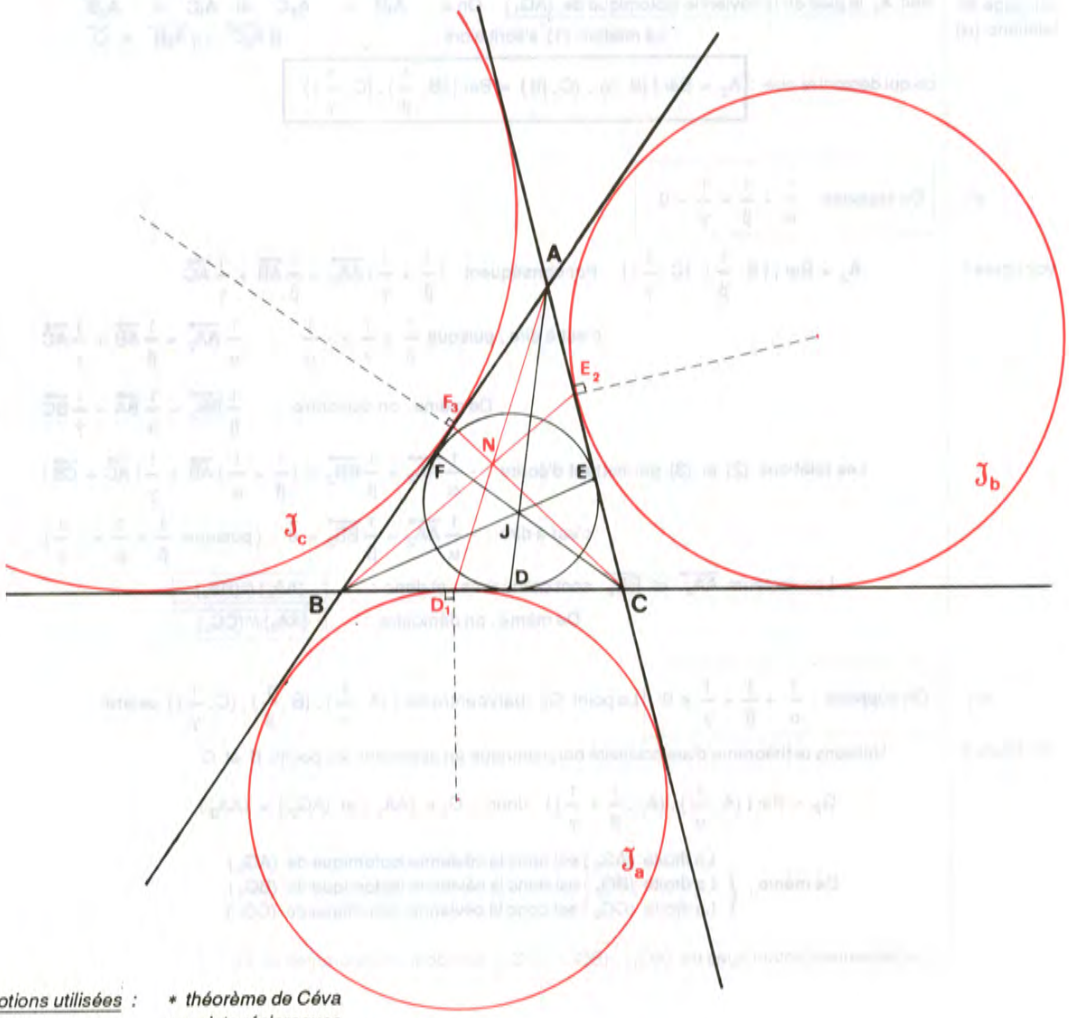
Démontrer que :

1°) Les droites (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes .

2°) Les droites (AD_1) , (BE_2) , (CF_3) sont concourantes .

Le point de concours J de (AD) , (BE) , (CF) est dit point de Gergonne du triangle ABC .

Le point de concours N de (AD_1) , (BE_2) , (CF_3) est dit point de Nagel du triangle ABC .



Notions utilisées :
* *théorème de Céva*
* *points réciproques*
* *propriétés des pieds des bissectrices*

1°) a) Démontrons que (AD) et (BE) sont non parallèles .

* Supposons (AD) // (BE)

Le théorème de Thalès garantirait que : $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$. (β)

Or on sait que $D \in]BC[$ et $E \in]AC[$. On a donc : $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} < 0$ et $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} > 0$.

* Ces inégalités sont incompatibles avec la relation (β) .

Les droites (AD) et (BE) sont donc sécantes .

1°) b) Démontrons que (AD) , (BE) et (CF) sont concourantes .

voir page 83 Rappelons : $\begin{cases} FA = EA = p - a \\ DB = FB = p - b \\ DC = EC = p - c \end{cases}$ et $\begin{cases} D \in]BC[\\ E \in]AC[\\ F \in]AB[\end{cases}$

On a donc , par exemple : $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = - \dfrac{DB}{DC}$

Par conséquent : $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = (- \dfrac{p-b}{p-c}) \times (- \dfrac{p-c}{p-a}) \times (- \dfrac{p-a}{p-b})$

c'est à dire : $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$

voir page 23 Le théorème de Céva garantit donc que les droites (AD) , (BE) et (CF) sont concourantes ou parallèles .

Ces droites ne sont pas parallèles (voir ci-dessus) donc :

conclusion

Les trois droites (AD) , (BE) et (CF) sont concourantes en un point J (J : point de Gergonne du triangle ABC) .

2°) On a déjà établi : $D_1 = S_{A'}(D)$; $E_2 = S_{B'}(E)$; $F_3 = S_{C'}(F)$.

voir page 80 Les droites (AD_1) , (BE_2) et (CF_3) sont donc les céviennes isotomiques respectives des céviennes (AD) , (BE) et (CF) , lesquelles sont concourantes en J .

Le point J est strictement intérieur au triangle ABC (car $D \in]BC[$ et $E \in]AC[$) .

voir page 90

Les céviennes (AD_1) , (BE_2) et (CF_3) sont donc concourantes en un point N , lui aussi strictement intérieur au triangle ABC . (N : point de Nagel du triangle ABC) .

conclusion *Les points N et J sont donc points réciproques relativement au triangle ABC .*

Point de Gergonne et point de Nagel .

4^{eme} partie : propriétés des points de Gergonne et de Nagel .

Soit $\begin{cases} * \ \mathcal{J} \text{ le cercle inscrit dans un triangle ABC .} \\ * \ \mathcal{J}_a , \mathcal{J}_b , \mathcal{J}_c \text{ les cercles exinscrits du triangle ABC .} \end{cases}$

Soit $\begin{cases} * \ D , E , F \text{ les points de contact respectifs de } \mathcal{J} \text{ avec les droites (BC) , (CA) , (AB) .} \\ * \ D_1 , E_2 , F_3 \text{ les points de contact respectifs de } \mathcal{J}_a \text{ avec (BC) ,} \mathcal{J}_b \text{ avec (CA) ,} \mathcal{J}_c \text{ avec (AB) .} \end{cases}$

On pose : AF = x ; BD = y ; CE = z .

1°) Déterminer a) le barycentre J de { (A , yz) , (B , xz) , (C , xy) } .
b) le barycentre N de { (A , x) , (B , y) , (C , z) } .

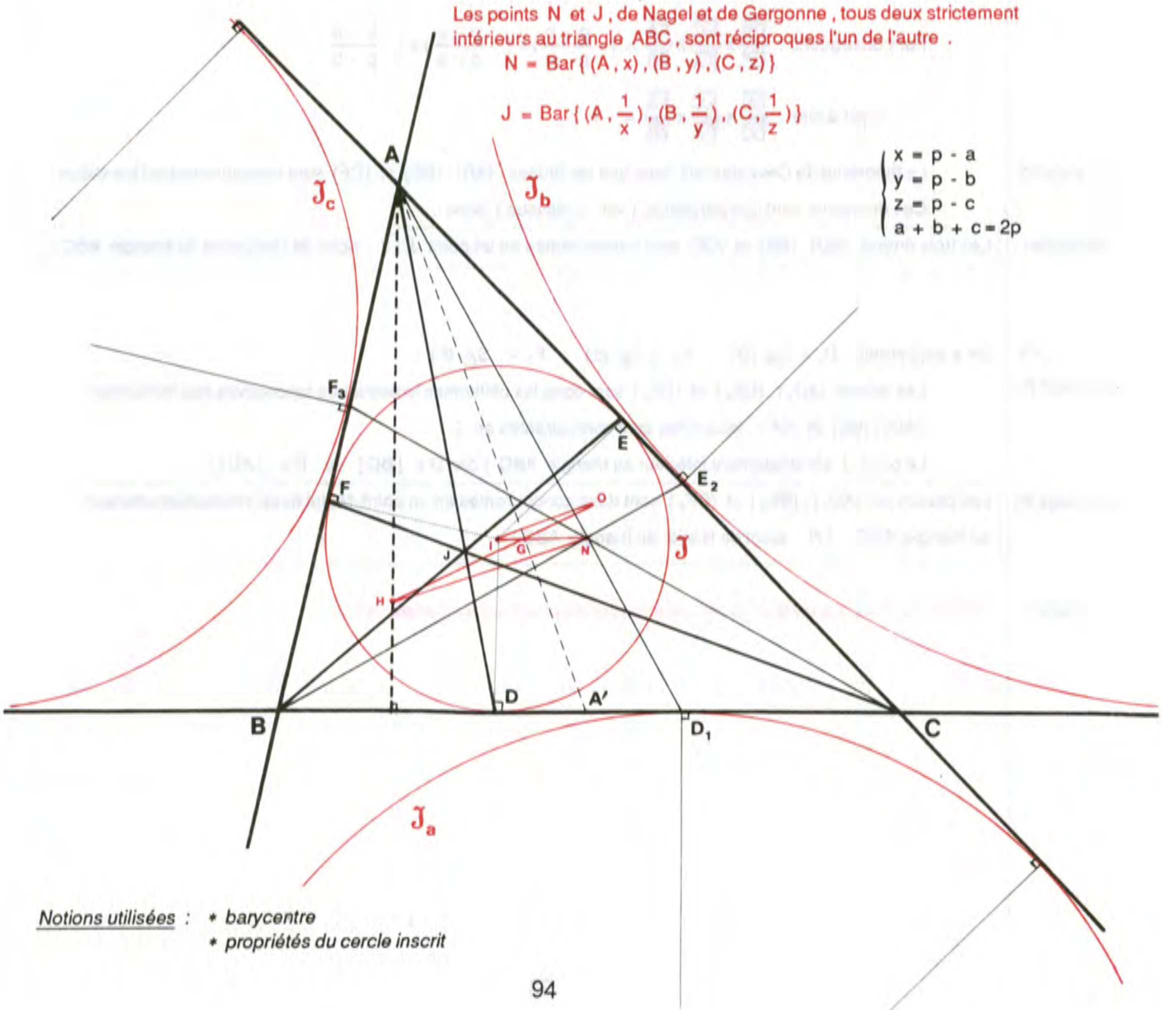
Démontrer ainsi que : $\begin{cases} \text{les droites (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes .} \\ \text{les droites } (AD_1) , (BE_2) , (CF_3) \text{ sont concourantes .} \end{cases}$

2°) Démontrer les relations : $\begin{cases} \overrightarrow{GN} + 2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{O} \\ \overrightarrow{HN} + 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{O} \end{cases}$ où $\begin{cases} \text{G est l'isobarycentre de \{ A , B , C \} .} \\ \text{H est l'orthocentre du triangle ABC .} \\ \text{O est le centre du cercle circonscrit à ABC .} \\ \text{I est le centre du cercle inscrit } \mathcal{J} \text{ .} \end{cases}$

On retrouve ici un cas particulier des résultats obtenus page 90 .
Les points N et J , de Nagel et de Gergonne , tous deux strictement intérieurs au triangle ABC , sont réciproques l'un de l'autre .

$$N = \text{Bar}\{ (A , x) , (B , y) , (C , z) \}$$

$$J = \text{Bar}\{ (A , \tfrac{1}{x}) , (B , \tfrac{1}{y}) , (C , \tfrac{1}{z}) \}$$



$$\begin{cases} x = p - a \\ y = p - b \\ z = p - c \\ a + b + c = 2p \end{cases}$$

Notions utilisées : * *barycentre*
* *propriétés du cercle inscrit*

1°) a) Les réels x , y , z sont strictement positifs . Rappelons que : $CD = CE = z$.

voir page 82 On sait que : $\mathrm{Bar}\{(B, xz), (C, xy)\} = \mathrm{Bar}\{(B, z), (C, y)\}$.

Or $D \in]BC[$, donc : $\mathrm{Bar}\{(B, CD), (C, BD)\} = D$.

Utilisons le théorème d'associativité barycentrique en associant les points B et C .

$J = \mathrm{Bar}\{(A, yz), (B, xz), (C, xy)\}$ donc $J = \mathrm{Bar}\{(A, yz), (D, xz + xy)\}$.

Donc $J \in (AD)$. De façon plus précise : $J \in]AD[$ car $yz > 0$ et $xz + xy > 0$.

De même , on prouve : $J \in]BE[$ et $J \in]CF[$, ce qui démontre que :

Les trois droites (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes . Leur point de concours J , qui est le point de Gergonne du triangle ABC , est le barycentre de $\{(A, yz), (B, xz), (C, xy)\}$.

1°) b) Rappelons que : $CD_1 = BD = y$ et $BD_1 = CD = z$.

On a alors : $\mathrm{Bar}\{(B, y), (C, z)\} = \mathrm{Bar}\{(B, CD_1), (C, BD_1)\}$.

Or $D_1 \in]BC[$, donc : $\mathrm{Bar}\{(B, CD_1), (C, BD_1)\} = D_1$.

Utilisons le théorème d'associativité barycentrique en associant les points B et C .

$N = \mathrm{Bar}\{(A, x), (B, y), (C, z)\}$ donc $N = \mathrm{Bar}\{(A, x), (D_1, y + z)\}$.

Donc $N \in (AD_1)$. De façon plus précise : $N \in]AD_1[$ puisque $x > 0$ et $y + z > 0$

De même , on prouve : $N \in]BE_2[$ et $N \in]CF_3[$, ce qui démontre que :

Les trois droites (AD_1) , (BE_2) , (CF_3) sont concourantes . Leur point de concours N , qui est le point de Nagel du triangle ABC , est le barycentre de $\{(A, x), (B, y), (C, z)\}$.

2°) Rappelons que : $\left\{ \begin{array}{l} \text{le centre I du cercle } \mathcal{J} \text{ inscrit dans le triangle ABC est } \mathrm{Bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\} . \\ a = y + z \;;\; b = z + x \;;\; c = x + y \;;\; a + b + c = 2(x + y + z) . \end{array} \right.$

voir page 76

On a alors : $\overrightarrow{GI} = \dfrac{1}{a + b + c}(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC})$

c'est à dire : $\overrightarrow{GI} = \dfrac{1}{2(x + y + z)}[(y + z)\overrightarrow{GA} + (x + z)\overrightarrow{GB} + (x + y)\overrightarrow{GC}]$ (1)

Par ailleurs , $N = \mathrm{Bar}\{(A, x), (B, y), (C, z)\}$.

Donc : $\overrightarrow{GN} = \dfrac{1}{x + y + z}[x\overrightarrow{GA} + y\overrightarrow{GB} + z\overrightarrow{GC}]$ (2)

Additionnons membre à membre les relations (1) et (2) : $2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GN} = \dfrac{x + y + z}{x + y + z}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

Or G est isobarycentre de { A , B , C } , donc : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$

Finalement , on a prouvé : $\boxed{2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GN} = \vec{O}}$ (3)

Les points G , I , N sont donc alignés .

voir page 8 Les points O , G , H , alignés sur la droite d'Euler vérifient : $2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GH} = \vec{O}$ (4)

Par soustraction membre à membre des relations (3) et (4) , on obtient : $2(\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{GO}) + (\overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GH}) = \vec{O}$

c'est à dire : $\boxed{2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{HN} = \vec{O}}$

Point de Gergonne et point de Nagel .

5^{eme} partie : propriétés du point de Nagel (démontrées à l'aide des homothéties) .

Soit $\mathcal{J}$ le cercle inscrit dans un triangle ABC et I le centre de $\mathcal{J}$.
Soit $\mathcal{J}_a$ le cercle exinscrit " dans l'angle A " du triangle ABC et I_a le centre de $\mathcal{J}_a$.
Soit I_1 le point où (AI) coupe (BC) . Soit D et D_1 les points de contact respectifs de (BC) avec $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}_a$.

1°) Démontrer que $\mathcal{J}$ est l'image de $\mathcal{J}_a$ par deux homothéties dont les centres sont A et I_1 .

2°) Soit N le point de Nagel du triangle ABC .
Démontrer que :
a) (AN) contient le point D' , diamétralement opposé de D sur le cercle $\mathcal{J}$.
b) (AN) est parallèle à (IA') , où A' désigne le milieu de (B , C) .

3°) Démontrer que :

a) $\overrightarrow{GN} = -\,2\overrightarrow{GI}$
$\overrightarrow{HN} = -\,2\overrightarrow{OI}$

b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{D'D_1}$

où
* G est l'isobarycentre de { A , B , C } .
* H est l'orthocentre du triangle ABC
* O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

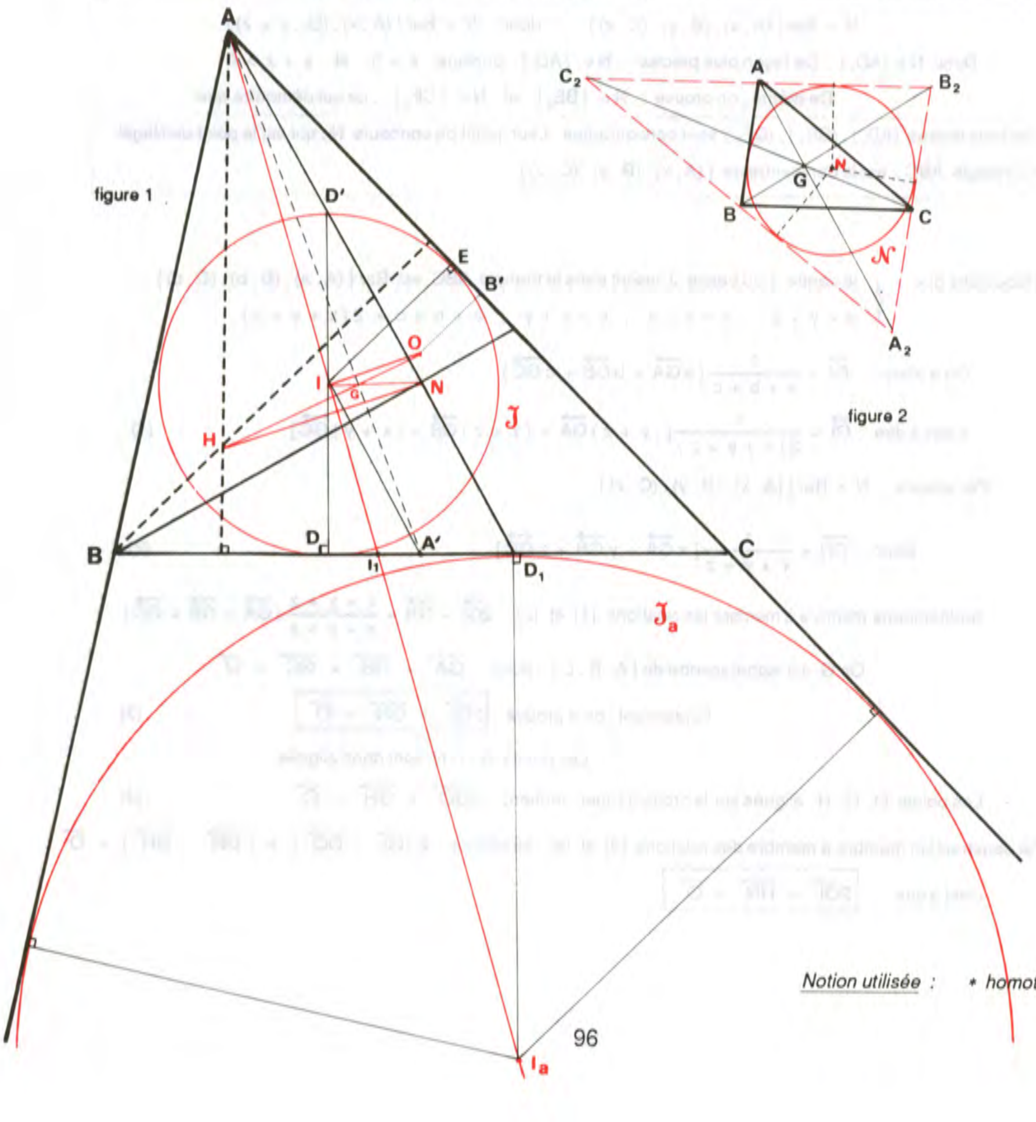


figure 1

figure 2

Notion utilisée : * homothéties

1°) a) Les points A, I, I_a sont alignés. Leurs projetés orthogonaux respectifs A, E, E_1 sur (AC) vérifient donc :

voir figure 1

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AE_1}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AI_a}}. \text{ Posons } k = \frac{\overline{AI}}{\overline{AI_a}} \; ; \text{ alors } \overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{AI_a} \text{ et } \overrightarrow{AE} = k\,\overrightarrow{AE_1}$$

L'homothétie h, de centre A, de rapport k, transforme alors I_a en I, et E_1 en E.

Donc h transforme le cercle $\mathcal{J}_a$ (de centre I_a, contenant E_1) en le cercle $\mathcal{J}$ (de centre I, contenant E).

Soit r_a et r les rayons respectifs de $\mathcal{J}_a$ et $\mathcal{J}$.

Remarquons que : $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{AI_a}} > 0$, donc $k > 0$; $r = |k|\,r_a$ donc : $k = \dfrac{r}{r_a}$

1°) b) Les points I_1, I, I_a sont alignés. Leurs projetés orthogonaux respectifs I_1, D, D_1 sur (BC) vérifient donc :

$$\frac{\overline{I_1D}}{\overline{I_1D_1}} = \frac{\overline{I_1I}}{\overline{I_1I_a}}. \text{ Posons } k' = \frac{\overline{I_1I}}{\overline{I_1I_a}} \; ; \text{ alors } \overrightarrow{I_1I} = k'\,\overrightarrow{I_1I_a} \text{ et } \overrightarrow{I_1D} = k'\,\overrightarrow{I_1D_1}$$

L'homothétie h', de centre I_1, de rapport k', transforme alors I_a en I, et D_1 en D.

Donc h' transforme le cercle $\mathcal{J}_a$ (de centre I_a, contenant D_1) en le cercle $\mathcal{J}$ (de centre I, contenant D).

Remarquons que : $\dfrac{\overline{I_1I}}{\overline{I_1I_a}} < 0$, donc $k' < 0$; $r = |k'|\,r_a$ donc $k' = -\dfrac{r}{r_a}$.

2°) a) L'homothétie h' transforme I_a en I et D_1 en D. Donc : $\overrightarrow{ID} = -\dfrac{r}{r_a}\overrightarrow{I_aD_1}$ (1)

L'homothétie h $\left\{\begin{array}{l}\text{transforme le cercle } \mathcal{J}_a \text{ en le cercle } \mathcal{J}.\\ \text{laisse globalement invariante la droite } (AN) \text{ qui contient le centre } A \text{ de } h.\end{array}\right.$

$D_1 \in (AN) \cap \mathcal{J}_a$ donc : $h(D_1) \in (AN) \cap \mathcal{J}$. Notons $D' = h(D_1)$.

L'homothétie h transforme I_a en I et D_1 en D'. Donc : $\overrightarrow{ID'} = \dfrac{r}{r_a}\overrightarrow{I_aD_1}$ (2)

Des relations (1) et (2), on déduit : $\overrightarrow{ID'} = -\overrightarrow{ID}$. D' est donc diamétralement opposé de D sur $\mathcal{J}$.

conclusion Le point D', diamétralement opposé de D sur le cercle $\mathcal{J}$, appartient à la droite (AN).

2°) b) Rappelons que : $A' = m(D, D_1)$ donc : $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D'D_1}$. (3)

voir page 80 En outre : $I = m(D, D')$.

La droite (AN), qui est la droite $(D'D_1)$, est donc parallèle à (IA').

3°) a) L'isobarycentre G de $\{A, B, C\}$ vérifie : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$.

voir page 13 Considérons l'homothétie $\mathcal{H}$, de centre G, de rapport (-2). On a : $\mathcal{H}(A') = A$.

Par $\mathcal{H}$, l'image de $(A'I)$ est une droite contenant A et parallèle à $(A'I)$.

Or on sait que : $(AN) \,/\!/\, (A'I)$. On en déduit : $\mathcal{H}((A'I)) = (AN)$.

De même, on établit que : $\mathcal{H}((B'I)) = (BN)$ où $B' = m(A, C)$.

Or $I \in (A'I) \cap (B'I)$. Donc $\mathcal{H}(I) \in (AN) \cap (BN)$, d'où $\mathcal{H}(I) = N$.

On en déduit : $\boxed{\overrightarrow{GN} = -2\overrightarrow{GI}}$

3°) b) Rappelons qu'on a : $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ (voir cercle d'Euler, page 13)

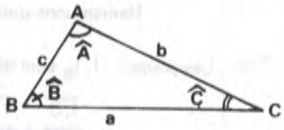
On a alors : $\mathcal{H}(G, -2)$: $\begin{array}{l} O \longmapsto H \\ I \longmapsto N \\ A' \longmapsto A \end{array}$ donc $\begin{array}{l} \boxed{\overrightarrow{HN} = -2\overrightarrow{OI}} \\ \boxed{\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{A'I}} \end{array}$ (4)

Les relations (3) et (4) permettent d'écrire ; $\boxed{\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{D'D_1}}$

voir figure 2 Puisque I est centre du cercle $\mathcal{J}$ inscrit dans le triangle ABC, alors le point N, qui est $\mathcal{H}(I)$, est centre du cercle $\mathcal{N}$ inscrit dans le triangle " antimédian" $A_2B_2C_2$ du triangle ABC, où $A_2 = \mathcal{H}(A)$, $B_2 = \mathcal{H}(B)$, $C_2 = \mathcal{H}(C)$.

Relations métriques dans un triangle .

Notations $\begin{cases} a = BC \;;\; b = CA \;;\; c = AB . \\ \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \text{ sont les réels appartenant à }]0,\pi[\text{, mesures respectives, en radians de } [\widehat{BAC}], [\widehat{CBA}], [\widehat{ACB}] \\ \text{mais les notations } \sin\widehat{A}, \cos\widehat{A} \text{ seront remplacées par } \sin A, \cos A . \end{cases}$



I Formule d'Al Kaschi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c.\cos A$.

1°) $BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ (1)

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos A$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c.\cos A}$ (f)

2°) Deux autres relations se déduisent de (f) par " permutation circulaire ", c'est à dire en remplaçant a par b , b par c , c par a , ainsi que A par B , B par C et C par A .

On obtient ainsi : $b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a.\cos B$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b.\cos C$

Remarquons la relation , déduite de (1) : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)}$ (2)

Propriété de Pythagore .

La relation (2) prouve que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est nul si , et seulement si : $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ce que nous énonçons : le triangle ABC est rectangle en A si , et seulement si : $a^2 + b^2 = c^2$.

II Inégalités triangulaires .

1°) De la formule d'Al Kaschi , on déduit : $\boxed{\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$ (3)

La donnée des longueurs des trois côtés d'un triangle ABC permet de déterminer les mesures de ses trois angles .

2°) Puisque $\widehat{A} \in \,]0,\pi[$, on a : $-1 < \cos A < +1$, d'où : $-1 < \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < +1$

On déduit alors (puisque $bc > 0$) :

$$-2bc < b^2 + c^2 - a^2 < 2bc$$
$$b^2 + c^2 - 2bc < a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$$
$$(b - c)^2 < a^2 < (b + c)^2$$

d'où les inégalités dites triangulaires : $\boxed{|b - c| < a < |b + c|}$ (4)

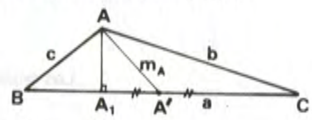
Dans tout triangle , la longueur d'un quelconque côté est inférieure strictement à la somme des longueurs des deux autres côtés et supérieure strictement à la valeur absolue de la différence des longueurs de ces deux autres côtés .

III Formules de la médiane . (On note A' le milieu de (B , C) et A_1 le projeté orthogonal de A sur (BC))

1°) $AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B})^2 + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C})^2$

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + A'B^2 + A'C^2 + 2\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$

or $A'B = A'C = \frac{1}{2}BC$ et $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{O}$



$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2}$

En posant $m_A = AA'$, on obtient : $\boxed{b^2 + c^2 = 2m_A{}^2 + \frac{1}{2}a^2}$ (5)

2°) $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{CB}.2\overrightarrow{AA'}$ or $\overrightarrow{CB}.2\overrightarrow{AA'} = 2\overline{BC}.\overrightarrow{A'A} = 2\overline{BC} \times \overline{A'A_1}$

On trouve alors : $\boxed{AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC} \times \overline{A'A_1}}$ (6)

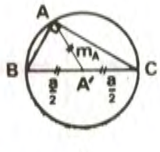
3°) Conséquences

* La propriété de Pythagore et la formule (5) permettent d'énoncer :

le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si : $2m_A^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$

c'est à dire : $m_A^2 = \frac{1}{4}a^2$, ou encore : $m_A = \frac{1}{2}a$, donc :

le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si le cercle de diamètre [BC] contient le sommet A .



* De la formule (6), on déduit l'équivalence : (AB = AC $\Leftrightarrow$ A' = A_1) . Donc : le triangle ABC est isocèle de sommet A si, et seulement si sa médiane issue de A est aussi la hauteur issue de A .

IV Relations liant a , b , c , $\sin\widehat{A}$, $\sin\widehat{B}$, $\sin\widehat{C}$, S , R .

$\begin{cases} S : \text{aire du triangle ABC} \\ R : \text{rayon du cercle } \mathcal{C} \text{ circonscrit au triangle ABC} \end{cases}$

1°) formule : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{abc}{2S}$

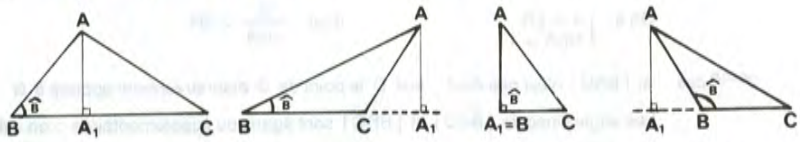


figure 1 figure 3 figure 4

$S = \frac{1}{2}BC \times AA_1$ et $\dfrac{AA_1}{BA} = \sin\widehat{ABA_1}$ et $\widehat{ABA_1} \in]\,0\,, \frac{\pi}{2}[$

Dans le cas des figures 1 , 2 , 3 on a : $\widehat{ABA_1} = \widehat{ABC}$

Dans le cas de la figure 4 , on a : $\widehat{ABA_1} = \pi - \widehat{ABC}$ Dans tous les cas, on a : $\sin\widehat{ABA_1} = \sin\widehat{ABC}$

On a alors : $\dfrac{AA_1}{BA} = \sin\widehat{ABC}$, d'où $AA_1 = AB.\sin\widehat{B}$

On trouve ainsi : $S = \frac{1}{2}BC \times AB \times \sin\widehat{B}$, c'est à dire : $\boxed{S = \frac{1}{2}a\,c\,\sin\widehat{B}}$

En attribuant le rôle joué par B aux sommets C et A , on trouve $\begin{cases} S = \frac{1}{2}b\,a\,\sin\widehat{C} \\ \\ S = \frac{1}{2}c\,b\,\sin\widehat{A} \end{cases}$ (7)

Il en résulte : $2S = b\,c\sin\widehat{A} = c\,a\sin\widehat{B} = a\,b\sin\widehat{C}$.

En divisant abc par 2S , on trouve alors : $\boxed{\dfrac{abc}{2S} = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}}$ (8)

conséquence

On a donc : $\dfrac{b}{\sin B} \times \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a^2}{\sin^2 A}$, d'où : $bc = \dfrac{a^2}{\sin^2 A} \times \sin B \times \sin C$

Puisque $S = \frac{1}{2}b.c.\sin\widehat{A}$, on déduit ainsi : $S = \dfrac{a^2}{2} \times \dfrac{\sin B.\,\sin C}{\sin A}$

Or $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$, donc $\sin\widehat{A} = \sin(\widehat{B} + \widehat{C})$ d'où : $\boxed{S = \dfrac{a^2}{2} \times \dfrac{\sin B.\sin C}{\sin(B + C)}}$ (9)

remarque

Les relations du type (7) permettent de calculer l'aire S du triangle si on connait les longueurs de deux de ses côtés et la mesure de l'angle " compris " entre ces deux côtés .

Les relations du type (9) donnent S connaissant la longueur d'un des côtés et les mesures de ses deux angles " adjacents " à ce côté .

2°) formule : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$. R : rayon du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .

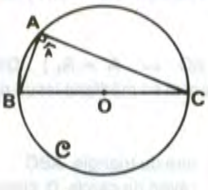


figure 5 .

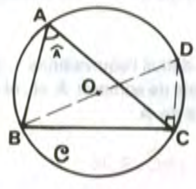


figure 6

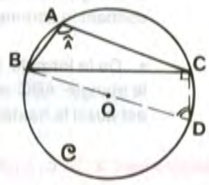


figure 7

1^{er} cas : si $[\widehat{BAC}]$ est droit (figure 5) , alors [BC] est un diamètre de $\mathcal{C}$. Donc : BC = 2R .

On a : $\begin{cases} a = 2R \\ \sin A = 1 \end{cases}$ d'où : $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

2^{eme} cas : si $[\widehat{BAC}]$ n'est pas droit , soit D le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à B . BD = 2R .

Les angles inscrits $[\widehat{BAC}]$ et $[\widehat{BDC}]$ sont égaux ou supplémentaires ; on a donc :

$\widehat{A} = \widehat{BDC}$ (figure 6) ou $\widehat{A} = \pi - \widehat{BDC}$ (figure 7) ; d'où $\sin A = \sin\widehat{BDC}$

Le triangle BCD est rectangle en C , donc : $\sin\widehat{BDC} = \dfrac{BC}{BD}$, d'où $\sin A = \dfrac{a}{2R}$

On obtient encore : $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

Le rôle précédemment joué par le point A peut être attribué à B ou à C . D'où les relations :

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R} \qquad (10)$$

3°) Des relations (8) et (10) , on déduit alors la relation : $\boxed{abc = 4RS}$

V Formule de Héron : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

(Héron d'Alexandrie : 2^{eme} siècle avant J.C)

p : demi-périmètre du triangle ABC

$a + b + c = 2p$

1°) On a : $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (voir (3)) et $\sin\widehat{A} = \dfrac{2S}{bc}$ (voir (7))

La relation $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ s'écrit alors : $\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 + \dfrac{4S^2}{b^2c^2} = 1$

On obtient ainsi :

$$16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$
$$16S^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2) \times (2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$
$$16S^2 = [(b+c)^2 - a^2] \times [a^2 - (b-c)^2]$$
$$16S^2 = (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \qquad (e)$$

Les réels a , b , c vérifient les inégalités triangulaires : $a < b + c$; $b < a + c$; $c < b + a$.

Le second membre de l'égalité (e) est un réel positif .

En outre : $b + c - a = (b + c + a) - 2a$ donc $b + c - a = 2(p - a)$.

De la relation (e), on déduit alors : $4S = \sqrt{2p.2(p-a).2(p-c).2(p-b)}$ d'où : $\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

L'aire d'un triangle peut ainsi être calculée grâce à la connaissance des longueurs de ses trois côtés .

2°) Soit r le rayon du cercle $\mathcal{I}$ inscrit dans le triangle ABC . On a établi : $\boxed{S = p.r}$ (voir 3°) page 77)

On a donc : $\boxed{r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$

VI Une caractérisation du triangle isocèle

1°) Pour tout triangle ABC, on a : $b^2 - c^2 = a(b\cos\widehat{C} - c\cos\widehat{B})$ (α)

en effet : $\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \end{cases}$ d'où, par différence membre à membre :

$b^2 - c^2 = c^2 - b^2 - 2a(c\cos\widehat{B} - b\cos\widehat{C})$

On obtient : $2(b^2 - c^2) = 2a(b\cos\widehat{C} - c\cos\widehat{B})$ d'où la relation (α)

2°) De la relation (α), on déduit une caractérisation bien connue d'un triangle isocèle :

$(b = c)$ équivaut à : $(\widehat{B} = \widehat{C})$

En effet • si on suppose $b = c$, de la relation (α), on déduit : $0 = ab(\cos\widehat{C} - \cos\widehat{B})$

d'où $\cos\widehat{B} = \cos\widehat{C}$

Puisque $\widehat{B} \in]0, \pi[$ et $\widehat{C} \in]0, \pi[$, on a donc : $\widehat{B} = \widehat{C}$

Réciproquement • si on suppose $\widehat{B} = \widehat{C}$, alors $\cos\widehat{B} = \cos\widehat{C}$

La relation (α) s'écrit : $b^2 - c^2 = a(b - c)\cos\widehat{B}$

On obtient : $(b - c)[b + c - a\cos\widehat{B}] = 0$ (β)

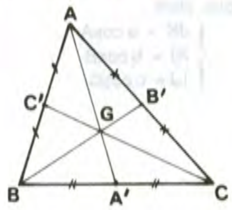
$-1 < \cos B < +1$ donc $b + c - a < b + c - a\cos\widehat{B} < b + c + a$

mais on a : $a < b + c$ (inégalité triangulaire) donc : $0 < b + c - a$

On déduit alors : $b + c - a\cos\widehat{B} > 0$; (β) implique donc : $b - c = 0$.

On a ainsi prouvé que : si $\widehat{B} = \widehat{C}$ alors $b = c$.

VII Dans tout triangle ABC, on a : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ G : isobarycentre de {A, B, C}.



On a : $AG = \frac{2}{3}AA'$; $BG = \frac{2}{3}BB'$; $CG = \frac{2}{3}CC'$

En posant : $AA' = m_A$; $BB' = m_B$; $CC' = m_C$, on a :

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{4}{9}(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2)$$

Or : $2m_A^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2$ (formule de la médiane, voir page 98)

$$\text{d'où : } AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{9}\left[\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) + \left(2c^2 + 2a^2 - b^2\right) + \left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)\right]$$

On trouve : $\boxed{AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)}$

Exercice : démontrer que, pour tout point M du plan du triangle ABC, on a :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

En déduire que : $\boxed{\text{la somme } MA^2 + MB^2 + MC^2 \text{ est minimale si, et seulement si : } (M = G)}$

Solution : $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

Or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$ puisque $G = \text{Bar } \{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$

d'où : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Le deuxième membre est une somme de réels positifs. Cette somme est minimale si, et seulement si $MG = 0$, c'est à dire $(M = G)$.

Relations trigonométriques dans un triangle ABC .

Notations : $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$; $a + b + c = 2p$

$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ sont les réels appartenant à $]0, \pi[$, mesures respectives, en radians, des angles $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{CBA}]$, $[\widehat{ACB}]$, mais on écrira $\sin A$ au lieu de $\sin\widehat{A}$.

S désigne l'aire du triangle ABC et R le rayon de son cercle circonscrit.

1°) Démontrer que, pour tout triangle ABC, on a :

a) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4.\sin A.\sin B.\sin C$ (f_1)

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (f_2)

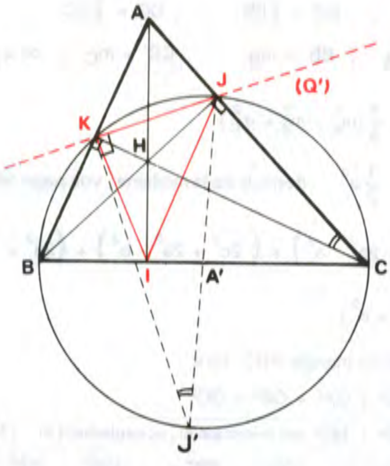
c) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$ (f_3)

d) $\sin A \times \sin B \times \sin C = \frac{S}{2R^2}$ (f_4)

e) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2} = \frac{8S^2}{abc} = \frac{2S}{R}$ (f_5)

f) Dans le cas où les trois angles du triangle ABC sont aigus, interpréter la somme $a\cos A + b\cos B + c\cos C$ en calculant le périmètre du triangle orthique du triangle ABC.

2°) Démontrer que, si le triangle ABC n'est pas rectangle, on a :
$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C$ (f_6)



Si les trois angles du triangle ABC sont aigus, alors :
$$\begin{cases} JK = a\cos A \\ KI = b\cos B \\ IJ = c\cos C \end{cases}$$

*Notions utilisées : * formules de trigonométrie :* $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$

1°) a) $(\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ donc : $\sin(A+B) = \sin C$ et $\cos C = \cos(\pi - \widehat{A} - \widehat{B})$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin C[\cos(A-B) + \cos(\pi - A - B)]$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin C\cos(\frac{\pi}{2} - B)\cos(A - \frac{\pi}{2})$ d'où : $\boxed{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin C\sin B\sin A}$ (f_1)

On en déduit alors : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C > 0$.

1°) b) $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{\pi-(A+B)}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\sin A + \sin B + \sin C = 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2})$

$\boxed{\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}$ (f_2)

$\frac{\widehat{A}}{2}, \frac{\widehat{B}}{2}, \frac{\widehat{C}}{2}$ appartiennent à $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\sin A + \sin B + \sin C > 0$

1°) c) Rappelons que : $\frac{2S}{abc} = \frac{1}{2R} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

d'où , en posant $a + b + c = 2p$, $\boxed{\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{p}{R}}$ (f_3)

1°) d) On a aussi : $\sin A \times \sin B \times \sin C = \frac{abc}{8R^3}$. Or $abc = 4RS$. D'où : $\boxed{\sin A \times \sin B \times \sin C = \frac{S}{2R^2}}$ (f_4)

1°) e) $a = 2R\sin A$ donc $a\cos A = 2R\sin A\cos A$, c'est à dire : $a\cos A = R\sin 2A$.

De même : $b\cos B = R\sin 2B$ et $c\cos C = R\sin 2C$

Par conséquent $a\cos A + b\cos B + c\cos C = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

Utilisons (f_1) : $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A \times \sin B \times \sin C$

Or $\sin A\sin B\sin C = \frac{abc}{8R^3}$ donc : $\boxed{a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}}$ (f_5)

Soit , puisque $abc = 4RS$: $\boxed{a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2S}{R} = \frac{8S^2}{abc}}$

1°) f) Supposons que $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ appartiennent à $]0, \frac{\pi}{2}[$ .On a : $a\cos\widehat{A} > 0$; $b\cos\widehat{B} > 0$; $c\cos\widehat{C} > 0$.

Soit J et K les projetés orthogonaux respectifs de B sur (AC) et de C sur (AB) .

voir page 28 On a déjà établi que : $J \in]AC[$ et $K \in]AB[$, donc $\widehat{JCK} = \widehat{ACK}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{KAC}$.

Démontrons que : $JK = a\cos A$.

Considérons le point J' diamétralement opposé de J sur le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [BC] qui contient J et K .

Le triangle JKJ' est alors rectangle en K . On a alors :

$JK = JJ'\sin\widehat{JJ'K}$ et $JJ' = BC = a$, d'où $JK = a\sin\widehat{JJ'K}$

Les angles $\widehat{JJ'K}$ et $\widehat{JCK}$ sont inscrits dans un même cercle $\mathcal{C}_1$ et interceptent deux arcs de mêmes extrêmités J et K . Ils sont donc égaux ou supplémentaires , d'où : $\sin\widehat{JJ'K} = \sin\widehat{JCK}$

Dans le triangle rectangle ACK , on a : $\widehat{ACK} = \frac{\pi}{2} - \widehat{KAC}$ d'où : $\widehat{JCK} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BAC}$

On trouve alors : $JK = a\sin(\frac{\pi}{2} - \widehat{A})$ d'où : $\boxed{JK = a\cos\widehat{A}}$

voir page 30 On a établi , par une autre méthode , que le périmètre du triangle IJK est $\frac{8S^2}{abc}$. On trouve ainsi une interprétation de (f_5) dans le cas où les trois angles du triangle ABC sont aigus .

2°) Supposons le triangle ABC non rectangle . Alors $\tan A, \tan B, \tan C$ sont définis .

$\left.\begin{array}{l}\widehat{B} + \widehat{C} = \pi - \widehat{A} \\ \widehat{A} \neq \frac{\pi}{2}\end{array}\right\}$ donc $\widehat{B} + \widehat{C} \neq \frac{\pi}{2}$ et $\left\{\begin{array}{l}\tan(B + C) \text{ est définie} \\ \tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A\end{array}\right.$

D'autre part : $\tan(B + C) = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C}$. On a donc : $-\tan A = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C}$ d'où :

$-\tan A(1 - \tan B\tan C) = \tan B + \tan C$, c'est à dire : $\boxed{\tan A\tan B\tan C = \tan A + \tan B + \tan C}$ (f_6).

Cercles exinscrits , cercle inscrit , cercle circonscrit : relations métriques .

$1^{ère}$ partie : relations liant les longueurs des côtés d'un triangle et les rayons des cercles exinscrits , du cercle inscrit et du cercle circonscrit .

Notations : $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$; $a + b + c = 2p$.
S désigne l'aire du triangle ABC et R le rayon de son cercle $\mathcal{C}$ circonscrit .
r_a , r_b , r_c sont les rayons respectifs des cercles exinscrits $\mathcal{J}_a , \mathcal{J}_b , \mathcal{J}_c$.
r désigne le rayon du cercle $\mathcal{J}$ inscrit dans le triangle ABC .

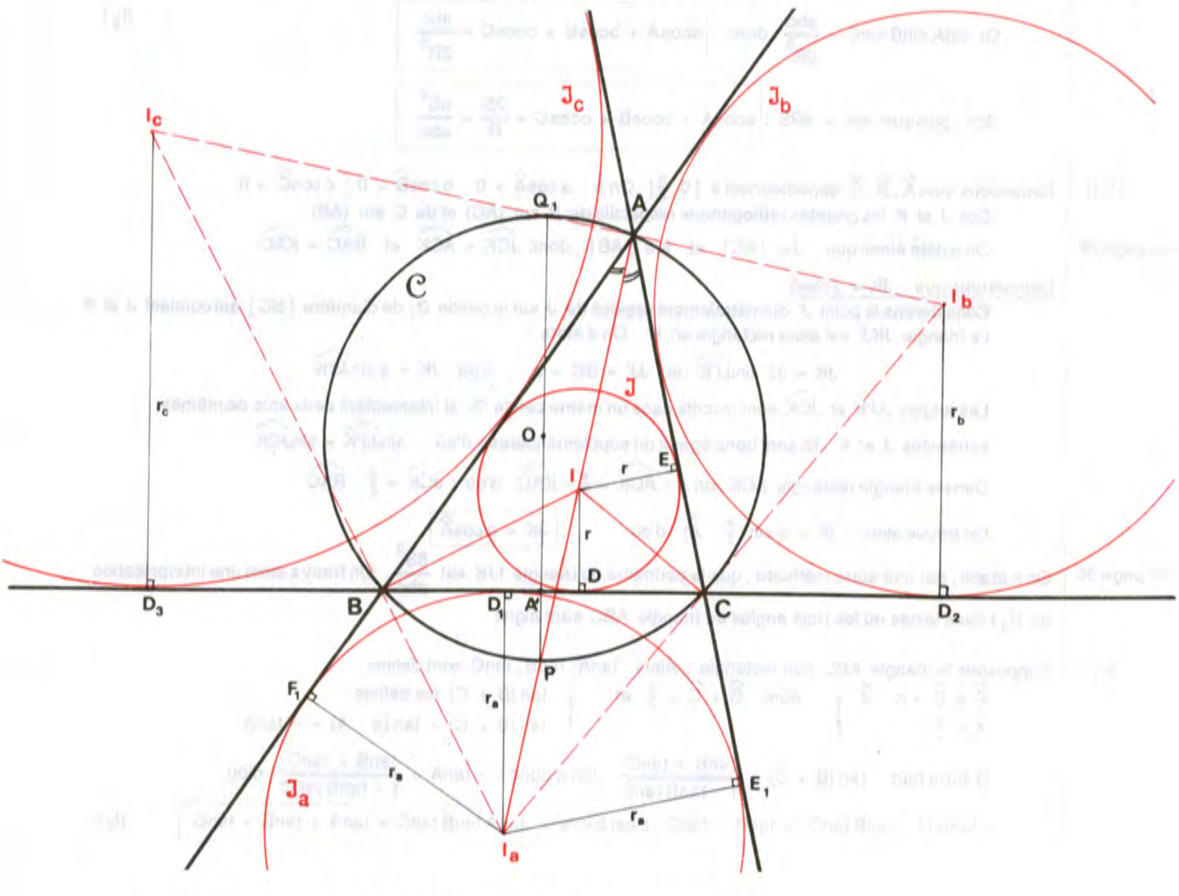
Etablir les relations suivantes :

1°) $S = (p - a)\,r_a$; $S = (p - b)\,r_b$; $S = (p - c)\,r_c$; $S = p.r$; $S = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$

2°) $2R\,r_a = \dfrac{abc}{b + c - a}$; $2R\,r_b = \dfrac{abc}{c + a - b}$; $2R\,r_c = \dfrac{abc}{a + b - c}$

3°) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$ et $r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = p^2$

4°) $r_a + r_b + r_c = r + 4R$



Notions utilisées : * *propriétés des cercles inscrit et exinscrits d'un triangle*

1°) Le point I_a appartient au secteur $[\widehat{BAC}]$ et au demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas A.

On peut alors écrire : aire (ABI_a) + aire (ACI_a) = aire (BCI_a) + aire (ABC).

d'où : $\frac{1}{2}(c.r_a + b.r_a) = \frac{1}{2}a.r_a + S$, c'est à dire : $S = \frac{(b + c - a).r_a}{2}$

Or $b + c - a = 2p - 2a$, d'où : $S = (p - a).r_a$. De même : $S = (p - b).r_b$ et $S = (p - c).r_c$

voir 3°) page 69 De la relation $S = p.r$, déja établie, on déduit que : $(p - a).r_a \times (p - b).r_b \times (p - c).r_c \times p.r = S^4$

voir page100 Rappelons que : $S = \sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)}$. On trouve ainsi : $S^2.r_a.r_b.r_c.r = S^4$, d'où : $\boxed{S = \sqrt{r_a.r_b.r_c.r}}$

2°) Rappelons aussi : $S = \frac{abc}{4R}$, donc : $\frac{abc}{4R} = \frac{(b + c - a).r_a}{2}$ d'où : $\boxed{2R.r_a = \frac{abc}{b + c - a}}$

3°) Des relations établies au 1°), on déduit : $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p - a}{S} + \frac{p - b}{S} + \frac{p - c}{S}$

or : $\frac{3.p - (a + b + c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$ d'où : $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ (e)

Multiplions les deux membres de (e) par $r_a.r_b.r_c$, et remarquons que : $r_a.r_b.r_c = \frac{S^2}{r}$

On trouve : $r_b.r_c + r_c.r_a + r_a.r_b = \frac{S^2}{r^2}$. Mais $\frac{S}{r} = p$. On obtient donc : $\boxed{r_b.r_c + r_c.r_a + r_a.r_b = p^2}$.

4°) La médiatrice de (B , C) coupe le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC en deux points dont l'un, P_1, appartient à la bissectrice (AI) de $[\widehat{BAC}]$ et dont l'autre, Q_1, appartient à la bissectrice extérieure (I_bI_c) de $[\widehat{BAC}]$.

$[P_1Q_1]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, donc : $P_1Q_1 = 2.R$

voir page 80 Soit $A' = m(B , C)$. Alors $A' \in [P_1Q_1]$, donc : $P_1Q_1 = P_1A' + A'Q_1$ (1)

Calculons $A'P_1$ à l'aide de r et de r_a .

Rappelons que : $\begin{cases} P_1 = m(I_a , I) \\ A' = m(D_1 , D) \end{cases}$ Ecrivons : $\begin{cases} \overrightarrow{A'P_1} = \overrightarrow{A'D_1} + \overrightarrow{D_1I_a} + \overrightarrow{I_aP_1} \\ \overrightarrow{A'P_1} = \overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IP_1} \end{cases}$

On a $\overrightarrow{A'D_1} + \overrightarrow{A'D} = \vec{O}$ et $\overrightarrow{I_aP_1} + \overrightarrow{IP_1} = \vec{O}$ d'où : $2.\overrightarrow{A'P_1} = \vec{O} + \overrightarrow{D_1I_a} + \overrightarrow{DI} + \vec{O}$

Or $\overrightarrow{D_1I_a}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires . On a donc : $2.\overline{A'P_1} = \overline{D_1I_a} + \overline{DI}$

Les points I et I_a sont dans deux demi-plans distincts de frontière (BC) et (BC) contient D_1 et D .

Par conséquent : $A'P_1 = \frac{|r_a - r|}{2}$. Mais , d'après (e) , $\frac{1}{r} > \frac{1}{r_a}$, donc : $r_a > r$, d'où : $A'P_1 = \frac{r_a - r}{2}$ (2)

Calculons $A'Q_1$ à l'aide de r_b et r_c .

voir page 83 Soit D_2 et D_3 les points de contact de (BC) avec respectivement $\mathcal{J}_b$ et $\mathcal{J}_c$. On a : $CD_2 = BD_3 = p - a$.

Le milieu A' de (B , C) est donc aussi milieu de (D_2 , D_3) .

Considérons la projection de la droite (BC) sur la droite (I_bI_c) parallèlement à $(A'Q_1)$.

Elle transforme D_2, D_3, A' en respectivement I_b, I_c, Q_1, donc $Q_1 = m(I_b , I_c)$

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{A'Q_1} = \overrightarrow{A'D_2} + \overrightarrow{D_2I_b} + \overrightarrow{I_bQ_1} \\ \overrightarrow{A'Q_1} = \overrightarrow{A'D_3} + \overrightarrow{D_3I_c} + \overrightarrow{I_cQ_1} \end{cases}$ et $\begin{cases} \overrightarrow{A'D_2} + \overrightarrow{A'D_3} = \vec{O} \\ \overrightarrow{I_bQ_1} + \overrightarrow{I_cQ_1} = \vec{O} \end{cases}$

Par addition membre à membre , on trouve : $2.\overrightarrow{A'Q_1} = \vec{O} + \overrightarrow{D_2I_b} + \overrightarrow{D_3I_c} + \vec{O}$

Or $\overrightarrow{D_2I_b}$ et $\overrightarrow{D_3I_c}$ sont colinéaires . On a donc : $2.\overline{A'Q_1} = \overline{D_2I_b} + \overline{D_3I_c}$

Les points I_b et I_c sont dans un même demi-plan de frontière (BC) et (BC) contient D_2 et D_3.

Par conséquent $2.A'Q_1 = D_2I_b + D_3I_c$. On a donc finalement : $A'Q_1 = \frac{r_b + r_c}{2}$ (3)

Des relations (1), (2), (3) on déduit : $P_1Q_1 = \frac{r_a - r}{2} + \frac{r_b + r_c}{2}$. Or $P_1Q_1 = 2R$, d'où : $\boxed{4R + r = r_a + r_b + r_c}$

Cercles exinscrits , cercle inscrit , cercle circonscrit : relations métriques .

2ème partie : distances mutuelles des centres des cercles inscrit , exinscrits circonscrit . Relations d'Euler .

Les notations sont celles de la 1ère partie .

1°) a) Soit D , E , F les points de contact respectifs de $\mathcal{J}$ avec (BC) , (CA) , (AB) . Calculer DE , EF , FD

b) Démontrer les relations : $I_aI_b = 4R\cos\frac{C}{2}$; $I_bI_c = 4R\cos\frac{A}{2}$; $I_cI_a = 4R\cos\frac{B}{2}$.

2°) La droite (II_a) coupe $\mathcal{C}$ en P_1 . Soit Q_1 le point diamétralement opposé à P_1 sur $\mathcal{C}$.

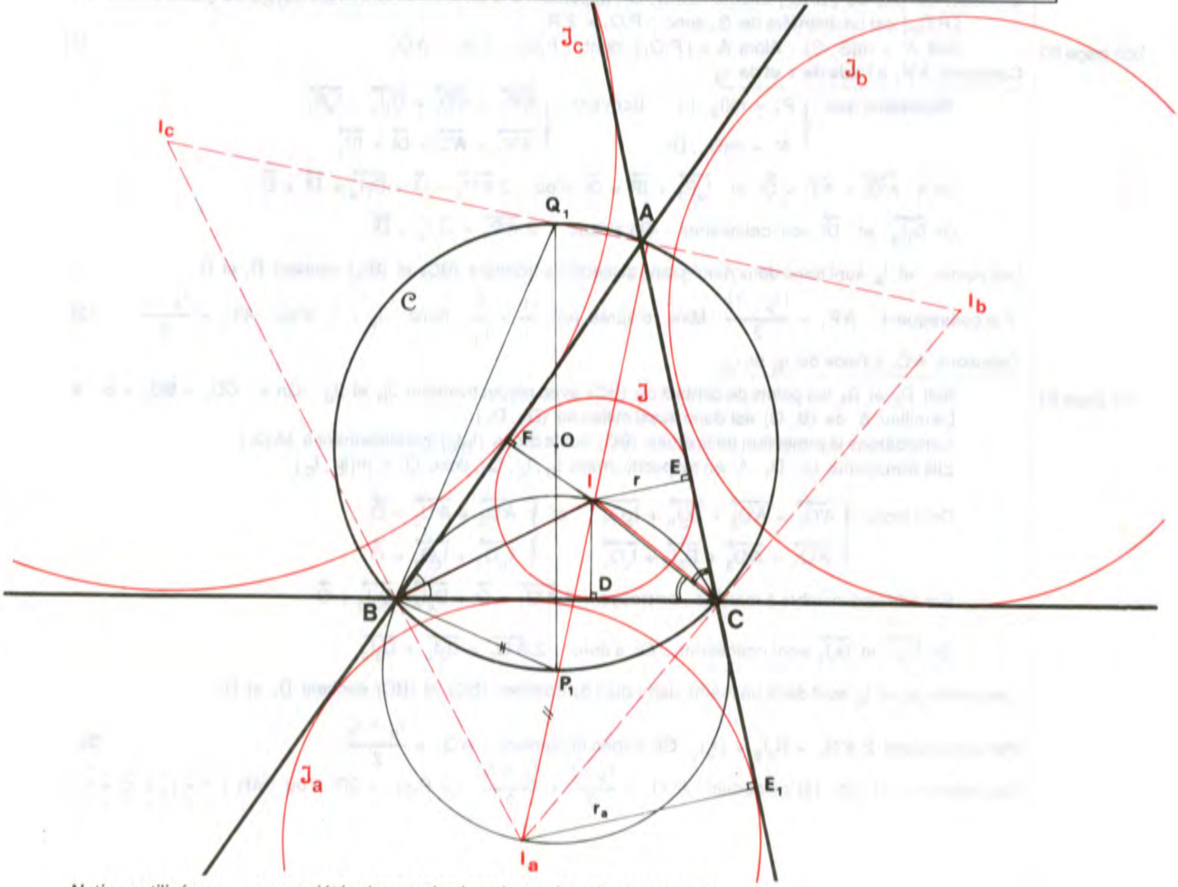
a) Calculer IP_1 . En déduire que : $II_a = 4R\sin\frac{A}{2}$ et $II_a = \dfrac{a}{\cos\frac{A}{2}}$

b) Calculer les distances AI et AI_a .

c) Calculer, par deux méthodes, chacun des produits scalaires : $\overrightarrow{IP_1}.\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{I_aP_1}.\overrightarrow{I_aA}$

En déduire les relations ci-dessous , appelées relations d'Euler :

$OI^2 = R^2 - 2Rr$; $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$. En déduire : $r \leq \frac{R}{2}$.



Notions utilisées : * propriétés des cercles inscrit et exinscrits d'un triangle
* produit scalaire

1°) a) Dans le triangle DIE, on a : $DE^2 = ID^2 + IE^2 - 2ID \times IE \times \cos\widehat{DIE}$. Or $\widehat{DIE} = \pi - C$, donc : $DE^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(\pi - \widehat{C})$.

Mais $1 - \cos(\pi - \widehat{C}) = 2\cos^2\frac{C}{2}$, donc : $DE^2 = 4r^2\cos^2\frac{C}{2}$

$\frac{\widehat{C}}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\frac{C}{2} > 0$ et, par conséquent : $DE = 2r\cos\frac{C}{2}$

On démontre de même que : $EF = 2r\cos\frac{A}{2}$ et $FD = 2r\cos\frac{B}{2}$

1°) b) Dans le triangle $I_bI_aI_c$, on a : $\widehat{I_bI_aI_c} = \widehat{BI_aC}$. Or $\widehat{BI_aC} = \pi - (\widehat{CBI_a} + \widehat{BCI_a})$

$\widehat{CBI_a} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}$ et $\widehat{BCI_a} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}$, donc : $\widehat{BI_aC} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$

Mais $\widehat{B} + \widehat{C} = \pi - \widehat{A}$. Donc $\widehat{I_bI_aI_c} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}$. De même : $\widehat{I_aI_bI_c} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}$ et $\widehat{I_bI_cI_a} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}$

voir remarque page 85

Rappelons que le cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$ a pour rayon $2R$.

On a alors $\frac{I_bI_c}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2})} = \frac{I_cI_a}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2})} = \frac{I_aI_b}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})} = 2.(2R)$

d'où : $\boxed{I_bI_c = 4R\cos\frac{A}{2} \;;\; I_cI_a = 4R\cos\frac{B}{2} \;;\; I_aI_b = 4R\cos\frac{C}{2}}$.

remarque

On a établi que l'homothétie transformant D, E, F en respectivement I_a, I_b, I_c a pour rapport k ($k = \frac{2R}{r}$).

voir page 84

On pouvait donc aussi écrire : $I_aI_b = \frac{2R}{r}DE$.

2°) a) Calculons P_1B dans le triangle rectangle P_1BQ_1 : $P_1B = P_1Q_1\sin\widehat{BQ_1P_1}$.

Les points Q_1 et A appartiennent au même arc de $\mathcal{C}$ d'extrémités B et P_1.

Donc : $\widehat{BQ_1P_1} = \widehat{BAP_1} = \frac{A}{2}$. Par ailleurs $P_1Q_1 = 2R$, donc $P_1B = 2R\sin\frac{A}{2}$

voir page 80

Mais $P_1 = m(I, I_a)$ et $P_1B = P_1I$, donc $II_a = 2P_1B$, soit $II_a = 4R\sin\frac{A}{2}$.

On a : $\frac{a}{\sin A} = 2R$, donc $\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = 2R$, soit $\boxed{II_a = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}}$

2°) b) Considérons les triangles rectangles IAE et I_aAE_1.

On a $\sin\frac{A}{2} = \frac{r}{IA}$ et $\sin\frac{A}{2} = \frac{r_a}{I_aA}$, d'où $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ et $AI_a = \frac{r_a}{\sin\frac{A}{2}}$

2°) c) Posons $\sigma = \overrightarrow{IP_1}.\overrightarrow{IA}$

* D'une part : $\sigma = \overrightarrow{IP_1}.(\overrightarrow{IQ_1} + \overrightarrow{Q_1A})$. Or $\overrightarrow{IP_1} \perp \overrightarrow{Q_1A}$, donc $\sigma = \overrightarrow{IP_1}.\overrightarrow{IQ_1}$

Ecrivons $\sigma = (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OP_1}).(\overrightarrow{IO} - \overrightarrow{OP_1})$ (puisque $\overrightarrow{OQ_1} = -\overrightarrow{OP_1}$). On a donc : $\sigma = IO^2 - R^2$

* D'autre part : $I \in]AP_1[$, donc $\sigma = -IP_1 \times IA$. Or $IP_1 = P_1B = 2R\sin\frac{A}{2}$ et $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, donc : $\sigma = -2Rr$

On a donc : $IO^2 - R^2 = -2Rr$, d'où : $\boxed{OI^2 = R^2 - 2Rr}$. $OI^2 \geq 0$, donc $R(R - 2r) \geq 0$. On en déduit : $r \leq \frac{R}{2}$

Posons : $\sigma_a = \overrightarrow{I_aP_1}.\overrightarrow{I_aA}$

* D'une part $\sigma_a = \overrightarrow{I_aP_1}.(\overrightarrow{I_aQ_1} + \overrightarrow{Q_1A})$. Or $\overrightarrow{I_aP_1} \perp \overrightarrow{Q_1A}$, donc $\sigma_a = \overrightarrow{I_aP_1}.\overrightarrow{I_aQ_1}$

Ecrivons $\overrightarrow{I_aP_1}.\overrightarrow{I_aQ_1} = (\overrightarrow{I_aO} + \overrightarrow{OP_1}).(\overrightarrow{I_aO} - \overrightarrow{OP_1})$. On trouve : $\sigma_a = I_aO^2 - R^2$

* D'autre part $I_a \notin]AP_1[$, donc $\sigma_a = I_aP_1 \times I_aA$. Or $I_aP_1 = BP_1 = 2R\sin\frac{A}{2}$ et $I_aA = \frac{r_a}{\sin\frac{A}{2}}$, donc $\sigma_a = 2Rr_a$

On a donc : $I_aO^2 - R^2 = 2Rr_a$, d'où : $\boxed{OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a}$

Coordonnées barycentriques.

1ère partie : orthocentre

Soit un triangle ABC . On pose : BC = a ; CA = b ; AB = c .

Soit $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les mesures respectives, en radians, de $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{ABC}]$, $[\widehat{BCA}]$. Ces réels appartiennent donc à $]0, \pi[$

Soit A_1, B_1, C_1 les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur (BC), (CA), (AB).

1°) a) Démontrer que : $A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, b\cos C), (C, c\cos B)\}$.

b) En déduire que, si le triangle ABC n'est ni rectangle en B, ni rectangle en C, alors : $A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, \tan B), (C, \tan C)\}$

c) Conclure que, si le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle, alors :

l'orthocentre H du triangle ABC est le barycentre de $\{(A, \tan A), (B, \tan B), (C, \tan C)\}$.

Etudier la position de H : * quand les trois angles du triangle ABC sont aigus

* quand $[\widehat{BAC}]$ est obtus .

2°) Démontrer la relation : $a^2.\overrightarrow{AA_1} + b^2.\overrightarrow{BB_1} + c^2.\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{O}$

On envisagera : a) le cas d'un triangle non rectangle

b) le cas d'un triangle rectangle en A .

<u>vocabulaire</u> : A_1, B_1, C_1 sont dits les pieds des hauteurs du triangle ABC .

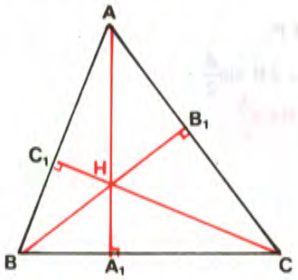


figure 1

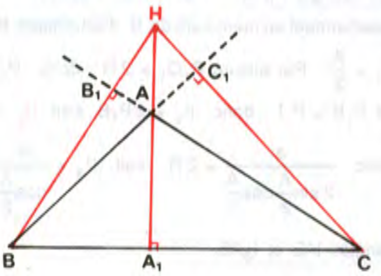


figure 2

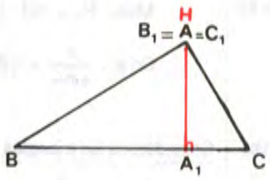


figure 3

*<u>Notion utilisée</u> : * Barycentre*

1°) a)

On a : $(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overline{BC} \times \overline{BA_1}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = a\,c\cos B)$ d'où : $\overline{BC} \times \overline{BA_1} = a\,c\cos B$ (1)

On a : $(\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = \overline{CB} \times \overline{CA_1}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = a\,b\cos C)$ d'où : $\overline{CB} \times \overline{CA_1} = a\,b\cos C$ (2)

Multiplions les deux membres de (1) par $b\cos C$, les deux membres de (2) par $c\cos B$, puis retranchons membre à membre. On trouve : $\overline{BC}\,(b\cos C\,\overline{BA_1} + c\cos B\,\overline{CA_1}) = 0$ (3)

On a $\overline{BC} \neq 0$ et les points B, C, A_1 sont alignés. De la relation (3), on déduit alors :

$$b\cos C\,\overrightarrow{BA_1} + c\cos B\,\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{O} \qquad (4)$$

<u>Démontrons que: $b\cos C + c\cos B \neq 0$</u> .

Additionnons membre à membre les relations (1) et (2) : $b\cos C + c\cos B = \dfrac{\overline{BC}\,(\overline{BA_1} + \overline{A_1C})}{a} = \dfrac{\overline{BC}^2}{a} = a$

On a bien, par conséquent : $b\cos C + c\cos B \neq 0$.

La relation (4) traduit donc que : $\boxed{A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, b\cos C), (C, c\cos B)\}}$.

1°) b) On suppose $\cos\widehat{B} \neq 0$ et $\cos\widehat{C} \neq 0$. On a donc : $A_1 \neq B$ et $A_1 \neq C$.

voir page 100

De la relation (3), on déduit alors : $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = -\dfrac{c}{b}\dfrac{\cos B}{\cos C}$. Rappelons la relation : $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

On a donc : $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = -\dfrac{\sin C}{\sin B} \times \dfrac{\cos B}{\cos C}$, c'est à dire : $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = -\dfrac{\tan C}{\tan B}$ (5)

De la relation (5), on déduit : $\tan B.\overrightarrow{BA_1} + \tan C.\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{O}$ (6)

Démontrons que : $\tan B + \tan C \neq 0$.

$\tan B + \tan C = \dfrac{\sin B}{\cos B} + \dfrac{\sin C}{\cos C}$ donc $\tan B + \tan C = \dfrac{\sin(B + C)}{\cos B.\cos C}$

Or $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$, donc $\sin(\widehat{B} + \widehat{C}) = \sin\widehat{A}$. D'où $\tan B + \tan C = \dfrac{\sin A}{\cos B.\cos C}$ (7)

On a donc $\tan B + \tan C \neq 0$ et (6) traduit que : $A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, \tan B), (C, \tan C)\}$.

1°) c) Rappelons que : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C$.

voir page 103

Les réels $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ appartiennent à $]0, \pi[$, donc $\tan A + \tan B + \tan C \neq 0$.
Le point g, barycentre de $\{(A, \tan A), (B, \tan B), (C, \tan C)\}$ existe donc.
Le théorème d'associativité barycentrique permet d'écrire, en associant B et C :
$g = \mathrm{Bar}\{(A, \tan A), (A_1, \tan B + \tan C)\}$ Donc : $g \in (AA_1)$.
De même, en associant A et C, on justifie que : $g \in (BB_1)$
en associant B et A, on justifie que : $g \in (CC_1)$
Les trois hauteurs (AA_1), (BB_1), (CC_1) sont donc concourantes en g.
Ce point, maintenant noté H, est appelé orthocentre du triangle ABC.

On a donc : $\boxed{H = \mathrm{Bar}\{(A, \tan A), (B, \tan B), (C, \tan C)\}}$.

conséquence

voir figure 1

Si les trois angles du triangle sont aigus, alors $\tan A > 0$; $\tan B > 0$; $\tan C > 0$.
Alors $A_1 \in]BC[$ et $H \in]AA_1[$ donc H est srictement intérieur au triangle ABC.

voir figure 2

Si $[\widehat{BAC}]$ est obtus, alors $\tan A < 0$; mais $\tan B > 0$ et $\tan C > 0$.
Alors $A_1 \in]BC[$ et $H \notin [AA_1]$ donc H est srictement extérieur au triangle ABC.

$H = \mathrm{Bar}\{(A, \tan A), (A_1, \tan B + \tan C)\}$ donc $\overrightarrow{AH} = \dfrac{(\tan B + \tan C)}{\tan A + \tan B + \tan C}.\overrightarrow{AA_1}$

$\tan B + \tan C > 0$; $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C < 0$. Donc $A \in]HA_1[$.

Le point H appartient donc au secteur angulaire symétrique du secteur $[\widehat{BAC}]$ par rapport au point A.

2°) a) Supposons le triangle ABC non rectangle.
$A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, \tan B), (C, \tan C)\}$. Donc $(\tan B + \tan C)\overrightarrow{AA_1} = \tan B.\overrightarrow{AB} + \tan C.\overrightarrow{AC}$

Utilisons (7), alors : $\dfrac{\sin A}{\cos B.\cos C}.\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{\sin B}{\cos B}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\sin C}{\cos C}.\overrightarrow{AC}$

c'est à dire : $\sin^2 A.\overrightarrow{AA_1} = (\sin A.\sin B.\cos C).\overrightarrow{AB} + (\sin A.\sin C.\cos B).\overrightarrow{AC}$ (8)

De même, on a : $\sin^2 B.\overrightarrow{BB_1} = (\sin B.\sin C.\cos A).\overrightarrow{BC} + (\sin B.\sin A.\cos C).\overrightarrow{BA}$ (9)

et : $\sin^2 C.\overrightarrow{CC_1} = (\sin C.\sin A.\cos B).\overrightarrow{CA} + (\sin C.\sin B.\cos A).\overrightarrow{CB}$ (10)

L'addition membre à membre des égalités (8), (9), (10) donne : $\sin^2 A.\overrightarrow{AA_1} + \sin^2 B.\overrightarrow{BB_1} + \sin^2 C.\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{O}$

voir page 100

Rappelons que : $\dfrac{a^2}{\sin^2 A} = \dfrac{b^2}{\sin^2 B} = \dfrac{c^2}{\sin^2 C}$.

La relation précédente équivaut donc à : $\boxed{a^2\,\overrightarrow{AA_1} + b^2\,\overrightarrow{BB_1} + c^2\,\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{O}}$.

2°) b) Supposons le triangle ABC rectangle en A. Alors : $a^2 = b^2 + c^2$; $B_1 = A$; $C_1 = A$.
On a donc : $a^2\,\overrightarrow{AA_1} + b^2\,\overrightarrow{BB_1} + c^2\,\overrightarrow{CC_1} = (b^2 + c^2)\,\overrightarrow{AA_1} + b^2\,\overrightarrow{BA} + c^2\,\overrightarrow{CA}$.
d'où : $a^2\,\overrightarrow{AA_1} + b^2\,\overrightarrow{BB_1} + c^2\,\overrightarrow{CC_1} = b^2\,\overrightarrow{BA_1} + c^2\,\overrightarrow{CA_1}$.

Mais, dans ce cas, on a : $\cos\widehat{C} = \dfrac{b}{a}$ et $\cos\widehat{B} = \dfrac{c}{a}$ et (4) s'écrit : $\dfrac{b^2}{a}\overrightarrow{BA_1} + \dfrac{c^2}{a}\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{O}$

On trouve donc encore : $\boxed{a^2\,\overrightarrow{AA_1} + b^2\,\overrightarrow{BB_1} + c^2\,\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{O}}$.

Coordonnées barycentriques .

2^{eme} partie : centre du cercle circonscrit .

Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle ABC .

Soit H l'orthocentre de ce triangle ABC .

Soit $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ les mesures respectives, en radians, de $\widehat{[BAC]}, \widehat{[CBA]}, \widehat{[ABC]}$. $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ appartiennent à $]0, \pi[$

1°) Démontrer que O est barycentre de { (A , sin2A) , (B , sin2B) , (C , sin2C) } .

2°) En déduire les positions de O : * quand les trois angles du triangle ABC sont aigus .

* quand $\widehat{[BAC]}$ est obtus

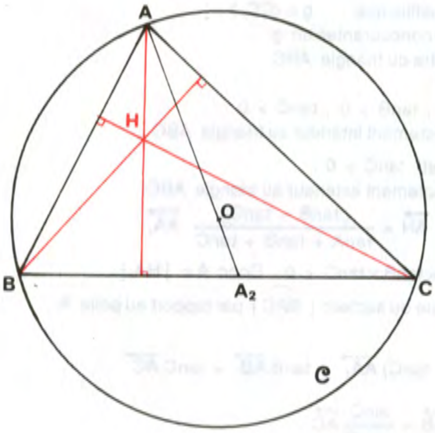


figure 1

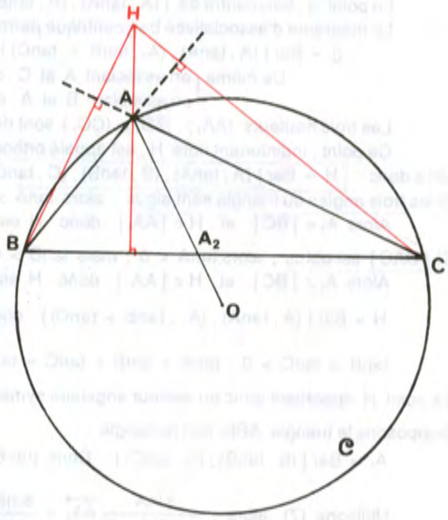


figure 2

Cas : $\widehat{[BAC]}$ obtus

Notions utilisées :
* *barycentre*
* *coordonnées barycentriques de l'orthocentre*
* *droite d'Euler*

1°) a) Supposons le triangle ABC non rectangle . On a donc : $\cos\widehat{A} \neq 0$; $\cos\widehat{C} \neq 0$.

voir page 108

On sait que l'orthocentre du triangle ABC est alors le barycentre de $\{(A, \tan A), (B, \tan B), (C, \tan C)\}$

On a donc : $\tan A.\overrightarrow{OA} + \tan B.\overrightarrow{OB} + \tan C.\overrightarrow{OC} = (\tan A + \tan B + \tan C).\overrightarrow{OH}$. (1)

voir page 8

Rappelons que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

La relation (1) devient alors : $(\tan B + \tan C).\overrightarrow{OA} + (\tan C + \tan A).\overrightarrow{OB} + (\tan A + \tan B).\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$ (2)

voir (7) page 109

Rappelons aussi que : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ et que : $\tan B + \tan C = \dfrac{\sin A}{\cos B.\cos C}$

relation qui peut encore s'écrire : $\tan B + \tan C = \dfrac{\sin 2A}{2\cos A.\cos B.\cos C}$ (3)

De la relation (2), on peut donc déduire : $\sin 2A.\overrightarrow{OA} + \sin 2B.\overrightarrow{OB} + \sin 2C.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$ (4)

voir page 102

Rappelons que : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$.

Cette somme est non nulle (et strictement positive) puisque $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ appartiennent à $]0, \pi[$.

La relation (4) traduit donc que : $\boxed{O = \mathrm{Bar}\{(A, \sin 2A), (B, \sin 2B), (C, \sin 2C)\}}$.

1°) b) Supposons le triangle ABC rectangle, en A par exemple . Alors $O = m(B, C)$.

On a alors : $\begin{cases} \sin 2A = 0 \\ \widehat{C} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B} \end{cases}$ donc $2\widehat{C} = \pi - 2\widehat{B}$ d'où $\begin{cases} \sin 2C \neq 0 \\ \sin 2C = \sin 2B \end{cases}$

Le barycentre de $\{(A, 0), (B, \sin 2B), (C, \sin 2C)\}$ est alors isobarycentre de B et C, c'est à dire le milieu O de (B, C) .

On a donc encore, dans ce cas : $O = \mathrm{Bar}\{(A, \sin 2A), (B, \sin 2B), (C, \sin 2C)\}$.

2°) a) Supposons les trois angles du triangle aigus .

$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ appartiennent à $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin 2A > 0$; $\sin 2B > 0$; $\sin 2C > 0$.

voir figure 1

On a : $\sin 2B + \sin 2C \neq 0$, donc le point A_2 , barycentre de $\{(B, \sin 2B), (C, \sin 2C)\}$ existe .

Par ailleurs $\sin 2B > 0$ et $\sin 2C > 0$ donc : $A_2 \in]BC[$ (α)

Le théorème d'associativité barycentrique permet d'écrire, en associant les points B et C :

$O = \mathrm{Bar}\{(A, \sin 2A), (A_2, \sin 2B + \sin 2C)\}$

$\sin 2A > 0$ et $\sin 2B + \sin 2C > 0$ donc $O \in]AA_2[$ (β)

Les relations (α) et (β) assurent que : O est strictement intérieur au triangle ABC .

2°) b) Supposons $[\widehat{BAC}]$ obtus . Alors : $\begin{cases} \widehat{A} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\text{ donc } \sin 2A < 0 \\ \widehat{B} \text{ et } \widehat{C} \text{ appartiennent à }]0, \frac{\pi}{2}[\text{ donc } \sin 2B > 0 \text{ et } \sin 2C > 0 . \end{cases}$

voir figure 2

On a : $\sin 2B + \sin 2C \neq 0$, donc le point A_2 , barycentre de $\{(B, \sin 2B), (C, \sin 2C)\}$ existe .

Par ailleurs $\sin 2B > 0$ et $\sin 2C > 0$ donc : $A_2 \in]BC[$ (α)

Le théorème d'associativité barycentrique permet d'écrire, en associant les points B et C :

$O = \mathrm{Bar}\{(A, \sin 2A), (A_2, \sin 2B + \sin 2C)\}$

$\sin 2A < 0$ et $\sin 2B + \sin 2C > 0$ donc $O \notin]AA_2[$ (γ)

Les relations (α) et (γ) assurent que O est strictement extérieur au triangle ABC .

Démontrons que O appartient au demi-plan ouvert $\mathcal{P}_0$, de frontière (BC) , ne contenant pas A .

$O = \mathrm{Bar}\{(A, \sin 2A), (A_2, \sin 2B + \sin 2C)\}$ donc $\overrightarrow{A_2O} = \dfrac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.\overrightarrow{A_2A}$ (5)

On a rappelé ci-dessus que : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C > 0$
Par ailleurs, par hypothèse : $\sin 2A < 0$
donc $\dfrac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} < 0$

La relation (5) démontre donc que : $A_2 \in]AO[$ (ω)

Les relations (α), (β), (ω) démontrent que : $O \in [\widehat{BAC}] \cap \mathcal{P}_0$

remarque Dans chacun des deux cas précédents, le point A_2 appartient à (BC) et à (OA) .

Autrement dit : O étant le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC, la droite (OA) coupe (BC) au point A_2 , barycentre de $\{(B, \sin 2B), (C, \sin 2C)\}$.

Coordonnées barycentriques .

3^{eme} partie : **généralisation : coordonnées barycentriques d'un point M strictement intérieur au triangle ABC .**

Soit M un point intérieur strictement au triangle ABC .
Soit $\{A_1\} = (AM) \cap (BC)$; $\{B_1\} = (BM) \cap (AC)$; $\{C_1\} = (CM) \cap (AB)$

1°) Démontrer que : A_1 = Bar { (B , aire(MAC)) , (C , aire(MAB)) } .

2°) Démontrer que : M = Bar { (A , aire(MBC)) , (B , aire(MAC)) , (C , aire(MAB)) }

3°) Applications : Démontrer que :

a) Un point M intérieur strictement au triangle ABC est isobarycentre de{A , B , C}si , et seulement si les trois triangles MBC , MCA , MAB ont même aire .

b) On pose : BC = a ; CA = b ; AB = c .
Un point I intérieur strictement au triangle ABC est centre d'un cercle J tangent à (AB) , (BC) , (CA) si , et seulement si I est barycentre de { (A , a) , (B , b) , (C , c) } .

figure 1

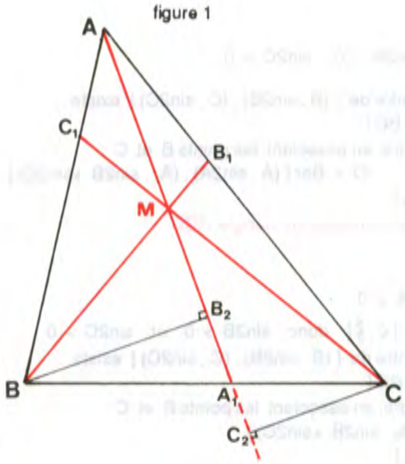
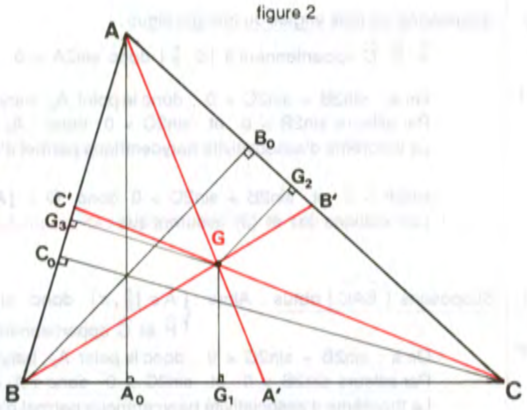


figure 2



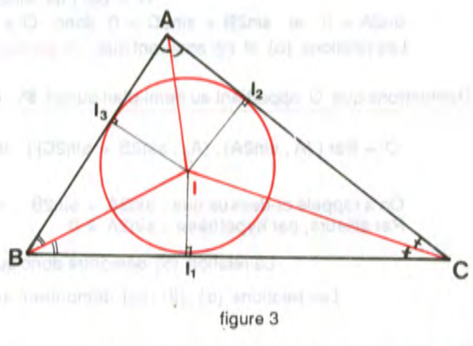


figure 3

Notions utilisées : * *homothéties*
* *barycentre*

1°) Soit B_2 et C_2 les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (AM).

voir figure 1

$$\left.\begin{array}{l} \text{aireMAC} = \dfrac{AM \times CC_2}{2} \\ \text{aireMAB} = \dfrac{AM \times BB_2}{2} \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad \frac{CC_2}{BB_2} = \frac{\text{aireMAC}}{\text{aireMAB}} \qquad (1)$$

Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre A_1 telle que $\mathcal{H}(B) = C$. Son rapport k est : $k = \dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}}$

Le point M est strictement intérieur au triangle ABC, donc $A_1 \in]BC[$ et $k < 0$.
La droite (AM) contient le centre A de $\mathcal{H}$ donc : $\mathcal{H}((AM)) = (AM)$.

$(BB_2) \perp (AM)$ donc $\mathcal{H}((BB_2))$ est la droite contenant C, parallèle à (BB_2), donc perpendiculaire à (AM), c'est à dire : $\mathcal{H}((BB_2)) = (CC_2)$.
$B_2 \in (AM) \cap (BB_2)$ donc $\mathcal{H}(B_2) \in (AM) \cap (CC_2)$, c'est à dire : $\mathcal{H}(B_2) = C_2$
On a donc : $\mathcal{H}$: $B \longmapsto C$
$B_2 \longmapsto C_2$ donc $\overrightarrow{CC_2} = k\,\overrightarrow{BB_2}$, d'où $CC_2 = |k|.BB_2$.

soit, puisque $k < 0$, $\dfrac{CC_2}{BB_2} = -k$ (2)

Des relations (1) et (2) on déduit : $\dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}} = -\dfrac{\text{aireMAC}}{\text{aireMAB}}$

d'où, puisque A_1, B, C sont alignés : $\text{aire(MAB)}.\overrightarrow{A_1C} + \text{aire(MAC)}.\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{O}$ (3)
aire(MAB) et aire(MAC), réels strictement positifs, ont une somme non nulle
La relation (3) exprime donc que : $A_1 = \text{Bar}\{(B, \text{aire(MAC)}), (C, \text{aire(MAB)})\}$.

2°) Les trois réels aire(MBC), aire(MAC), aire(MAB) étant strictement positifs, le barycentre g du système $\{(A, \text{aire(MBC)}), (B, \text{aire(MAC)}), (C, \text{aire(MAB)})\}$ est défini. Le théorème d'associativité barycentrique assure que :
$g = \text{Bar}\{(A, \text{aire(MBC)}), (A_1, \text{aire(MAC)} + \text{aire(MAB)})\}$ donc : $g \in (AA_1)$.
De même, on démontre que : $g \in (BB_1)$ et $g \in (CC_1)$.
Les droites (AA_1), (BB_1), (CC_1) sont donc concourantes en g.
Mais, par construction, on sait que (AA_1), (BB_1), (CC_1) sont concourantes en M. Donc M = g, c'est à dire :

$$\boxed{M = \text{Bar}\{(A, \text{aire(MBC)}), (B, \text{aire(MAC)}), (C, \text{aire(MAB)})\}}$$

3°) a) La propriété énoncée est une conséquence immédiate du 2°) puisque M est supposé intérieur strictement au triangle ABC.

remarque 1

Il est possible de démontrer directement que :
Si G est isobarycentre de {A, B, C} alors les trois triangles GBC, GCA, GAB ont même aire. En effet :
Soit A_0 et G_1 les projetés orthogonaux respectifs de A et G sur (BC).
Alors : $\text{aire(GBC)} = \frac{1}{2}.BC \times GG_1$ et $\text{aire(ABC)} = \frac{1}{2}.BC \times AA_0$.
Posons : $A' = m(B, C)$. L'isobarycentre G de {A, B, C} vérifie : $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{A'A}$ (1)
Le théorème de Thalès assure alors : $\overrightarrow{A'G_1} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{A'A_0}$ (2)
Des relations (1) et (2) on déduit : $\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{AA_0}$ (3)
La relation (3) implique : $GG_1 = \frac{1}{3}AA_0$, d'où $\text{aire(GBC)} = \frac{1}{3}\text{aire(ABC)}$.
On démontre de même : $\text{aire(GCA)} = \frac{1}{3}\text{aire(ABC)}$ et $\text{aire(GAB)} = \frac{1}{3}\text{aire(ABC)}$

remarque 2

L'intêret du 3°) a) est de préciser que :

L'isobarycentre de {A, B, C} est le seul point M intérieur strictement au triangle ABC qui assure l'égalité des aires des trois triangles MBC, MCA, MAB.

3°) b) Soit I_1, I_2, I_3 les projetés orthogonaux respectifs de I sur (BC), (CA), (AB).
$\text{aire(IBC)} = \frac{1}{2} \times II_1 \times BC$; $\text{aire(ICA)} = \frac{1}{2} \times II_2 \times CA$; $\text{aire(IAB)} = \frac{1}{2} \times II_3 \times AB$.
Donc : $I = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{2} \times II_1 \times a), (B, \frac{1}{2} \times II_2 \times b), (C, \frac{1}{2} \times II_3 \times c)\}$.
I est centre d'un cercle $\mathcal{J}$ tangent à (BC), (CA), (AB) si, et seulement si les distances II_1, II_2, II_3 sont égales (au rayon du cercle $\mathcal{J}$), c'est à dire $I = \text{Bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.
On reconnait les coordonnées barycentriques du centre I du cercle $\mathcal{J}$ inscrit dans le triangle ABC.

Figure de Vecten (1817).

1ère partie : quelques propriétés de la figure de Vecten

Soit ABC un triangle dont le plan est orienté en sorte que l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ mesure α radians, $\alpha \in]0, \pi[$.
On construit extérieurement au triangle ABC les carrés ACRS, BAMN, CBPQ.
De façon plus précise : R est l'image de A par la rotation $\mathcal{R}(C, -\frac{\pi}{2})$, S est l'image de C par la rotation $\mathcal{R}(A, +\frac{\pi}{2})$

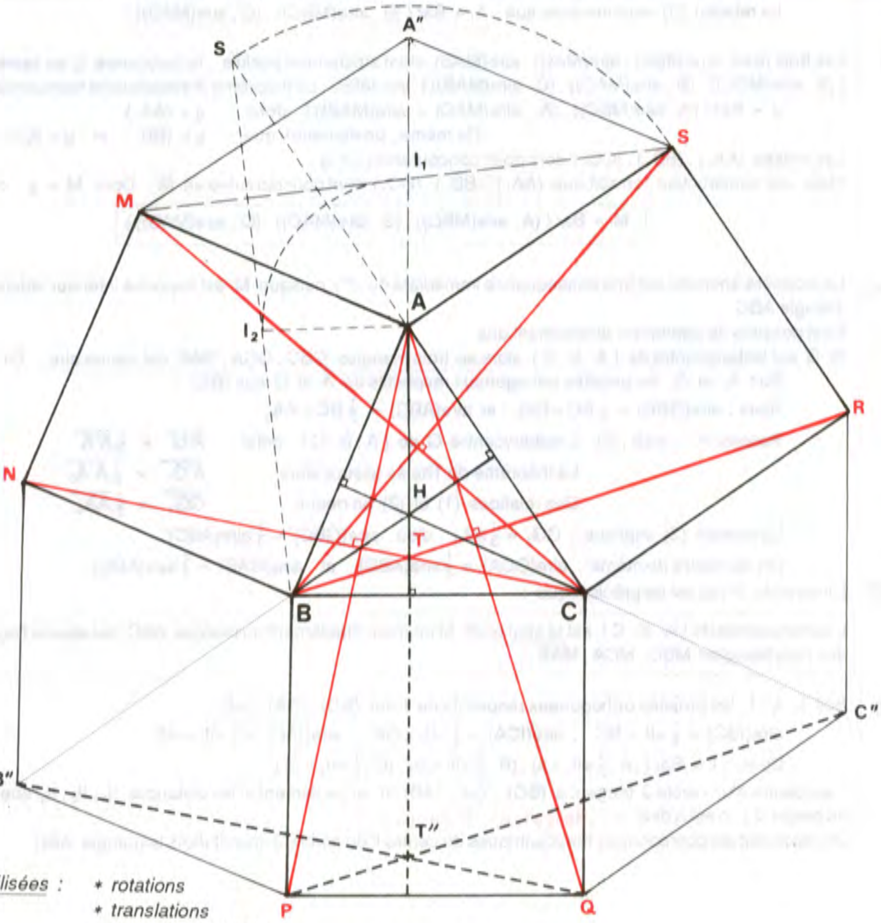
1°) Démontrer que :
- les droites (BS) et (CM) sont perpendiculaires,
- les droites (CN) et (AP) sont perpendiculaires,
- les droites (AQ) et (BR) sont perpendiculaires.

2°) On construit les parallélogrammes MASA", PBNB", RCQC"
 a) Justifier que (QB") et (PC") sont deux hauteurs du triangle APQ.
 b) On pose ; {T"} = (QB") ∩ (PC"). Déterminer l'image de T" par la translation $\mathcal{T}$ de vecteur $\overrightarrow{QC}$.
 Conclure que (CN) et (BR) se coupent sur la hauteur issue de A du triangle ABC.

3°) Soit I_1 le milieu de (M, S). Soit I_2 l'image de I_1 par la rotation $\mathcal{R}(A, +\frac{\pi}{2})$.
 Justifier que (AI_2) est parallèle à (BC). En déduire que la droite (AA") est une hauteur du triangle ABC

 Conclure que les trois droites (AA"), (BB"), (CC") sont concourantes en l'orthocentre du triangle ABC.

4°) Démontrer que : $MS^2 + NP^2 + QR^2 = 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$



Notions utilisées :
- *rotations*
- *translations*
- *formule d'Al Kashi*

1°) Considérons la rotation $\mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2})$: $A \longmapsto A$, $M \longmapsto B$, $C \longmapsto S$ — On a donc : $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BS}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ d'où $\boxed{(BS) \perp (MC)}$

Considérons la rotation $\mathcal{R}(B, \frac{\pi}{2})$: $B \longmapsto B$, $P \longmapsto C$, $A \longmapsto N$ — On a donc : $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{CN}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ d'où $\boxed{(CN) \perp (AP)}$

Considérons la rotation $\mathcal{R}(C, \frac{\pi}{2})$: $C \longmapsto C$, $R \longmapsto A$, $B \longmapsto Q$ — On a donc : $(\overrightarrow{RB}, \overrightarrow{AQ}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ d'où $\boxed{(AQ) \perp (BR)}$

2°) a) On a : $\overrightarrow{NB''} = \overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CQ}$, donc $\overrightarrow{NB''} = \overrightarrow{CQ}$

Le quadrilatère NB"QC est un parallèlogramme, donc $(NC) // (QB'')$.

On a $(AP) \perp (NC)$ et $(NC) // (QB'')$ donc $(AP) \perp (QB'')$.

La droite (QB") est donc la hauteur issue de Q dans le triangle APQ.

De même, RC" PB est un parallèlogramme et, puisque $(AQ) \perp (BR)$, on en déduit $(AQ) \perp (PC'')$.

La droite (PC") est donc la hauteur issue de P dans le triangle APQ.

Le point T" est alors l'orthocentre du triangle APQ. On en déduit $(AT'') \perp (PQ)$.

2°) b) Soit T le translaté de T" par la translation $\mathcal{T}$ de vecteur $\overrightarrow{QC}$.

$\mathcal{T}$: $P \longmapsto B$, $Q \longmapsto C$, $C'' \longmapsto R$, $B'' \longmapsto N$

$\overrightarrow{QC}$, orthogonal à $\overrightarrow{PQ}$, est un vecteur directeur de (AT").
(AT") est donc globalement invariante par $\mathcal{T}$.

Le point T" appartient aux trois droites (AT"), (QB"), (PC"). Son image T par $\mathcal{T}$ appartient donc à leurs images respectives, c'est à dire aux droites (AT"), (CN), (BR).

On a : $(AT'') \perp (PQ)$ et $(PQ) // (BC)$, donc $(AT'') \perp (BC)$.

La droite (AT") est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

<u>conclusion</u> **Les droites (CN) et (BR) sont sécantes en un point T appartenant à la hauteur (AT") issue de A dans le triangle ABC**

3°) Posons : $S' = \mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2})(S)$. On a $\mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2})$: $M \longmapsto B$, $S \longmapsto S'$, $I_1 \longmapsto I_2$

Toute rotation conserve le milieu. Or $I_1 = m(M, S)$ donc $I_2 = m(B, S')$.

Remarquons alors : $S' = \mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2}) \circ \mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2})(C)$. Donc $S' = \mathcal{R}(A, \pi)(C)$, c'est à dire $A = m(S', C)$.

Dans le triangle BCS', la droite (AI_2) est une " droite des milieux ", donc $(AI_2) // (BC)$.

$I_2 = \mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2})(I_1)$. Donc $(\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI_2}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$.

On a donc $(AI_1) \perp (AI_2)$ et $(AI_2) // (BC)$. On en déduit $(AI_1) \perp (BC)$.

MASA" est un parallèlogramme. Or $I_1 = m(M, S)$, donc $I_2 = m(A, A'')$. Par conséquent : $(AI_1) = (AA'')$.

La droite (AI_1), c'est à dire (AA") est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

<u>conclusion</u> **Les droites (AA"), (BB"), (CC") sont donc concourantes en l'orthocentre du triangle ABC.**

4°) On a $MS^2 = AM^2 + AS^2 - 2\,AM \times AS \times \cos\widehat{MAS}$ or $\widehat{MAS} = \pi - \widehat{BAC}$; $AM = c$; $AS = b$.

Donc $MS^2 = c^2 + b^2 + 2\,b\,c\cos\widehat{BAC}$.

Or, dans le triangle ABC, on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\widehat{BAC}$. On en déduit : $MS^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$

De même, on établit : $NP^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$ et $QR^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$.

On trouve alors $\boxed{MS^2 + NP^2 + QR^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)}$

Figure de Vecten.

2eme partie : le point de Vecten .

Les notations sont celles de la 1ère partie .
Soit O_1, O_2, O_3 les centres respectifs des carrés CBPQ , ACRS , BAMN .

1°) On pose : { U } = (BS) ∩ (CM) ; { V } = (CN) ∩ (AP) ; { W } = (AQ) ∩ (BR) .

a) Démontrer que : U appartient à (NR) ; V appartient à (MQ) ; W appartient à (PS)

b) Reconnaître les bissectrices des paires de droites { (BS) , (CM) } , { (CN) , (AP) } , { (AQ) , (BR) } .

2°) Démontrer que : A , U , O_1 sont alignés ; B , V , O_2 sont alignés ; C , W , O_3 sont alignés .
Démontrer que les trois droites (AO_1) , (BO_2) , (CO_3) sont concourantes et que leur point de concours X est orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$.

X est appelé point de Vecten du triangle ABC .

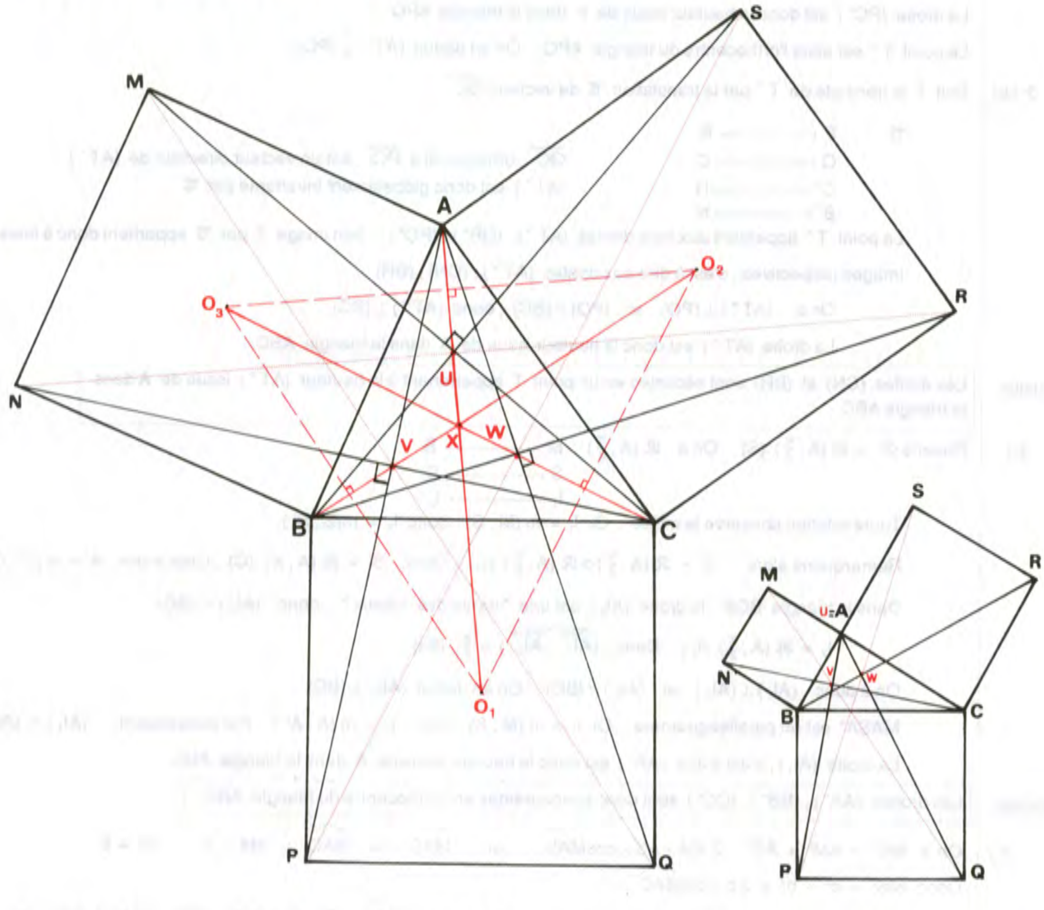


figure 1 figure 2

Notions utilisées :

* *angles de droites*
* *cocyclicité*
* *bissectrices*

remarque (U = A) si, et seulement si (BS) et (MC) sont perpendiculaires en A , c'est à dire : (U = A) $\Leftrightarrow$ (AB) $\perp$ (AC) .

1°) Supposons le triangle ABC rectangle en A . Alors U = A .

On a $(\overline{AN, AR}) \equiv (\overline{AN, AB}) + (\overline{AB, AC}) + (\overline{AC, AR})$ (π).

voir figure 2 d'où $(\overline{AN, AR}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (π) donc $(\overline{AN, AR}) \equiv 0$ (π) .

On a alors U = A et (AN) = (AR) , ce qui prouve que les points U , N , R sont alignés .

On sait que : $(\overline{AC, AR}) \equiv \frac{\pi}{4}$ (π) .

$(\overline{AN, AB}) \equiv \frac{\pi}{4}$ (π) or (AR) = (AN) = NR) donc $(\overline{AC, NR}) \equiv (\overline{NR, AB})$ (π)

Les bissectrices de { (AB) , (AC) } sont donc (NR) et la perpendiculaire en A à (NR) .

Supposons le triangle ABC non rectangle . Alors U $\neq$ A , V $\neq$ B , W $\neq$ C .

voir figure 1 En outre , on a U $\neq$ R , U $\neq$ N , U $\neq$ M , U $\neq$ S

En effet : * Si on avait U = R , la droite (BU) , qui est aussi (BS) serait égale à (BR) .

Mais on a (CM) $\perp$ (BS) et (AQ) $\perp$ (BR) . On aurait donc : (CM) // (AQ)

voir page 114 * ce qui est impossible , puisque (CM) et (AQ) sont sécantes en un point appartenant à la hauteur issue de B dans le triangle ABC .

On prouve de même : U $\neq$ N , U $\neq$ M , U $\neq$ S .

On a : $\overrightarrow{US} \perp \overrightarrow{UC}$, donc U appartient au cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre [CS] .

$\mathcal{C}_2$ est d'ailleurs le cercle circonscrit au carré ACRS

On en déduit : $(\overline{UR, UA}) \equiv (\overline{CR, CA})$ (π) d'où $(\overline{UR, UA}) \equiv \frac{\pi}{2}$ (π)

On a aussi $\overrightarrow{UM} \perp \overrightarrow{UB}$, donc U appartient au cercle $\mathcal{C}_3$ de diamètre [BM] , cercle circonscrit au carré BAMN

On en déduit : $(\overline{UA, UN}) \equiv (\overline{BA, BN})$ (π) d'où $(\overline{UA, UN}) \equiv \frac{\pi}{2}$ (π).

On a donc (UR) $\perp$ (UA) et (UN) $\perp$ (UA) , d'où (UR) = (UN) .

Ceci prouve que les points U , N , R sont alignés .

U $\in \mathcal{C}_2$ donc $(\overline{US, UA}) \equiv (\overline{CS, CA})$ (π) , c'est à dire $(\overline{US, UA}) \equiv \frac{\pi}{4}$ (π)

U $\in \mathcal{C}_3$ donc $(\overline{UA, UM}) \equiv (\overline{BA, BM})$ (π) , c'est à dire $(\overline{UA, UM}) \equiv \frac{\pi}{4}$ (π) (1)

On a donc : $(\overline{US, UA}) \equiv (\overline{UA, UM})$ (π) .

(UA) est donc une bissectrice de { (US) , (UM) } , c'est à dire de { (BS) , (CM) } .

Puisque (NR) $\perp$ (UA) , les deux bissectrices de { (BS) , (CM) } sont (NR) et (UA) .

2°) a) Si le triangle ABC est rectangle en A , U = A , donc les points A , U et O_1 sont alignés .

2°) b) Si le triangle ABC n'est pas rectangle en A , alors U $\neq$ A . Evaluons $(\overline{UA, UO_1})$.

$(\overline{UA, UO_1}) \equiv (\overline{UA, UM}) + (\overline{UM, UB}) + (\overline{UB, UO_1})$ (π) (2)

voir figure 1 $\overrightarrow{UB} \perp \overrightarrow{UC}$, donc U appartient au cercle Γ_1 de diamètre [BC] , cercle Γ_1 qui contient O_1 .

On a alors $(\overline{UB, UO_1}) \equiv (\overline{CB, CO_1})$ (π) donc $(\overline{UB, UO_1}) \equiv \frac{\pi}{4}$ (π) (3)

Utilisons les relations (1) et (3) ; (2) s'écrit : $(\overline{UA, UO_1}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (π)

c'est à dire : $(\overline{UA, UO_1}) \equiv 0$ (π) , ce qui prouve que les points A , U et O_1 sont alignés .

O_3 = m (N , A) et O_2 = m (R , A) donc : $\overrightarrow{O_3O_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NR}$ et , par conséquent : (O_3O_2) // (NR) .

La droite (AO_1) , qui est perpendiculaire en U à (NR) est alors perpendiculaire à (O_3O_2)

La droite (AO_1) est donc la hauteur issue de O_1 dans le triangle $O_1O_2O_3$

De même , on prouve que : les points B , V , O_2 sont alignés et (BO_2) est une hauteur du triangle $O_1O_2O_3$.

les points C , W , O_3 sont alignés et (CO_3) est une hauteur du triangle $O_1O_2O_3$.

(AO_1) , (BO_2) , (CO_3) sont donc concourantes en l'orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$.

conclusion Les trois droites (AU) , (BV) , (CW) sont respectivement perpendiculaires à (NR) , (MQ) , (PS) ; en outre (AU) , (BV) , (CW) sont concourantes , en un point X qui est l'orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$

Triangles semblables.

1ère partie : triangles isométriques . Trois cas d'isométrie de triangles .

Notations :
- Soit A, B, C, A', B', C' des points appartenant tous à un même plan .
- L'identité du plan, qui est une isométrie, sera notée Idp .

Définitions :
- On dit que deux triangles ABC et A'B'C' sont isométriques pour exprimer que les trois sommets A', B', C' sont images respectives des sommets A, B, C par une isométrie plane f .
- Les sommets A', B', C' sont alors dits homologues, par f, des sommets A, B, C nommés dans cet ordre

1°) a) Démontrer : si deux triangles ABC et A'B'C' sont isométriques, alors on a :

$$\begin{cases} A'B' = AB \\ B'C' = BC \\ C'A' = CA \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A} \\ \widehat{B'} = \widehat{B} \\ \widehat{C'} = \widehat{C} \end{cases}$$

b) Justifier que l'isométrie f, qui transforme A, B, C respectivement en A', B', C' est alors unique .

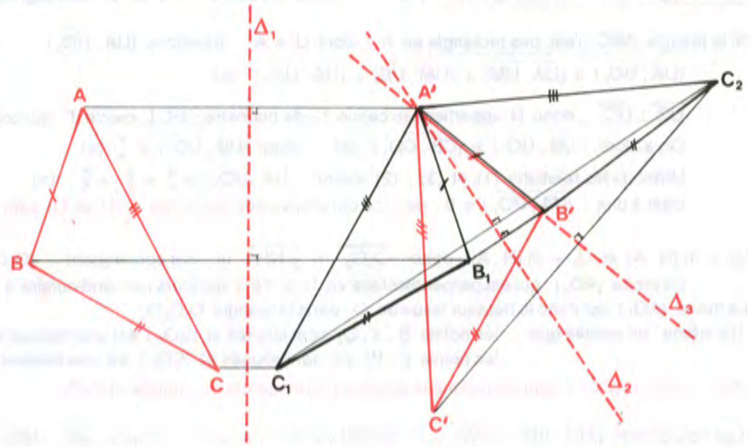
2°) On appelle cas d'isométrie de deux triangles les trois énoncés suivants qui expriment trois conditions suffisantes pour que deux triangles ABC et A'B'C' soient isométriques :

a) Premier cas d'isométrie :

Il suffit que $\begin{cases} A'B' = AB \\ B'C' = BC \\ C'A' = CA \end{cases}$

pour que les triangles ABC et A'B'C' soient isométriques.

L'isométrie f transformant A, B, C respectivement en A', B', C' est alors décomposable en au plus trois symétries axiales .



Notions utilisées :
- *symétries axiales*
- *isométries du plan*

Posons : $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$; $a' = B'C'$; $b' = C'A'$; $c' = A'B'$.

remarque — Si $\cos\widehat{A'} = \cos\widehat{A}$, alors $\widehat{A'} = \widehat{A}$ (puisque $\widehat{A} \in \,]0,\pi[$ et $\widehat{A'} \in \,]0,\pi[$.

Attention...... si $\sin\widehat{A'} = \sin\widehat{A}$, alors $\widehat{A'} = \widehat{A}$ ou $\widehat{A'} = \pi - \widehat{A}$.

1°) a) Toute isométrie plane conserve les distances . Donc , s'il existe une isométrie f transformant A , B , C en respectivement A' , B' , C' , on a : $A'B' = AB$; $B'C' = BC$; $C'A' = CA$.

Par ailleurs , on a : $\cos\widehat{A'} = \dfrac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}$ et $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Puisque ($b' = b$; $c' = c$; $a' = a$) , on déduit : $\cos\widehat{A'} = \cos\widehat{A}$, d'où : $\widehat{A'} = \widehat{A}$.

De même , on déduit : $\cos B' = \cos B$ et $\cos\widehat{C'} = \cos\widehat{C}$, d'où : $\widehat{B'} = \widehat{B}$ et $\widehat{C'} = \widehat{C}$.

1°) b) Justifions l'unicité de l'isométrie f .

Supposons qu'il existe deux isométries g et f transformant A , B , C en respectivement A' , B' , C' . Alors :

$$g^{-1} \circ f : \begin{array}{lll} A \overset{f}{\longmapsto} & A' \overset{g^{-1}}{\longmapsto} & A \\ B \longmapsto & B' \longmapsto & B \\ C \longmapsto & C' \longmapsto & C \end{array}$$

* S'il existait un point M du plan tel que : $(g^{-1} \circ f)(M) = M'$, et $M' \neq M$,
on aurait , puisque $g^{-1} \circ f$ est une isométrie laissant A , B , C invariants :
$AM' = AM$; $BM' = BM$; $CM' = CM$
La médiatrice de (M , M') contiendrait donc les points A , B , C . Or ces points sont non alignés ,
* d'où la contradiction .

Par conséquent , pour tout point M du plan , $(g^{-1} \circ f)(M) = M$, donc $g^{-1} \circ f = Id_P$, c'est à dire : $g = f$.

2°) a) 1er cas d'isométrie : supposons : $A'B' = AB$; $B'C' = BC$; $C'A' = CA$.

* Si $(A', B', C') = (A, B, C)$, on a trouvé : $f = Id_P$ (qui est une isométrie) .
* Si $(A', B', C') \neq (A, B, C)$, supposons , par exemple $A' \neq A$ et posons $\Delta_1 = \text{med}(A, A')$

La symétrie orthogonale S_{Δ_1} transforme : $\begin{cases} A \text{ en } A' \\ B \text{ en } B_1 \\ C \text{ en } C_1 \end{cases}$ tels que $\begin{cases} A'B_1 = AB = A'B' & (\gamma) \\ A'C_1 = AC = A'C' & (\beta) \\ B_1C_1 = BC = B'C' & (\alpha) \end{cases}$

** Si $(A', B', C') = (A', B_1, C_1)$, on a trouvé $f = S_{\Delta_1}$, qui est une isométrie .

** Si $(A', B', C') \neq (A', B_1, C_1)$, supposons $B' \neq B_1$ et posons $\Delta_2 = \text{med}(B_1, B')$
on a $A'B_1 = A'B'$ (voir (γ)) , donc $A' \in \Delta_2$.

S_{Δ_2} transforme donc : $\begin{cases} A' \text{ en } A' \\ B_1 \text{ en } B' \\ C_1 \text{ en } C_2 \end{cases}$ tels que $\begin{cases} A'C_2 = A'C_1 = A'C' \\ B'C_2 = B_1C_1 = B'C' \end{cases}$

*** Si $(A', B', C') = (A', B', C_2)$, alors $S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$: $\begin{array}{lll} A \overset{S_{\Delta_1}}{\longmapsto} & A' \overset{S_{\Delta_2}}{\longmapsto} & A' \\ B \longmapsto & B_1 \longmapsto & B' \\ C \longmapsto & C_1 \longmapsto & C_2 = C' \end{array}$

On a alors trouvé $f = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$, qui est une isométrie .

*** Si $(A', B', C') \neq (A', B', C_2)$, posons $\Delta_3 = \text{med}(C_2, C')$.
on a : $\begin{cases} A'C_2 = A'C' \\ B'C_2 = B'C' \end{cases}$ donc $\begin{cases} A' \in \Delta_3 \\ B' \in \Delta_3 \end{cases}$ d'où S_{Δ_3} : $\begin{array}{ll} A' \longmapsto & A' \\ B' \longmapsto & B' \\ C_2 \longmapsto & C' \end{array}$

On a donc : $S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$: $\begin{array}{llll} A \overset{S_{\Delta_1}}{\longmapsto} & A' \overset{S_{\Delta_2}}{\longmapsto} & A' \overset{S_{\Delta_3}}{\longmapsto} & A' \\ B \longmapsto & B_1 \longmapsto & B' \longmapsto & B' \\ C \longmapsto & C_1 \longmapsto & C_2 \longmapsto & C' \end{array}$

On a trouvé $f = S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$, qui est une isométrie .

conclusion — On a prouvé l'existence d'une isométrie f , identité du plan ou composée de au plus trois symétries axiales , transformant A , B , C en respectivement A' , B' , C' .

Les triangles ABC et A'B'C' sont donc isométriques .

remarque — L'unicité de l'isométrie f (justifiée au 1°) b)) assure que , si on avait considéré d'abord la médiatrice de (B , B') , dans la recherche précédente , l'isométrie g alors mise en évidence , transformant A , B , C en respectivement A' , B' , C' serait alors égale à celle , f , qui a été trouvée .

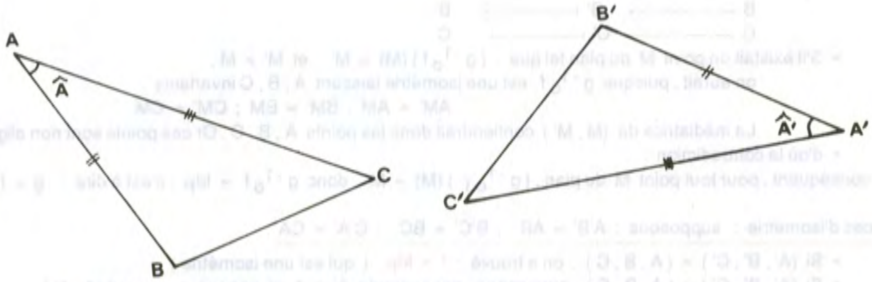
Triangles semblables .

1ère partie (suite) : triangles isométriques . Trois cas d'isométrie de triangles .

b) Deuxième cas d'isométrie :

Il suffit que : $\begin{cases} A'B' = AB \\ A'C' = AC \\ \widehat{A'} = \widehat{A} \end{cases}$

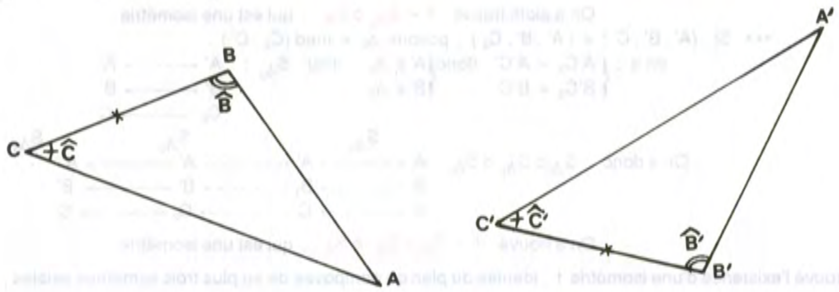
pour que les triangles ABC et A'B'C' soient isométriques



c) Troisième cas d'isométrie :

Il suffit que : $\begin{cases} B'C' = BC \\ \widehat{B'} = \widehat{B} \\ \widehat{C'} = \widehat{C} \end{cases}$

pour que les triangles ABC et A'B'C' soient isométriques



<u>*Notions utilisées*</u> : * *formule d'Al Kashi*
* *relations trigonométriques dans un triangle*

2°) b) 2ème cas d'isométrie : Supposons $\widehat{A'} = \widehat{A}$; A'B' = AB ; A'C' = AC .

Les hypothèses se traduisent par : $\begin{cases} c' = c \\ b' = b \\ \widehat{A'} = \widehat{A} \end{cases}$

Mais on sait que : $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A \\ a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2\,b'c'\cos A' \end{cases}$

On a donc : $a^2 = a'^2$, c'est à dire : $a' = a$.

Les deux triangles ABC et A'B'C' vérifient ainsi : $\begin{cases} a' = a \\ b' = b \\ c' = c \end{cases}$ c'est à dire : $\begin{cases} B'C' = BC \\ A'C' = AC \\ A'B' = AB \end{cases}$

D'après le 1er cas d'isométrie (voir 2°) a)) ,

les deux triangles ABC et A'B'C' sont donc isométriques .

2°) c) 3ème cas d'isométrie : supposons B' = B , C' = C , B'C' = BC .

Les hypothèses se traduisent par : $\begin{cases} a' = a \\ \widehat{B'} = \widehat{B} \\ \widehat{C'} = \widehat{C} \end{cases}$

On sait que : $\begin{cases} \widehat{A'} = \pi - (\widehat{B'} + \widehat{C'}) \\ \widehat{A} = \pi - (\widehat{B} + \widehat{C}) \end{cases}$ d'où : $\widehat{A'} = \widehat{A}$

On a donc : $\begin{cases} \sin A' = \sin A \\ \sin B' = \sin B \\ \sin C' = \sin C \end{cases}$

Or on sait que : $\dfrac{a'}{\sin A'} = \dfrac{b'}{\sin B'} = \dfrac{c'}{\sin C'}$ et $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

On en déduit : $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$.

Mais on sait que : a' = a . On a donc aussi : b' = b et c' = c .

Les deux triangles ABC et A'B'C' vérifient ainsi : $\begin{cases} a' = a \\ b' = b \\ c' = c \end{cases}$ c'est à dire : $\begin{cases} B'C' = BC \\ A'C' = AC \\ A'B' = AB \end{cases}$

D'après le 1er cas d'isométrie (voir 2°) a)) ,

les deux triangles ABC et A'B'C' sont donc isométriques .

Triangles semblables .

$2^{ème}$ partie : triangles à côtés respectivement parallèles .

Soit deux triangles ABC et A'B'C' vérifiant : (AB) // (A'B') ; (AC) // (A'C') ; (BC) // (B'C') .
Démontrer que :

1°) Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, alors
Il existe une homothétie $\mathcal{H}$ transformant A en A' , B en B' , C en C' .

2°) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors
Les points A' , B' , C' sont images respectives de A , B , C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

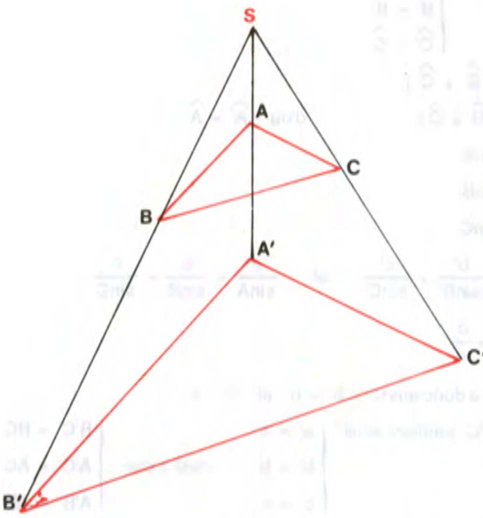


figure 1

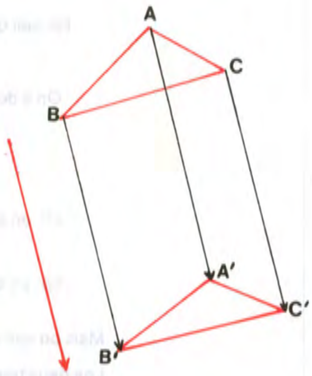


figure 2

Notions utilisées :
* *homothéties*
* *translations*

1°) Les points A et B sont distincts . Les points A' et B' sont distincts .

voir figure 1 Puisque (A'B') // (AB) , il existe k , réel non nul tel que : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

L'hypothèse $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$ garantit que : $k \neq 1$.

Posons alors $S = \text{Bar}\{(A, k), (A', -1)\}$; on a : $k.\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{O}$

ce qui équivaut à : $\overrightarrow{SA'} = k.\overrightarrow{SA}$ (1)

On a par ailleurs : $\overrightarrow{SB'} = \overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{A'B'}$

c'est à dire : $\overrightarrow{SB'} = k.\overrightarrow{SA} + k.\overrightarrow{AB}$ d'où : $\overrightarrow{SB'} = k.\overrightarrow{SB}$ (2)

Considérons l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre S , de rapport k .

Les relations (1) et (2) traduisent que : $\begin{cases} \mathcal{H}(A) = A' \\ \mathcal{H}(B) = B' \end{cases}$

L'image de la droite (AC) , par $\mathcal{H}$, est la droite parallèle à (AC) , qui contient l'image A' de A par $\mathcal{H}$.

Or (A'C') // (AC) , donc : $\mathcal{H}((AC)) = (A'C')$.

L'image de la droite (BC) , par $\mathcal{H}$, est la droite parallèle à (BC) , qui contient l'image B' de B par $\mathcal{H}$.

Or (B'C') // (BC) , donc : $\mathcal{H}((BC)) = (B'C')$.

$C \in (AC) \cap (BC)$ donc $\mathcal{H}(C) \in (A'C') \cap (B'C')$. Or $(A'C') \cap (B'C') = \{C'\}$ donc : $\mathcal{H}(C) = C'$.

conclusion L'homothétie $\mathcal{H}$ transforme alors A en A' , B en B' , C en C'.

Remarque : on a alors : S , A , A' alignés ; S , B , B' alignés ; S , C , C' alignés ;

2°) Supposons $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Puisque : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$, alors : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$ (3)

Soit $\mathcal{T}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

voir figure 2 La relation (3) traduit que : $\begin{cases} A' = \mathcal{T}(A) \\ B' = \mathcal{T}(B) \end{cases}$

L'image de la droite (AC) , par $\mathcal{T}$, est la droite parallèle à (AC) , qui contient l'image A' de A par $\mathcal{T}$.

Or (A'C') // (AC) , donc $\mathcal{T}((AC)) = (A'C')$.

L'image de la droite (BC) , par $\mathcal{T}$, est la droite parallèle à (BC) , qui contient l'image B' de B par $\mathcal{T}$.

Or (B'C') // (BC) , donc $\mathcal{T}((BC)) = (B'C')$.

$C \in (AC) \cap (BC)$ donc $\mathcal{T}(C) \in (A'C') \cap (B'C')$. Or $(A'C') \cap (B'C') = \{C'\}$ donc $\mathcal{T}(C) = C'$.

conclusion La translation $\mathcal{T}$ transforme alors A en A' , B en B' , C en C'.

Triangles semblables

3eme partie : trois cas de similitude de triangles .

Définitions : * On appelle similitude plane toute application φ d'un plan P dans lui-même , composée d'une isométrie f de P dans P et d'une homothétie positive $\mathcal{H}$ de P dans P .
Le rapport k ($k > 0$) de l'homothétie $\mathcal{H}$ est dit rapport de la similitude φ .
L'isométrie f " conserve " les distances et $\mathcal{H}$ " multiplie" les distances par $|k|$, c'est à dire par k .
Toute similitude plane de rapport k " multiplie" donc les distances par k .

* Soit A , B , C , A' , B' , C' des points appartenant tous à un même plan P .
Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits semblables s'il existe une similitude φ de P dans P vérifiant : $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$.
Les sommets A' , B' , C' sont alors dits homologues des sommets A , B , C , nommés dans cet ordre .

1°) Démontrer : Si deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables , alors ils vérifient :

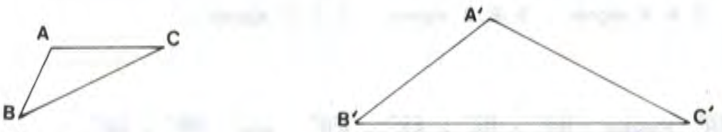
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \quad \text{et} \quad (\widehat{A'} = \widehat{A} \; ; \; \widehat{B'} = \widehat{B} \; ; \; \widehat{C'} = \widehat{C}) .$$

2°) On appelle cas de similitude de deux triangles les trois énoncés ci-dessous qui expriment des conditions suffisantes pour que deux triangles ABC et A'B'C' soient semblables .

a) Premier cas de similitude

Si $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$, alors les triangles ABC et A'B'C' sont semblables .

On énonce parfois : Si deux triangles ont les longueurs de leurs trois côtés proportionnelles , alors ces deux triangles sont semblables .

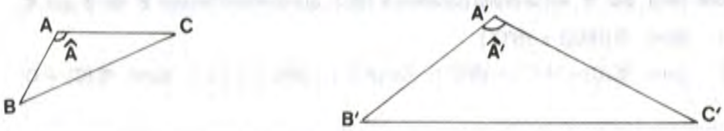


$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

b) Deuxième cas de similitude :

Si $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ et $\widehat{A'} = \widehat{A}$, alors les triangles ABC et A'B'C' sont semblables .

On énonce parfois : Si deux triangles ont un angle de même mesure " compris" entre deux côtés dont les longueurs sont proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables .



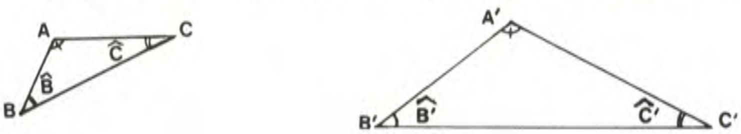
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$\widehat{A'} = \widehat{A}$$

c) Troisième cas de similitude :

Si $\widehat{B'} = \widehat{B}$ et $\widehat{C'} = \widehat{C}$, alors les triangles ABC et A'B'C' sont semblables .

On énonce parfois : Si deux triangles ont deux angles dont les mesures sont respectivement égales , alors ces deux triangles sont semblables .



1°) Supposons les triangles ABC et A'B'C' semblables .

Alors il existe une similitude φ transformant A , B , C en respectivement A' , B' , C' .

Soit k le rapport de cette similitude .

on a : $\begin{cases} A'B' = k\,AB \\ B'C' = k\,BC \\ C'A' = k\,CA \end{cases}$ d'où : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = k$

on a donc : $\begin{cases} c' = k\,c \\ a' = k\,a \\ b' = k\,b \end{cases}$ or $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ et $\cos\widehat{A'} = \dfrac{k^2b^2 + k^2c^2 - k^2a^2}{2k^2bc}$

Après simplification par k^2 ($k^2 > 0$), on trouve : $\cos\widehat{A} = \cos\widehat{A'}$, d'où $\widehat{A} = \widehat{A'}$

De même : $\cos\widehat{B} = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ et $\cos\widehat{B'} = \dfrac{k^2c^2 + k^2a^2 - k^2b^2}{2k^2ca}$ donc $\cos B = \cos B'$, soit $\widehat{B} = \widehat{B'}$

Puisque $\widehat{C} = \pi - (\widehat{A} + \widehat{B})$ et que $\widehat{C'} = \pi - (\widehat{A'} + \widehat{B'})$, on a donc aussi : $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

2°) a) 1[er] cas de similitude : supposons $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$.

Soit λ la valeur commune de ces trois rapports . On a donc $\lambda > 0$.

Considérons une homothétie $\mathcal{H}$ de rapport λ , de centre indifférent . Soit $A_1 = \mathcal{H}(A)$; $B_1 = \mathcal{H}(B)$; $C_1 = \mathcal{H}(C)$.

$\mathcal{H}$ multiplie les distances par λ , donc $\begin{cases} A_1B_1 = \lambda.AB \\ B_1C_1 = \lambda.BC \\ C_1A_1 = \lambda.CA \end{cases}$ mais on a $\begin{cases} A'B' = \lambda.AB \\ B'C' = \lambda.BC \\ C'A' = \lambda.CA \end{cases}$, donc $\begin{cases} A'B' = A_1B_1 \\ B'C' = B_1C_1 \\ C'A' = C_1A_1 \end{cases}$

voir 2°) a) page 118 Les triangles $A_1B_1C_1$ et A'B'C' sont donc isométriques .

Il existe donc une isométrie f transformant respectivement A_1 , B_1 , C_1 en A' , B' , C' .

On a donc : $f \circ \mathcal{H}$: $A \longmapsto A_1 \longmapsto A'$

$B \longmapsto B_1 \longmapsto B'$ et $f \circ \mathcal{H}$ est une similitude de rapport λ .

$C \longmapsto C_1 \longmapsto C'$

ce qui prouve que les triangles ABC et A'B'C' sont semblables .

2°) b) 2[eme] cas de similitude : supposons $\widehat{A'} = \widehat{A}$ et $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$.

Soit k la valeur commune de ces deux rapports . On a $k > 0$.

On a : $\begin{cases} A'B' = k.AB \\ A'C' = k.AC \\ \cos\widehat{A'} = \cos\widehat{A} \end{cases}$ et $\begin{cases} B'C'^2 = A'C'^2 + A'B'^2 - 2\,A'C' \times A'B' \times \cos\widehat{A'} \\ BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AC \times AB \times \cos\widehat{A} \end{cases}$.

On a donc : $B'C'^2 = k^2\,AC^2 + k^2\,AB^2 - 2\,k^2\,AC \times AB \times \cos\widehat{A}$, d'où : $B'C'^2 = k^2.BC^2$

Or $k > 0$, donc $\dfrac{B'C'}{BC} = k$, d'où : $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$.

Le premier cas de similitude assure alors que : les triangles ABC et A'B'C' sont semblables .

2°) c) 3[ème] cas de similitude : supposons $\widehat{B'} = \widehat{B}$ et $\widehat{C'} = \widehat{C}$. Alors : $\widehat{A'} = \widehat{A}$ puisque $\widehat{A'} = \pi - (\widehat{B'} + \widehat{C'})$ et $\widehat{A} = \pi - (\widehat{B} + \widehat{C})$

on a : $\begin{cases} \sin A' = \sin A \\ \sin B' = \sin B \\ \sin C' = \sin C \end{cases}$ et $\dfrac{a'}{\sin A'} = \dfrac{b'}{\sin B'} = \dfrac{c'}{\sin C'}$ et $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

On en déduit : $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$, ce qui assure (d'après le 1[er] cas de similitude) que :

les triangles ABC et A'B'C' sont semblables .

remarque On déduit immédiatement , des trois cas de similitude , les énoncés suivants :

* deux triangles équilatéraux sont semblables .
* deux triangles rectangles ayant un angle aigu de même mesure sont semblables .
* deux triangles rectangles dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont proportionnelles , sont semblables .
* deux triangles rectangles dont les longueurs de l'hypoténuse et d'un côté de l'angle droit sont proportionnelles , sont semblables .

Triangles semblables .

4ème partie : triangles directement semblables . triangles indirectement semblables

1°) Définitions .

Le plan P est supposé orienté .

Soit φ une similitude de P dans P , composée d'une isométrie f de P dans P et d'une homothétie positive $\mathcal{H}$ de P dans P .

* φ est dite similitude plane directe si , et seulement si f est un déplacement (c'est à dire si f est une isométrie conservant les angles orientés) .

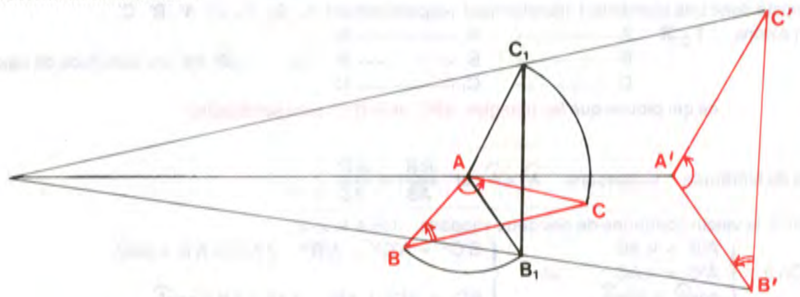
* φ est dite similitude plane indirecte si , et seulement si f est un antidéplacement (c'est à dire si f est une isométrie contrariant les angles orientés) .

2°) Démontrer les propriétés suivantes :

Soit ABC et A'B'C' deux triangles d'un même plan orienté P .

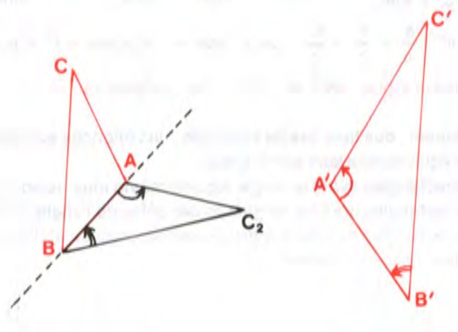
a) Si $\begin{cases} (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ (\pi) \\ (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \ (\pi) \end{cases}$ alors $\Big\{$ il existe une similitude plane directe transformant A , B , C respectivement en A' , B' , C' .

Les triangles ABC et A'B'C' , dont les sommets sont nommés dans cet ordre , sont alors dits directement semblables .



b) Si $\begin{cases} (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ (\pi) \\ (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}) \equiv -(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \ (\pi) \end{cases}$ alors $\Big\{$ il existe une similitude plane indirecte transformant A , B , C respectivement en A' , B' , C' .

Les triangles ABC et A'B'C' , dont les sommets sont nommés dans cet ordre , sont alors dits indirectement semblables .



2°) a)

Supposons $\begin{cases} \overline{(A'B', A'C')} \equiv \overline{(AB, AC)} \quad (\pi) \\ \overline{(B'C', B'A')} \equiv \overline{(BC, BA)} \quad (\pi) \end{cases}$

Démontrons que : $\overline{(C'A', C'B')} \equiv \overline{(CA, CB)} \quad (\pi)$

Utilisons la relation de Chasles : $\overline{(C'A', C'B')} \equiv \overline{(C'A', A'B')} + \overline{(A'B', B'C')} \quad (\pi)$

Utilisons l'hypothèse : $\overline{(C'A', C'B')} \equiv \overline{(CA, AB)} + \overline{(AB, BC)} \quad (\pi)$

c'est à dire : $\overline{(C'A', C'B')} \equiv \overline{(CA, CB)} \quad (\pi)$

Comparons $\overline{(AB, A'B')}$, $\overline{(AC, A'C')}$, $\overline{(BC, B'C')}$.

On a : $\overline{(AC, A'C')} \equiv \overline{(AC, AB)} + \overline{(AB, A'B')} + \overline{(A'B', A'C')} \quad (\pi)$

Or $\overline{(AC, AB)} + \overline{(A'B', A'C')} \equiv 0 \quad (\pi)$

Par conséquent : $\overline{(AC, A'C')} \equiv \overline{(AB, A'B')} \quad (\pi)$

On démontre de même : $\overline{(BC, B'C')} \equiv \overline{(BA, B'A')} \quad (\pi)$

Soit θ une mesure en radians (modulo 2π) de $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})}$. On a alors : $\overline{(AB, A'B')} \equiv \theta \quad (\pi)$.

Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre A , d'angle mesurant θ .

On a : $\mathcal{R}(A) = A$

Posons : $\begin{cases} \mathcal{R}(B) = B_1 \\ \mathcal{R}(C) = C_1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB_1})} \equiv \theta \quad (2\pi) \\ \overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1})} \equiv \theta \quad (2\pi) \\ \overline{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B_1C_1})} \equiv \theta \quad (2\pi) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \overline{(AB, AB_1)} \equiv \overline{(AB, A'B')} \quad (\pi) \\ \overline{(AC, AC_1)} \equiv \overline{(AC, A'C')} \quad (\pi) \\ \overline{(BC, B_1C_1)} \equiv \overline{(BC, B'C')} \quad (\pi) \end{cases}$

On en déduit : $(A'B') // (AB_1)$; $(A'C') // (AC_1)$; $(B'C') // (B_1C_1)$.

voir page 122

Les triangles AB_1C_1 et A'B'C' ont leurs côtés respectivement parallèles .

Il existe donc une application g (g : homothétie ou translation) de P dans P transformant A , B_1 , C_1 en respectivement A' , B' , C' .

On a $g_o\mathcal{R}$: $\begin{array}{ccccc} A & \longmapsto & A & \longmapsto & A' \\ B & \longmapsto & B_1 & \longmapsto & B' \\ C & \longmapsto & C_1 & \longmapsto & C' \end{array}$ posons : $\varphi = g_o\mathcal{R}$

* si g est une translation , alors φ est un déplacement de P dans P .
* si g est une homothétie positive de rapport k , alors φ est une similitude plane directe de rapport k .
* si g est une homothétie négative de rapport - k (k > 0) .

soit Ω le centre de g et $\mathcal{R}'$ la rotation de centre Ω , d'angle plat .

on a : $g = \mathcal{H}(\Omega, k)_o\mathcal{R}'(\Omega, \pi)$ donc : $\varphi = \mathcal{H}(\Omega, k)_o\mathcal{R}'_o\mathcal{R}$

c'est à dire : $\varphi = \mathcal{H}(\Omega, k)_o f$ où $\begin{cases} f \text{ est un déplacement} \\ \mathcal{H} \text{ est une homothétie positive .} \end{cases}$

Dans tous les cas , φ est une similitude plane directe de P dans P qui transforme A en A' , B en B' , C en C' .

Les triangles ABC et A'B'C' sont donc directement semblables .

2°) b)

Supposons $\begin{cases} \overline{(A'B', A'C')} \equiv -\overline{(AB, AC)} \quad (\pi) \\ \overline{(B'C', B'A')} \equiv -\overline{(BC, BA)} \quad (\pi) \end{cases}$

Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB) . σ est une isométrie qui contrarie les angles orientés .

On a $\begin{cases} \sigma(A) = A \\ \sigma(B) = B \end{cases}$

Posons : $\sigma(C) = C_2$ alors $\begin{cases} \overline{(AB, AC_2)} \equiv -\overline{(AB, AC)} \quad (\pi) \\ \overline{(BC_2, BA)} \equiv -\overline{(BC, BA)} \quad (\pi) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \overline{(AB, AC_2)} \equiv \overline{(A'B', A'C')} \quad (\pi) \\ \overline{(BC_2, BA)} \equiv \overline{(B'C', B'A')} \quad (\pi) \end{cases}$

voir 2°) a)

Les triangles ABC_2 et A'B'C' sont donc directement semblables .

Il existe alors une composée $\mathcal{H}_o f$ transformant A en A' , B en B' , C_2 en C' ,

où f est un déplacement et $\mathcal{H}$ est une homothétie positive .

On a alors : $\mathcal{H}_o f_o \sigma$: $\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\sigma} & A & \xrightarrow{\mathcal{H} o f} & A' \\ B & \longmapsto & B & \longmapsto & B' \\ C & \longmapsto & C_2 & \longmapsto & C' \end{array}$ Posons : $\psi = \mathcal{H}_o f_o \sigma$

$f_o \sigma$ est alors un antidéplacement de P dans P .

ψ est donc une similitude plane indirecte transformant A en A' , B en B' , C en C' .

Les triangles ABC et A'B'C' sont donc indirectement semblables

Triangles inscrits dans un cercle donné $\mathcal{C}$, d'orthocentre donné H

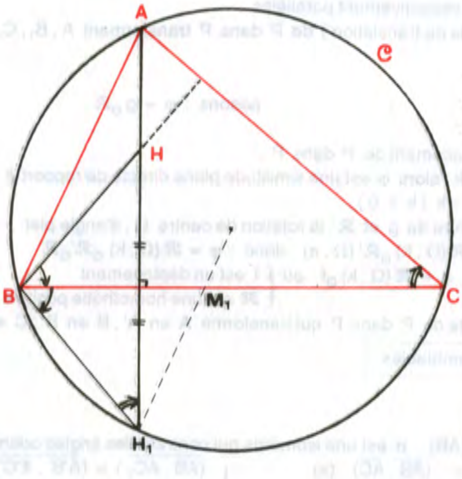
H intérieur strictement à $\mathcal{C}$.

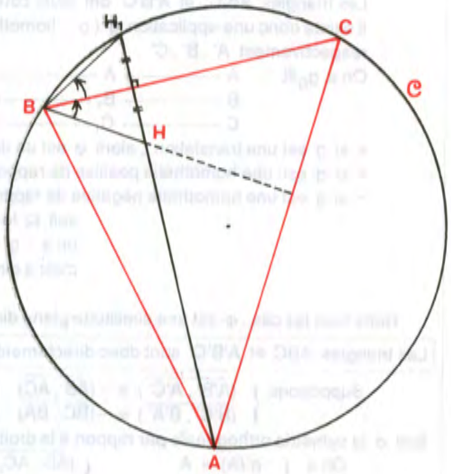
Soit $\mathcal{C}$ un cercle donné de centre O, de rayon R.

Soit H un point donné vérifiant : $0 < OH < R$.

1°) Justifier qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans $\mathcal{C}$ et ayant H pour orthocentre. Vérifier que tous ces triangles ont même cercle d'Euler $\mathcal{C}'$.

2°) Démontrer que tous les triangles inscrits dans $\mathcal{C}$ et ayant H pour orthocentre, ont leurs trois côtés tangents à une même ellipse $\mathcal{E}$, de foyers O et H, dont le cercle principal est le cercle $\mathcal{C}'$.





Notions utilisées :

* *les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés de ce triangle appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.*
* *cercle d'Euler d'un triangle*
* *propriétés tangentielles de l'ellipse.*

1°) Le point H est donné .

S'il existe un triangle ABC inscrit dans $\mathcal{C}$, ayant H pour orthocentre , alors les symétriques respectifs de H_1, H_2, H_3 de H par rapport aux côtés (BC) , (CA) , (AB) ABC appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC .

Menons par H une droite quelconque .

Puisque H est intérieur strictement à $\mathcal{C}$, cette droite coupe $\mathcal{C}$ en deux points .

Nommons A et H_1 ces deux points , qui sont distincts de H .

Posons : $I = m(H, H_1)$; I est lui aussi intérieur strictement à $\mathcal{C}$.

La médiatrice de (H, H_1) coupe donc $\mathcal{C}$ en deux points : B et C .

Justifions que le triangle ABC ainsi construit (inscrit dans $\mathcal{C}$) admet pour orthocentre le point H donné .

Par construction , H appartient à la hauteur issue de A dans ABC , puisque $(AH) \perp (BC)$.

Justifions : $(BH) \perp (AC)$.

On a : $\overline{(BH, AC)} \equiv \overline{(BH, BC)} + \overline{(CB, CA)}$ (π) (relation de Chasles) (1)

$H = S_{BC}(H_1)$ donc : $\overline{(BH, BC)} \equiv - \overline{(BH_1, BC)}$ (π) (2)

Les points B, H_1 , C , A sont cocycliques et distincts , donc : $\overline{(CB, CA)} \equiv \overline{(H_1B, H_1A)}$ (π) (3)

Grâce à (2) et (3) , la relation (1) s'écrit : $\overline{(BH, AC)} \equiv \overline{(BC, BH_1)} + \overline{(H_1B, H_1A)}$ (π)

d'où : $\overline{(BH, AC)} \equiv \overline{(BC, H_1A)}$ (π)

Puisque $(BC) \perp (AH_1)$, on déduit ainsi : $(BH) \perp (AC)$

Le point H appartient donc à la hauteur issue de B dans le triangle ABC .

Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC (puisque H appartient à deux hauteurs de ce triangle) .

Il existe donc une infinité de triangles ABC inscrits dans $\mathcal{C}$, d'orthocentre H , puisqu'il existe une infinité de droites contenant H et que , pour chaque droite menée par H , on peut déterminer deux triangles solutions (les rôles des points A et H_1 ci-dessus pouvant être échangés) .

Tous ces triangles admettent même cercle d'Euler $\mathcal{C}'$. En effet :

$$\begin{cases} \text{Le centre } O' \text{ de } \mathcal{C}' \text{ est le milieu de } (O, H) . \\ \text{le rayon de } \mathcal{C}' \text{ est } \dfrac{R}{2} . \end{cases}$$

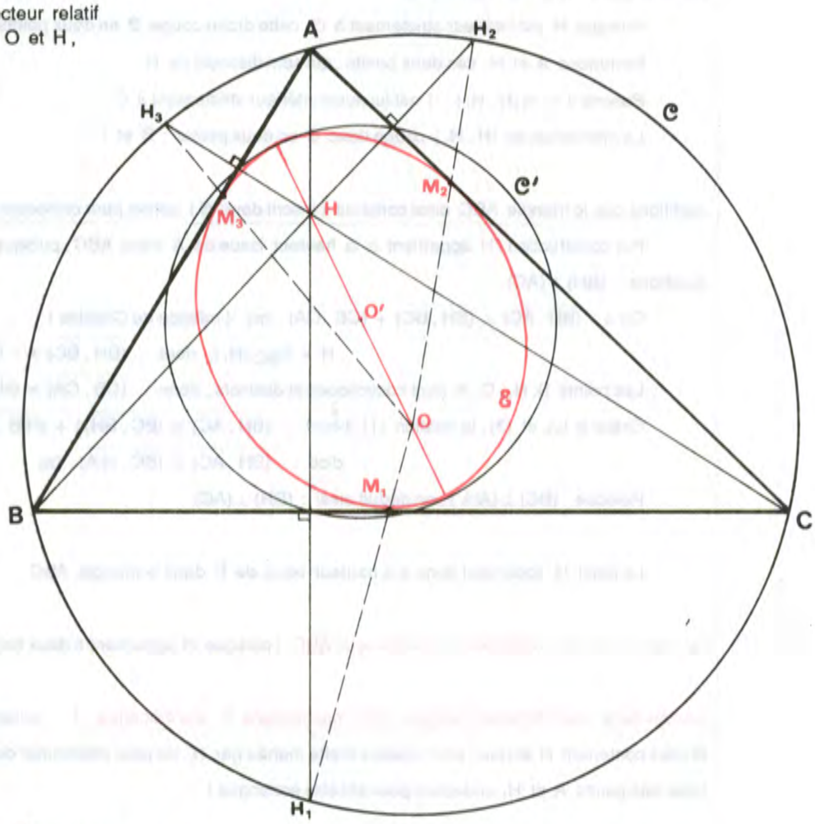
Le centre et le rayon de $\mathcal{C}'$ ne dépendent donc pas du triangle ABC considéré , mais seulement des données O , H , R .

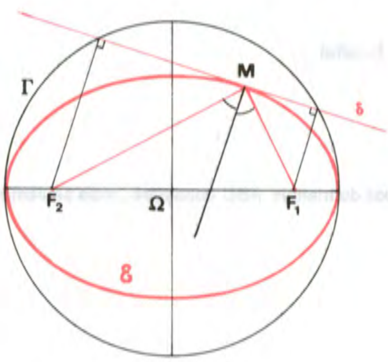
2°) voir page 131

Triangles inscrits dans un cercle donné $\mathcal{C}$, d'orthocentre donné H

H intérieur strictement à $\mathcal{C}$ (suite) .

$\mathcal{C}$ apparait comme cercle directeur relatif à O de l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers O et H , de cercle principal $\mathcal{C}'$.





Rappels

Toute ellipse $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $MF_1 + MF_2 = 2a$ où :

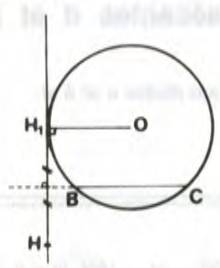
$\begin{cases} 2a \text{ est un réel donné .} \\ F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont deux points tels que : } 0 < F_1F_2 < 2a \end{cases}$

les points F_1 et F_2 sont dits les foyers de l'ellipse $\mathcal{E}$.

* Le cercle Γ , de centre Ω (Ω milieu de (F_1, F_2)) , de rayon a , est dit cercle principal de l'ellipse $\mathcal{E}$.
* La tangente δ en un point M quelconque de l'ellipse $\mathcal{E}$ est la bissectrice extérieure de $[\widehat{F_1MF_2}]$.
* Le projeté orthogonal d'un quelconque foyer de $\mathcal{E}$ sur δ appartient au cercle principal Γ de l'ellipse $\mathcal{E}$.

2°) a) Soit ABC un triangle solution . Soit $H_1 = S_{BC}(H)$.

Démontrons que (BC) coupe (OH_1) , en un point du segment $[OH_1]$.



* Si on avait $(OH_1) // (BC)$, alors on aurait $(OH_1) \perp (HH_1)$.

Puisque $H_1 \in \mathcal{C}$, (HH_1) serait tangente en H_1 à $\mathcal{C}$,

or $H \neq H_1$, donc H serait extérieur à $\mathcal{C}$.

* ce qui contrarie l'hypothèse ($OH < R$) .

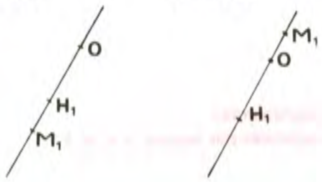
Les droites (BC) et (OH_1) sont donc sécantes .

2°) b) Posons alors $(BC) \cap (OH_1) = \{M_1\}$ et prouvons que M_1 appartient à $[OH_1]$.

* Supposons $M_1 \notin [OH_1]$.

alors : $OH_1 = |OM_1 - M_1H_1|$; or $OH_1 = R$.

1er cas 2ème cas



On aurait : $R = |OM_1 - M_1H_1|$.

Or : $M_1 \in (BC)$ et $(BC) = \text{med}(H, H_1)$, donc $M_1H_1 = M_1H$

On aurait donc : $R = |OM_1 - M_1H|$ (4)

Mais le triangle OM_1H satisfait l'inégalité triangulaire :

$OH \geq |OM_1 - M_1H|$ (5)

Des relations (4) et (5) , on déduirait : $OH \geq R$,

* ce qui contrarie l'hypothèse $OH < R$.

Le point M_1 appartient par conséquent au segment $[OH_1]$ et vérifie donc : $OM_1 + M_1H_1 = OH_1$.

2°) c) Puisque $M_1H_1 = M_1H$ et $OH_1 = R$, le point M_1 vérifie : $OM_1 + M_1H = R$, avec $0 < OH < R$.

voir rappel page 130

Le point M_1 appartient donc à l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers O et H , dont le grand axe a pour longueur R .

Le cercle principal de $\mathcal{E}$ a pour centre le milieu O' de (O , H) et pour rayon $\frac{R}{2}$. On reconnait le cercle d'Euler $\mathcal{C}'$ commun à tous les triangles ABC , inscrits dans $\mathcal{C}$, ayant H pour orthocentre .

2°) d) Démontrons que (BC) est tangente en M_1 à l'ellipse $\mathcal{E}$.

$M_1 \in (BC)$ et $(BC) = \text{med}(H_1, H)$ donc (BC) est bissectrice intérieure de $[\widehat{HM_1H_1}]$.

Les demi-droites $[M_1H_1)$ et $[M_1O)$ sont deux demi-droites opposées donc :

voir rappel page 130

(BC) est bissectrice extérieure de $[\widehat{HM_1O}]$.

La droite (BC) est par conséquent la tangente en M_1 à l'ellipse $\mathcal{E}$

2°) e) De la même façon , en posant : $H_2 = S_{CA}(H)$ et $H_3 = S_{AB}(H)$, on démontre que :

$(CA) \cap [OH_2] = \{M_2\}$ et $OM_2 + M_2H = R$ donc $M_2 \in \mathcal{E}$.

$(AB) \cap [OH_3] = \{M_3\}$ et $OM_3 + M_3H = R$ donc $M_3 \in \mathcal{E}$.

De même qu'en 2°) d) , on justifie que :

Les droites (CA) et (CB) sont les tangentes respectives en M_2 et M_3 à cette même ellipse $\mathcal{E}$ dont les caractéristiques ne dépendent que de O , H , R .

Droites isogonales par rapport à deux droites sécantes d et δ.

Définition : Soit d et δ deux droites sécantes en A .
Deux droites D et Δ contenant A seront dites isogonales par rapport aux droites d et δ si, et seulement si elles vérifient : $(\overline{d, D}) \equiv (\overline{\Delta, \delta}) \quad (\pi)$

1ère partie : caractérisation 1

Soit d et δ deux droites sécantes en A .
Soit M et N deux points quelconques du plan , distincts de A .
On note α et β les réels appartenant à $[0, \pi[$ tels que : $(\overline{d, AM}) \equiv \alpha \quad (\pi)$ et $(\overline{AN, \delta}) \equiv \beta \quad (\pi)$.
Soit M_1 et M_2 les projetés orthogonaux respectifs de M sur d et δ .
Soit N_1 et N_2 les projetés orthogonaux respectifs de N sur d et δ

1°) Démontrer : a) $(\overline{\delta, M_2M_1}) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (\pi)$
b) $(\overline{N_1N_2, d}) \equiv \frac{\pi}{2} - \beta \quad (\pi)$.

2°) Conclure : les quatre propositions suivantes sont équivalentes :
p_1 : Les droites (AM) et (AN) sont isogonales par rapport à d et δ ;
p_2 : $(AN) \perp (M_1M_2)$
p_3 : $(AM) \perp (N_1N_2)$.
p_4 : $(\overline{\delta, M_1M_2}) \equiv (\overline{N_1N_2, d}) \quad (\pi)$

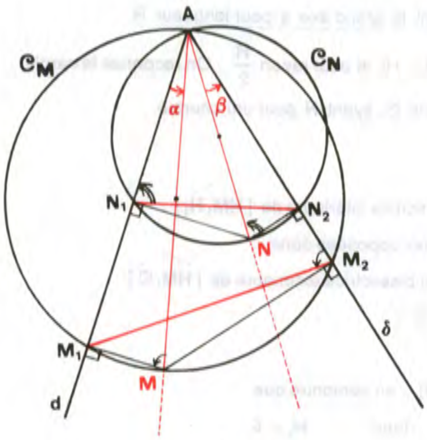


figure 1

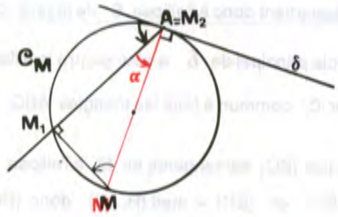


figure 2

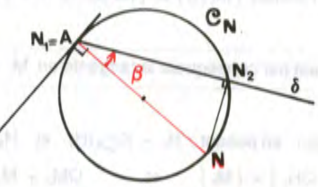


figure 3

$(\alpha = \beta) \Leftrightarrow$ (AM) et (AN) sont isogonales par rapport à d et δ .

Remarque : Les caractérisations (1) et (2) de l'isogonalité ne sont que des cas particuliers de propriétés de l'antiparallèlisme .
Cette notion , que nous n'avons pas voulu utiliser ici , sera développée ultérieurement .

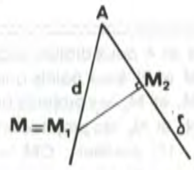
Notion utilisée : *points cocycliques*

1°) Justifions que les droites (M_1M_2) et (N_1N_2) existent . Les points M et N sont supposés distincts de A .

* Si on avait $M_2 = M_1$, on aurait $M_2 \in \delta \cap d$ et $M_1 \in \delta \cap d$.

on aurait donc $M_2 = A$ et $M_1 = A$; M serait en A .

* Si on avait $N_2 = N_1$, on aurait de même : N = A .



1°) a) Evaluons $\overline{(\delta, M_2M_1)}$ Deux cas peuvent se présenter :

* Si $M \in d$, alors $M_1 = M$ et $\alpha = 0$.

On a $(M_1M_2) \perp \delta$ donc $\overline{(\delta, M_2M_1)} \equiv \frac{\pi}{2} - 0 \ (\pi)$

* Si $M \notin d$, alors $M_1 \neq M$. La droite (MM_1) existe .

Les points A , M_2 , M , M_1 sont cocycliques sur le cercle $\mathcal{C}_M$ de diamètre [AM] .

voir figure 1 ** Si $M_2 \neq A$, alors $\delta = (M_2A)$ et $\overline{(M_2A, M_2M_1)} \equiv \overline{(MA, MM_1)} \ (\pi)$

c'est à dire : $\overline{(\delta, M_2M_1)} \equiv \overline{(MA, MM_1)} \ (\pi)$

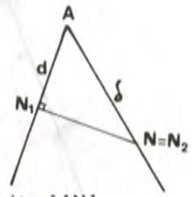
voir figure 2 ** Si $M_2 = A$, alors $(MA) \perp \delta$. Le cercle $\mathcal{C}_M$ contenant A , M , M_1 est tangent en A à δ .

δ vérifie alors : $\overline{(\delta, AM_1)} \equiv \overline{(MA, MM_1)} \ (\pi)$

Dans ces deux cas , on trouve : $\overline{(\delta, M_2M_1)} \equiv \overline{(MA, MM_1)} \ (\pi)$ (1)

On a : $\overline{(MA, MM_1)} \equiv \overline{(MA, d)} + \overline{(d, MM_1)} \ (\pi)$, c'est à dire : $\overline{(MA, MM_1)} \equiv -\alpha + \frac{\pi}{2} \ (\pi)$

La relation (1) s'écrit alors : $\boxed{\overline{(\delta, M_2M_1)} \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha \ (\pi)}$ (2)



1°) b) Evaluons $\overline{(N_1N_2, d)}$. Le principe est le même que dans 1°) a) .

* Si $N \in \delta$, alors $N_2 = N$ et $\beta = 0$.

On a $(N_1N_2) \perp d$, donc $\overline{(N_1N_2, d)} \equiv \frac{\pi}{2} - 0 \ (\pi)$

* Si $N \notin \delta$, alors $N_2 \neq N$, la droite (NN_2) existe

Les points A , N_1 , N , N_2 sont cocycliques sur le cercle $\mathcal{C}_N$ de diamètre [AN] .

voir figure 1 ** Si $N_1 \neq A$, alors $d = (N_1A)$ et $\overline{(N_1N_2, N_1A)} \equiv \overline{(NN_2, NA)} \ (\pi)$

voir figure 3 ** Si $N_1 = A$, alors $(NA) \perp d$. Le cercle $\mathcal{C}_N$ contenant A , N , N_2 est tangent en A à d .

d vérifie alors : $\overline{(N_1N_2, d)} \equiv \overline{(NN_2, NA)} \ (\pi)$

Dans ces deux cas , on trouve : $\overline{(N_1N_2, d)} \equiv \overline{(NN_2, NA)} \ (\pi)$ (3)

Par ailleurs : $\overline{(NN_2, NA)} \equiv \overline{(NN_2, \delta)} + \overline{(\delta, AN)} \ (\pi)$, c'est à dire : $\overline{(NN_2, NA)} \equiv \frac{\pi}{2} - \beta \ (\pi)$

La relation (2) s'écrit alors : $\boxed{\overline{(N_1N_2, d)} \equiv \frac{\pi}{2} - \beta \ (\pi)}$ (4)

2°) D'une part : $\overline{(AN, M_2M_1)} \equiv \overline{(AN, \delta)} + \overline{(\delta, M_2M_1)} \ (\pi)$, c'est à dire : $\overline{(AN, M_2M_1)} \equiv \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha \ (\pi)$ (5)

D'autre part : $\overline{(N_1N_2, AM)} \equiv \overline{(N_1N_2, d)} + \overline{(d, AM)} \ (\pi)$, c'est à dire : $\overline{(N_1N_2, AM)} \equiv \frac{\pi}{2} - \beta + \alpha \ (\pi)$ (6)

Les relations (5) et (6) assurent que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$\boxed{p_1 : (\alpha = \beta) \quad p_2 : (M_2M_1) \perp (AN) \quad p_3 : (N_1N_2) \perp (AM)}$

Par ailleurs , les relations (2) et (4) assurent que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$\boxed{p_1 : (\alpha = \beta) \quad p_4 : \overline{(\delta, M_2M_1)} \equiv \overline{(N_1N_2, d)} \ (\pi)}$

Droites isogonales par rapport à deux droites sécantes d et δ.

$2^{\text{ème}}$ partie : caractérisation 2

Soit d et δ deux droites sécantes en A .
Soit M et N deux points quelconques du plan , distincts de A . On pose $\Omega = m(M, N)$.
Soit M_1 et M_2 les projetés orthogonaux respectifs de M sur d et δ .
Soit N_1 et N_2 les projetés orthogonaux respectifs de N sur d et δ .

1°) Justifier : $\Omega M_1 = \Omega N_1$ et $\Omega M_2 = \Omega N_2$.

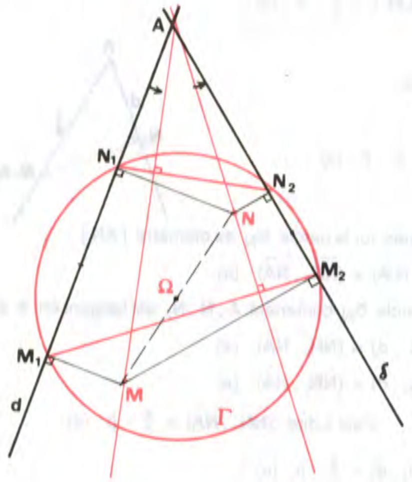
2°) Etablir les égalités : $\overrightarrow{AM_1}.\overrightarrow{AN_1} = A\Omega^2 - \Omega M_1^2$. et $\overrightarrow{AM_2}.\overrightarrow{AN_2} = A\Omega^2 - \Omega M_2^2$

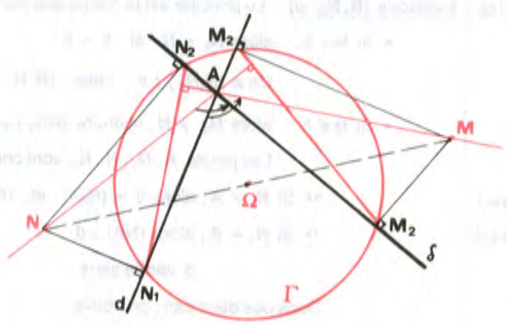
En déduire les équivalences : $(\Omega M_1 = \Omega M_2) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_2M_1} \perp \overrightarrow{AN})$ et $(\Omega M_1 = \Omega M_2) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_2M_1} \perp \overrightarrow{AN})$

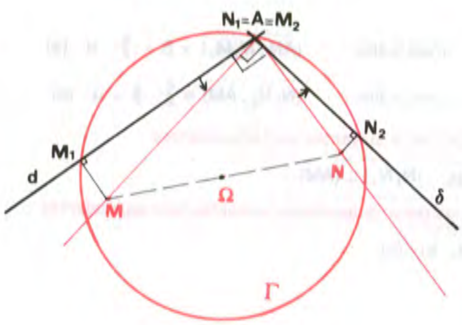
3°) Conclure : les trois propositions suivantes sont équivalentes :

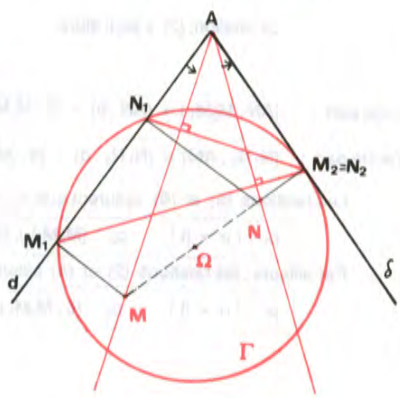
p_1 : les droites (AM) et (AN) sont isogonales par rapport à d et δ .
p_5 : les points M_1 , M_2 , N_1 , N_2 sont cocycliques sur un cercle dont le centre est le milieu Ω de (M , N)
p_6 : $\overrightarrow{AM_1}.\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AM_2}.\overrightarrow{AN_2}$

remarque : l'équivalence entre les propositions p_5 et p_6 fournit une caractérisation de la cocyclicité de quatre points , qui sera utilisée ultérieurement .









Notion utilisée : *produit scalaire*

1°) Soit Ω le milieu de (M, N) .

* Si $M = N$, alors $M_1 = N_1$ et $M_2 = N_2$ donc : $\Omega M_1 = \Omega N_1$ et $\Omega M_2 = \Omega N_2$.

* Si $M \neq N$,la projection orthogonale de la droite (MN) sur la droite d " conserve le milieu" , donc :

le projeté orthogonal de Ω sur d est le milieu I_1 de (M_1, N_1) .

** Si $M_1 = N_1$, alors $\Omega M_1 = \Omega N_1$.

** Si $M_1 \neq N_1$, alors $\Omega \in$ med (M_1, N_1) donc $\Omega M_1 = \Omega N_1$.

De même , la projection orthogonale de la droite (MN) sur la droite δ " conserve le milieu", donc :

le projeté orthogonal de Ω sur δ est le milieu I_2 de (M_2, N_2) , et on déduit alors : $\Omega M_2 = \Omega N_2$.

2°) $\overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AN_1} = (\overrightarrow{AI_1} + \overrightarrow{I_1M_1}).(\overrightarrow{AI_1} + \overrightarrow{I_1N_1})$. Mais $\overrightarrow{I_1N_1} = -\overrightarrow{I_1M_1}$ donc : $\overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AN_1} = AI_1^2 - I_1M_1^2$.

On a $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega I_1} \perp \overrightarrow{AI_1} \text{ . Le théorème de Pythagore assure donc : } A\Omega^2 = AI_1^2 + I_1\Omega^2 . \\ \overrightarrow{\Omega I_1} \perp \overrightarrow{I_1M_1} \text{ . Le théorème de Pythagore assure donc : } \Omega M_1^2 = I_1M_1^2 + I_1\Omega^2 . \end{cases}$

On peut déduire de ces deux relations : $A\Omega^2 - \Omega M_1^2 = AI_1^2 - I_1M_1^2$,

ce qui démontre : $\overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AN_1} = A\Omega^2 - \Omega M_1^2$.

De même , on démontre : $\overrightarrow{AM_2} . \overrightarrow{AN_2} = A\Omega^2 - \Omega M_2^2$

On a donc : $(\Omega M_1 = \Omega M_2) \Leftrightarrow p_6 : (\overrightarrow{AM_2} . \overrightarrow{AN_2} = \overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AN_1})$ (1)

Evaluons la différence x , $x = \overrightarrow{AM_2} . \overrightarrow{AN_2} - \overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AN_1}$.

$x = \overrightarrow{AM_2} . (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NN_2}) - \overrightarrow{AM_1} . (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NN_1})$. Or , par construction : $\overrightarrow{AM_2} \perp \overrightarrow{NN_2}$ et $\overrightarrow{AM_1} \perp \overrightarrow{NN_1}$

donc : $x = (\overrightarrow{AM_2} - \overrightarrow{AM_1}) . \overrightarrow{AN}$, c'est à dire : $x = \overrightarrow{M_1M_2} . \overrightarrow{AN}$ (2)

Mais on a aussi : $x = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_2}) . \overrightarrow{AN_2} - (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_1}) . \overrightarrow{AN_1}$, et : $\overrightarrow{AN_2} \perp \overrightarrow{MM_2}$ et $\overrightarrow{AN_1} \perp \overrightarrow{MM_1}$

donc : $x = \overrightarrow{AM} . (\overrightarrow{AN_2} - \overrightarrow{AN_1})$, c'est à dire : $x = \overrightarrow{AM} . \overrightarrow{N_1N_2}$. (3)

La relation (1) permet d'affirmer : $(\Omega M_1 = \Omega M_2) \Leftrightarrow (x = 0)$.

Les relations (2) et (3) démontrent donc l'équivalence des trois propositions p_0, p_2, p_3 . :

$p_0 : (\Omega M_1 = \Omega M_2)$; $p_2 : (\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{M_2M_1})$; $p_3 : (\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{N_1N_2})$

voir page 132 Ces trois propositions sont donc , d'après la caractérisation 1 , équivalentes à p_1 :

p_1 : les droites (AM) et (AN) sont isogonales par rapport à d et δ .

ainsi , d'ailleurs , d'après (1) , qu'à p_6 : $\overrightarrow{AM_2} . \overrightarrow{AN_2} = \overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AN_1}$.

voir 1°) On sait que : $(\Omega M_1 = \Omega N_1)$ et $(\Omega M_2 = \Omega N_2)$. Par conséquent :

$(\Omega M_1 = \Omega M_2) \Leftrightarrow p_5$: les points M_1, N_1, N_2, M_2 sont cocycliques sur un cercle de centre Ω ,

ce qui démontre l'équivalence des propositions p_1, p_5, p_6 .

conclusion

Les points M_1, M_2, N_1, N_2 appartiennent à un même cercle Γ de centre Ω , milieu de (M, N) si , et seulement si les droites (AM) et (AN) sont isogonales par rapport à d et δ .

voir figures page 134

remarque : les points M et N sont donc alors :
* soit tous deux intérieurs strictement à Γ
* soit diamétralement opposés sur Γ
* soit tous deux extérieurs stictement à Γ .

Isogonales de trois céviennes d'un triangle concourantes en un point du cercle circonscrit .

Soit ABC un triangle , dans un plan orienté , inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$.
Soit P un point quelconque du plan , distinct de A , B , C .
Les droites (PA) , (PB) , (PC) seront notées D_1 , D_2 , D_3 .
Soit
- Δ_1 l'isogonale de D_1 par rapport à (AB) et (AC) .
- Δ_2 l'isogonale de D_2 par rapport à (BC) et (BA) .
- Δ_3 l'isogonale de D_3 par rapport à (CA) et (CB) .

Soit P_1 , P_2 , P_3 les projetés orthogonaux respectifs de P sur (BC) , (CA) , (AB) .

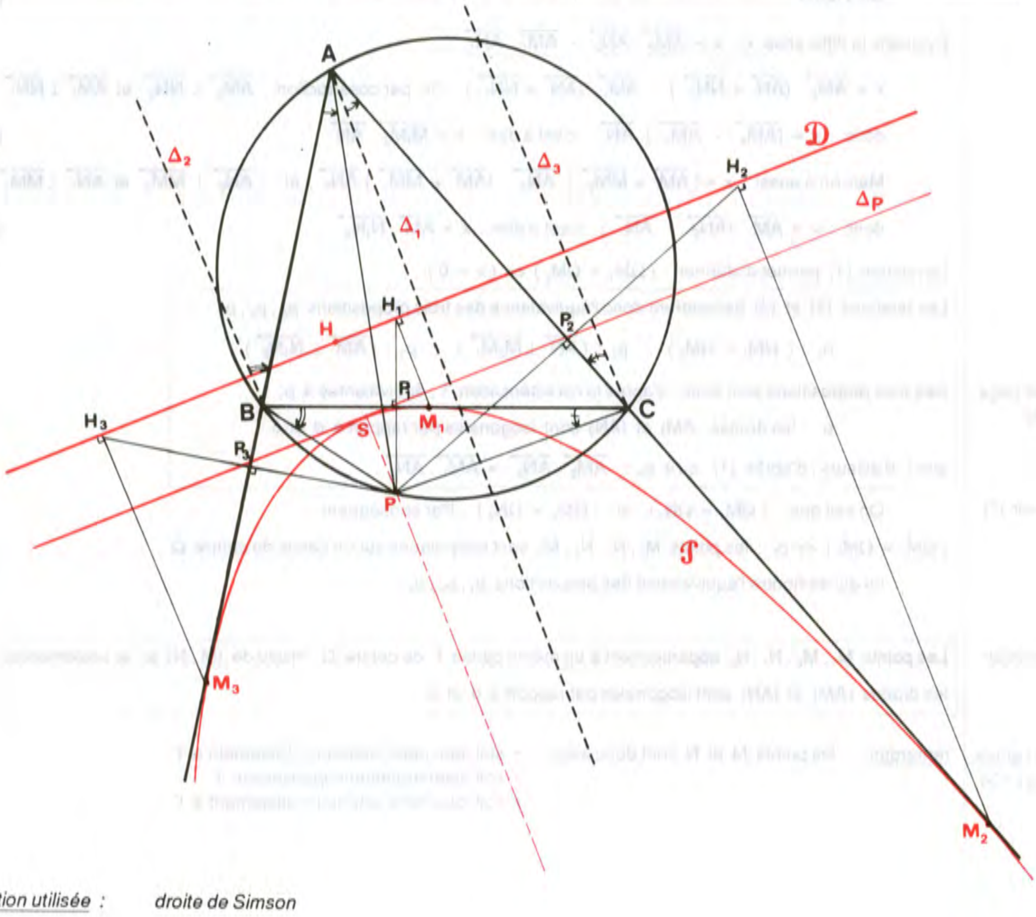
1°) a) Démontrer : $(\overline{\Delta_1 , \Delta_2}) + (\overline{D_1 , D_2}) \equiv (\overline{CA , CB}) \quad (\pi)$.

b) En déduire que Δ_1 et Δ_2 sont parallèles si , et seulement si P appartient au cercle $\mathcal{C}$, circonscrit au triangle ABC , privé des points A , B , C .

2°) On suppose : $P \in \mathcal{C} - \{A , B , C\}$.

a) Justifier que Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 sont trois droites parallèles et que leur direction commune est orthogonale à celle de la droite de Simson Δ_P du point P relativement au triangle ABC .

b) Justifier que P est alors foyer d'une parabole $\mathcal{P}$ tangente aux trois côtés (AB) , (BC) , (CA) .
Préciser la tangente au sommet de $\mathcal{P}$ et l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.



Notion utilisée : *droite de Simson*

1°) a) Utilisons la relation de Chasles :

$\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} \equiv \overline{(\Delta_1, AC)} + \overline{(CA, CB)} + \overline{(BC, \Delta_2)} \quad (\pi) \quad (1)$

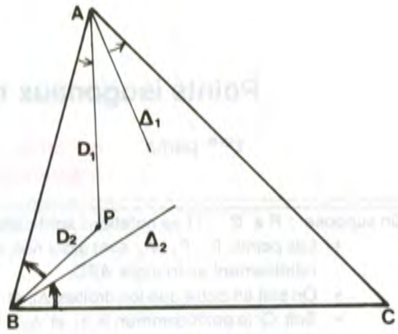
Or $\overline{(\Delta_1, AC)} \equiv \overline{(AB, D_1)} \ (\pi)$ et $\overline{(BC, \Delta_2)} \equiv \overline{(D_2, BA)} \ (\pi)$

La relation (1) s'écrit donc :

$\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} \equiv \overline{(AB, D_1)} + \overline{(CA, CB)} + \overline{(D_2, BA)} \quad (\pi)$

$\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} + \overline{(D_1, AB)} + \overline{(AB, D_2)} \equiv \overline{(CA, CB)} \quad (\pi)$

d'où : $\boxed{\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} + \overline{(D_1, D_2)} \equiv \overline{(CA, CB)} \ (\pi)}$ (2)



1°) b) $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \overline{(\Delta_1, \Delta_2)} \equiv 0 \quad (\pi)$.

Utilisons la relation (2) en remarquant que $\overline{(D_1, D_2)} \equiv \overline{(PA, PB)} \quad (\pi)$

$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \overline{(PA, PB)} \equiv \overline{(CA, CB)} \quad (\pi) \quad (3)$

Puisque les points A , B , C ne sont pas alignés , (3) traduit la cocyclicité de P , A , B , C .

$\boxed{\text{Les droites } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ sont donc parallèles si , et seulement si P appartient à } \mathcal{C} - \{A, B, C\}}$.

remarque Ce résultat peut bien sûr s'obtenir directement à partir du théorème de Simson .
voir page 42

2°) a) On suppose : $P \in \mathcal{C} - \{A, B, C\}$. D'après le 1°) , on sait déja $\Delta_1 // \Delta_2$.

On sait que les points P_1 , P_2 , P_3 sont alors alignés , et distincts , sur la droite de Simson Δp du point P relativement au triangle ABC .

Utilisons les résultats de la 1ère partie (caractérisation 1 , propositions p_2 et p_3) .

* Les droites D_1 et Δ_1 sont isogonales par rapport aux droites (AB) et (AC) .

  Puisque $P \in D_1$, on en déduit $(P_2P_3) \perp \Delta_1$, c'est à dire : $\Delta p \perp \Delta_1$

* Les droites D_3 et Δ_3 sont isogonales par rapport aux droites (CA) et (CB) .

  Puisque $P \in D_3$, on en déduit $(P_2P_1) \perp \Delta_3$, c'est à dire : $\Delta p \perp \Delta_3$

  Ainsi Δ_1 et Δ_3 sont perpendiculaires à la droite Δp , donc on a : $\Delta_1 // \Delta_3$.

conclusion $\boxed{\text{Les trois droites } \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \text{ sont donc parallèles , en étant toutes trois perpendiculaires à } \Delta p .}$

2°) b) On a établi que tout point P de $\mathcal{C} - \{A, B, C\}$ est foyer d'une parabole $\mathcal{P}$ tangente aux droites (AB) , (BC) , (CA) , la tangente au sommet de $\mathcal{P}$ étant la droite de Simson Δp de P relativement au triangle ABC .
voir page 66

L'intérêt de la question est de faire remarquer que l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$ (qui est perpendiculaire à la tangente Δp au sommet de $\mathcal{P}$) a pour direction la direction commune de Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , isogonales respectives de (PA) , (PB) , (PC) par rapport aux côtés du triangle ABC , dans le cas où $P \in \mathcal{C} - \{A, B, C\}$.

Points isogonaux relativement à un triangle ABC .

1ère partie : isogonales de trois céviennes concourantes en un point n'appartenant pas au cercle circonscrit .

On suppose : $P \notin \mathcal{C}$. (Les notations sont celles de la page 136 .)

- Les points P_1, P_2, P_3 sont alors non alignés . Le triangle $P_1P_2P_3$ est dit triangle podaire du point P relativement au triangle ABC .
- On sait en outre que les droites Δ_1, et Δ_2 sont non parallèles (voir page 136) .
- Soit Q le point commun à Δ_1 et Δ_2 . On note Q_1, Q_2, Q_3 ses projetés orthogonaux respectifs sur (BC), (CA), (AB) .

1°) On suppose : $P \in (AB) \cup (BC) \cup (CA) - \{A, B, C\}$.
   a) Justifier que Q est un sommet du triangle ABC et que Q appartient à Δ_3 .
   b) Démontrer que P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 appartiennent à un même cercle Γ dont le centre est milieu de (P , Q).

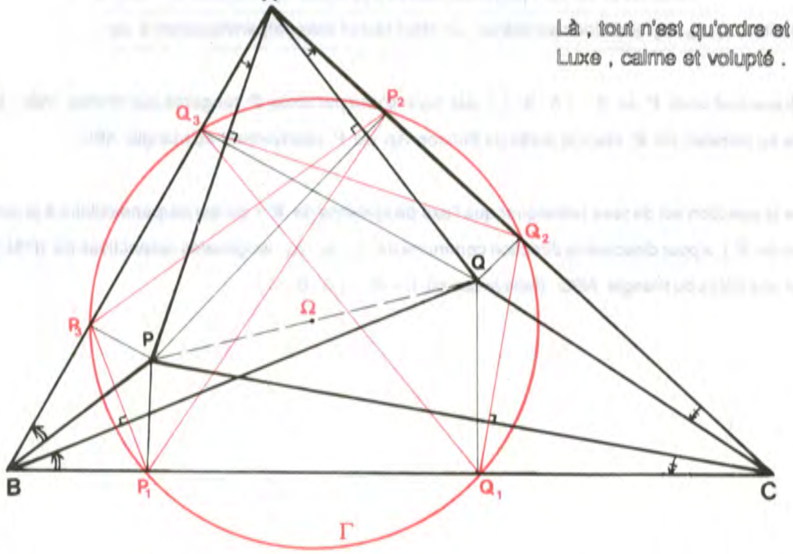
2°) On suppose : $P \notin (AB)$ et $P \notin (BC)$ et $P \notin (CA)$.
   a) Démontrer que Q n'appartient ni à (AB), ni à (BC), ni à (CA) .
   b) Justifier que Q n'appartient pas à $\mathcal{C}$. En déduire que Q_1, Q_2, Q_3 sont non alignés .
   Le triangle $Q_1Q_2Q_3$ est dit triangle podaire de Q relativement au triangle ABC .
   c) Démontrer que les triangles podaires des points P et Q, relativement au triangle ABC, sont inscrits dans un même cercle dont le centre Ω est le milieu de (P , Q) .
   d) En déduire que Q appartient aussi à Δ_3 .
   Que peut-on alors dire des directions des côtés des triangles $P_1P_2P_3$ et $Q_1Q_2Q_3$?

conclusion : A tout point P n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, on peut associer ainsi un point Q , point de concours des droites isogonales de (PA), (PB), (PC) par rapport aux côtés du triangle ABC .
Les points P et Q sont dits points isogonaux relativement au triangle ABC .

remarque : Les triangles podaires de deux points P et Q sont inscrits dans un même cercle Γ si , et seulement si P et Q sont isogonaux relativement au triangle ABC .
Cette propriété permet une construction du point Q , isogonal d'un point P donné , par l'intermédiaire du cercle Γ .

Là , tout n'est qu'ordre et beauté ,
Luxe , calme et volupté .

Baudelaire

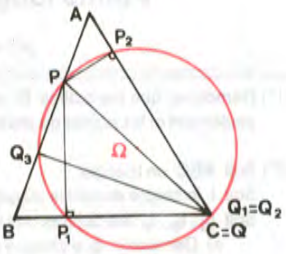


Notion utilisée : *caractérisations de l'isogonalité.*

1°) On suppose $P \in (AB) \cup (BC) \cup (CA) - \{A, B, C\}$.

Supposons, par exemple, $P \in (AB) - \{A, B\}$.

1°) a) On a alors : $\begin{cases} D_1 = (AB) \\ D_2 = (BA) \end{cases}$ donc $\begin{cases} \Delta_1 = (AC) \\ \Delta_2 = (BC) \end{cases}$ d'où $Q = C$



L'isogonale Δ_3 de (CP) par rapport à (CA) et (CB) contient C,

donc $Q \in \Delta_3$

$\boxed{\text{Les trois droites } \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \text{ sont donc concourantes en } Q.}$

1°) b) Si $P \in (AB) - \{A, B\}$, alors $Q = C$. Les points P et Q sont distincts.

Le cercle de diamètre [PQ] contient alors P_3, Q_1, Q_2, P_1, P_2 et Q_3.

2°) On suppose $P \notin (AB)$ et $P \notin (BC)$ et $P \notin (CA)$ et $P \notin \mathcal{C}$.

2°) a) * Si Q appartenait à $(AB) - \{A, B\}$, on aurait : $\Delta_1 = (AB)$ et $\Delta_2 = (BA)$.

donc on aurait : $D_1 = (AC)$ et $D_2 = (BC)$. Le point P serait en C.

* Si on avait $Q = A$ on aurait : $\Delta_2 = (BA)$ et $\Delta_3 = (CA)$

donc on aurait : $D_2 = (BC)$ et $D_3 = (CB)$; Le point P appartiendrait donc à (BC)

* Si on avait $Q = B$ on aurait : $\Delta_1 = (AB)$ et $\Delta_3 = (CB)$

donc on aurait : $D_1 = (AC)$ et $D_3 = (CA)$; Le point P appartiendrait donc à (AC)

Ces résultats sont en contradiction avec l'hypothèse. Donc $Q \notin (AB)$.

On démontre de même que : $Q \notin (BC)$ et $Q \notin (CA)$.

2°) b) On sait déja : $Q \neq A$ et $Q \neq B$ et $Q \neq C$.

voir page 136

* Si on avait $Q \in \mathcal{C} - \{A, B, C\}$, les isogonales de (QA), (QB), (QC) seraient trois droites parallèles contenant respectivement A, B, C. Ces isogonales, qui sont D_1, D_2, D_3, seraient donc parallèles distinctes

* ce qui contredit l'hypothèse puisque D_1, D_2, D_3 sont concourantes en P,

voir page 42 donc : $Q \notin \mathcal{C}$, et ses projetés orthogonaux Q_1, Q_2, Q_3 sur les côtés du triangle ABC sont non alignés.

2°) c) Soit Ω le milieu de (P, Q).

voir page 134

* Les droites (AP) et (AQ) sont isogonales par rapport à (AB) et (AC) donc :

les points P_3, Q_3, P_2, Q_2 appartiennent à un même cercle Γ_1 de centre Ω (de rayon ΩP_3).

* Les droites (BP) et (BQ) sont isogonales par rapport à (BC) et (BA) donc :

les points P_3, Q_3, P_1, Q_1 appartiennent à un même cercle Γ_2 de centre Ω (de rayon ΩP_3).

On a alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Notons Γ ce cercle de centre Ω. Γ contient donc les points $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$.

2°) d) Les points P et Q sont deux points distincts de $\mathcal{C}$.

Les projetés P_1, Q_1 et P_2, Q_2 de P et Q respectivement sur (CB) et (CA) appartiennent à un même cercle Γ de centre Ω, Ω milieu de (P, Q).

voir page 134

On en déduit que (CQ) est l'isogonale de (CP) par rapport à (CB) et (CA), d'où : $\Delta_3 = (CQ)$.

conclusion $\boxed{\text{Les trois droites } \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \text{ sont donc concourantes en } Q.}$

voir page 132 En utilisant la caractérisation 1 de l'isogonalité, on a alors : $\begin{cases} (P_2P_3) \perp (AQ) \\ (P_3P_1) \perp (BQ) \\ (P_1P_2) \perp (CQ) \end{cases}$ et $\begin{cases} (Q_2Q_3) \perp (AP). \\ (Q_3Q_1) \perp (BP) \\ (Q_1Q_2) \perp (CP) \end{cases}$

Points isogonaux relativement à un triangle ABC .

2ème partie : points isogonaux remarquables .

1°) Démontrer que les droites D et Δ sont isogonales par rapport à deux droites d et δ sécantes en A si , et seulement si les paires de droites { D , Δ } et { d , δ } ont mêmes bissectrices .

2°) Soit ABC un triangle .
Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .
Soit I_a , I_b , I_c les centres des trois cercles exinscrits du triangle ABC .

a) Démontrer que chaque point de l'ensemble { I , I_a , I_b , I_c } est son propre isogonal relativement au triangle ABC et que ces points sont les seuls qui possèdent cette propriété

b) Le triangle ABC est supposé non rectangle .
Démontrer que l'orthocentre H du triangle ABC et le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC sont deux points isogonaux relativement au triangle ABC .

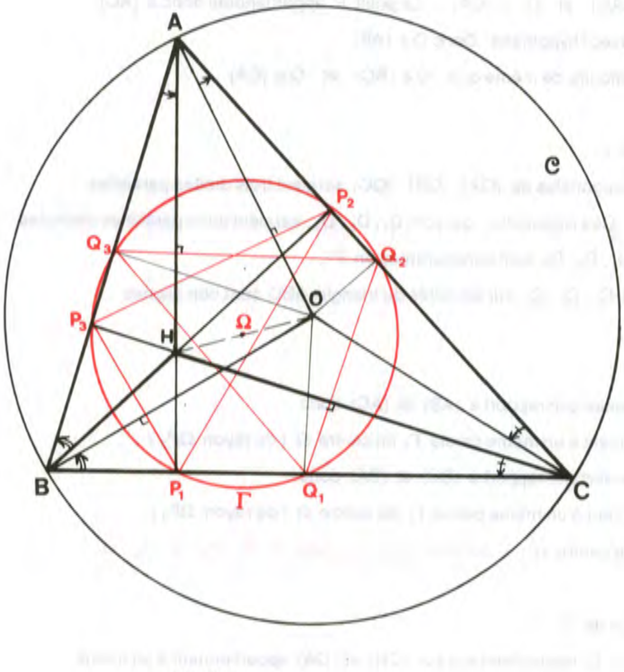


figure 2

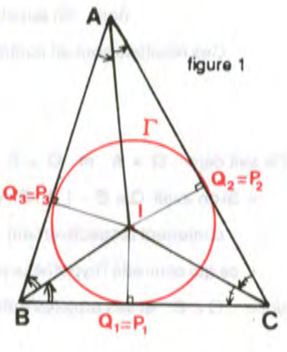


figure 1

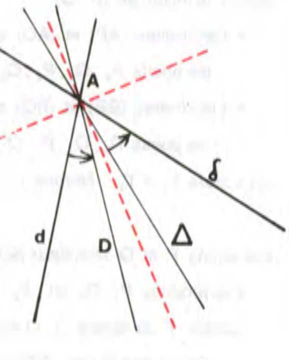


figure 3

<u>Notions utilisées</u> :
* *angles de droites*
* *droites isogonales*
* *théorème de Nagel (page 26)*
* *Cercle d'Euler (page 12)*

1°) voir figure 3 — Soit b une bissectrice quelconque de la paire { d , δ } . b vérifie : $\overline{(d,b)} \equiv \overline{(b,\delta)}$ (π) (1)

Par ailleurs , [$\overline{(d,D)} \equiv \overline{(\Delta,\delta)}$ (π)] ⇔ [$\overline{(d,b)} + \overline{(b,D)} \equiv \overline{(\Delta,b)} + \overline{(b,\delta)}$ (π)]

En utilisant la relation (1) , on déduit : [$\overline{(d,D)} \equiv \overline{(\Delta,\delta)}$ (π) ⇔ $\overline{(b,D)} \equiv \overline{(\Delta,b)}$ (π)]

> Les droites D et Δ sont donc isogonales par rapport à d et δ si , et seulement si b est aussi bissectrice de la paire { D , Δ }

<u>remarque</u> — Une droite D est isogonale d'elle-même par rapport à d et δ si , et seulement si : $\overline{(d,D)} \equiv \overline{(D,\delta)}$ (π) .
c'est à dire si D est une des bissectrices de la paire de droites { d , δ } .

2°) a) — Un point J (J ∉ $\mathcal{C}$) est à lui-même son propre isogonal si , et seulement si :

- la droite (AJ) est isogonale d'elle-même par rapport à (AB) et (AC) (2)
- la droite (BJ) est isogonale d'elle-même par rapport à (BA) et (BC) . (3)

voir page 138 — Les conditions (2) et (3) suffisent à assurer la condition (4) :
la droite (CJ) est isogonale d'elle-même par rapport à (CB) et (CA) (4)

Or , d'après la remarque du 1°) ci-dessus , les conditions (2) , (3) , (4) sont équivalentes respectivement à :

voir figure 1 —
(2) : la droite (AJ) est une bissectrice de { (AB) , (AC) } .
(3) : la droite (BJ) est une bissectrice de { (BC) , (BA) } .
(4) : la droite (CJ) est une bissectrice de { (CA) , (CB) } .

<u>conséquence</u> — Dans un triangle ABC , si deux bissectrices , issues respectivement de A et de B sont sécantes en un point J , alors la droite (CJ) est une bissectrice issue de C .

> Il existe donc quatre points , et quatre seulement , tels que chacun soit confondu avec son isogonal :
> ce sont les points I , I_a , I_b , I_c .

2°) b) — Les paires { (AB) , (AC) } et { (AH) , (AO) } ont mêmes bissectrices , donc :
voir page 26
la droite (AO) est l'isogonale de la hauteur (AH) par rapport à (AB) et (AC) .
De même , la droite (BO) est l'isogonale de la hauteur (BH) par rapport à (BC) et (BA) .

voir figure 2 —

> L'orthocentre H du triangle ABC et le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC sont donc deux points isogonaux relativement au triangle ABC .

<u>remarques</u> — Le triangle podaire de O est le <u>triangle " médian "</u> du triangle ABC : ses sommets sont les milieux de (A , B) , (B , C) , (C , A).

Le triangle podaire de H est le <u>triangle orthique</u> $P_1P_2P_3$ du triangle ABC .
On retrouve une propriété du triangle orthique : $(P_2P_3) \perp (OA)$; $(P_3P_1) \perp (OB)$; $(P_1P_2) \perp (OC)$.

Le cercle Γ contenant les projetés P_1 , P_2 , P_3 , Q_1 , Q_2 , Q_3 est alors <u>le cercle d'Euler</u> du triangle ABC .
Le centre du cercle Γ est ......le milieu de (O , H) .

Points isogonaux relativement à un triangle ABC

$3^{ème}$ partie : positions relatives de deux points isogonaux .

> Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$.
> Soit P un point n'appartenant ni à $\mathcal{C}$, ni à (AB) , ni à (BC) , ni à (CA) .
> Soit Q l'isogonal de P relativement au triangle ABC .
>
> Propriété : les deux points isogonaux P et Q sont :
> - ou bien tous deux intérieurs strictement au triangle .
> - ou bien tous deux extérieurs strictement au triangle .

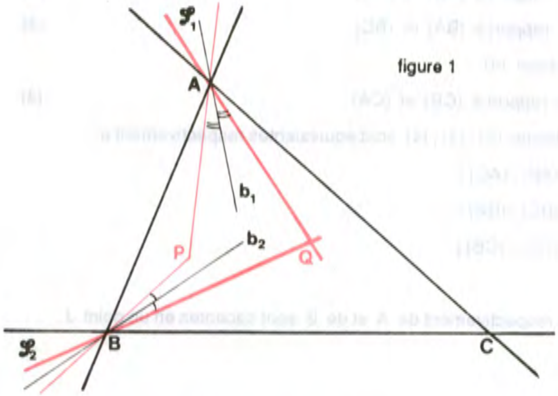


figure 1

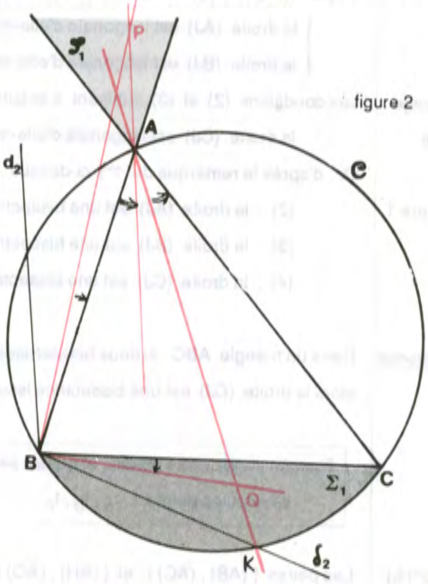


figure 2

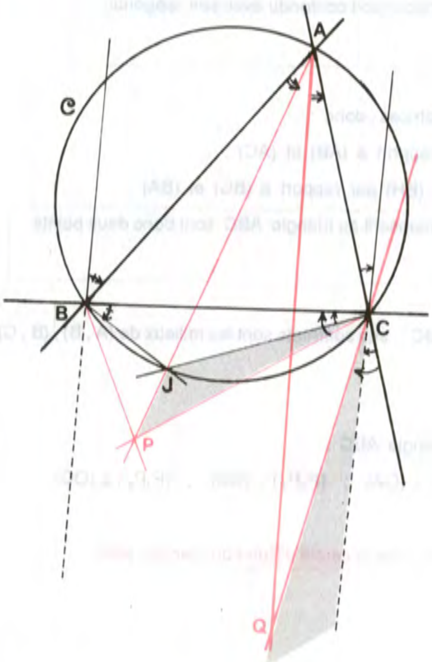


figure 3

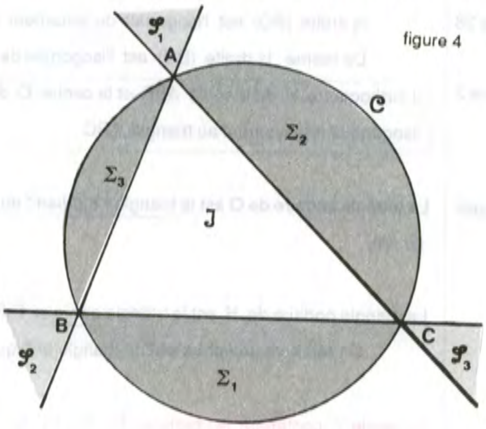


figure 4

$P \in J \Leftrightarrow Q \in J$

$P \in \mathcal{S}_i \Leftrightarrow Q \in \Sigma_i$

$P \in \delta_i \Leftrightarrow Q \in \delta_i$

Notion utilisée : secteur angulaire

rappel — On suppose : $P \notin \mathcal{C}$; $P \notin (AB)$; $P \notin (BC)$; $P \notin (CA)$.

Soit Q l'isogonal de P relativement au triangle ABC .

On sait alors que Q n'appartient ni à $\mathcal{C}$, ni à aucune des droites (AB), (BC), (CA) .

notations

- b_1 : bissectrice de $[\widehat{BAC}]$ b_2 : bissectrice de $[\widehat{ABC}]$
- $\mathcal{S}_1$: secteur angulaire symétrique par rapport à A du secteur $[\widehat{BAC}]$.
- $\mathcal{S}_2$: secteur angulaire symétrique par rapport à B du secteur $[\widehat{ABC}]$.
- $\mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$ est alors symétrique par rapport à b_1 . $\mathcal{S}_2 \cup [\widehat{ABC}]$ est alors symétrique par rapport à b_2 .

voir figure 1 — On sait que les droites (AP) et (AQ) sont symétriques par rapport à b_1, donc :

Si (AP) est incluse dans $\mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$, alors (AQ) est ausi incluse dans $\mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$.

Par conséquent : si $P \in \mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$, alors $Q \in \mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$.

1°) Supposons P intérieur au triangle BAC .

On a : $P \in \mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$ donc : $Q \in \mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$.

Mais on a de même : $P \in \mathcal{S}_2 \cup [\widehat{ABC}]$ donc : $Q \in \mathcal{S}_2 \cup [\widehat{ABC}]$

Le point Q appartient donc à l'intersection de $\mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$ et de $\mathcal{S}_2 \cup [\widehat{ABC}]$.

Le point Q est donc intérieur au triangle ABC . En outre le rappel ci-dessus permet de préciser :

Si le point P est intérieur strictement au triangle ABC , alors le point Q est intérieur strictement au triangle ABC .

2°) Supposons P extérieur strictement au triangle ABC .

1er cas — Si $P \in \mathcal{S}_1$,

- $P \in \mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$ donc $Q \in \mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$.

voir figure 2 — Mais Q n'est pas intérieur au triangle ABC , sinon son isogonal P serait intérieur au triangle ABC (voir 1°))

- Par B , menons la parallèle d_2 à (AP) . Soit δ_2 l'isogonale de d_2 par rapport aux droites (BA) et (BC) .

voir page 136 — Puisque d_2 est parallèle à (AP) , δ_2 et (AQ) sont sécantes en un point K appartenant à $\mathcal{C} - \{A, B, C\}$.

Plus précisément , K appartient à l'arc de $\mathcal{C}$, d'extrêmités B et C , ne contenant pas A

(car (AK) = (AQ) et $(AQ) \subset \mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$)

Rappelons : $(\overline{BC, BQ}) \equiv (\overline{BP, BA})$ (π) .

La droite (BQ) est donc incluse dans la réunion du secteur $[\widehat{CBK}]$ et du secteur symétrique de $[\widehat{CBK}]$ par rapport à B .

Finalement , $Q \in [\widehat{BAC}] \cap [\widehat{CBK}]$.

Remarquons que quand (AP) pivote autour de A , P restant dans le secteur $\mathcal{S}_1$, le point K décrit l'arc $[\widehat{BC}]$ ne contenant pas A .

Si P appartient à $\mathcal{S}_1$, son isogonal Q appartient au segment circulaire Σ_1 ayant pour frontières [BC] et l'arc $[\widehat{BC}]$ ne contenant pas A .

2ème cas — Si $P \in \Sigma_1$, alors son isogonal Q appartient à $\mathcal{S}_1$ (cas réciproque du précédent) .

3ème cas — Si $P \in [\widehat{BAC}]$ et P est extérieur strictement au cercle circonscrit $\mathcal{C}$ ($P \in \mathcal{E}_1$) ,

alors : $Q \in \mathcal{S}_1 \cup [\widehat{BAC}]$ et $Q \notin \mathcal{S}_1$ et $Q \notin \Sigma_1$ et Q est extérieur au triangle ABC .

voir figure 3 — Le point Q appartient donc lui aussi à $[\widehat{BAC}]$, en étant extérieur strictement à $\mathcal{C}$. $Q \in \mathcal{E}_1$.

Points isogonaux relativement à un triangle ABC .

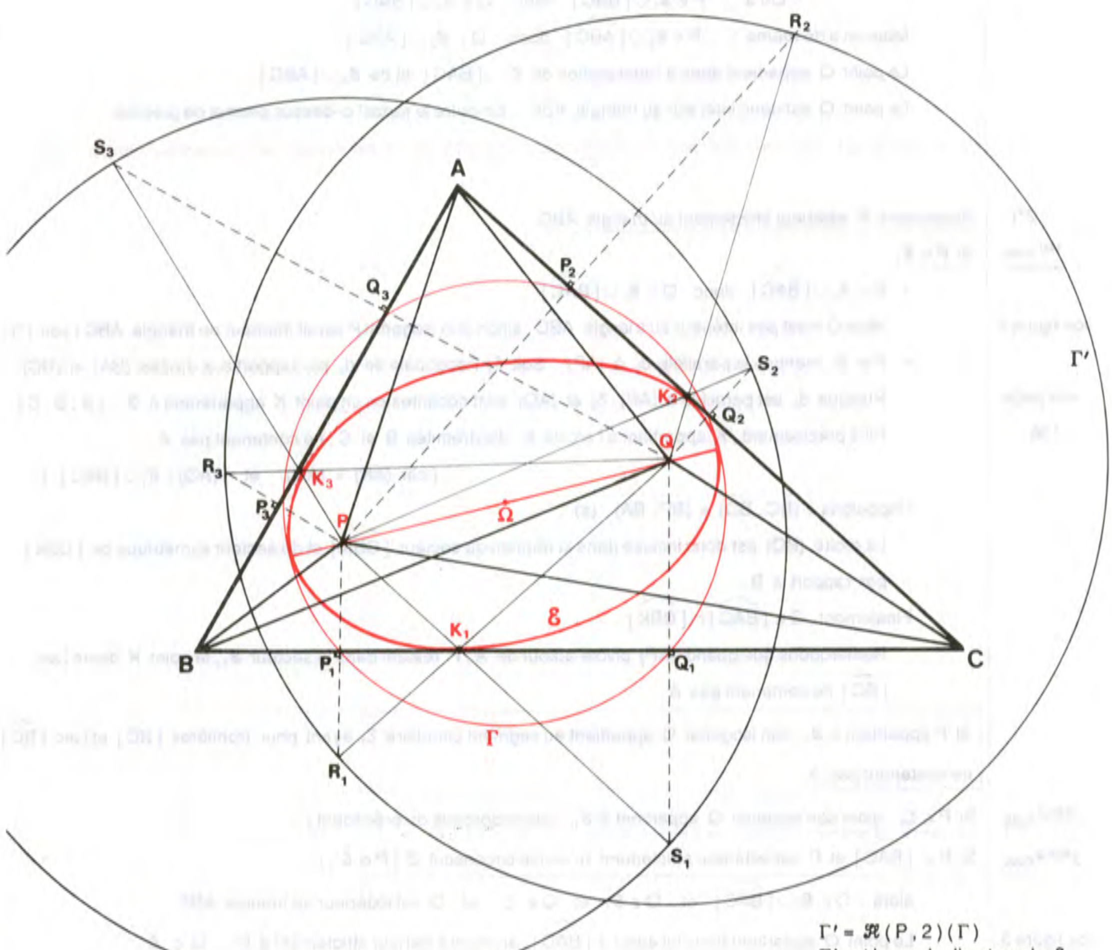
$4^{ème}$ partie : points isogonaux intérieurs à un triangle .

Soit P un point intérieur strictement au triangle ABC, P supposé distinct du centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC .

Soit Q l'isogonal du point P relativement au triangle ABC .

* Les deux points isogonaux P et Q , distincts , sont les foyers d'une ellipse $\mathcal{E}$ tangente aux trois côtés (AB) , (BC) , (CA) du triangle ABC .
* Le cercle principal de l'ellipse $\mathcal{E}$ est le cercle Γ contenant les projetés orthogonaux de P et Q sur les droites (AB) , (BC) , (CA) .

P intérieur strictement au triangle ABC
$P \neq I$.



$\Gamma' = \mathcal{H}(P, 2)(\Gamma)$
Γ' est le cercle directeur de $\mathcal{E}$ relatif au foyer Q de $\mathcal{E}$.

<u>Notions utilisées</u> :

* *axiomes de partage (voir page 34)*
* *homothéties*
* *tangentes à une ellipse (voir page 130)*

voir page 140 On suppose P intérieur strictement au triangle ABC et $P \neq I$.

* Observons que P et Q sont alors distincts car si on avait $P = Q$, alors on aurait $P = I$.

voir page 142

* On sait en outre que Q est lui aussi intérieur strictement au triangle ABC .

Soit $\mathcal{P}_A$ le demi-plan ouvert, de frontière (BC), contenant le point A .

Soit $\overline{\mathcal{P}_A}$ le demi-plan ouvert, de frontière (BC), ne contenant pas le point A .

a) Soit R_1, R_2, R_3 les symétriques respectifs de P par rapport à (BC), (CA), (AB) .

* Les points P et Q appartiennent au même demi-plan $\mathcal{P}_A$. $R_1 = S_{BC}(P)$ donc $R_1 \in \overline{\mathcal{P}_A}$.

voir page 34 La droite (BC) coupe donc le segment $[QR_1]$ (axiome de partage du plan).

On garantit en outre : $QR_1 > QP$. Posons $\{K_1\} = (BC) \cap [QR_1]$.

Puisque $K_1 \in [QR_1]$ on a : $QK_1 + K_1R_1 = QR_1$

Puisque $K_1 \in \operatorname{med}(P, R_1)$, on a : $K_1R_1 = K_1P$ d'où : $K_1Q + K_1P = QR_1$

De même , on justifie que :

* (CA) coupe le segment $[QR_2]$ en un point K_2 qui vérifie : $K_2Q + K_2P = QR_2$
* (AB) coupe le segment $[QR_3]$ en un point K_3 qui vérifie : $K_3Q + K_3P = QR_3$

* Par ailleurs , les points R_1, R_2, R_3 sont respectivement homothétiques de P_1, P_2, P_3 par $\mathcal{H}(P, 2)$.

Or P_1, P_2, P_3 appartiennnent au cercle Γ, de centre Ω ($\Omega = m(P, Q)$) , de rayon a (où $a = \Omega P_1$), et l'homothétique de Γ par $\mathcal{H}(P, 2)$ est le cercle Γ' de centre Q (puisque $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{P\Omega}$) , de rayon 2 a .

Les points R_1, R_2, R_3 appartiennent donc à Γ'. D'où $QR_1 = 2a$; $QR_2 = 2a$; $QR_3 = 2a$.

Finalement : $K_1Q + K_1P = 2a$; $K_2Q + K_2P = 2a$; $K_3Q + K_3P = 2a$.

voir page 130 Puisque $QP < 2a$, ces relations prouvent que :

$\boxed{\text{Les points } K_1, K_2, K_3 \text{ appartiennent à une même ellipse } \mathcal{E} \text{, de foyers P et Q, dont le grand axe a pour longueur } 2a}$.

Le cercle principal de $\mathcal{E}$ admet alors pour centre le milieu Ω de (P , Q) et pour rayon a .

On reconnait le cercle Γ .

b) * La droite (BC) est médiatrice de (P, R_1) donc bissectrice de $[\widehat{PK_1R_1}]$.

Les demi-droites $[K_1R_1)$ et $[K_1Q)$ sont opposées (car $K_1 \in [QR_1]$) .

voir page 130 La droite (BC) est donc bissectrice extérieure de $[\widehat{PK_1Q}]$, ce qui prouve que :

$\boxed{\text{la droite (BC) est tangente en } K_1 \text{ à l'ellipse } \mathcal{E}}$.

On démontre de la même façon que : $\boxed{\text{les droites (CA) et (AB) sont tangentes à } \mathcal{E} \text{ respectivement en } K_2 \text{ et } K_3}$.

<u>remarque</u> L'utilisation des symétriques respectifs S_1, S_2, S_3 de Q par rapport à (BC), (CA), (AB) conduirait au même résultat ; en effet :

Les segments $[QR_1]$ et $[S_1P]$ sont symétriques par rapport à (BC). Ils coupent donc (BC) en un même point, qui est K_1 .

De même , on démontre que : $(AC) \cap [QR_2] = \{K_2\}$; $(AB) \cap [QR_3] = \{K_3\}$.

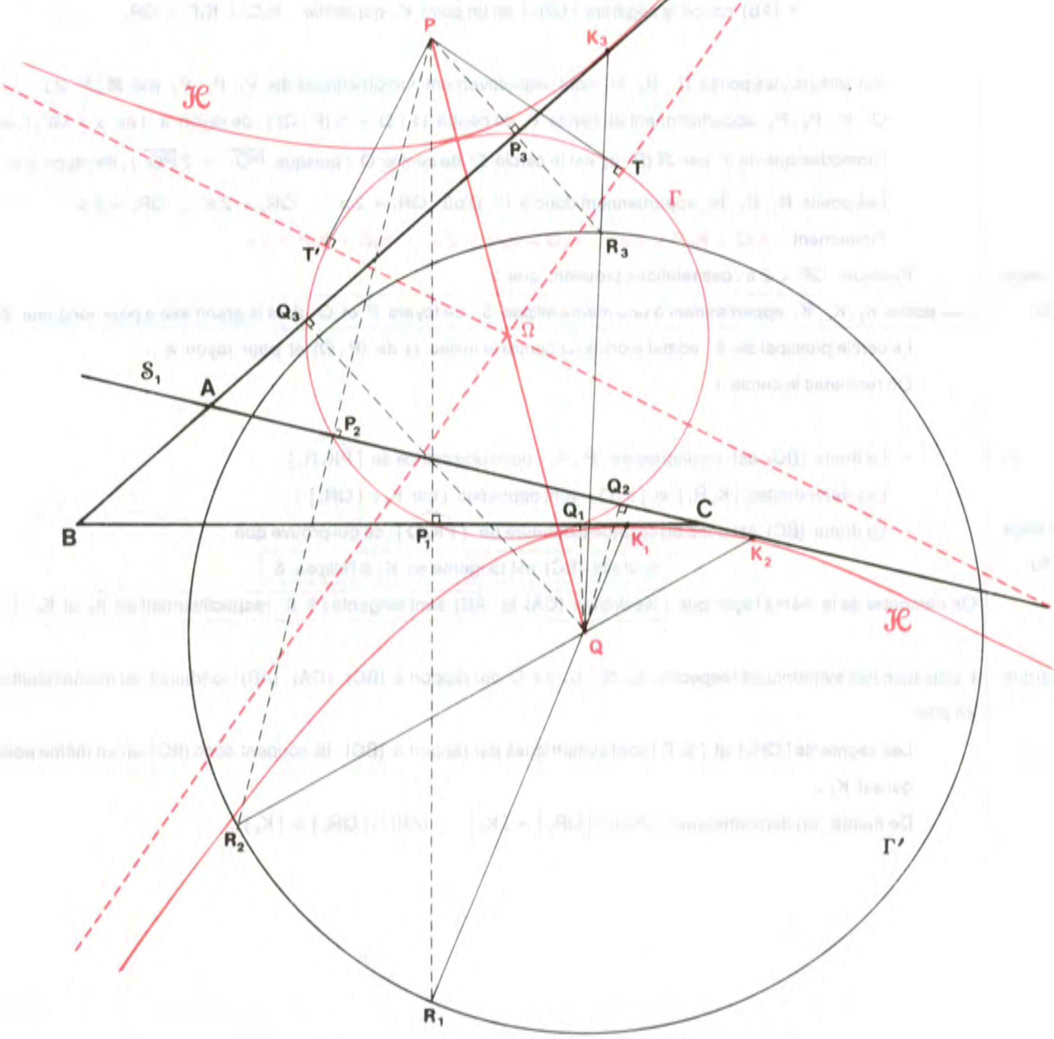
Points isogonaux relativement à un triangle ABC .

5ème partie : cas de deux points isogonaux P et Q extérieurs strictement au triangle ABC , tels que l'un d'eux soit intérieur strictement au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .

Les points P et Q sont alors les foyers d'une hyperbole $\mathcal{H}$ admettant les droites (AB) , (BC) , (CA) pour tangentes ou éventuellement asymptotes .

Le cercle principal de l'hyperbole $\mathcal{H}$ est le cercle Γ contenant les projetés orthogonaux de P et Q sur les droites (AB) , (BC) , (CA) .

figure 1



voir page142 On suppose par exemple : $Q \in \Sigma_1$. On a alors : $P \in \mathcal{S}_1$.

a) Soit R_1, R_2, R_3 les symétriques respectifs de P par rapport à (BC), (CA), (AB) .

Les points R_1, R_2, R_3 sont aussi les homothétiques respectifs de P_1, P_2, P_3 par $\mathcal{H}(P, 2)$.

Les points P_1, P_2, P_3 appartiennent au cercle Γ de centre Ω ($\Omega = m(P, Q)$) , de rayon a , où $a = \Omega P_1$.

Les points R_1, R_2, R_3 appartiennent alors au cercle Γ', homothétique de Γ par $\mathcal{H}(P, 2)$, dont le centre est Q et le rayon $2a$.

b) Justifions que : $PQ > 2a$.

Soit $\mathcal{P}_B$ le demi-plan ouvert de frontière (AC), contenant le point B .

* $Q \in \Sigma_1$ donc $Q \in \mathcal{P}_B$.
  $P \in \mathcal{S}_1$ donc $P \notin \mathcal{P}_B$. Alors $S_{AC}(P) \in \mathcal{P}_B$, c'est à dire $R_2 \in \mathcal{P}_B$.
* Les points Q et R_2 sont dans le même demi-plan $\mathcal{P}_B$ de frontière (AC), médiatrice de (P, R_2), donc $QR_2 < QP$. Puisque $QR_2 = 2a$, on a donc : $2a < QP$.

c) Puisque $\Omega = m(P, Q)$, on a : $\Omega P > a$ et $\Omega Q > a$. Les points P et Q sont extérieurs à Γ (et donc distincts) .

Soit alors T et T' les points de contact avec Γ des tangentes issues de P .

1er cas

voir figure 1

Si P_1, P_2, P_3 sont distincts de T et T' , justifions que (BC) coupe (QR_1) en un point K_1 , extérieur au segment $[QR_1]$.

* Si on avait $(BC) // (QR_1)$, sachant que $(PR_1) \perp (BC)$, on aurait : $\overrightarrow{PR_1} \perp \overrightarrow{QR_1}$.
  Mais on a : $\overrightarrow{PR_1} = 2\overrightarrow{PP_1}$ et $\overrightarrow{QR_1} = 2\overrightarrow{\Omega P_1}$, on aurait donc $\overrightarrow{PP_1} \perp \overrightarrow{\Omega P_1}$.
* La droite (PP_1) serait alors tangente en P_1 à Γ , ce qui contredit l'hypothèse : ($P_1 \neq T$ et $P_1 \neq T'$) .

Posons : $\{K_1\} = (BC) \cap (QR_1)$. On a alors : $K_1R_1 = K_1P$.

* Si on avait $K_1 \in [QR_1]$, on aurait : $K_1Q + K_1R_1 = QR_1$, donc on aurait : $K_1Q + K_1P = 2a$; (1)
  mais l'inégalité triangulaire , appliquée au triangle QK_1P s'écrit : $QP \leq K_1Q + K_1P$.
* De la relation (1) , on déduirait alors : $QP \leq 2a$, d'où l'absurdité .

Puisque $K_1 \notin [QR_1]$, K_1 vérifie : $|K_1Q - K_1R_1| = QR_1$, soit : $|K_1Q - K_1P| = 2a$; $2a < QP$.

voir rappel page 149

Le point K_1 appartient donc à l'hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers P et Q , dont le cercle principal a pour centre Ω , milieu de (P, Q) et pour rayon a , c'est à dire le cercle Γ .

La droite (BC) est médiatrice de (P, R_1) donc bissectrice de $[\widehat{PK_1R_1}]$.

Les demi-droites $[K_1R_1)$ et $[K_1Q)$ sont deux demi-droites égales (car $K_1 \notin [QR_1]$).

La droite (BC) est donc aussi bissectrice de $[\widehat{PK_1Q}]$, ce qui prouve :

la droite (BC) est tangente en K_1 à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

Si les points P_2 et P_3 sont distincts de T et T' , on démontre de même que :

$(CA) \cap (QR_2) = \{K_2\}$; $(BA) \cap (QR_3) = \{K_3\}$ et que :

les droites (CA) et (CB) sont alors tangentes à l'hyperbole $\mathcal{H}$, en respectivement K_2 et K_3 .

Points isogonaux relativement à un triangle ABC.

5ème partie (suite)

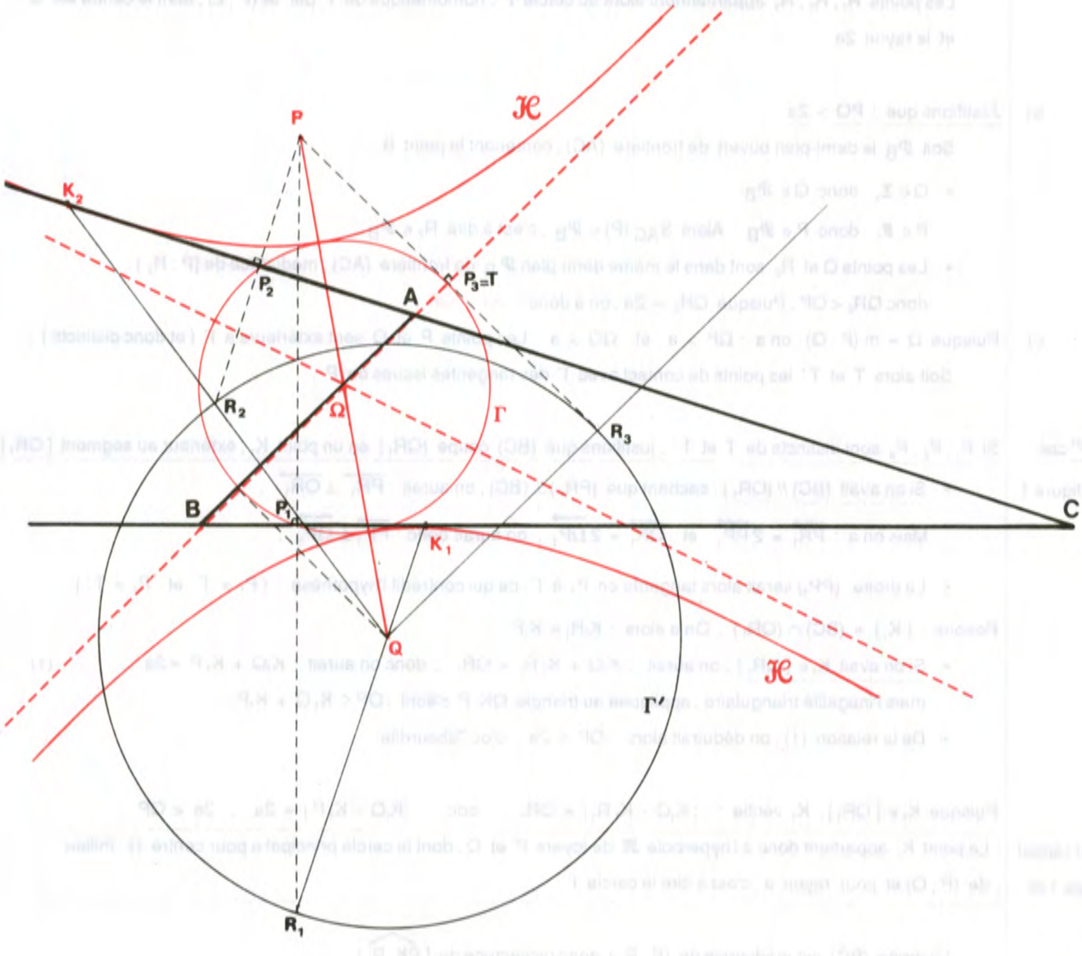


figure 2

2^{eme} cas Si l'un des points P_1, P_2, P_3 est en T ou en T'.

On suppose, par exemple : $P_3 = T$. Alors $\overrightarrow{PP_3} \perp \overrightarrow{\Omega P_3}$.

Puisque $\overrightarrow{QR_3} = 2\,\overrightarrow{\Omega P_3}$ on a $\overrightarrow{PP_3} \perp \overrightarrow{QR_3}$. Or $\overrightarrow{PP_3} \perp \overrightarrow{BA}$. Donc $(QR_3) // (BA)$.

or $Q \notin (AB)$, les droites (QR_3) et (AB) sont strictement parallèles.

Le point nommé K_3 dans le premier cas n'existe plus.

Les droites (ΩP_3) et (AB) sont toutes deux parallèles à la droite (QR_3) et contiennent toutes deux le point P_3.
Elles sont donc confondues.

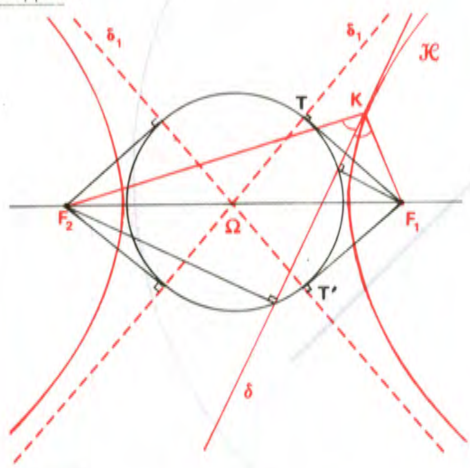
$(AB) = (\Omega P_3)$ donc $(AB) = (\Omega T)$ (puisque $P_3 = T$).

Le rappel ci-dessous permet alors de conclure :

la droite (AB) est une asymptote de l'hyperbole $\mathcal{H}$, de foyers P et Q dont le cercle principal est Γ.

Remarque : On a : $\Omega = m(P, Q)$. La projection orthogonale de (PQ) sur (AB) " conserve les milieux " donc :
$\Omega = m(P_3, Q_3)$ et (QQ_3) est alors tangente en Q_3 à Γ.

Rappels :



Toute hyperbole $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $|MF_2 - MF_1| = 2a$ où

$\begin{cases} 2a \text{ est un réel donné} \\ F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont deux points tels que : } F_1F_2 > 2a > 0 \end{cases}$

Les points F_1 et F_2 sont dits les foyers de l'hyperbole $\mathcal{H}$

Soit $\Omega = m(F_1, F_2)$

Le cercle Γ de centre Ω, de rayon a, est dit cercle principal de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

La tangente δ en un point K de l'hyperbole $\mathcal{H}$ est la bissectrice (intérieure) de $[\widehat{F_2KF_1}]$.

Le projeté orthogonal d'un quelconque foyer de $\mathcal{H}$ sur une tangente δ à $\mathcal{H}$ ou sur une asymptote à $\mathcal{H}$ appartient au cercle principal Γ de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

Les deux asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{H}$ sont les droites (ΩT) et $(\Omega T')$ où T et T' sont les points de contact des tangentes à Γ issues d'un foyer (F_1 par exemple).

Points isogonaux relativement à un triangle ABC .

6ème partie : cas de deux points isogonaux P et Q tous deux extérieurs strictement au cercle circonscrit au triangle ABC

On suppose P distinct des centres I_a, I_b, I_c des cercles exinscrits du triangle ABC .
Les deux points isogonaux P et Q , distincts , sont alors les foyers d'une ellipse $\mathcal{E}$, tangente aux trois côtés (AB) , (BC) , (CA) du triangle ABC .

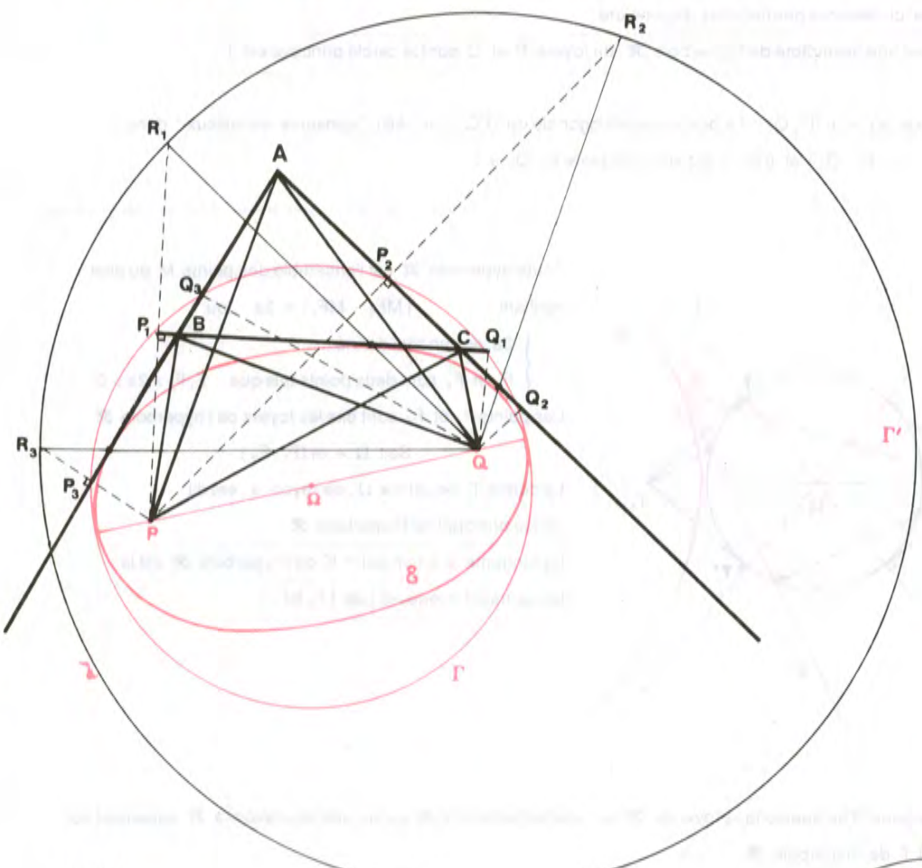
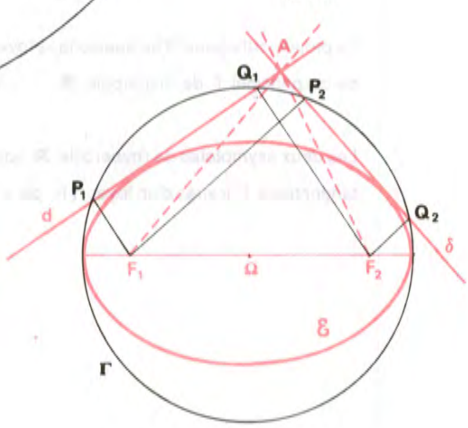


figure 1

figure 2



Notions utilisées :

- *propriétés tangentielles des coniques (voir rappels pages 130 et 149)*
- *droites isogonales (voir page 134)*

voir page 142

Les points P et Q appartiennent à la même partie $\mathcal{E}_i$ $i \in \{1, 2, 3\}$.

Supposons par exemple : $P \in \mathcal{E}_1$ et $P \neq I_a$.

Les points P et Q sont alors distincts car, si on avait $P = Q$, on aurait : $P = I_a$.

voir figure 1

Les points P et Q appartiennent alors au même demi-plan $\overline{\mathcal{P}_A}$, (de frontière (BC) , celui ne contenant pas A)

Le même raisonnement que celui de la page 145 conduit , en intervertissant $\mathcal{P}_A$ et $\overline{\mathcal{P}_A}$, au même résultat :

Les points P et Q sont foyers d'une ellipse $\mathcal{E}$ tangente aux trois côtés du triangle ABC et dont le cercle principal Γ contient les projetés orthogonaux des points P et Q sur les côtés du triangle ABC .

Conclusion générale :

> Si P et Q sont deux points isogonaux distincts relativement à un triangle ABC , et n'appartenant pas aux côtés de ce triangle , alors P et Q sont foyers d'une conique à centre (ellipse ou hyperbole) , tangente (ou éventuellement asymptote) aux trois côtés de ce triangle

Etude d'une réciproque

voir pages 130 et 149

Rappelons : le projeté orthogonal d'un quelconque foyer d'une conique à centre $\mathcal{C}$ (ellipse ou hyperbole) sur une tangente δ à $\mathcal{C}$ (ou éventuellement sur une asymptote à $\mathcal{C}$) appartient au cercle principal Γ de cette conique $\mathcal{C}$.

Réciproquement : Si les points P et Q sont foyers distincts d'une conique à centre $\mathcal{C}$, tangente (ou éventuellement asymptote) aux trois côtés (BC) , (CA) , (AB) d'un triangle ABC ,

alors le rappel ci-dessus assure que le cercle principal de cette conique $\mathcal{C}$ doit contenir les projetés orthogonaux $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ de P et Q respectivement sur (BC) , (CA) , (AB) .

Grâce à la caractérisation 2 de la page 134 ($p_1 \Leftrightarrow p_5$) , la cocyclicité de ces projetés assure que :

les points P et Q sont alors isogonaux par rapport au triangle ABC .

remarque

On retrouve ainsi le théorème de Poncelet :

voir figure 2

> Si deux tangentes d et δ (ou éventuellement asymptote(s)) à une conique à centre de foyers distincts F_1 et F_2 , sont sécantes en A , alors les droites (AF_1) et (AF_2) sont isogonales par rapport à d et δ .

Ce théorème de Poncelet est une conséquence directe de la caractérisation 2 :

la cocyclicité des projetés P_1, P_2, Q_1, Q_2 des foyers sur les droites d et δ assure en effet l'isogonalité de ces droites par rapport à (AF_1) et (AF_2) .

Symédianes d'un triangle .

1ère partie : définition et construction d'une symédiane .

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O . On pose A' = m (B , C)
On appelle symédiane s_1 issue de A , l'isogonale de la médiane (AA') par rapport aux droites (AB) et (AC) , c'est à dire que les paires de droites { s_1 , (AA') } et { (AB) , (AC) } ont mêmes bissectrices .

1°) Reconnaître la symédiane s_1 dans le cas où le triangle ABC est rectangle en A .

2°) <u>On suppose le triangle ABC non rectangle en A</u> .

Les tangentes en B et C au cercle $\mathcal{C}$ se coupent alors en un point P .

Soit P_1 le point , autre que A , où la bissectrice d_1 de [$\widehat{BAC}$] recoupe $\mathcal{C}$.

Soit Q_1 le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à P_1 .

a) Justifier que les points Q_1, P_1, P , A' sont alignés et que : $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1A'}} = \dfrac{\overline{Q_1P}}{\overline{Q_1A'}}$.

En déduire que (AP_1) est une bissectrice de la paire de droites { (AP) , (AA') } .

b) Conclure que : la symédiane s_1 issue de A , dans le triangle ABC , est la droite (AP) .

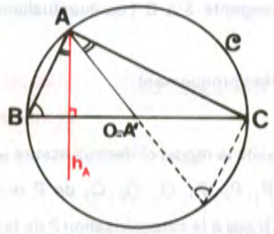


figure 1

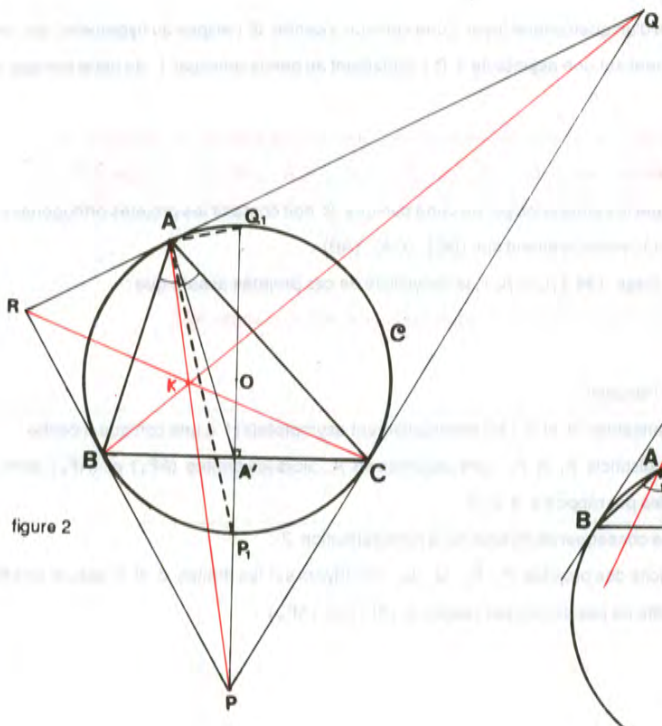


figure 2

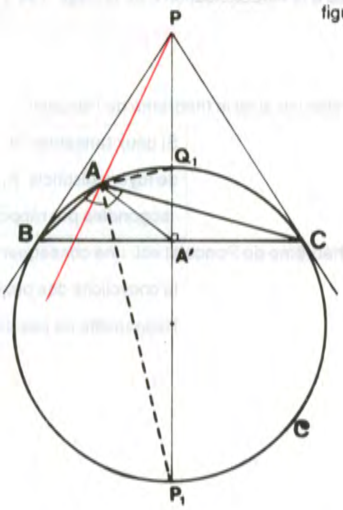


figure 3

<u>Notions utilisées</u> : * *isogonales*
* *barycentre*
* *bissectrices*

1°) voir figure 1 voir page 26

Supposons le triangle ABC rectangle en A . Alors $A' = O$.

On sait que l'isogonale de (AO) est la hauteur h_A issue de A dans le triangle ABC .

La symédiane s_1 issue de A est alors la hauteur h_A du triangle ABC .

2°)

Supposons le triangle ABC non rectangle en A . Alors $O \notin (BC)$.

2°) a) voir rappel page 83

Les tangentes en B et C sont donc non parallèles . Soit P leur point commun .

On a PB = PC , donc $P \in$ med (B , C) .

Rappelons que $P_1 \in$ med (B , C) et $Q_1 \in$ med (B , C) (voir page 80) .

Or med (B , C) = (OA') . Les points P , P_1 , Q_1 sont donc alignés sur (OA') .

Evaluons : $\overline{OP} \times \overline{OA'}$

voir figure 2

Le point A' est le projeté orthogonal de B sur (OP) . On a donc : $\overline{OP} \times \overline{OA'} = \overrightarrow{OP} . \overrightarrow{OB}$ (1)

Mais $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{BP}$, donc : $\overrightarrow{OP} . \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OB}$ (2)

Les relations (1) et (2) donnent : $\overline{OP} \times \overline{OA'} = \overline{OB}^2$. D'où : $\overline{OP} \times \overline{OA'} = \overline{OP_1}^2$ (3)

De la relation (3) , on déduit alors : $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OP_1}} = \dfrac{\overline{OP_1}}{\overline{OA'}}$

Posons k la valeur commune de ces rapports et remarquons que $k \neq -1$, $k \neq 0$, $k \neq 1$.

On a alors : $\dfrac{\overline{OP} - \overline{OP_1}}{\overline{OP_1} - \overline{OA'}} = k$, donc $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{A'P_1}} = k$, d'où : $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1A'}} = -k$ (4)

On a aussi : $\dfrac{\overline{OP} + \overline{OP_1}}{\overline{OP_1} + \overline{OA'}} = k$, or $\overline{OP_1} = -\overline{OQ_1}$, d'où : $\dfrac{\overline{Q_1P}}{\overline{Q_1A'}} = k$ (5)

Les relations (4) et (5) permettent d'écrire : $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1A'}} = -\dfrac{\overline{Q_1P}}{\overline{Q_1A'}}$.

2°) b)

Les points P_1 , P , A' sont alignés . Les points Q_1 , P , A' sont alignés . Les relations (4) et (5) permettent d'écrire :

$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P} + k\,\overrightarrow{P_1A'} = \overrightarrow{O} \\ \overrightarrow{Q_1P} - k\,\overrightarrow{Q_1A'} = \overrightarrow{O} \\ \text{et on a } k \neq 1 \text{ et } k \neq -1 \end{cases}$ On reconnait : $\begin{cases} P_1 = \text{Bar}\{(P , 1) , (A' , k)\} \\ Q_1 = \text{Bar}\{(P , 1) , (A' , -k)\} \end{cases}$

Prouvons que : $|k| = \dfrac{AP}{AA'}$; On sait : $\begin{cases} \overrightarrow{AP} + k\,\overrightarrow{AA'} = (1 + k)\,\overrightarrow{AP_1} \\ \overrightarrow{AP} - k\,\overrightarrow{AA'} = (1 - k)\,\overrightarrow{AQ_1} \end{cases}$

Calculons : $AP^2 - k^2 AA'^2 = (\overrightarrow{AP} + k\,\overrightarrow{AA'}) . (\overrightarrow{AP} - k\,\overrightarrow{AA'})$

$AP^2 - k^2 AA'^2 = (1 + k)(1 - k)\,\overrightarrow{AP_1} . \overrightarrow{AQ_1}$

Or les points P_1 et Q_1 sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$ et $A \in \mathcal{C}$. Donc $\overrightarrow{AP_1} \perp \overrightarrow{AQ_1}$

On trouve ainsi : $AP^2 - k^2 AA'^2 = 0$ d'où : $|k| = \dfrac{AP}{AA'}$.

voir figure 2 Si $k > 0$, on a $P_1 = \text{Bar}\{(P , AA') , (A' , AP)\}$, donc (AP_1) est bissectrice de $[\widehat{PAA'}]$.

voir figure 3 Si $k < 0$, on a $P_1 = \text{Bar}\{(P , AA') , (A' , -AP)\}$, donc (AP_1) est bissectrice extérieure de $[\widehat{PAA'}]$.

voir page 72 Dans les deux cas , (AP_1) est une bissectrice de la paire de droites { (AP) , (AA') } .

Or : (AP_1) est une bissectrice de la paire de droites { (AB) , (AC) }

On en déduit que (AP) est l'isogonale de (AA') par rapport aux droites (AB) et (AC) .

conclusion

La droite (AP) est la symédiane issue de A dans le triangle ABC

remarque

si le triangle ABC n'est pas rectangle , les tangentes T_A , T_B , T_C au cercle $\mathcal{C}$, respectivement en A , B , C sont deux à deux sécantes .

Posons : $T_B \cap T_C = \{P\}$; $T_C \cap T_A = \{Q\}$; $T_A \cap T_B = \{R\}$.

voir page 92 voir 2°) b)

Les droites (AP) , (BQ) , (CR) sont concourantes au point de Gergonne du triangle PQR , or ces droites sont les symédianes du triangle ABC .

conclusion

Les symédianes d'un triangle ABC non rectangle sont concourantes en un point K , appelé point de Lemoine du triangle ABC , qui est aussi le point de Gergonne du triangle tangentiel PQR .

Symédianes d'un triangle .

2eme partie : point de Lemoine . (1873)

Soit ABC un triangle . On pose : A' = m (B , C) ; B' = m (C , A) ; C' = m (A , B) ; a = BC ; b = CA ; c = AB .

1°) Justifier que les trois symédianes s_1 , s_2 , s_3 du triangle ABC sont concourantes en un point K , strictement intérieur au triangle ABC .
Le point K est appelé point symédian , ou point de Lemoine du triangle ABC .

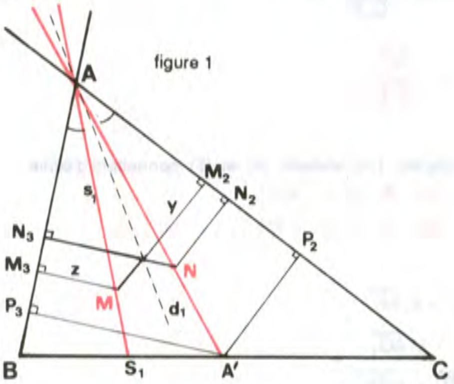
2°) Soit M un point quelconque de la symédiane s_1 , autre que A .
Soit y et z les distances respectives de M aux droites (AC) et (AB) .

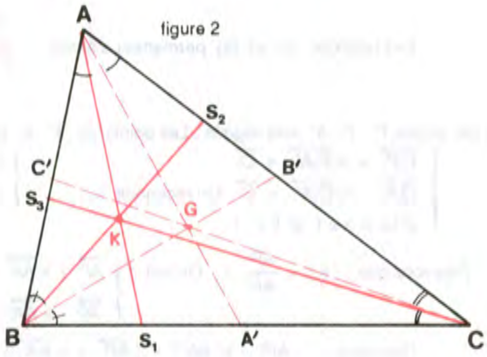
a) Démontrer : $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

b) On pose { S_1 } = $s_1 \cap$ [BC] . Démontrer que S_1 = Bar { (B , b^2) , (C , c^2) } .

c) Conclure que : Le point de concours K des symédianes du triangle ABC est le barycentre de { (A , a^2) , (B , b^2) , (C , c^2) } .

Le point de Lemoine K du triangle ABC vérifie donc : $\frac{d(K,(BC))}{a} = \frac{d(K,(CA))}{b} = \frac{d(K,(AB))}{c}$





Notions utilisées :
- *isogonales*
- *symétries orthogonales*
- *homothéties*
- *barycentre*

1°)	Les symédianes du triangle ABC sont les céviennes isogonales des médianes de ce triangle .
	Or ces médianes sont concourantes en G , isobarycentre de { A , B , C } .
voir page 142	Le point G est intérieur strictement au triangle ABC , donc :
	les droites s_1 , s_2 , s_3 sont donc concourantes et leur point de concours K est le point isogonal de G relativement
voir figure 2	au triangle ABC . Le point K est lui aussi strictement intérieur au triangle ABC .
2°) a)	Soit M un point quelconque de s_1 - { A } . Soit d_1 la bissectrice de [$\widehat{BAC}$] .
voir page 152	La symédiane s_1 et la médiane (AA') sont symétriques par rapport à d_1 .
	Le symétrique N de M par rapport à d_1 appartient donc à (AA') - { A }
voir figure 1	Soit M_3 et M_2 les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AB) et (AC) .
	Soit N_3 et N_2 les projetés orthogonaux respectifs de N sur (AB) et (AC) .
	Par la symétrie S_{d_1} : $\begin{cases} \text{(AB) a pour image (AC)} \\ \text{(MM}_3\text{) , perpendiculaire à (AB) a pour image la droite contenant N et perpendiculaire} \\ \text{à (AC) : } S_{d_1}((MM_3)) = (NN_2) . \end{cases}$

On a donc : $N_2 = S_{d_1}(M_3)$ et $N = S_{d_1}(M)$ d'où : $MM_3 = NN_2$. On établit de même que : $MM_2 = NN_3$

On a par conséquent $\dfrac{MM_2}{MM_3} = \dfrac{NN_3}{NN_2}$ (1)

Considérons l'homothétie $\mathcal{H}$, de centre A , qui transforme N en A' .

Son rapport est : $k = \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{AN}}$. Posons : $\begin{cases} P_2 = \mathcal{H}(N_2) \\ P_3 = \mathcal{H}(N_3) \end{cases}$

On a $\mathcal{H}$: $\begin{array}{l} A \longmapsto A \\ N \longmapsto A' \\ N_2 \longmapsto P_2 \\ N_3 \longmapsto P_3 \end{array}$ donc $\begin{cases} \overrightarrow{A'P_2} = k\,\overrightarrow{NN_2} \\ \overrightarrow{A'P_3} = k\,\overrightarrow{NN_3} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} A'P_2 = |k|.\,NN_2 \\ A'P_3 = |k|.\,NN_3 \end{cases}$

On a par conséquent : $\dfrac{NN_3}{NN_2} = \dfrac{A'P_3}{A'P_2}$ (2)

$(A'P_2) = \mathcal{H}((NN_2))$ donc $(A'P_2) // (NN_2)$, mais $(NN_2) \perp (AC)$ donc $(A'P_2) \perp (AC)$ (3)

La droite (AC) contient le centre A de $\mathcal{H}$ donc $\mathcal{H}((AC)) = (AC)$. Or . $N_2 \in (AC)$ donc $P_2 \in (AC)$ (4)

Des relations (3) et (4) , on déduit que : le point P_2 est le projeté orthogonal de A' sur la droite (AC) .

De même , on établit que : le point P_3 est le projeté orthogonal de A' sur la droite (AB) .

Evaluons les aires des triangles AA'B et AA'C . h_a désigne la distance de A à la droite (BC) .

$$\text{aire}(AA'C) = \frac{A'P_2 \times b}{2} \quad \text{et} \quad \text{aire}(AA'B) = \frac{A'P_3 \times c}{2}$$

Par ailleurs , $\text{aire}(AA'C) = h_a \times \dfrac{A'C}{2} = h_a \times \dfrac{a}{2}$ et $\text{aire}(AA'B) = h_a \times \dfrac{A'B}{2} = h_a \times \dfrac{a}{2}$ d'où : aire (AA'C) = aire (AA'B)

On a donc : $\dfrac{A'P_2 \times b}{2} = \dfrac{A'P_3 \times c}{2}$ et par conséquent : $\dfrac{A'P_3}{A'P_2} = \dfrac{b}{c}$ (5)

Les relations (1) , (2) , (5) assurent que : $\dfrac{MM_2}{MM_3} = \dfrac{NN_3}{NN_2} = \dfrac{A'P_3}{A'P_2} = \dfrac{b}{c}$

Or $MM_2 = y$ et $MM_3 = z$. On a donc $\dfrac{y}{z} = \dfrac{b}{c}$, d'où $\dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

2°) b) Posons : $y_1 = d(S_1, (AC))$ et $z_1 = d(S_1, (AB))$. On a alors : $\dfrac{y_1}{z_1} = \dfrac{b}{c}$ (6)

voir 2°) a)

$\text{aire}(ABS_1) = h_a \times \dfrac{S_1B}{2}$ et $\text{aire}(ABS_1) = \dfrac{c \times z_1}{2}$

$\text{aire}(ACS_1) = \dfrac{h_a \times S_1C}{2}$ et $\text{aire}(ACS_1) = \dfrac{b \times y_1}{2}$

d'où $\dfrac{S_1B}{S_1C} = \dfrac{c}{b} \times \dfrac{z_1}{y_1}$ (7)

Des relations (6) et (7) , on déduit : $\dfrac{S_1B}{S_1C} = \dfrac{c^2}{b^2}$

Le point K est strictement intérieur au triangle ABC , donc $S_1 \in \,]BC[$.

Par conséquent : $\dfrac{\overline{S_1B}}{\overline{S_1C}} = -\dfrac{S_1B}{S_1C}$; c'est à dire $\dfrac{\overline{S_1B}}{\overline{S_1C}} = -\dfrac{c^2}{b^2}$

Les points S_1 , B , C sont alignés . La relation précédente s'écrit donc

$b^2\,\overrightarrow{S_1B} + c^2\,\overrightarrow{S_1C} = \overrightarrow{O}$, c'est à dire : $S_1 = \text{Bar}\{(B, b^2), (C, c^2)\}$.

2°) c) Soit g le barycentre de $\{(A, a^2), (B, b^2), (C, c^2)\}$.

Le théorème d'associativité barycentrique assure que $g = \text{Bar}\{(A, a^2), (S_1, b^2 + c^2)\}$ donc $g \in (AS_1)$.

le point g appartient à la symédiane s_1

voir figure 2 De même , on démontre que le point g appartient aux symédianes s_2 et s_3 .

Le point K de concours des trois symédianes est donc le barycentre du système $\{(A, a^2), (B, b^2)(C, c^2)\}$.

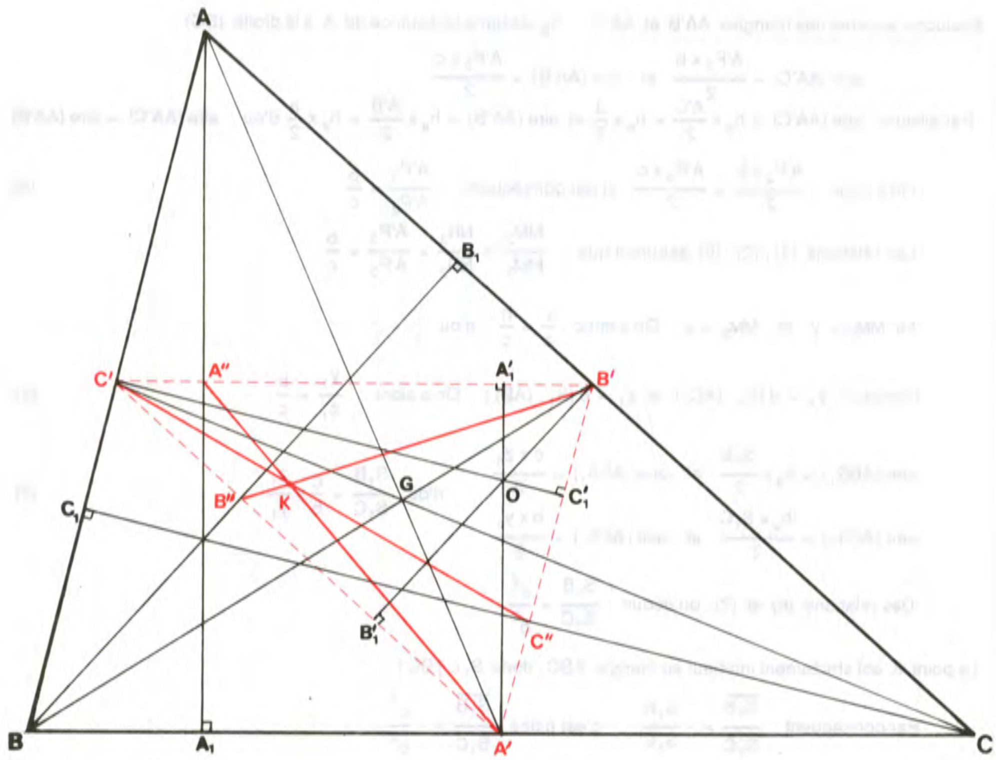
Symédianes d'un triangle .

3^{eme} partie : une construction du point de Lemoine .

Soit un triangle ABC . On pose : A' = m (B , C) ; B' = m (C , A) ; C' = m (A , B) .
Soit A_1 , B_1 , C_1 les projetés orthogonaux respectifs de A , B , C sur (BC) , (CA) , (AB) .
Soit G l'isobarycentre de { A , B , C } . On pose : A" = m (A , A_1) ; B" = m (B , B_1) ; C" = m (C , C_1) .

1°) Démontrer que le point de Lemoine K du triangle ABC est point de concours des trois droites (A'A") , (B'B") , (C'C") .

2°) Démontrer que le point de Lemoine K du triangle ABC est le point réciproque du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC , par rapport au triangle A'B'C' médian du triangle ABC .



<u>*Notions utilisées*</u> :
- *pieds des hauteurs d'un triangle*
- *barycentre*
- *céviennes isotomiques*

1°) voir page 108 Prouvons que $\overrightarrow{KA''}$ et $\overrightarrow{KA'}$ sont colinéaires

Rappelons que : $A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, b\cos\widehat{C}), (C, c\cos\widehat{B})\}$.

On a donc aussi : $A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, 2ab\cos C), (C, 2ac\cos B)\}$.

Dans le triangle ABC , on a : $2ab\cos\widehat{C} = a^2 + b^2 - c^2$ et $2ac\cos\widehat{B} = a^2 + c^2 - b^2$.

Par conséquent : $A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, a^2 + b^2 - c^2), (C, a^2 + c^2 - b^2)\}$.

On a donc : $\overrightarrow{KA_1} = \dfrac{1}{2a^2}[(a^2 + b^2 - c^2)\overrightarrow{KB} + (a^2 + c^2 - b^2)\overrightarrow{KC}]$ (1)

voir page 154 Par ailleurs , $K = \mathrm{Bar}\{(A, a^2), (B, b^2), (C, c^2)\}$ donc $a^2\overrightarrow{KA} + b^2\overrightarrow{KB} + c^2\overrightarrow{KC} = \vec{O}$

On a donc : $\overrightarrow{KA} = -\dfrac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{KB} - \dfrac{c^2}{a^2}.\overrightarrow{KC}$ (2)

Additionnons membre à membre les égalités (1) et (2) . On trouve :

$$\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2a^2}.\overrightarrow{KB} + \frac{a^2 - c^2 - b^2}{2a^2}.\overrightarrow{KC} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2a^2}.(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC})$$

Or $\begin{cases} A'' = m(A_1, A) , \text{ donc } \overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{KA''} \\ A' = m(B, C) , \text{ donc } \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{KA'} \end{cases}$

On trouve donc finalement : $\boxed{\overrightarrow{KA''} = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2a^2}.\overrightarrow{KA'}}$ (F)

Les vecteurs $\overrightarrow{KA''}$ et $\overrightarrow{KA'}$ sont colinéaires , et donc : $K \in (A'A'')$.

De même , on démontre : $K \in (B'B'')$ et $K \in (C'C'')$.

> Les droites (A'A'') , (B'B'') , (C'C'') sont donc concourantes en le point symédian K du triangle ABC , d'où une construction simple du point K .

2°) Considérons l'homothétie $\mathcal{H}_1$ de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

$\mathcal{H}_1 : B \longmapsto C'$
$C \longmapsto B'$
$A_1 \longmapsto A''$

Or $A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, b\cos\widehat{C}), (C, c\cos\widehat{B})\}$ et $\mathcal{H}_1$ conserve le barycentre ,

donc $A'' = \mathrm{Bar}\{(C', b\cos\widehat{C}), (B', c\cos\widehat{B})\}$ (3)

voir page 12 Considérons l'homothétie $\mathcal{H}_2$ de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. Notons $A'_1 = \mathcal{H}_2(A_1)$

$\mathcal{H}_2 : A_1 \longmapsto A'_1$
$B \longmapsto B'$
$C \longmapsto C'$
$A \longmapsto A'$

donc $\begin{cases} \mathcal{H}_2((BC)) = (B'C') \\ \mathcal{H}_2((AA_1)) = (A'A'_1) \end{cases}$ (α)

Or $A_1 = \mathrm{Bar}\{(B, b\cos\widehat{C}), (C, c\cos\widehat{B})\}$ et $\mathcal{H}_2$ conserve le barycentre ,

donc $A'_1 = \mathrm{Bar}\{(B', b\cos\widehat{C}), (C', c\cos\widehat{B})\}$ (4)

voir 3°) page 90 Les relations (3) et (4) assurent que $(A'A'_1)$ et $(A'A'')$ sont céviennes isotomiques dans le triangle A'B'C' .

On a $(AA_1) \perp (BC)$ donc $(A'A'_1) \perp (B'C')$ (voir (α) ci-dessus)

La droite $(A'A'_1)$ est alors perpendiculaire à (BC) (puisque (BC) // (B'C')) , en le milieu A' de (B , C) .

Donc: $(A'A'_1) = \mathrm{med}(B, C)$

On a prouvé que :

dans le triangle A'B'C' , la médiatrice de (B , C) est la cévienne isotomique de (A'A'') .

De même , on démontre que , relativement à ce triangle A'B'C' :

la médiatrice de (C , A) est la cévienne isotomique de (B'B'') ,
la médiatrice de (A , B) est la cévienne isotomique de (C'C'') .

Les médiatrices de (B , C) , (C , A) , (A , B) sont concourantes en O .
Les droites (A'A'') , (B'B'') , (C'C'') sont concourantes en K .

voir page 88 $\boxed{\text{Les points O et K sont donc points réciproques l'un de l'autre , relativement au triangle A'B'C' .}}$

remarque Si le triangle ABC est rectangle (en A par exemple) , alors O = A' et $K \in]B'C'[$ (car K = A'') .

Symédianes d'un triangle

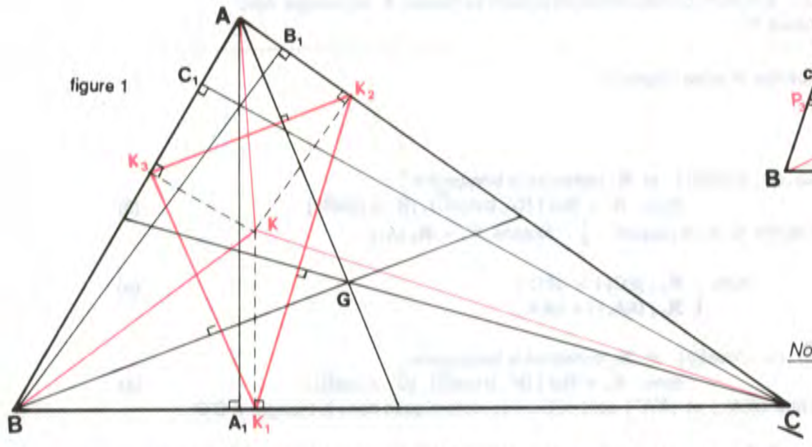
4ème partie : trois caractérisations du point de Lemoine

Soit K le point de Lemoine d'un triangle ABC et G l'isobarycentre de { A , B , C } .
Soit K_1 , K_2 , K_3 les projetés orthogonaux respectifs de K sur (BC) , (CA) , (AB) .
Soit A_1 , B_1 , C_1 les projetés orthogonaux respectifs de A , B , C sur (BC) , (CA) , (AB) .
On note a = BC ; b = AC ; c = AB . Soit S l'aire du triangle ABC

A) 1°) Démontrer que : a) $(K_2K_3) \perp (AG)$; $(K_3K_1) \perp (BG)$; $(K_1K_2) \perp (CG)$.
b) Le point K est isobarycentre des sommets K_1 , K_2 , K_3 de son triangle podaire .
2°) Réciproquement : Si un point P est isobarycentre des sommets P_1 , P_2 , P_3 de son triangle podaire relativement au triangle ABC , alors P est le point de Lemoine du triangle ABC .
conclure : le point K est le seul point du plan qui soit isobarycentre de son triangle podaire .

B) Soit P un point strictement intérieur au triangle ABC .
Soit P_1 , P_2 , P_3 les projetés orthogonaux respectifs de P sur (BC) , (CA) , (AB) .
On pose : $x = PP_1$, $y = PP_2$, $z = PP_3$.
Soit $\varphi(P) = PP_1^2 + PP_2^2 + PP_3^2$. On a donc $\varphi(P) = x^2 + y^2 + z^2$.
1°) Démontrer que le point P est point de Lemoine du triangle ABC si , et seulement si : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (I)
2°) Démontrer que : a) Pour tout point P strictement intérieur au triangle ABC , $\varphi(P) \geq \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$
b) $\varphi(P)$ est minimale si , et seulement si P est en K , point de Lemoine du triangle ABC ,
et que cette valeur minimale est $\varphi(K) = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

figure 1



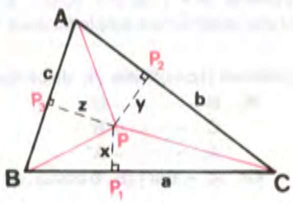


figure 2

Notions utilisées :
- *barycentre*
- *coordonnées barycentriques*
- *projection orthogonale sur une droite*

1°) a) Cette propriété résulte du fait que K et G sont points isogonaux relativement au triangle ABC (voir page 132) .

1°) b) On sait que $K = \text{Bar}\{(A, a^2), (B, b^2), (C, c^2)\}$ donc $a^2\overrightarrow{KA} + b^2\overrightarrow{KB} + c^2\overrightarrow{KC} = \vec{O}$ (1)

La projection orthogonale du plan sur la droite (BC) conserve le barycentre , donc :

voir figure 1 $K_1 = \text{Bar}\{(A_1, a^2), (B, b^2), (C, c^2)\}$

On a alors : $(a^2 + b^2 + c^2)\overrightarrow{KK_1} = a^2\overrightarrow{KA_1} + b^2\overrightarrow{KB} + c^2\overrightarrow{KC}$. , Or : $\overrightarrow{KA_1} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AA_1}$

En utilisant (1) , on trouve : $(a^2 + b^2 + c^2)\overrightarrow{KK_1} = a^2\overrightarrow{AA_1}$ (2)

De même , on établit que : $(a^2 + b^2 + c^2)\overrightarrow{KK_2} = b^2\overrightarrow{BB_1}$ (3)

$(a^2 + b^2 + c^2)\overrightarrow{KK_3} = c^2\overrightarrow{CC_1}$ (4)

voir page 123 Rappelons que : $a^2\overrightarrow{AA_1} + b^2\overrightarrow{BB_1} + c^2\overrightarrow{CC_1} = \vec{O}$ (5)

Additionnons membre à membre les égalités (2) , (3) , (4) , on trouve : $(a^2 + b^2 + c^2)(\overrightarrow{KK_1} + \overrightarrow{KK_2} + \overrightarrow{KK_3}) = \vec{O}$

c'est à dire , puisque $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, $\overrightarrow{KK_1} + \overrightarrow{KK_2} + \overrightarrow{KK_3} = \vec{O}$

Cette relation exprime que : $\boxed{\text{K est isobarycentre de } \{K_1, K_2, K_3\}}$

2°) Réciproquement, supposons P isobarycentre de $\{P_1, P_2, P_3\}$, alors : $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \vec{O}$ (6)

Soit (α, β, γ) un triplet de coordonnées barycentriques du point P dans le repère affine (A, B, C)

Alors : $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \vec{O}$ (7)

Le projeté orthogonal P_1 de P sur (BC) est alors barycentre de $\{(A_1, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$

On a alors : $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{PP_1} = \alpha\overrightarrow{PA_1} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}$. Ecrivons : $\overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AA_1}$

On trouve, compte tenu de (7) : $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{PP_1} = \alpha\overrightarrow{AA_1}$ (8)

De même, on établit que : $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{PP_2} = \beta\overrightarrow{BB_1}$ (9)

$(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{PP_3} = \gamma\overrightarrow{CC_1}$ (10)

Additionnons membre à membre les égalités (8), (9) et (10).

En tenant compte de (6), on trouve alors : $\alpha\overrightarrow{AA_1} + \beta\overrightarrow{BB_1} + \gamma\overrightarrow{CC_1} = \vec{O}$

Ecrivons : $\alpha c^2\overrightarrow{AA_1} + \beta c^2\overrightarrow{BB_1} + \gamma c^2\overrightarrow{CC_1} = \vec{O}$, et utilisons la relation (5) : $c^2\overrightarrow{CC_1} = -a^2\overrightarrow{AA_1} - b^2\overrightarrow{BB_1}$

On trouve alors : $(\alpha c^2 - \gamma a^2)\overrightarrow{AA_1} + (\beta c^2 - \gamma b^2)\overrightarrow{BB_1} = \vec{O}$ (11)

* Supposons $\overrightarrow{AA_1}$ et $\overrightarrow{BB_1}$ colinéaires. Alors on aurait : $(AA_1) // (BB_1)$.
  Mais, par construction, $(AA_1) \perp (BC)$ et $(BB_1) \perp (AC)$
  On aurait donc $(BC) // (AC)$,
* ce qui est impossible, donc $\overrightarrow{AA_1}$ et $\overrightarrow{BB_1}$ sont non colinéaires.

De la relation (11), on déduit : $\alpha c^2 - \gamma a^2 = 0$ et $\beta c^2 - \gamma b^2 = 0$ d'où : $\dfrac{\alpha}{a^2} = \dfrac{\beta}{b^2} = \dfrac{\gamma}{c^2}$

On a donc $P = \mathrm{Bar}\{(A, a^2), (B, b^2), (C, c^2)\}$. On reconnait que $\boxed{P \text{ est le point de Lemoine du triangle } ABC}$

3°) voir figure 2 voir page 112

La condition (I) est équivalente à l'existence d'un réel ρ (ρ non nul car $P \notin (AB) \cup (BC) \cup (CA)$), vérifiant :

$x = \rho a$; $y = \rho b$; $z = \rho c$.

Pour tout point P strictement intérieur au triangle ABC, on sait que :

$P = \mathrm{Bar}\{(A, \mathrm{aire}(PBC)), (B, \mathrm{aire}(PAC)), (C, \mathrm{aire}(PAB))\}$

c'est à dire : $P = \mathrm{Bar}\{(A, \frac{x.a}{2}), (B, \frac{y.b}{2}), (C, \frac{z.c}{2})\}$

voir page 154

$$\boxed{\text{La condition (1) équivaut à : } P = \mathrm{Bar}\{(A, \tfrac{\rho a^2}{2}), (B, \tfrac{\rho b^2}{2}), (C, \tfrac{\rho c^2}{2})\} = \mathrm{Bar}\{(A, a^2), (B, b^2), (C, c^2)\}}$$

qui est une caractérisation du point de Lemoine du triangle ABC .

4°) a) Le point P est un point strictement intérieur au triangle ABC, donc : $\mathrm{aire}(ABC) = \mathrm{aire}(PBC) + \mathrm{aire}(PCA) + \mathrm{aire}(PAB)$

d'où : $S = \dfrac{a.x}{2} + \dfrac{b.y}{2} + \dfrac{c.z}{2}$ soit $2S = ax + by + cz$

Rappelons par ailleurs l'identité de Lagrange :

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$

On a donc : $\varphi(P) = \dfrac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \dfrac{(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

ce qui démontre que, pour tout point P, strictement intérieur au triangle ABC : $\varphi(P) \geq \dfrac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

4°) b) Par ailleurs $\varphi(P) = \dfrac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ si, et seulement si $\begin{cases} ay - bx = 0 \\ bz - cy = 0 \\ cx - az = 0 \end{cases}$

$\varphi(P)$ est donc minimale si, et seulement si P vérifie la condition (I) : $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$

conclusion

$$\boxed{\varphi(P) \text{ est minimale si, et seulement si } P = K. \text{ Cette valeur minimale est alors : } \varphi(K) = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Symédianes d'un triangle

5ème partie : le théorème de Grèbe (1ère démonstration 1847) : une construction du point de Lemoine .

On oriente le plan d'un triangle ABC en sorte que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ admette pour mesure , en radians , le réel α appartenant à $]0, \pi[$. On note BC = a ; CA = b ; AB = c
Soit $\mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2})$ et $\mathcal{R}(B, \frac{\pi}{2})$ les rotations de centres respectifs A et B , d'angle mesurant $\frac{\pi}{2}$.
On construit extérieurement au triangle ABC les carrés BAMN et CASR .
Autrement dit : $S = \mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2})(C)$ et $N = \mathcal{R}(B, \frac{\pi}{2})(A)$.
Les droites (MN) et (SR) se coupent en un point nommé Q .
Démontrer que (AQ) est la symédiane issue de A dans le triangle ABC .
En déduire une construction du point de Lemoine K du triangle ABC .

La droite (AQ) est l'isogonale de la médiane (AA') par rapport à (AB) et (AC) .

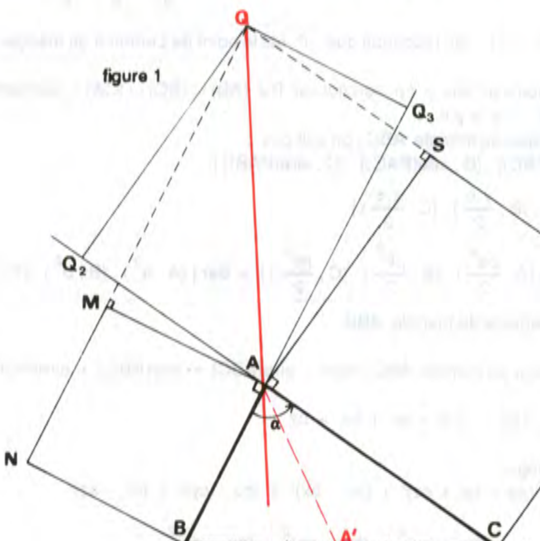


figure 1

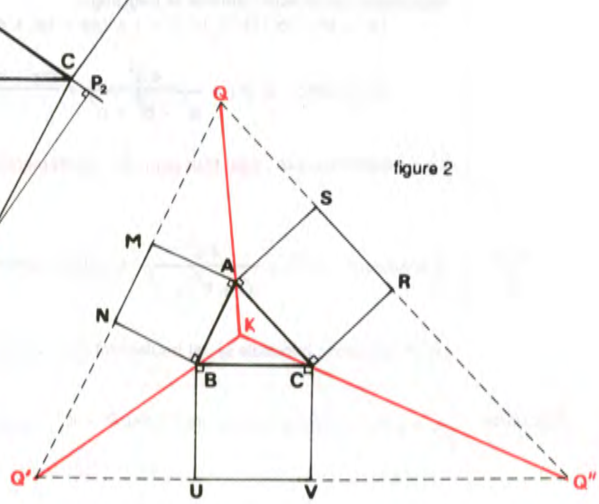


figure 2

K : point de Lemoine du triangle ABC

K est parfois appelé point de Grèbe du triangle ABC .

Notions utilisées : * *produit scalaire*
* *isogonalité* .

voir figure 1 — Soit A' le milieu de (B , C) . Soit P le point défini par : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP}$. On a : $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AA'}$.

La droite (AP) est alors la médiane issue de A dans le triangle ABC .

Soit P_2 , Q_2 , P_3 , Q_3 les projetés orthogonaux de P et Q respectivement sur (AC) et (AB) .

Orientons les droites (AB) et (AC) en sorte que $\overline{AB} = c$ et $\overline{AB} = b$. Démontrons que : $\overline{AP_2} \times \overline{AQ_2} = \overline{AP_3} \times \overline{AQ_3}$.

a) Calcul de $\overline{AP_2}$ et $\overline{AP_3}$.

$$\begin{cases} \text{D'une part : } \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC} = \overline{AP_2} \times \overline{AC} \\ \text{D'autre part : } \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AC} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC} = \overline{AP_2} \times b & (1) \\ \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC} = c.b.\cos\alpha + b^2 & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) donnent : $\overline{AP_2} = c\cos\alpha + b$ (3)

D'une part : $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} = \overline{AP_3} \times \overline{AB}$ d'où $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} = \overline{AP_3} \times b$ (4)

D'autre part : $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} = c^2 + b\,c\cos\alpha$ (5)

Les relations (4) et (5) donnent : $\overline{AP_3} = b\cos\alpha + c$ (6)

b) Calcul de $\overline{AQ_2}$ et $\overline{AQ_3}$

$Q_2 \in (AC)$ et $Q_3 \in (AB)$, donc il existe λ et μ réels tels que : $\overrightarrow{AQ_2} = \mu\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ_3} = \lambda\overrightarrow{AB}$

On aura alors : $\overline{AQ_2} = \mu b$ et $\overline{AQ_3} = \lambda c$.

Remarquons que $AMQQ_3$ et $ASQQ_2$ sont deux rectangles . Donc :

$$\begin{cases} \text{D'une part : } \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AQ_3} \\ \text{D'autre part : } \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AQ_2} \end{cases} \quad \text{c'est à dire} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AS} + \mu\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

On a alors : $\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AQ_3}).\overrightarrow{AB}$ soit , puisque $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AB} = \overline{AQ_3} \times \overline{AB}$ (7)

$\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ (8)

Or : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS})} \equiv \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS})}$ (2π) c'est à dire : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS})} \equiv \alpha + \frac{\pi}{2}$ (2π) . Or AS = b

Les relations (7) et (8) donnent : $\overline{AQ_3} \times c = b\,c\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \mu\, b\,c\cos\alpha$

Soit , en simplifiant par c , non nul , et en remplaçant μb par $\overline{AQ_2}$: $\overline{AQ_3} = -\,b\sin\alpha + \overline{AQ_2}\cos\alpha$ (9)

De même , on a : $\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AQ_2}).\overrightarrow{AC}$ soit , puisque $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AC} = \overline{AQ_2} \times \overline{AC}$

$\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Or : $\overline{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})} \equiv \overline{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})} + \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ (2π) c'est à dire : $\overline{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{2} + \alpha$ (2π) , et AM = c

d'où : $\overline{AQ_2} \times b = b\,c\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \lambda\, b\,c\cos\alpha$

On trouve , puisque $b \neq 0$, et que $\lambda c = \overline{AQ_3}$: $\overline{AQ_2} = -\,c\sin\alpha + \overline{AQ_3}\cos\alpha$ (10)

La résolution du système $\begin{cases} (9) & \overline{AQ_3} - \overline{AQ_2}\cos\alpha = -\,b\sin\alpha \\ (10) & -\overline{AQ_3}\cos\alpha + \overline{AQ_2} = -\,c\sin\alpha \end{cases}$ permet d'exprimer $\overline{AQ_2}$ et $\overline{AQ_3}$

On trouve ainsi : $\overline{AQ_2} = -\dfrac{b\cos\alpha + c}{\sin\alpha}$ et $\overline{AQ_3} = -\dfrac{c\cos\alpha + b}{\sin\alpha}$ (11)

c) Les relations (3) , (6) et (11) permettent d'écrire : $\overline{AP_2} \times \overline{AQ_2} = \overline{AP_3} \times \overline{AQ_3}$

Or : $\overline{AP_2} \times \overline{AQ_2} = \overrightarrow{AP_2}.\overrightarrow{AQ_2}$ car les points A , P_2 , Q_2 sont alignés .

$\overline{AP_3} \times \overline{AQ_3} = \overrightarrow{AP_3}.\overrightarrow{AQ_3}$ car les points A , P_3 , Q_3 sont alignés d'où : $\boxed{\overrightarrow{AP_2}.\overrightarrow{AQ_2} = \overrightarrow{AP_3}.\overrightarrow{AQ_3}}$

voir page 132 ce qui démontre que (AQ) est l'isogonale de la médiane (AP) par rapport à (AB) et (AC) ,

c'est à dire que $\boxed{\text{(AQ) est la symédiane issue de A dans le triangle ABC}}$

d) voir figure 2 La propriété démontrée donne une construction des symédianes du triangle ABC (et donc du point de Lemoine) à l'aide des trois carrés ABNM , ACRS , CBUV , construits extérieurement au triangle ABC .

Symédianes d'un triangle.

6^{eme} partie : le théorème de Grèbe (2^{eme} démonstration) .

Soit K le point de Lemoine d'un triangle ABC, dont l'aire est notée S .
Soit K_1, K_2, K_3 les projetés orthogonaux respectifs de K sur (BC), (CA), (AB) .
Soit A_1 le projeté orthogonal de A sur (BC) . Soit A' et A" les milieux respectifs de (B, C) et de (A, A_1) .
On note : a = BC ; b = CA ; c = AB .

1°) Déterminer les distances KK_1, KK_2, KK_3 .

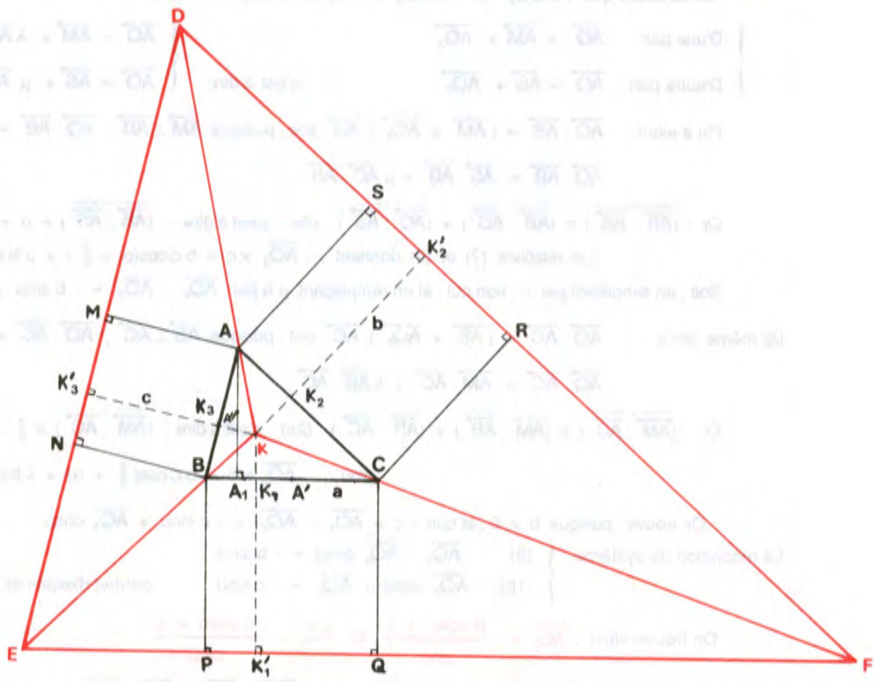
2°) Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre K, de rapport k, $k = 1 + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2S}$

a) Les images respectives de A, B, C, K_1, K_2, K_3 par $\mathcal{H}$ sont nommées D, E, F, K_1', K_2', K_3' .
Démontrer que : $K_1K_1' = a$; $K_2K_2' = b$; $K_3K_3' = c$.

b) Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (EF) .
Démontrer que le quadrilatère BCPQ est un carré .

c) En déduire une construction du point de Lemoine K du triangle ABC .

3°) On note : a' = EF ; b' = FD ; c' = DE .
Vérifier que K est aussi le point de Lemoine du triangle DEF .



Notions utilisées :
* barycentre
* homothéties

1°) voir relation F page 157 — La projection orthogonale du plan sur la droite (BC) conserve le barycentre .

On a : $K = \mathrm{Bar}\{(A'', 2a^2), (A', b^2 + c^2 - a^2)\}$ donc $K_1 = \mathrm{Bar}\{(A_1, 2a^2), (A', b^2 + c^2 - a^2)\}$

Par conséquent : $\overrightarrow{A'K} = \dfrac{2a^2}{b^2 + c^2 + a^2}\overrightarrow{A'A''}$ et $\overrightarrow{A'K_1} = \dfrac{2a^2}{b^2 + c^2 + a^2}\overrightarrow{A'A_1}$

Or $\overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{A'K_1} - \overrightarrow{A'K}$, donc $\overrightarrow{KK_1} = \dfrac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}\overrightarrow{A''A_1}$; alors : $KK_1 = \dfrac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}A''A_1$

Par ailleurs $S = \frac{1}{2}BC \times AA_1$ d'où : $S = a.\,A''A_1$.

On obtient donc : $KK_1 = \dfrac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2}$ (1)

On établit de même que : $KK_2 = \dfrac{2bS}{a^2 + b^2 + c^2}$ et $KK_3 = \dfrac{2cS}{a^2 + b^2 + c^2}$

remarque — On retrouve ainsi que : $\boxed{\dfrac{KK_1}{a} = \dfrac{KK_2}{b} = \dfrac{KK_3}{c} = \dfrac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}}$

2°) a) On a : $\mathcal{H}(K_1) = K_1'$ donc $\overrightarrow{KK_1'} = k.\overrightarrow{KK_1}$

or $\overrightarrow{K_1K_1'} = \overrightarrow{KK_1'} - \overrightarrow{KK_1}$, donc $\overrightarrow{K_1K_1'} = (k-1)\overrightarrow{KK_1}$, c'est à dire : $\overrightarrow{K_1K_1'} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2S}\overrightarrow{KK_1}$

On a alors : $K_1K_1' = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2S}KK_1$. Grâce à (1) , on trouve : $K_1K_1' = a$.

De même , on établit que : $K_2K_2' = b$ et $K_3K_3' = c$.

2°) b) On a : $\mathcal{H}(B) = E$ et $\mathcal{H}(C) = F$, donc $\mathcal{H}((BC)) = (EF)$ et $(EF) // (BC)$. Or $(EF) = (PQ)$, d'où : $(BC) // (PQ)$

(BP) et (CQ) sont deux droites perpendiculaires à (EF) . Le quadrilatère BCPQ est par conséquent un rectangle .

$\mathcal{H}(K_1) = K_1'$ donc $\overrightarrow{KK_1'} = k.\overrightarrow{KK_1}$ . . Or $k \neq 1$, donc $K_1' \neq K_1$. Par conséquent : $(KK_1) = (K_1K_1')$

$(KK_1) \perp (BC)$ donc $\mathcal{H}((KK_1)) \perp \mathcal{H}((BC))$, c'est à dire : $(K_1K_1') \perp (EF)$. On a donc : $(K_1K_1') \perp (EF)$

Les droites (BP) et (K_1K_1') sont toutes deux perpendiculaires à (EF) .

Le quadrilatère $BK_1K_1'P$ est donc un rectangle , d'où : $BP = K_1K_1' = a$.

Le rectangle BCQP est donc un carré

Remarquons que ce carré est extérieur au triangle ABC . En effet K , point de Lemoine du triangle ABC est strictement intérieur à ce triangle . Or ($k > 1$) et ($K_1 \in (BC)$) , donc K_1' appartient au demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas K

2°) c) Pour construire le point de Lemoine K d'un triangle ABC , une méthode consiste donc à :

1°) construire extérieurement au triangle ABC les trois carrés BCQP , ACRS , BAMN .
2°) tracer les droites (PQ) , (RS) , (MN) , déterminant ainsi D , E , F .
3°) Les droites (DA) , (EB) , (FC) sont alors concourantes en un point qui est centre de l'homothétie transformant A en D , B en E , C en F , c'est à dire le point de Lemoine K .

3°) voir page 154 — On a : $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{BC}$ et $k > 0$. Donc $EF = kBC$, c'est à dire $a' = ka$. De même : $b' = kb$ et $c' = kc$.

On sait que : $K = \mathrm{Bar}\{(A, a^2), (B, b^2), (C, c^2)\}$

l'homothétie $\mathcal{H}$ conserve les barycentres , donc : $\mathcal{H}(K) = \mathrm{Bar}\{(\mathcal{H}(A), a^2), (\mathcal{H}(B), b^2), (\mathcal{H}(C), c^2)\}$

Or $\mathcal{H}(K) = K$, donc : $K = \mathrm{Bar}\{(D, a^2), (E, b^2), (F, c^2)\}$

Mais $a'^2 = k^2a^2$; $b'^2 = k^2b^2$; $c'^2 = k^2c^2$, donc : $K = \mathrm{Bar}\{(D, a'^2), (E, b'^2), (F, c'^2)\}$ (2)

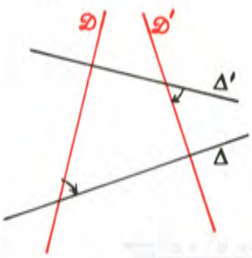
La relation (2) exprime que : **K est aussi point de Lemoine du triangle DEF**

remarque — Cette démonstration prouve que K est aussi point de Lemoine de tout triangle image du triangle ABC par une homothétie de centre K .

Droites antiparallèles et cocyclicité . Symédianes .

A) Droites antiparallèles

1°) Vocabulaire : Deux droites Δ et Δ' sont dites antiparallèles par rapport aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ si , et seulement si elles vérifient : $(\overline{\mathscr{D}, \Delta}) \equiv (\overline{\Delta', \mathscr{D}'})$ (π) (a)



La proposition (a) est équivalente à chacune des suivantes :

$(\overline{\mathscr{D}, \Delta'}) \equiv (\overline{\mathscr{D}', \Delta'})$ (π) (b)

$(\overline{\Delta, \mathscr{D}}) \equiv (\overline{\mathscr{D}', \Delta'})$ (π) (c)

$(\overline{\mathscr{D}', \Delta}) \equiv (\overline{\Delta', \mathscr{D}})$ (π) (d)

Ceci légitime le vocabulaire suivant . On dira indifféremment :

* Δ' est antiparallèle à Δ par rapport à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

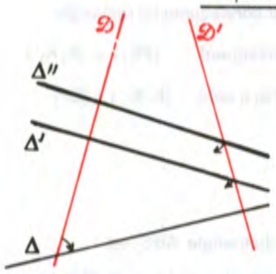
ou

* Δ est antiparallèle à Δ' par rapport à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

2°) Justifions les propriétés suivantes :

Propriété P_1 :

Supposons Δ' antiparallèle à Δ par rapport à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Pour qu'une autre droite Δ'' soit aussi antiparallèle à Δ par rapport à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, il faut et il suffit que Δ' et Δ'' soient parallèles .



On sait : $(\overline{\mathscr{D}, \Delta}) \equiv (\overline{\Delta', \mathscr{D}'})$ (π)

Soit une autre droite Δ'' .

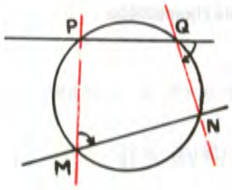
La propriété : $(\overline{\mathscr{D}, \Delta}) \equiv (\overline{\Delta'', \mathscr{D}'})$ (π)

est alors équivalente à : $(\overline{\Delta', \mathscr{D}'}) \equiv (\overline{\Delta'', \mathscr{D}'})$ (π)

c'est à dire à : $\Delta' // \Delta''$

Propriété P_2 :

Soit M , N , P , Q quatre points distincts tels que trois d'entre eux soient non alignés. Pour que M , N , P , Q soient cocycliques , il faut et il suffit que : les droites (MN) et (PQ) soient antiparallèles par rapport aux droites (MP) et (NQ)



Supposons par exemple les points M, N, P non alignés .

Les points M , N , P , Q sont alors cocycliques si , et seulement si :

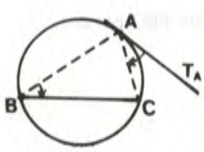
$(\overline{MN , MP}) \equiv (\overline{QN , QP})$ (π)

propriété qui est équivalente à :

les droites (MN) et (PQ) sont antiparallèles par rapport à (MP) et (NQ)

Propriété P_3 :

Soit T_A la tangente en A au cercle circonscrit $\mathscr{C}$ à un triangle ABC . Alors T_A est antiparallèle à (BC) par rapport aux droites (AB) et (AC)

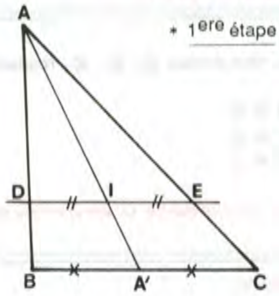


Ceci résulte de la propriété de la tangente en A à $\mathscr{C}$:

$(\overline{BA , BC}) \equiv (\overline{T_A , AC})$ (π)

B) Médianes et symédianes d'un triangle ABC .

Propriété P_4 : Soit D et E deux points appartenant respectivement à (AB) et (AC) , distincts de A .
Démontrer : la droite (DE) est parallèle à (BC) si , et seulement si le milieu de (D , E) appartient à la médiane issue de A dans le triangle ABC .



Soit A' le milieu de (B , C) . Soit I le milieu de (D , E) .

* 1ère étape : supposons (DE) // (BC) (voir figure 1)

le théorème de Thalès garantit que : $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, donc l'homothétie h de centre A qui transforme B en D transforme aussi C en E .

Toute homothétie conserve le milieu , donc :

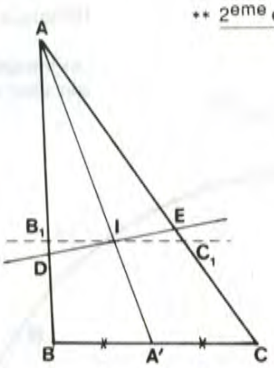
h transforme le milieu A' de (B , C) en le milieu I de (D , E) .

Le centre de l'homothétie h est A , et h (A') = I

Les points A , A' et I sont donc alignés , ce qui démontre que :

le point I appartient à la droite (AA') .

** 2ème étape : réciproquement , supposons : $I \in$ (AA') (voir figure 2) .



Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre A qui transforme A' en I .

Posons : $B_1 = \mathcal{H}(B)$ et $C_1 = \mathcal{H}(C)$. Alors $(B_1C_1) // (BC)$

Le milieu de (B_1 , C_1) est l'image par $\mathcal{H}$ du milieu A' de (B , C) ,

donc $m(B_1 , C_1) = \mathcal{H}(A')$, c'est à dire : $m(B_1 , C_1) = I$.

On a alors $m(B_1 , C_1) = m(D , E)$ d'où : $\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{EC_1} = \vec{u}$

$\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$

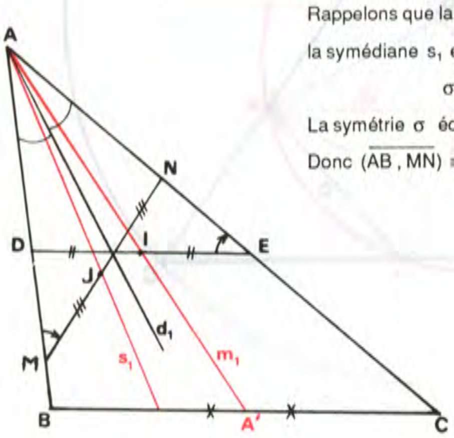
$\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ mais $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires .

Le seul vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est $\vec{O}$. On a donc : $\vec{u} = \vec{O}$

d'où : $D = B_1$ et $E = C_1$, ce qui prouve que : $(DE) = (B_1C_1)$.

Puisque $(B_1C_1) // (BC)$, on a donc : (DE) // (BC)

Propriété P_5 : Soit M et N deux points appartenant respectivement à (AB) et (AC) , distincts de A .
Démontrer : la droite (MN) est antiparallèle à (BC) par rapport aux droites (AB) et (AC) si , et seulement si le milieu de (M , N) appartient à la symédiane s_1 issue de A dans le triangle ABC



Rappelons que la symétrie orthogonale σ par rapport à la bissectrice de $[\widehat{BAC}]$ échange la symédiane s_1 et la médiane m_1 issues de A . Posons $E = \sigma(M)$ et $D = \sigma(N)$

σ conserve les milieux , donc : $\sigma(m(E , D)) = m(M , N)$ (1)

La symétrie σ échange (AB) et (AC) , (MN) et (ED) , et contrarie les angles orientés .

Donc $\overline{(AB , MN)} \equiv -\overline{(AC , ED)}$ (π) , c'est à dire : $\overline{(AB , MN)} \equiv \overline{(ED , AC)}$ (π) (2)

Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

p_1 : (MN) est antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC)

p_2 : $\overline{(AB , MN)} \equiv \overline{(BC , AC)}$ (π) (voir définition page 164)

p_3 : $\overline{(ED , AC)} \equiv \overline{(BC , AC)}$ (π) (en utilisant (2))

p_4 : (ED) // (BC)

p_5 : le milieu de (E , D) appartient à la médiane m_1 .

p_6 : le milieu de (M , N) appartient à la symédiane s_1 .

Cercles de Lemoine et de Tucker

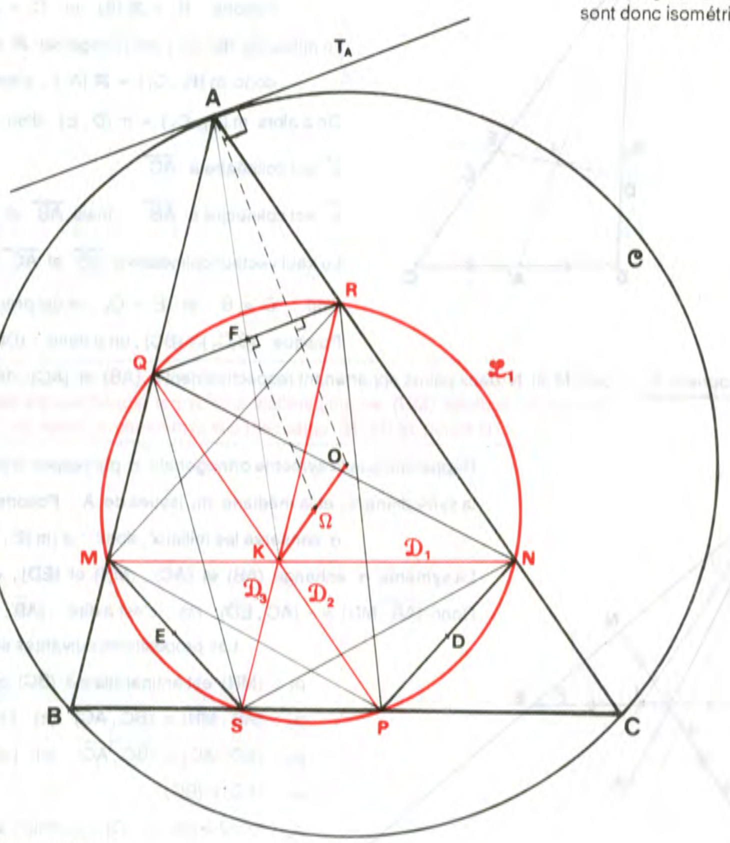
1ère partie : premier cercle de Lemoine (1873) .

> Soit ABC un triangle , inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O ,
> Par le point de concours K des symédianes du triangle ABC , on mène trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ respectivement parallèles à (BC) , (CA) , (AB) .
>
> $\mathcal{D}_1$ coupe (AB) et (AC) respectivement en M et N .
> $\mathcal{D}_2$ coupe (BC) et (BA) respectivement en P et Q .
> $\mathcal{D}_3$ coupe (CA) et (CB) respectivement en R et S .
>
> Démontrer :
>
> * Les six points M , N , P , Q , R , S sont cocycliques sur un cercle $\mathcal{L}_1$ dont le centre Ω est le milieu de (K , O) .
> * Les segments [QR] , [MS] , [PN] ont même longueur .

Le cercle $\mathcal{L}_1$ est appelé premier cercle de Lemoine .

Remarque : $\begin{cases} QS = RM \\ SN = MP \\ NQ = PR \end{cases}$

Les triangles QSN et RMP sont donc isométriques .



<u>*Notions utilisées*</u> :
* *antiparallèlisme*
* *symétrie*
* *angles de droites*

a) Les six points M, N, P, Q, R, S sont distincts et distincts de A, B, C. En effet :

* Si on avait, par exemple, M = Q, on aurait $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, ce qui impliquerait (CB) // (CA) ;
ce qui est impossible.

** Si on avait, par exemple, M = B, on aurait $\mathcal{D}_1$ = (BK), ce qui impliquerait (BK) // (BC), donc (BK) = (BC)
Cela est impossible, car K est strictement intérieur au triangle ABC, donc K $\notin$ (BC).

b) Le quadrilatère KRAQ est un parallélogramme, donc le milieu F de (A, K) est aussi le milieu de (Q, R).

voir P_5 page 165

La droite (AK) est la symédiane s_1 issue de A dans le triangle ABC, et contient le milieu de (Q, R).

Donc : la droite (QR) est antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC) (1)

De même : $\begin{cases}\text{la droite (MS) est antiparallèle à (CA) par rapport à (BC) et (BA)} & (2)\\ \text{la droite (PN) est antiparallèle à (AB) par rapport à (CA) et (CB)} & (3)\end{cases}$

c) D'après (1), on a : $\overline{(AB, QR)} \equiv \overline{(CB, CA)}$ (π)
D'après (2), on a : $\overline{(BA, MS)} \equiv \overline{(CA, CB)}$ (π) } d'où $\overline{(AB, QR)} \equiv -\overline{(BA, MS)}$ (π) (4)

Démontrons que les points Q, R, M, S sont cocycliques.

On a : (SR) // (MQ). La médiatrice Δ_3 de (M, Q) est donc perpendiculaire à (SR)

La symétrie orthogonale σ par rapport à Δ_3 échange M et Q, et laisse globalement invariantes les droites (AB) et (RS).

Soit R' = σ(R). On a : $\sigma \begin{cases} M \longmapsto Q \\ Q \longmapsto M \\ R \longmapsto R' \end{cases}$ donc : $\overline{(QM, QR)} \equiv -\overline{(MQ, MR')}$ (π)
c'est à dire : $\overline{(AB, QR)} \equiv -\overline{(BA, MR')}$ (π) (5)
Par ailleurs QR = MR' (6)

Des relations (4) et (5), on déduit : $\overline{(BA, MS)} \equiv \overline{(BA, MR')}$ (π) d'où (MS) = (MR'), donc : R' $\in$ (MS)

Par ailleurs R $\in$ (RS), d'où R' $\in \sigma$((RS)), donc : R' $\in$ (RS)

Ainsi R' $\in$ (RS) $\cap$ (MS), donc R' = S. On a prouvé : σ(R) = S, or on avait σ(Q) = M, donc :

la médiatrice Δ_3 de (M, Q) est donc aussi la médiatrice de (S, R) ; en outre : QR = MS

Soit alors Ω le point commun à Δ_3 et à la médiatrice δ_1 de (Q, R).

$\Omega \in \Delta_3$, donc $\Omega S = \Omega R$ et $\Omega Q = \Omega M$. $\Omega \in \delta_1$, donc $\Omega Q = \Omega R$.

Ce qui prouve que les points Q, R, M, S sont cocycliques sur un cercle $\mathcal{L}_1$ de centre Ω, de rayon ΩQ.

Démontrons que $\mathcal{L}_1$ contient N et P.

voir P_1 page 164

On a (MN) // (BC) et (BC) antiparallèle à (QR) par rapport à (AB) et (AC), donc :

la droite (MN) est aussi antiparallèle à (QR) par rapport à (MQ) et (NR).

voir P_2 page 164

La condition (MN) antiparallèle à (QR) par rapport à (MQ) et (NR) garantit que M, N, Q, R sont cocycliques.
Le cercle $\mathcal{L}_1$, qui contient Q, R, M contient donc N. De même, on prouve que $\mathcal{L}_1$ contient également le point P.

d) Justifions que le centre Ω de $\mathcal{L}_1$ est le milieu de (K, O).

voir P_3 page 164

La tangente T_A en A à $\mathcal{C}$ est antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC).

Or (QR) est aussi antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC).
On en déduit (QR) // T_A, donc (QR) $\perp$ (OA).
La médiatrice δ_1 de (Q, R) est donc parallèle à (OA). En outre δ_1 contient le milieu F de (K, A).
La droite δ_1 contient donc aussi le milieu de (K, O).

De même : les médiatrices respectives δ_2 et δ_3 de (M, S) et (P, N) contiennent le milieu de (K, O).

Or le centre Ω de $\mathcal{L}_1$ vérifie : $\{\Omega\}$ = med (Q, R) $\cap$ med (M, S) $\cap$ med (P, N), donc Ω = m (K, O).

conclusion

Les six points M, N, P, Q, R, S sont cocycliques sur un cercle $\mathcal{L}_1$ dont le centre Ω est le milieu de (K, O).

remarques

Comme on a justifié : QR = MS, on prouverait : MS = PN.

Les trois segments [QR], [MS], [PN] ont donc même longueur.

Le théorème de Pythagore garantit alors que : $\Omega F = \Omega E = \Omega D$ (où E = m (M, S), D = m (P, N)).

Le cercle de centre Ω et de rayon ΩF est donc tangent en D, E, F respectivement à (PN), (MS), (QR).

Cercles de Lemoine et de Tucker .

2ème partie : cercles de Tucker d'un triangle ABC .

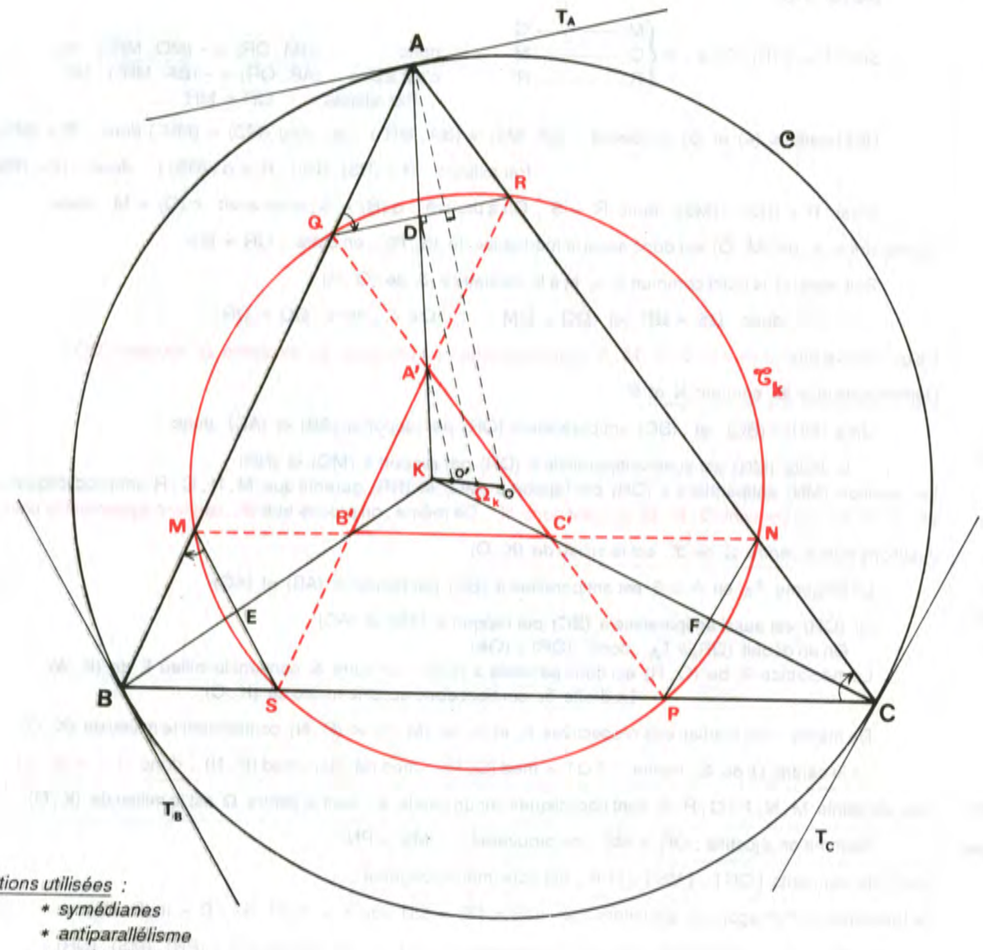
Soit K le point de Lemoine d'un triangle ABC , inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O .
Soit $\mathcal{H}$ une homothétie de centre K , de rapport k ($k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$) .
On pose : $A' = \mathcal{H}(A)$, $B' = \mathcal{H}(B)$, $C' = \mathcal{H}(C)$, $O' = \mathcal{H}(O)$.

La droite (A'B') coupe (CA) et (CB) respectivement en R et S .
La droite (B'C') coupe (AB) et (AC) respectivement en M et N .
La droite (C'A') coupe (BC) et (BA) respectivement en P et Q .

1°) Démontrer que : les six points M , N , P , Q , R , S sont cocycliques sur un cercle $\mathcal{T}_k$ dont le centre Ω_k est le milieu de (O , O') .

A chaque réel k ($k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$) , on associe ainsi un cercle $\mathcal{T}_k$ appelé un cercle de Tucker du triangle ABC

2°) Démontrer que les trois segments [QR] , [MS] et [PN] ont même longueur .



notions utilisées :

* *symédianes*
* *antiparallélisme*
* *angles de droites*
* *homothéties*
* *symétries*

1°) a) Les droites (A'B), (B'C'), (C'A') sont respectivement parallèles à (AB), (BC), (CA) et distinctes de celles ci ($k \neq 1$).

Les points M, N, P, Q, R, S sont donc tous distincts, et distincts de A, B, C.

1°) b) Le quadrilatère AQA'R est un parallélogramme, donc le milieu D de (A, A') est aussi milieu de (Q, R).

Mais $\overrightarrow{KA'} = k.\overrightarrow{KA}$. La droite (AK), qui contient A' contient donc aussi le point D.

voir P_5 page 165 La droite (AK) est la symédiane s_1 issue de A dans le triangle ABC, et s_1 contient le milieu de (Q, R).

$Q \in (AB)$ et $R \in (AC)$, donc (QR) est antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC).

Par conséquent : $(\overline{AB}, \overline{QR}) \equiv (\overline{CB}, \overline{CA}) \quad (\pi)$ (1)

De même, on prouve que (MS) est antiparallèle à (CA) par rapport à (BC) et (BA).

Par conséquent : $(\overline{BA}, \overline{MS}) \equiv (\overline{CA}, \overline{CB}) \quad (\pi)$ (2)

De (1) et (2), on déduit : $(\overline{BA}, \overline{MS}) \equiv -(\overline{AB}, \overline{QR}) \quad (\pi)$. Mais rappelons que : (AB) // (RS).

On a donc aussi : $(\overline{BA}, \overline{MS}) \equiv -(\overline{RS}, \overline{RQ}) \quad (\pi)$

que nous lisons alors : $(\overline{MQ}, \overline{MS}) \equiv (\overline{RQ}, \overline{RS}) \quad (\pi)$ (3)

Or les points M, Q, R, S sont non alignés. La condition (3) est donc suffisante pour conclure que :

les points M, Q, R, S sont cocycliques.

1°) c) Soit $\mathscr{C}_K$ le cercle portant M, Q, R, S. Prouvons que $\mathscr{C}_K$ contient aussi les points N et P.

voir P_2 page 164 On a : (MN) // (BC) et (BC) antiparallèle à (QR) par rapport à (AB) et (AC),

donc : (MN) est aussi antiparallèle à (QR) par rapport à (AB) et (AC).

Nous lisons alors : (MN) est antiparallèle à (QR) par rapport à (MQ) et (RN),

ce qui garantit que M, N, Q, R sont cocycliques. Le cercle $\mathscr{C}_K$, qui contient M, Q, R, contient donc N

On prouve de même que : le cercle $\mathscr{C}_K$ contient aussi le point P.

conclusion $\boxed{\text{Le cercle } \mathscr{C}_K \text{ contient les six points M, Q, R, S, N, P.}}$

1°) d) Précisons le centre Ω_K du cercle $\mathscr{C}_K$.

La droite (QR) et la tangente T_A en A à $\mathscr{C}$ sont toutes deux antiparallèles à (BC) par rapport à (AB) et (AC).

Donc : (QR) // T_A et, puisque $T_A \perp (OA)$, on déduit : $(QR) \perp (OA)$.

Or : $A' = \mathscr{R}(A)$ et $O' = \mathscr{R}(O)$, donc (O'A') // (OA), d'où : $(QR) \perp (O'A')$.

La médiatrice de (Q, R), qui est perpendiculaire à (QR), est alors parallèle à (OA) et (OA').

Or, la médiatrice de (Q, R) contient le milieu D de (A, A'). Le théorème de Thalès assure alors que :

la médiatrice de (Q, R) contient le milieu de (O, O').

De même, on démontre : le milieu de (O, O') appartient à la médiatrice de (M, S) et à la médiatrice de (P, N)

Puisque le centre Ω_K de $\mathscr{C}_K$ appartient aux médiatrices de (Q, R), (M, S), (P, N), on a donc :

$\boxed{\Omega_K = m(O, O')}$ où O' est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

2°) Démontrons que : MS = QR.

On a : (QM) // (RS), donc les médiatrices de (Q, M) et (R, S) sont parallèles.

Mais ces médiatrices contiennent un même point Ω_K car Q, R, M, S sont cocycliques sur un cercle de centre Ω_K,

donc med (Q, M) = med (R, S).

Soit alors σ la symétrie orthogonale par rapport à med (Q, M).

On a donc : $\sigma(Q) = M$ et $\sigma(R) = S$ d'où : $\boxed{MS = QR}$

De même, on démontre que: $\boxed{MS = PN}$

Cercles de Lemoine et de Tucker .

2^{eme} partie (suite) : cercles de Tucker d'un triangle ABC .

3°) Les notations sont celles du 1°) mais le triangle ABC est supposé non rectangle .
On pose : D = m (A , A') ; E = (B , B') ; F = m (C , C') .

a) On suppose $k \neq -1$, démontrer que :
- Les points D , E , F sont images respectives de A , B , C par une homothétie $\mathcal{H}_1$ de centre K .
- Les triangles DEF et ABC ont même point de Lemoine K .

b) Démontrer que : les droites (MS) et (PN) sont sécantes en un point U_1 appartenant à (AK) .
les droites (PN) et (QR) sont sécantes en un point U_2 appartenant à (BK) .
les droites (QR) et (MS) sont sécantes en un point U_3 appartenant à (CK) .

figure 1

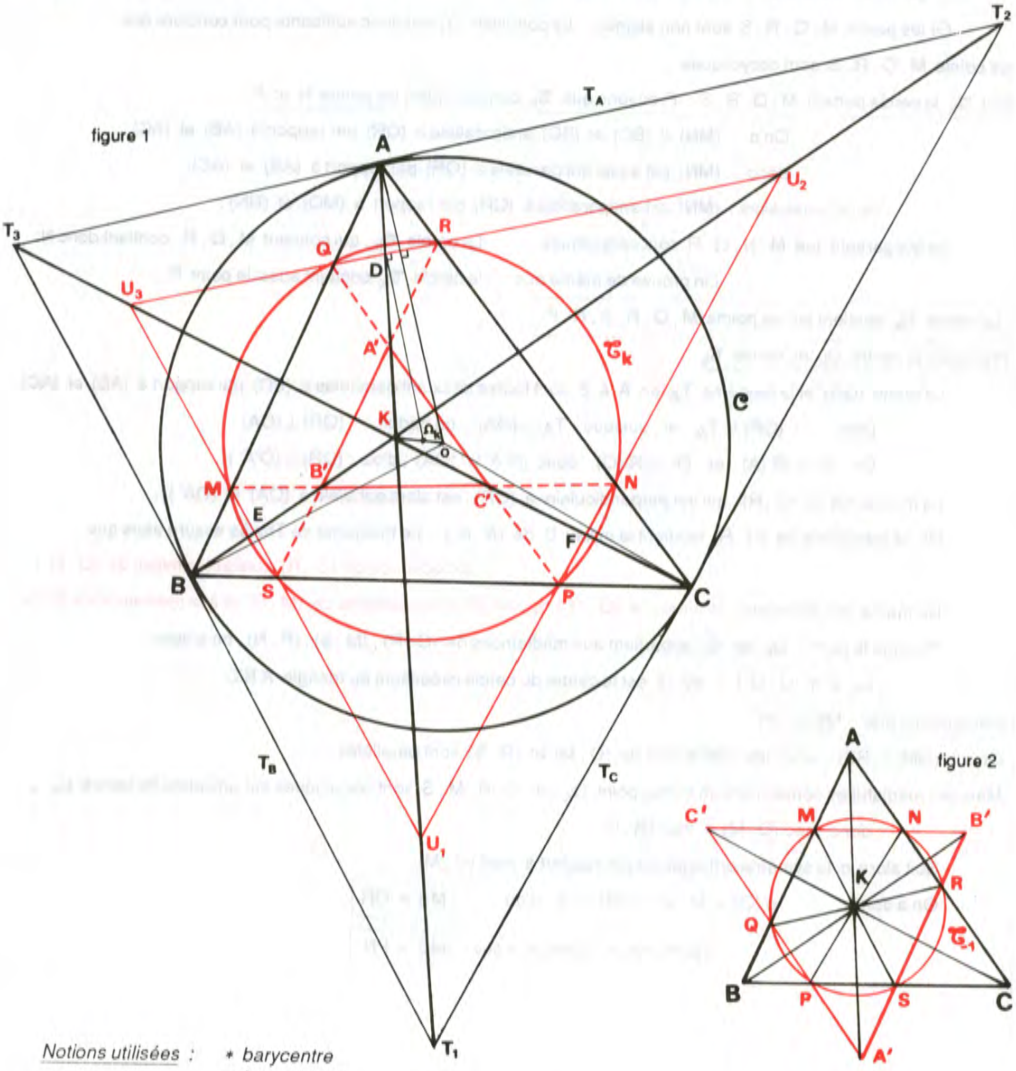


figure 2

Notions utilisées :
* *barycentre*
* *homothéties*

3°) a) **On a** : $D = m(A, A')$ donc $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA'})$. Or $\overrightarrow{KA'} = k\,\overrightarrow{KA}$ donc $\overrightarrow{KD} = \frac{k+1}{2}\overrightarrow{KA}$.

On établit de même : $\overrightarrow{KE} = \frac{k+1}{2}\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{KF} = \frac{k+1}{2}\overrightarrow{KC}$; $k \neq -1$ donc $\frac{k+1}{2} \neq 0$.

Les points D , E , F sont donc images respectives de A , B , C par une homothétie $\mathcal{H}_1$, de centre K , de rapport k_1 ($k_1 = \frac{k+1}{2}$)

Nommons K_1 le point de Lemoine du triangle DEF et prouvons que : $K_1 = K$.

On a : $\overrightarrow{DE} = k_1\overrightarrow{AB}$, donc $DE^2 = k_1^2 AB^2$, et de même $EF^2 = k_1^2 BC^2$; $FD^2 = k_1^2 CA^2$

Posons : $a_1 = EF$, $b_1 = FD$, $c_1 = DE$, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

voir page 154 — On sait que : $K_1 = \mathrm{Bar}\{(D, a_1^2), (E, b_1^2), (F, c_1^2)\}$ or $a_1^2 = k_1^2 a^2$; $b_1^2 = k_1^2 b^2$; $c_1^2 = k_1^2 c^2$

on a donc aussi : $K_1 = \mathrm{Bar}\{(D, a^2), (E, b^2), (F, c^2)\}$.

Par ailleurs K est point de Lemoine du triangle ABC donc : $K = \mathrm{Bar}\{(A, a^2), (B, b^2), (C, c^2)\}$

Toute homothétie conserve le barycentre , donc : $\mathcal{H}_1(K) = \mathrm{Bar}\{(\mathcal{H}_1(A), a^2), (\mathcal{H}_1(B), b^2), (\mathcal{H}_1(C), c^2)\}$.

Mais $\mathcal{H}_1(K) = K$, on a donc : $K = \mathrm{Bar}\{(D, a^2), (E, b^2), (F, c^2)\}$, c'est à dire : $\boxed{K = K_1}$.

2°) b)

1^er cas — Supposons $k \neq -1$. Alors D , E , F sont distincts (car $k_1 \neq 0$) .

Soit Γ_k le cercle circonscrit au triangle DEF . On a $\Gamma_k = \mathcal{H}_1(\mathcal{C})$ et le centre de Γ_k est $\mathcal{H}_1(O)$.

voir figure 1 — Mais rappelons : $\Omega_k = m(O, O')$ donc $\overrightarrow{K\Omega_k} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{KO'})$. Or $\overrightarrow{KO'} = k\,\overrightarrow{KO}$. Donc $\overrightarrow{K\Omega_k} = \frac{k+1}{2}\overrightarrow{KO}$,

ce qui traduit : $\Omega_k = \mathcal{H}_1(O)$.

voir 1°) d) page 169 — Par ailleurs : $(\Omega_k D) \perp (DR)$; $(\Omega_k E) \perp (ES)$; $(\Omega_k F) \perp (FN)$.

Le cercle Γ_k dont le centre est Ω_k , est donc tangent en D , E , F respectivement à (QR) , (MS) et (PN) .

Le triangle ABC est supposé non rectangle , donc le triangle DEF est non rectangle .

Les tangentes (MS) et (PN) au cercle Γ_k circonscrit au triangle DEF sont donc sécantes .

En effet * si on avait (MS) // (PN) , on aurait $(\Omega_k E) // (\Omega_k F)$. Les points E , Ω_k , F seraient alignés , donc :

* le triangle DEF serait rectangle en D .

Posons : $(MS) \cap (PN) = \{U_1\}$. On sait alors que :

voir page 152 — la droite (DU_1) est la symédiane issue de D dans le triangle DEF .

La droite (DU_1) contient donc le point de Lemoine du triangle DEF , qui est le point K .

On a : $U_1 \in (DK)$ et $(DK) = (AK)$, donc : $\boxed{U_1 \in (AK)}$

De même , on prouve : $\boxed{U_2 \in (BK)}$ et $\boxed{U_3 \in (CK)}$.

autre méthode — Les tangentes T_A , T_B , T_C au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC sont sécantes deux à deux puisque le triangle ABC n'est pas rectangle .

Démontrons que : $\mathcal{H}_1(T_B) = (MS)$.

L'homothétie $\mathcal{H}_1$ transforme B en E et (OB) en $(\Omega_k E)$.

$\mathcal{H}_1$ transforme la perpendiculaire T_B en B à (OB) en la perpendiculaire en E à $(\Omega_k E)$, c'est à dire en (MS)

On a donc : $\mathcal{H}_1(T_B) = (MS)$.

De même , on démontre : $\mathcal{H}_1(T_C) = (NP)$.

Posons : $T_B \cap T_C = \{T_1\}$. On a alors : $\mathcal{H}_1(T_1) \in (MS) \cap (NP)$, c'est à dire $\mathcal{H}_1(T_1) = U_1$.

Le centre de l'homothétie $\mathcal{H}_1$ est K , donc les points K , T_1 , U_1 sont alignés .

Mais (AT_1) est la symédiane (AK) issue de A dans le triangle ABC ,ce qui prouve que :

$\boxed{\text{les points } A, K, T_1, U_1 \text{ sont alignés}}$

En définissant de même les points T_2 et T_3 , on trouve $\mathcal{H}_1(T_2) = U_2$ et $\mathcal{H}_1(T_3) = U_3$, et on démontre que :

$\boxed{\text{les points } B, K, T_2, U_2 \text{ sont alignés}}$ et $\boxed{\text{les points } C, K, T_3, U_3 \text{ sont alignés}}$.

2^ème cas — Supposons : $k = -1$. Alors les points D , E , F sont confondus en K .

$\mathcal{H}(K, -1)$ est la symétrie centrale de centre K , donc $\mathcal{H}(A') = A$; $\mathcal{H}(B') = B$; $\mathcal{H}(C') = C$.

voir figure 2 — On sait que $M \in (AB) \cap (B'C')$, donc $\mathcal{H}(M) \in (A'B') \cap (BC)$, d'où $\mathcal{H}(M) = S$, ce qui démontre: $K = m(M, S)$

On démontre de même que : $K = m(P, N)$ et $K = m(Q, R)$.

On a dans ce cas : $U_1 = U_2 = U_3 = K$.

Cercles de Lemoine et de Tucker .

3$^{\text{ème}}$ partie : cercles de Tucker d'un triangle ABC . Etude d'une réciproque .

Soit T_A, T_B, T_C les tangentes en A , B , C au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle ABC .
Soit K le point de Lemoine du triangle ABC .
On considère trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 parallèles respectivement à T_A, T_B, T_C, distinctes de celles-ci , et ne contenant pas K .

On pose : $\{Q\} = \Delta_1 \cap (AB)$; $\{R\} = \Delta_1 \cap (AC)$; $D = m(Q, R)$
$\{M\} = \Delta_2 \cap (BA)$; $\{S\} = \Delta_2 \cap (BC)$; $E = m(M, S)$
$\{P\} = \Delta_3 \cap (CB)$; $\{N\} = \Delta_3 \cap (CA)$; $F = m(P, N)$

On suppose en outre que les trois segments [QR] , [MS] , [PN] ont même longueur .

1°) Démontrer que , si M , N , P , Q , R , S appartiennent tous à] AB [∪] BC [∪] CA [, alors :
a) les droites (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes en K .
b) Les points D , E , F sont images respectives de A , B , C par une homothétie de centre K .
c) Les points M , N , P , Q , R , S sont cocycliques et le cercle $\mathcal{T}$ qui les porte a son centre Ω aligné avec O et K .

2°) Démontrer que les résultats du 1°) a) , b) , c) restent valables si aucun des points M , N , P , Q , R , S n'appartient à [AB] ∪ [BC] ∪ [CA] .

remarque : *le cercle de Taylor $\mathcal{T}$ du triangle ABC est un cercle de Tucker particulier .*

Voir figure 3 page 38 et figure 4 page 40 et remarquer que :
* (MN) // (KJ) // T_A ; (PQ) // (T_B ; (RS) // T_C
* si les trois angles du triangle ABC sont aigus ,
MN = PQ = RS = demi-périmètre du triangle orthique IJK
* si [BAC] est obtus , MN = PQ = RS = IJ + IK − KJ .

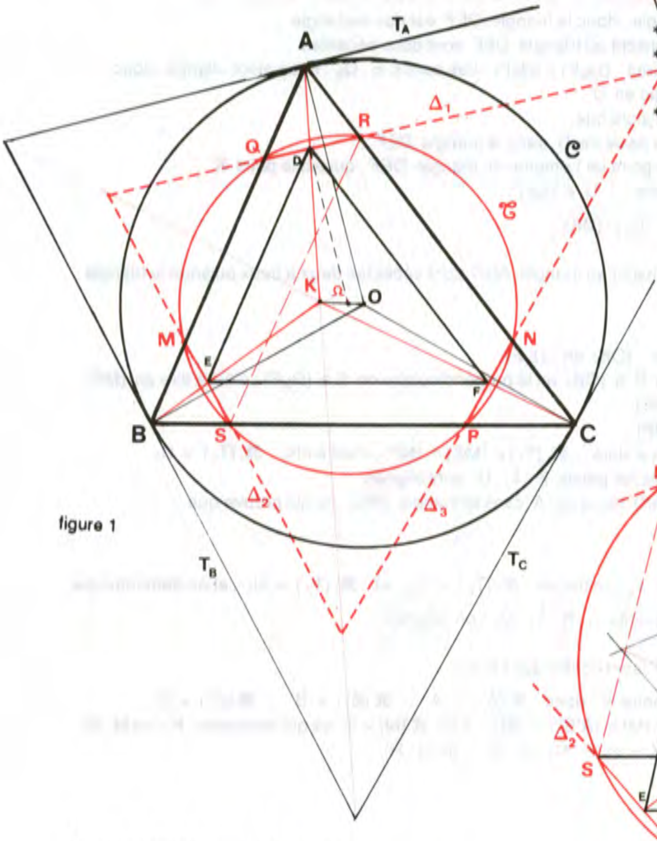


figure 1

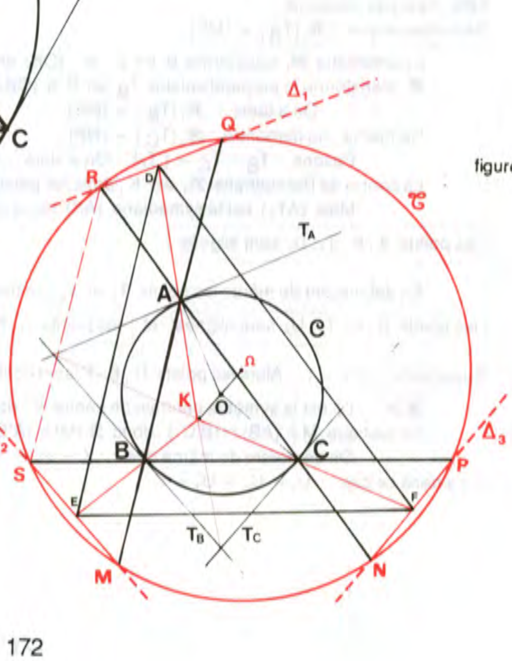


figure 2

<u>Notions utilisées</u> :
* *homothéties*
* *symétries orthogonales*
* *antiparallélisme*

1°) a) voir P_5 page 165 — Rappelons que T_A est antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC) .
On a : $(QR) // T_A$, donc (QR) est aussi antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC) .
$Q \in (AB)$ et $R \in (AC)$ donc le milieu D de (Q , R) appartient à la symédiane (AK) .
On prouve de même : $E \in (BK)$ et $F \in (CK)$

conclusion — **Les droites (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes en K .**

remarque — Les points D , E , F sont distincts de K (si on avait D = K , alors Δ_1 contiendrait K) .
Les points D , E , F sont eux-mêmes distincts : * si on avait D = E , alors $(AD) \cap (BE) = \{D\}$.
* on aurait alors D = K .

1°) b) — Démontrons que : (DE) // (AB) . On a : D = m(Q , R) et E = m(M , S) , donc : $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{QM})$.
$\overrightarrow{QM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Il suffit donc de justifier que $\overrightarrow{RS}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
La droite (QR) est antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC) , donc : $(AB , QR) \equiv (CB , AC)$ (π) (1)
La droite (MS) est antiparallèle à (AC) par rapport à (BA) et (BC) , donc : $(BA , MS) \equiv (AC , BC)$ (π) (2)
Des relations (1) et (2) , on déduit : $(AB , MS) \equiv -(AB , QR)$ (π) (3)
Soit d la droite perpendiculaire à (AB) au milieu de (M , Q) (si $M \neq Q$, d = med (M , Q))
Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à d .
Démontrons que : $\sigma(R) = S$. On a : $\sigma(Q) = M$. Posons : $\sigma(R) = R'$. Alors MR' = QR .
Mais , par hypothèse QR = MS . On a donc : MR' = MS
$\sigma((AB)) = (AB)$ et $\sigma((QR)) = (MR')$, donc : $(AB , MR') \equiv -(AB , QR)$ (π) (4)
Des relations (3) et (4) , on déduit : (MR') = (MS) , c'est à dire $R' \in (MS)$
Le point R' est donc : ou bien le point S ou bien le point S' , symétrique de S par rapport à M .
Soit $\mathcal{P}_C$ le demi-plan ouvert de frontière (AB) , contenant C . $(AB) \perp d$, donc :
$\sigma(\mathcal{P}_C) = \mathcal{P}_C$; $R \in]AC[$, donc $R \in \mathcal{P}_C$, et , par conséquent ; $R' \in \mathcal{P}_C$
Le point M appartient à la frontière (AB) de $\mathcal{P}_C$, $S \in]BC[$ donc : $S \in \mathcal{P}_C$ et $S' \notin \mathcal{P}_C$.
On en déduit : $R' \neq S'$, d'où R' = S . On a : $\sigma(R) = S$, donc $(RS) \perp d$. On a par conséquent (RS) // (AB) .
On en déduit : (DE) // (AB) . On démontre de même : (EF) // (BC) et (FD) // (CA) .
En outre : $\overrightarrow{DE} \neq \overrightarrow{AB}$ (sinon on aurait $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$, or (AD) et (BE) sont sécantes en K) .

voir page 120 — **Les points D , E , F sont donc les images respectives de A , B , C par une homothétie $\mathcal{H}_1$ dont le centre est K (car son centre appartient à $(AD) \cap (BE) \cap (CF)$) .**

1°) c) — On a : $T_A // (QR)$ et $T_A \perp (AO)$ donc $(QR) \perp (AO)$. Mais med (Q , R) $\perp$ (QR) , donc (AO) // med (Q , R) .
L'homothétie $\mathcal{H}_1$ transforme le centre O du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC en le centre Ω du cercle circonscrit au triangle DEF . Par ailleurs $\mathcal{H}_1(A) = D$.
L'image , par $\mathcal{H}_1$, de (OA) est une droite contenant D et parallèle à (OA) , or med (Q , R) contient D et est parallèle à (OA) , donc : $\mathcal{H}_1((OA)) = $ med (Q , R) .
De même : $\mathcal{H}_1((OB)) = $ med (M , S) et $\mathcal{H}_1((OC)) = $ med (P , N) .
$O \in (OA) \cap (OB) \cap (OC)$ et $\Omega = \mathcal{H}_1(O)$, donc $\Omega \in$ med (Q , R) $\cap$ med (M , S) $\cap$ med (P , N) .

Le centre Ω du cercle circonscrit au triangle DEF est donc équidistant de Q , R , M , S , P , N , qui sont donc cocycliques sur un cercle $\mathcal{T}$ de centre Ω .

$\Omega = \mathcal{H}_1(O)$ et K est centre de l'homothétie $\mathcal{H}_1$, donc **les points K , O , Ω sont alignés** .

remarque — Les droites (RS) et (QP) sont sécantes en un point A' , quatrième sommet d'un parallélogramme QARA' .
Le milieu D de (Q , R) est donc aussi milieu de (A , A') .
Par conséquent : $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA'})$.
k_1 désignant le rapport de l'homothétie $\mathcal{H}_1$, on a $\overrightarrow{KD} = k_1 . \overrightarrow{KA}$, d'où $\overrightarrow{KA'} = (2k_1 - 1)\overrightarrow{KA}$.
Si $k_1 \neq \frac{1}{2}$, on trouve ainsi que $\mathcal{T}$ est un cercle de Tucker $\mathcal{T}_K$ du triangle ABC , associé au réel k ($k = 2k_1 - 1$) .

2°) — Tous les résultats établis au 1°) restent valables si aucun des points M , N , P , Q , R , S n'appartient à $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$.
Seule la justification de : $\sigma(R) = S$ doit être modifiée de la façon suivante , les notations restant les mêmes :
Le point R appartient au demi-plan ouvert Q_C , de frontière (AB) , ne contenant pas C .
Donc $R' \in Q_C$. De même : $S \in Q_C$, donc $S' \notin Q_C$, d'où $R' \neq S'$ et R' = S .

Cercles de Lemoine et de Tucker .

4eme partie : second cercle de Lemoine

Soit K le point de Lemoine d'un triangle ABC, inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O .
Soit Δ_1, Δ_2, Δ_3 trois droites contenant K et telles que :

- la droite Δ_1 est antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC) ,
- la droite Δ_2 est antiparallèle à (CA) par rapport à (BC) et (BA) ,
- la droite Δ_3 est antiparallèle à (AB) par rapport à (CA) et (CB) .

Soit
- Q et R les points où Δ_1 coupe respectivement (AB) et (AC) .
- M et S les points où Δ_2 coupe respectivement (BC) et (BA)
- N et P les points où Δ_3 coupe respectivement (CA) et (CB)

1°) Démontrer que les six points M , N , P , Q , R , S sont cocycliques et que le cercle $\mathscr{L}_2$ qui les porte a pour centre K .

2°) Le triangle ABC est supposé non rectangle .

a) Démontrer que les quadrilatères PMNS , QPRN , QMRS sont des rectangles .

b) Démontrer que :

les droites (PQ) et (SR) sont sécantes en un point A' appartenant à la symédiane (AK) .
les droites (SR) et (MN) sont sécantes en un point B' appartenant à la symédiane (BK) .
les droites (MN) et (PQ) sont sécantes en un point C' appartenant à la symédiane (CK) .

Le cercle $\mathscr{L}_2$ est dit second cercle de Lemoine .

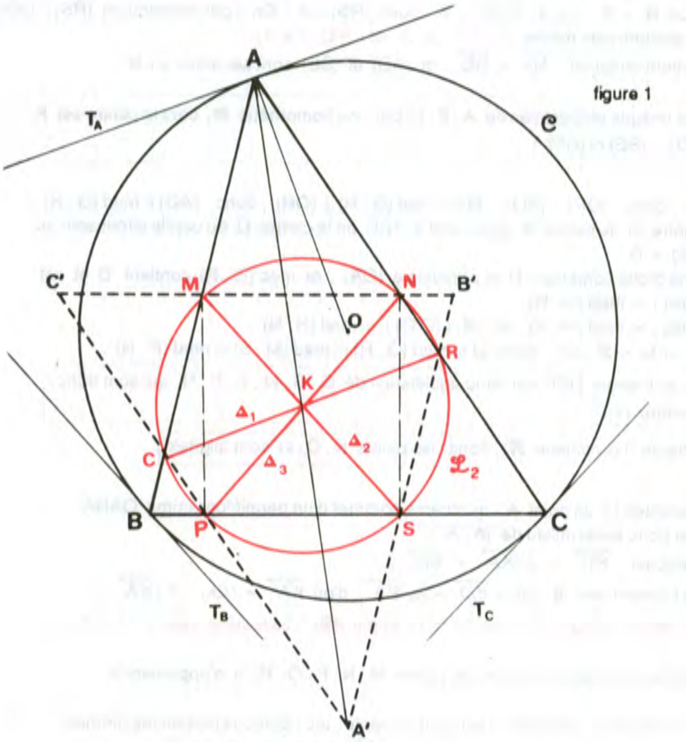


figure 1

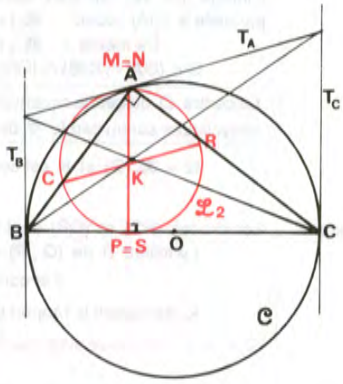


figure 2

<u>*Notions utilisées*</u> *:*

- *symédianes*
- *symétries orthogonales*

1°) a) voir figure 1 On a : $Q \in (AB)$, $R \in (AC)$, et la droite (QR) est antiparallèle à (BC) par rapport à (AB) et (AC) , donc : la symédiane (AK) , issue de A dans le triangle ABC , coupe [QR] en son milieu , d'où : $K = m(Q, R)$

De même , on prouve que : $K = m(M, S)$ et $K = m(N, P)$.

1°) b) Démontrons que : $KP = KS$.

* si $P = S$, l'égalité $KP = KS$ est évidente .
* si $P \neq S$, prouvons que K appartient à la médiatrice d de (P , S) .

la droite Δ_2 est antiparallèle à (CA) par rapport à (BC) et (BA) , donc : $(\overline{BC}, \overline{\Delta_2}) \equiv (\overline{CA}, \overline{BA})$ (π) (1)

la droite Δ_3 est antiparallèle à (AB) par rapport à (CA) et (CB) , donc : $(\overline{CB}, \overline{\Delta_3}) \equiv (\overline{AB}, \overline{CA})$ (π) (2)

Des relations (1) et (2) , on déduit : $(\overline{CB}, \overline{\Delta_3}) \equiv -(\overline{BC}, \overline{\Delta_2})$ (π) , que nous lisons : $(\overline{CB}, \overline{PK}) \equiv -(\overline{CB}, \overline{SK})$ (π)(3)

Soit alors σ la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice d de (P , S) .

Posons : $K' = \sigma(K)$. On a : $S = \sigma(P)$, donc : $\sigma((PK)) = (SK')$.

$(BC) \perp d$, donc : $\sigma((CB)) = (CB)$.

La symétrie σ contrarie les angles orientés , donc : $(\overline{CB}, \overline{PK}) \equiv -(\overline{CB}, \overline{SK'})$ (π) (4)

Des relations (3) et (4) , on déduit : $(\overline{CB}, \overline{SK}) \equiv (\overline{CB}, \overline{SK'})$ (π) , d'où : $(SK') = (SK)$, c'est à dire : $\sigma((PK)) = (SK)$

Les droites (PK) et (SK) sont symétriques par rapport à d et sécantes en K .

$K \in (PK) \cap (SK)$, donc : $\sigma(K) \in (SK) \cap (PK)$, d'où : $\sigma(K) = K$,

ce qui prouve que : $K \in \text{med}(P, S)$, donc que : $KP = KS$. On démontre de même que : $KQ = KM$.

1°) c) D'après 1°) a) , on a : $KQ = KR$; $KM = KS$; $KN = KP$.

En utilisant le résultat du 1°) b) , on a donc : $KN = KP = KS = KM = KQ = KR$, ce qui prouve que :

$\boxed{\text{les points } M, N, P, Q, R, S \text{ sont cocycliques sur un cercle } \mathcal{L}_2 \text{ de centre } K .}$

remarque Dans quel cas a t-on : $P = S$? ($P = S$ équivaut à $\Delta_2 = \Delta_3$) .

Rappelons que la tangente T_B en B à $\mathcal{C}$ est antiparallèle à (CA) par rapport à (BC) et (BA) .
Par conséquent , $T_B // \Delta_2$. De même $T_C // \Delta_3$.
L'égalité ($\Delta_2 = \Delta_3$) équivaut alors à ($T_B // T_C$) , c'est à dire à : $O \in (BC)$.

On a ($P = S$) si , et seulement si ABC est un triangle rectangle en A .

voir 1°) page 153 Or la symédiane issue de A dans un triangle ABC rectangle en A est la hauteur h_A issue de A .

Si $P = S$, on a donc : d'une part $(AK) \perp (BC)$; d'autre part Δ_2 et Δ_3 égales , perpendiculaires à (BC) .

voir figure 2 Mais Δ_2 et Δ_3 contiennent le point K , donc $\Delta_2 = \Delta_3 = (AK)$. On a alors M et N confondus en A

2°) a) Puisque le triangle ABC n'est pas rectangle , les six points M , N , P , Q , R , S sont tous distincts .

[PN] est un diamètre de $\mathcal{L}_2$, donc $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{SP} \perp \overrightarrow{SN}$.

voir figure 1 [MS] est un diamètre de $\mathcal{L}_2$, donc $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{NS}$.

$\boxed{\text{Le quadrilatère PMNS , qui a quatre angles droits , est donc un rectangle}}$

On déduit alors : $MN = PS$ et $(MN) // (PS)$; $MP = NS$ et $(MP) // (NS)$.

On prouve de même que : $\boxed{\text{QPRN et QMRS sont des rectangles .}}$

remarque Les triangles MPR et SNQ sont symétriques par rapport à K .

2°) b) Les droites (QP) et (SR) sont les images respectives , par la symétrie centrale de centre K , de (RN) et (MQ) .

Or les droites (RN) et (MQ) sont sécantes en A ,

donc (QP) et (SR) sont sécantes en un point A' , qui est le symétrique de A par rapport à K .

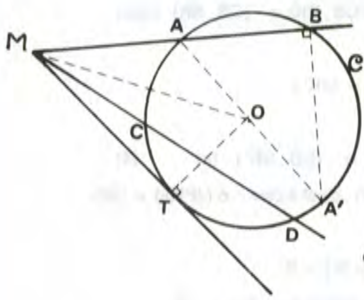
On a par conséquent : $\boxed{A' = S_K(A) \text{ donc : } A' \in (AK)}$

De même , $\begin{cases} \text{les droites (RS) et (MN) sont sécantes en } B' \text{, où : } B' = S_K(B) \text{ donc : } B' \in (BK) . \\ \text{les droites (MN) et (PQ) sont sécantes en } C' \text{, où : } C' = S_K(C) \text{ donc : } C' \in (CK) . \end{cases}$

Puissance d'un point par rapport à un cercle . Axe radical de deux cercles . Cercles orthogonaux .

I Puissance d'un point par rapport à un cercle .

1°) Propriété et définition .



Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O , de rayon R . Soit M un point quelconque du plan . Si deux droites contenant M coupent $\mathcal{C}$ respectivement en A , B et C , D alors on a : $\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD}$

Le réel $\overline{MA} \times \overline{MB}$, égal à $OM^2 - R^2$, est appelé puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$. On note : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = \overline{MA} \times \overline{MB}$ et on a $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = OM^2 - R^2$.

justification : Soit A' le point diamétralement opposé de A sur $\mathcal{C}$. On a alors : $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{BA'}$ d'où : $\overline{MA} \times \overline{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$

On a donc : $\overline{MA} \times \overline{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) . (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$, donc : $\overline{MA} \times \overline{MB} = MO^2 - R^2$.

On démontre de la même façon : $\overline{MC} \times \overline{MD} = MO^2 - R^2$

remarque 1 : Le point M appartient à $\mathcal{C}$ si , et seulement si on a : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = 0$.

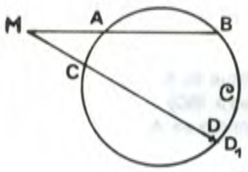
remarque 2 : Supposons M strictement extérieur à $\mathcal{C}$. Soit T le point de contact avec $\mathcal{C}$ d'une tangente à $\mathcal{C}$ issue de M

On a alors : $OM^2 - OT^2 = MT^2$, donc : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = MT^2$

2°) Réciproque :

a)

Soit A , B , C , D quatre points distincts tels que trois d'entre eux soient non alignés . Si (AB) et (CD) sont sécantes en un point M vérifiant : $\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD}$ alors les points A , B , C , D sont cocycliques .



justification : Le cercle $\mathcal{C}$ contenant A , B , C est coupé par (MC) en C et en un autre point D_1 vérifiant : $\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD_1}$ soit : $\overline{MC} \times \overline{MD} = \overline{MC} \times \overline{MD_1}$ (1)

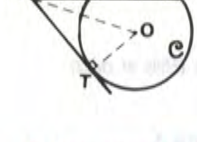
* si on avait $\overline{MC} = 0$ (donc M = C) , on aurait aussi , par exemple , $\overline{MA} = 0$ (donc M = A)
* ce qui est impossible puisque les points A et C sont distincts .

On a donc $\overline{MC} \neq 0$ et (1) s'écrit : $\overline{MD} = \overline{MD_1}$, donc : $D = D_1$

Or D_1 appartient à $\mathcal{C}$, donc D appartient au cercle contenant A , B , C .

b)

Soit ABT un triangle . Si un point M de la droite (AB) vérifie : $\overline{MA} \times \overline{MB} = MT^2$, alors (MT) est tangente en T au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABT .



justification : Soit O le centre de $\mathcal{C}$ et R son rayon .

On a : $\overline{MA} \times \overline{MB} = OM^2 - R^2$, donc : $OM^2 - R^2 = MT^2$.

Le triangle OMT , qui vérifie : $OM^2 = OT^2 + MT^2$, est donc rectangle en T , ce qui prouve que :

* Le point M est strictement extérieur à $\mathcal{C}$.
* La droite (MT) est tangente en T à $\mathcal{C}$.

II Axe radical de deux cercles

1°) Propriété et définition .

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles d'un même plan (P) , de centres respectifs O et O' distincts , de rayons respectifs R et R'.

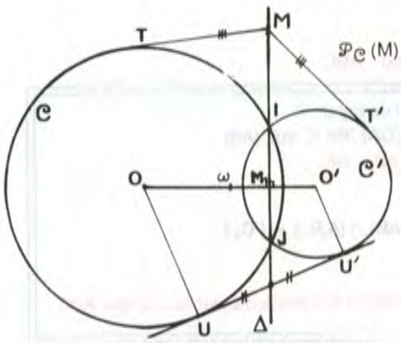
L'ensemble des points M du plan (P) qui ont même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est une droite Δ perpendiculaire à (OO') . La droite Δ est appelée l'axe radical des deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

justification : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(M)$ équivaut à : $MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$

or $MO^2 - MO'^2 = 2\overline{OO'} \times \overline{\omega M_1}$ où : $\omega = m(O, O')$

M_1 est le projeté orthogonal de M sur (OO') .

$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(M)$ équivaut donc à : $2\overline{OO'} \times \overline{\omega M_1} = R^2 - R'^2$.



> L'ensemble des points M vérifiant $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(M)$ est donc la droite perpendiculaire à (OO')
> au point M_1 défini par : $\overline{\omega M_1} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\,\overline{OO'}}$.

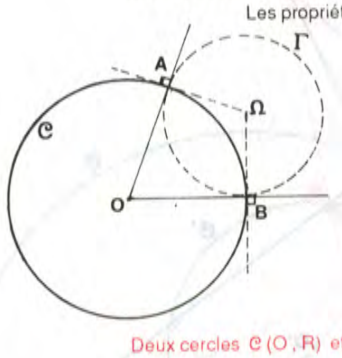
remarques : si $I \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, alors $I \in \Delta$ (car $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(I) = 0$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(I) = 0$)

* Si $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{I, J\}$, alors l'axe radical Δ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est la droite (IJ) .
* Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents en I , leur axe radical Δ est la tangente commune en I à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$.

1°) Propriété et définition .

Soit $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$ deux cercles d'un même plan , supposés sécants en deux points A et B .

Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :



(O_1) : la tangente en A à $\mathcal{C}$ et la tangente en A à Γ sont perpendiculaires

(O_2) : (AO) et $(A\Omega)$ sont perpendiculaires .

(O_3) : $O\Omega^2 = AO^2 + A\Omega^2$.

(O_4) : $\boxed{O\Omega^2 = R^2 + \rho^2}$.

(O_5) : $O\Omega^2 = BO^2 + B\Omega^2$

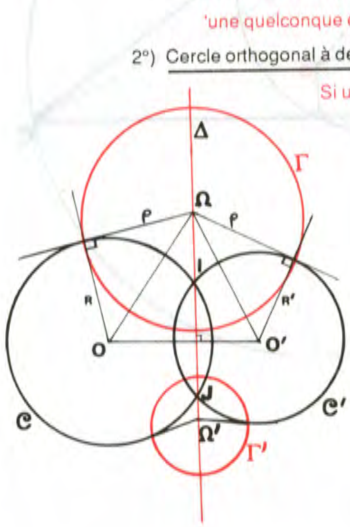
(O_6) : la tangente en B à $\mathcal{C}$ et la tangente en B à Γ sont perpendiculaires

(O_7) : $\mathcal{P}_{\Gamma}(O) = R^2$.

(O_8) : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\Omega) = \rho^2$.

Deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$, sécants en A et B sont dits orthogonaux si , et seulement si ils vérifient l'une quelconque des propositions équivalentes énoncées ci-dessus .

2°) Cercle orthogonal à deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\mathcal{C}'(O', R')$; $O \neq O'$.



Si un cercle $\Gamma(\Omega, \rho)$ est orthogonal à la fois à $\mathcal{C}(O, R)$ et à $\mathcal{C}'(O', R')$, alors :

* son centre Ω appartient à l'axe radical Δ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
* le point Ω est strictement extérieur à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$.

On a en effet : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\Omega) = \rho^2$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(\Omega) = \rho^2$.

Ω a alors même puissance ρ^2 (strictement positive) par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$,

donc $\Omega \in \Delta$.

Par ailleurs : $\Omega O^2 = R^2 + \rho^2$ et $\Omega O'^2 = R'^2 + \rho^2$

donc : $\Omega O > R$ et $\Omega O' > R'$

remarque : si $\Gamma'(\Omega', \rho')$ est un autre cercle orthogonal à $\mathcal{C}(O, R)$ et à $\mathcal{C}'(O', R')$,

alors : * le point Ω' appartient aussi à Δ .

* l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est la droite $(\Omega\Omega')$.

Axe orthique .

1ère partie : pieds des hauteurs d'un triangle ABC .

Soit ABC un triangle d'orthocentre H , inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R .
Soit A_1, B_1, C_1 les projetés orthogonaux respectifs de A sur (BC) , de B sur (CA) , de C sur (AB) .

1°) Démontrer que : $\overline{HA} \times \overline{HA_1} = \overline{HB} \times \overline{HB_1} = \overline{HC} \times \overline{HC_1} = \frac{1}{2}(OH^2 - R^2)$.

2°) On suppose que le triangle ABC n'est ni rectangle , ni isocèle .

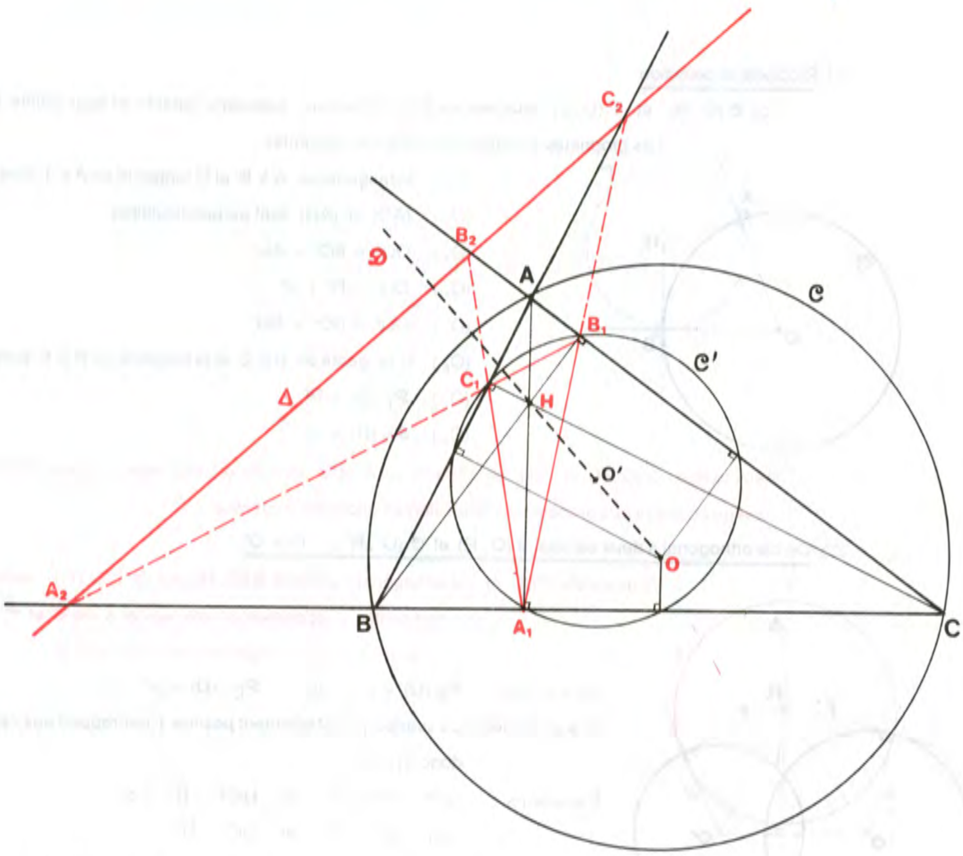
On pose : $(BC) \cap (B_1C_1) = \{A_2\}$; $(CA) \cap (C_1A_1) = \{B_2\}$; $(AB) \cap (A_1B_1) = \{C_2\}$.

a) Vérifier l'existence des points A_2, B_2, C_2 .

b) Démontrer que :

les points A_2, B_2, C_2 sont alignés sur une droite Δ perpendiculaire à la droite d'Euler du triangle ABC .

La droite Δ portant les points A_2, B_2, C_2 est appelée l'axe orthique du triangle ABC .



Notions utilisées :
- *cercle d'Euler*
- *cocyclicité*
- *puissance d'un point par rapport à un cercle .*

1°) On a établi que le cercle $\mathcal{C}$ contient les symétriques H_1, H_2, H_3 respectifs de H par rapport à (BC), (CA), (AB).

voir page 10 La puissance de H par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est alors : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(H) = \overline{HA} \times \overline{HH_1}$.

Or $\overline{HH_1} = 2\,\overline{HA_1}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(H) = HO^2 - R^2$, d'où : $\overline{HA} \times 2\,\overline{HA_1} = OH^2 - R^2$

On a donc : $\boxed{\overline{HA} \times \overline{HA_1} = \frac{1}{2}(OH^2 - R^2)}$

On démontre de même que $\begin{cases} \overline{HB} \times \overline{HB_1} = \frac{1}{2}(OH^2 - R^2) \\ \overline{HC} \times \overline{HC_1} = \frac{1}{2}(OH^2 - R^2) \end{cases}$

2°) a) Les points B_1 et C_1 sont distincts et distincts de A (sinon le triangle ABC serait rectangle en A).

Démontrons que les droites (B_1C_1) et (BC) sont sécantes.

On a : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC_1}$

$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \overline{AC} \times \overline{AB_1}$ d'où : $\overline{AB} \times \overline{AC_1} = \overline{AC} \times \overline{AB_1}$ (1)

* Supposons qu'on ait : $(B_1C_1) /\!/ (BC)$.

D'après le théorème de Thalès, on aurait : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB_1}}$ (2)

En multipliant membre à membre les relations (1) et (2), on aurait : $AB^2 = AC^2$,

* ce qui est impossible puisque le triangle ABC est supposé non isocèle.

2°) b) La puissance de A_2 par rapport au cercle $\mathcal{C}$ s'exprime par : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(A_2) = \overline{A_2B} \times \overline{A_2C}$ (3)

Soit $\mathcal{C}'$ le cercle d'Euler du triangle ABC. $\mathcal{C}'$ contient les points A_1, B_1, C_1.

La puissance de A_2 par rapport au cercle $\mathcal{C}'$ s'exprime par : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(A_2) = \overline{A_2C_1} \times \overline{A_2B_1}$ (4)

Soit Γ le cercle de diamètre $[BC]$. Γ contient alors les points B_1 et C_1.

La puissance de A_2 par rapport au cercle Γ s'exprime par : $\mathcal{P}_{\Gamma}(A_2) = \overline{A_2B} \times \overline{A_2C}$

et par : $\mathcal{P}_{\Gamma}(A_2) = \overline{A_2C_1} \times \overline{A_2B_1}$ (5)

Les relations (3), (4), (5) assurent que : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(A_2) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(A_2)$.

Le point A_2, qui a même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ appartient donc à l'axe radical Δ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

On démontre de même que : $B_2 \in \Delta$, et que : $C_2 \in \Delta$.

Les points O et H sont distincts (puisque le triangle ABC n'est pas équilatéral).

Le point O', centre du cercle d'Euler $\mathcal{C}'$ est milieu de (O, H), donc : $(OO') = (OH)$.

La droite (OO') est donc la droite d'Euler du triangle ABC.

Or l'axe radical Δ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est une droite perpendiculaire à (OO'), donc :

conclusion

Les points A_2, B_2, C_2 sont alignés sur une droite Δ perpendiculaire à la droite d'Euler du triangle ABC.

Axe orthique .

2^{eme} partie : pieds des bissectrices et alignement .

Soit ABC un triangle supposé <u>non isocèle</u>, inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O .

Soit $\begin{cases} d_1, d_2, d_3 \text{ les bissectrices de } [\widehat{BAC}], [\widehat{CBA}], [\widehat{ACB}] . \\ \delta_1, \delta_2, \delta_3 \text{ les bissectrices extérieures de } [\widehat{BAC}], [\widehat{CBA}], [\widehat{ACB}] . \end{cases}$

On pose : $\begin{cases} d_1 \cap (BC) = \{I_1\} \ ; \ d_2 \cap (CA) = \{I_2\} \ ; \ d_3 \cap (AB) = \{I_3\} \ ; \\ \delta_1 \cap (BC) = \{J_1\} \ ; \ \delta_2 \cap (CA) = \{J_2\} \ ; \ \delta_3 \cap (AB) = \{J_3\} \ . \end{cases}$

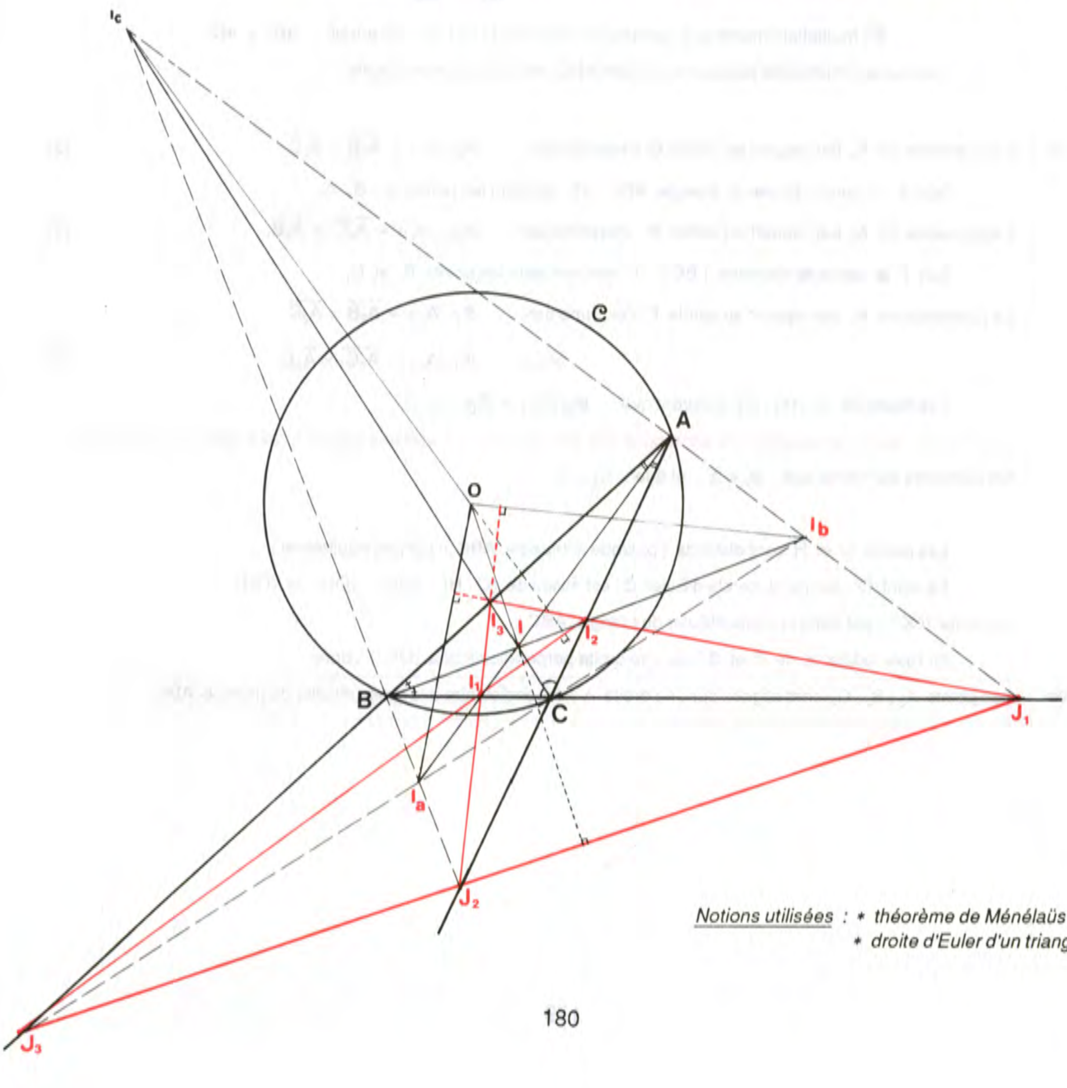
Soit $\begin{cases} I \text{ le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC} . \\ I_a, I_b, I_c \text{ les centres des cercles exinscrits du triangle ABC} . \end{cases}$

Démontrer : a) les points J_1, J_2, J_3 sont alignés , sur une droite perpendiculaire à (OI)

b) les points J_1, I_2, I_3 sont alignés , sur une droite perpendiculaire à (OI_a)

c) les points J_2, I_3, I_1 sont alignés , sur une droite perpendiculaire à (OI_b)

d) les points J_3, I_1, I_2 sont alignés , sur une droite perpendiculaire à (OI_c)



<u>Notions utilisées</u> : • théorème de Ménélaüs

• droite d'Euler d'un triangle

L'existence des points J_1, J_2, J_3 est assurée grâce à l'hypothèse : " ABC est un triangle non isocèle " .

Cette hypothèse assure en outre que : $O \neq I$.

voir page 106 Rappelons que : $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$. Les points O et I_a sont donc distincts pour tout triangle ABC .

De même , $O \neq I_b$; $O \neq I_c$.

1°) Justifions les alignements des pieds des bissectrices . Posons : BC = a ; CA = b ; AB = c .

voir page 72 On a établi que : $\frac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\frac{c}{b}$; $\frac{\overline{I_2C}}{\overline{I_2A}} = -\frac{a}{c}$; $\frac{\overline{I_3A}}{\overline{I_3B}} = -\frac{b}{a}$; $\frac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} = \frac{c}{b}$; $\frac{\overline{J_2C}}{\overline{J_2A}} = \frac{a}{c}$; $\frac{\overline{J_3A}}{\overline{J_3B}} = \frac{b}{a}$.

On a donc : $\frac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} \times \frac{\overline{J_2C}}{\overline{J_2A}} \times \frac{\overline{J_3A}}{\overline{J_3B}} = \frac{c}{b} \times \frac{a}{c} \times \frac{b}{a} = +1$ (1)

et : $\frac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} \times \frac{\overline{I_2C}}{\overline{I_2A}} \times \frac{\overline{I_3A}}{\overline{I_3B}} = \frac{c}{b} \times \left(-\frac{a}{c}\right) \times \left(-\frac{b}{a}\right) = +1$ (2)

voir page 16 Le théorème de Ménélaüs et la relation (1) prouvent que les points J_1, J_2, J_3 sont alignés .

Le théorème de Ménélaüs et la relation (2) prouvent que les points J_1, I_2, I_3 sont alignés .

De même , on justifie l'alignement des points J_2, I_3, I_1 et l'alignement des points J_3, I_1, I_2 .

2°) Directions des droites déterminées par les pieds des bissectrices .

voir page 86 Le triangle ABC est le triangle orthique du triangle $I_aI_bI_c$.

On a : $(I_bI_c) \cap (BC) = \{J_1\}$; $(I_cI_a) \cap (CA) = \{J_2\}$; $(I_aI_b) \cap (AB) = \{J_3\}$.

La droite Δ portant les points J_1, J_2, J_3 est alors l'axe orthique du triangle $I_aI_bI_c$,

voir 2°) donc Δ est perpendiculaire à la droite d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$.

page 86 Or la droite d'Euler du triangle $I_aI_bI_c$ est la droite (OI) .

conclusion

Les points J_1, J_2, J_3 sont donc alignés sur une droite perpendiculaire à (OI) .

Le triangle ABC est aussi le triangle orthique du triangle II_cI_b .

On a : $(I_cI_b) \cap (BC) = \{J_1\}$; $(I_bI) \cap (CA) = \{I_2\}$; $(II_c) \cap (AB) = \{I_3\}$.

La droite Δ_1 portant les points J_1, I_2, I_3 est alors l'axe orthique du triangle II_cI_b ,

donc Δ_1 est perpendiculaire à la droite d'Euler $\mathcal{D}_1$ du triangle II_cI_b .

La droite $\mathcal{D}_1$ contient l'orthocentre I_a du triangle II_cI_b (3)

Le cercle $\mathcal{C}$, qui contient les pieds A , B , C des hauteurs du triangle II_cI_b , est le cercle d'Euler du triangle II_cI_b .

La droite d'Euler $\mathcal{D}_1$ du triangle II_cI_b contient donc le centre O de $\mathcal{C}$.

Les relations (3) et (4) assurent que la droite d'Euler $\mathcal{D}_1$ du triangle II_cI_b est la droite (OI_a) .

conclusion

Les points J_1, I_2, I_3 sont alignés sur une droite Δ_1 perpendiculaire à (OI_a) .

On démontre de même que :

* La droite Δ_2 portant J_2, I_3, I_1 est l'axe orthique du triangle II_aI_c et que Δ_2 est perpendiculaire à la droite d'Euler (OI_b) du triangle II_aI_c .

* La droite Δ_3 portant J_3, I_1, I_2 est l'axe orthique du triangle II_bI_a et que Δ_3 est perpendiculaire à la droite d'Euler (OI_c) du triangle II_bI_a .

Théorème de Simson .

$1^{ère}$ partie : le triangle podaire et le triangle circonpédal d'un point P ($P \notin \mathcal{C}$) relativement au triangle ABC , sont directement semblables .

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. Soit P un point quelconque du plan (ABC) .
Soit P_1 , P_2 , P_3 les projetés orthogonaux respectifs de P sur (BC) , (CA) , (AB) .
On rappelle que les points P_1 , P_2 , P_3 sont alignés si , et seulement si P appartient à $\mathcal{C}$.
On suppose que P n'appartient pas à $\mathcal{C}$.
Le triangle $P_1P_2P_3$ est alors dit triangle podaire de P relativement au triangle ABC .

Soit S_1 le point où (AP) recoupe $\mathcal{C}$. Si (AP) est tangente en A à $\mathcal{C}$, on pose : $S_1 = A$.
Soit S_2 le point où (BP) recoupe $\mathcal{C}$. Si (BP) est tangente en B à $\mathcal{C}$, on pose : $S_2 = B$.
Soit S_3 le point où (CP) recoupe $\mathcal{C}$. Si (CP) est tangente en C à $\mathcal{C}$, on pose : $S_3 = C$.

1°) a) Vérifier que S_1 , S_2 , S_3 sont trois points distincts de $\mathcal{C}$ (donc non alignés) .
Le triangle $S_1S_2S_3$ est alors dit triangle circonpédal de P relativement au triangle ABC .
b) Démontrer que les triangles $P_1P_2P_3$ et $S_1S_2S_3$ sont directement semblables .

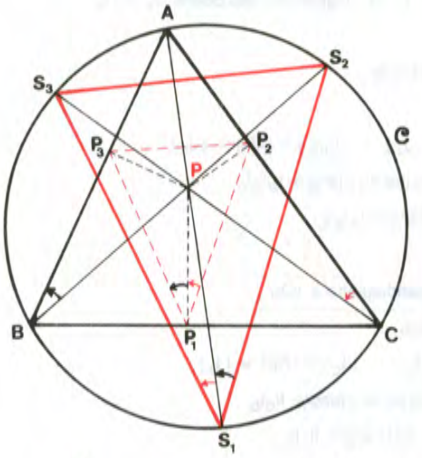


figure 1

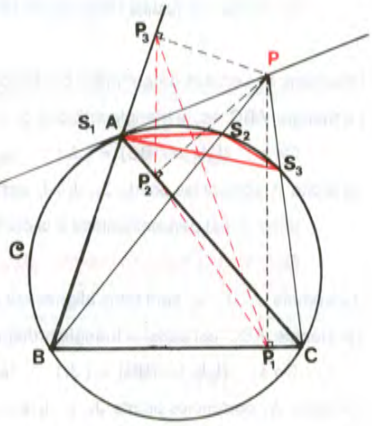


figure 2

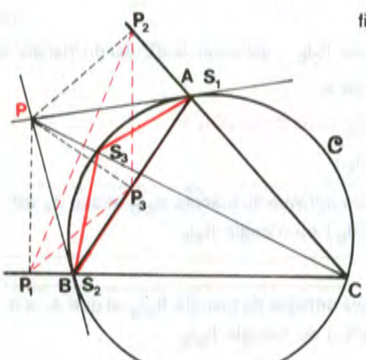


figure 3

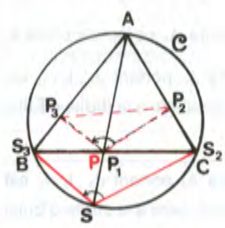


figure 4

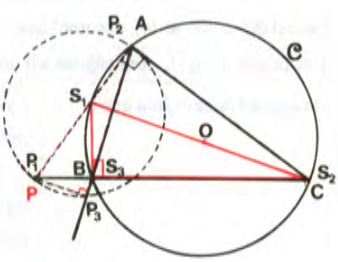


figure 5

Notions utilisées :
* angles de droites
* cocyclicité

1°) a) $\quad$ * Supposons que : $S_1 = S_2$. $\quad$ Alors $(PS_1) = (PS_2)$, or $(PS_1) = (PA)$ et $(PS_2) = (PB)$.

On aurait alors $(PA) = (PB)$, donc $P \in (AB) - \{A, B\}$.

* On aurait par conséquent $S_1 = B$ et $S_2 = A$, ce qui est impossible puisque $A \neq B$.

1°) b) $\quad$ Orientons le plan du triangle ABC . Pour prouver que les triangles $P_1P_2P_3$ et $S_1S_2S_3$ sont directement semblables ,

page 126 $\quad$ il suffit de démontrer que : $\quad \overline{(S_1S_2, S_1S_3)} \equiv \overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \ (\pi)$ et $\overline{(S_2S_3, S_2S_1)} \equiv \overline{(P_2P_3, P_2P_1)} \ (\pi)$

1ere étape $\quad$ Evaluons $\overline{(S_1S_2, S_1S_3)}$. $\quad$ La relation de Chasles assure : $\overline{(S_1S_2, S_1S_3)} \equiv \overline{(S_1S_2, S_1P)} + \overline{(S_1P, S_1S_3)} \ (\pi)$ $\quad$ (1)

Soit T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathcal{C}$, respectivement en A , B , C .

Calculons $\overline{(S_1S_2, S_1P)}$

voir figure 1 $\quad$ * Si $P \notin T_A \cup T_B$, alors $S_1 \neq A$ et $S_2 \neq B$.

Les points S_1, S_2, A, B sont cocycliques , donc : $\quad \overline{(S_1S_2, S_1A)} \equiv \overline{(BS_2, BA)} \ (\pi)$

Mais $(S_1A) = (S_1P)$ et $(S_2B) = (BP)$, donc : $\quad \overline{(S_1S_2, S_1P)} \equiv \overline{(BP, BA)} \ (\pi)$

voir figure 2 $\quad$ * Si $P \in T_A$ et $P \notin T_B$, alors $S_1 = A$ et $S_2 \neq B$.

La droite (AP) est tangente en A à $\mathcal{C}$, donc : $\quad \overline{(AS_2, AP)} \equiv \overline{(BS_2, BA)} \ (\pi)$

Mais $(AP) = (S_1P)$ et $(BS_2) = (BP)$, donc : $\quad \overline{(S_1S_2, S_1P)} \equiv \overline{(BP, BA)} \ (\pi)$

voir figure 3 $\quad$ * Si $P \in T_A \cap T_B$, alors $S_1 = A$ et $S_2 = B$; $\overline{(S_1S_2, S_1P)}$ s'écrit alors $\overline{(AB, AP)}$

La droite (AP) est tangente en A à $\mathcal{C}$, donc : $\quad \overline{(AB, AP)} \equiv \overline{(CB, CA)} \ (\pi)$

La droite (BP) est tangente en B à $\mathcal{C}$, donc : $\quad \overline{(BP, BA)} \equiv \overline{(CB, CA)} \ (\pi)$

On en déduit : $\quad \overline{(S_1S_2, S_1P)} \equiv \overline{(BP, BA)} \ (\pi)$

conclusion $\quad$ Pour tout point P n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, nous avons trouvé que : $\quad \overline{(S_1S_2, S_1P)} \equiv \overline{(BP, BA)} \ (\pi)$ $\quad$ (2)

On démontre de même que : $\quad \overline{(S_1S_3, S_1P)} \equiv \overline{(CP, CA)} \ (\pi)$ $\quad$ (3)

Des relations (1) , (2) , (3) on déduit : $\overline{(S_1S_2, S_1S_3)} \equiv \overline{(BP, BA)} + \overline{(CA, CP)} \ (\pi)$ $\quad$ (α)

2eme étape $\quad$ Evaluons $\overline{(P_1P_2, P_1P_3)}$

voir figure 1 $\quad$ * Si $P \notin (BC)$, $\quad$ alors $P_1 \neq P$. $\quad \overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv \overline{(P_1P_2, P_1P)} + \overline{(P_1P, P_1P_3)} \ (\pi)$ $\quad$ (4)

Les points P_1, P_2, P, C sont cocycliques sur un cercle de diamètre [PC] , donc :

** Si $P_2 \neq C$, $\quad \overline{(P_1P_2, P_1P)} \equiv \overline{(CP_2, CP)} \ (\pi)$

** Si $P_2 = C$ $\quad (P_1P_2) = (P_1C)$ donc : $\overline{(P_1P_2, P_1P)} \equiv \frac{\pi}{2} \ (\pi)$

$(CA) \perp (CP)$ donc : $\quad \overline{(CA, CP)} \equiv \frac{\pi}{2} \ (\pi)$

Dans les deux cas , on lit : $\quad \overline{(P_1P_2, P_1P)} \equiv \overline{(CA, CP)} \ (\pi)$ $\quad$ (5)

On démontre de même que : $\quad \overline{(P_1P_3, P_1P)} \equiv \overline{(BA, BP)} \ (\pi)$ $\quad$ (6)

Des relations (4) , (5) , (6) on déduit alors : $\overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv \overline{(CA, CP)} + \overline{(BP, BA)} \ (\pi)$

* Si $P \in (BC) - \{B, C\}$, alors $P_1 = P$; $(CP) = (BP)$, donc : $\overline{(CA, CP)} + \overline{(BP, BA)} \equiv \overline{(AC, AB)} \ (\pi)$

Les points P_1, P_2, P_3, A sont cocycliques sur un cercle de diamètre $[P_1A]$, donc :

voir figure 4 $\quad$ ** Si $P_2 \neq A$ et $P_3 \neq A$, $\overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv \overline{(AP_2, AP_3)} \ (\pi)$, soit : $\overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv \overline{(AC, AB)} \ (\pi)$

voir figure 5 $\quad$ ** Si $P_2 = A$, alors $P_3 \neq A$. (AC) est tangente en A au cercle de diamètre $[P_1A]$.

on a alors : $\overline{(P_1A, P_1P_3)} \equiv \overline{(AC, AP_3)} \ (\pi)$, soit : $\overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv \overline{(AC, AB)} \ (\pi)$

On a donc encore , dans ce cas : $\quad \overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv \overline{(CA, CP)} + \overline{(BP, BA)} \ (\pi)$

Pour tout point P du plan , n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, on a démontré que : $\overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \equiv \overline{(CA, CP)} + \overline{(BP, BA)} \ (\pi)$ (β)

3eme étape $\quad$ Les relations (α) et (β) prouvent que : $\quad \boxed{\overline{(S_1S_2, S_1S_3)} \equiv \overline{(P_1P_2, P_1P_3)} \ (\pi)}$

On démontrerait de la même façon que : $\quad \boxed{\overline{(S_2S_3, S_2S_1)} \equiv \overline{(P_2P_3, P_2P_1)} \ (\pi)}$

Théorème de Simson .

$2^{\text{ème}}$ partie : propriétés des triangles podaires et circonpédal .

Soit P un point n'appartenant pas au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC , de centre O .
Soit ρ le rayon du cercle Γ circonscrit au triangle podaire $P_1P_2P_3$ de P relativement au triangle ABC .
Soit $S_1S_2S_3$ le triangle circonpédal de P relativement au triangle ABC .
Soit ρ' le rayon du cercle Γ' circonscrit au triangle podaire de P relativement au triangle $S_1S_2S_3$.
A , B , C , P_1 , P_2 , P_3 , S_1 , S_2 , S_3 désignent les réels appartenant à $]0,\pi[$, mesures respectives de $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{CBA}]$, $[\widehat{ACB}]$, $[\widehat{P_1P_2P_3}]$, $[\widehat{P_3P_2P_1}]$, $[\widehat{P_1P_3P_2}]$, $[\widehat{S_2S_1S_3}]$, $[\widehat{S_3S_2S_1}]$, $[\widehat{S_1S_3S_2}]$.

1°) Démontrer les égalités ci-dessous :

a) $2\rho = PA.\dfrac{\sin A}{\sin P_1} = PB.\dfrac{\sin B}{\sin P_2} = PC.\dfrac{\sin C}{\sin P_3}$. b) $2\rho' = PS_1.\dfrac{\sin S_1}{\sin A} = PS_2.\dfrac{\sin S_2}{\sin B} = PS_3.\dfrac{\sin S_3}{\sin C}$.

c) $\rho\rho' = \dfrac{1}{4}|OP^2 - R^2|$ où R désigne le rayon de $\mathcal{C}$

2°) Démontrer : $\dfrac{PB}{PS_3} = \dfrac{\sin A}{\sin S_1}$; en déduire : $\dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{\sin A \times \sin B \times \sin C}{\sin S_1 \times \sin S_2 \times \sin S_3}$.

figure 1

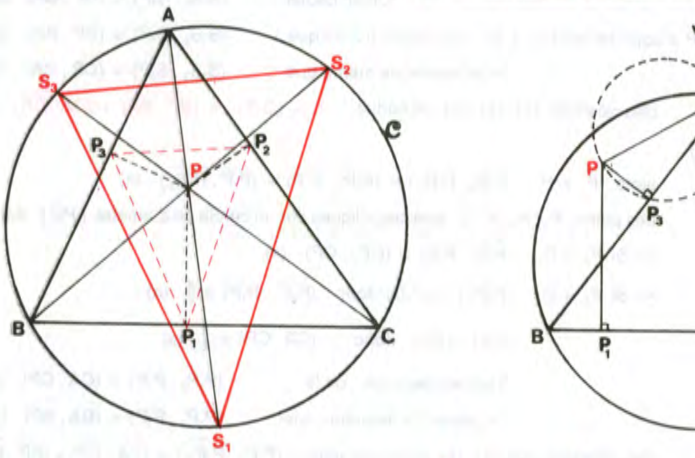
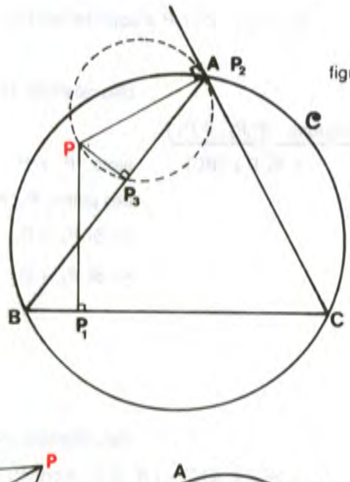
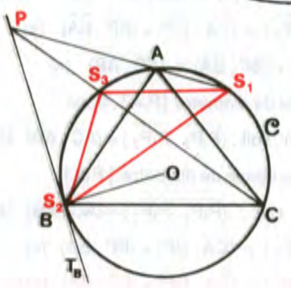


figure 2





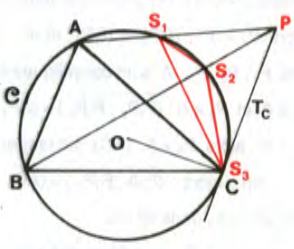


figure 4

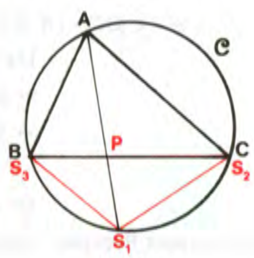
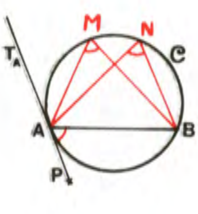
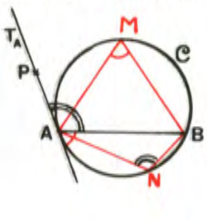


figure 5

rappel : Soit A et B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$. Soit T_A la tangente en A à $\mathcal{C}$.
Soit M et N deux points quelconques de $\mathcal{C} - \{A, B\}$.





Alors les angles inscrits $\widehat{ANB}$ et $\widehat{AMB}$ sont égaux ou supplémentaires , donc : $\sin\widehat{ANB} = \sin\widehat{AMB}$.
Soit P appartenant à T_A . Alors $\widehat{PAB}$ et $\widehat{AMB}$ sont égaux ou supplémentaires , donc : $\sin\widehat{PAB} = \sin\widehat{AMB}$.

1°) a) Les points A, P_2, P_3 appartiennent au cercle de diamètre $[AP]$.

voir figure 1 $*$ Si $P_2 \neq A$ et $P_3 \neq A$, alors $\widehat{P_3AP_2}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux ou supplémentaires.

voir IV 2°) page 100 Dans le triangle P_2AP_3, on a alors : $\dfrac{P_2P_3}{\sin\widehat{P_2AP_3}} = AP$ et $\sin\widehat{P_2AP_3} = \sin\widehat{BAC}$

On trouve alors : $P_2P_3 = AP\sin\widehat{A}$.

voir figure 2 $*$ Si $P_2 = A$, (alors $P_3 \neq A$). Dans le triangle APP_3, rectangle en P_3, on a : $P_2P_3 = AP\sin\widehat{P_3PA}$

voir rappel page 184 La droite (AC) est tangente en A au cercle de diamètre $[AP]$, d'où : $\sin\widehat{P_3PA} = \sin\widehat{P_3AC}$

$P_3 \in (AB) - \{A\}$, donc $\widehat{P_3AC}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux ou supplémentaires

On trouve encore : $P_2P_3 = AP\sin\widehat{A}$

Par ailleurs, le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ a pour rayon ρ, donc : $\dfrac{P_2P_3}{\sin\widehat{P_1}} = 2\rho$, soit : $2\rho = PA\dfrac{\sin\widehat{A}}{\sin\widehat{P_1}}$

De même, on démontre que : $2\rho = PB\dfrac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{P_2}}$ et $2\rho = PC\dfrac{\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{P_3}}$

voir page 182 Les triangles $P_1P_2P_3$ et $S_1S_2S_3$ sont semblables, donc $\widehat{P_1} = \widehat{S_1}$; $\widehat{P_2} = \widehat{S_2}$; $\widehat{P_3} = \widehat{S_3}$.

Par conséquent $\boxed{2\rho = PA\dfrac{\sin A}{\sin S_1} = PB\dfrac{\sin B}{\sin S_2} = PC\dfrac{\sin C}{\sin S_3}}$ (1)

1°) b) Le triangle circonpédal de P relativement au triangle $S_1S_2S_3$ est ... le triangle ABC.

Le résultat du 1°) a) appliqué aux triangles podaire et circonpédal de P par rapport au triangle $S_1S_2S_3$ s'écrit :

$\boxed{2\rho' = PS_1\dfrac{\sin S_1}{\sin A} = PS_2\dfrac{\sin S_2}{\sin B} = PS_3\dfrac{\sin S_3}{\sin C}}$ (2)

1°) c) Des relations (1) et (2), on déduit alors : $4\rho\rho' = PA \times PS_1 = PB \times PS_2 = PC \times PS_3$

Mais : $\overline{PA} \times \overline{PS_1} = \overline{PB} \times \overline{PS_2} = \overline{PC} \times \overline{PS_3} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P) = OP^2 - R^2$, d'où : $\boxed{\rho\rho' = \frac{1}{4}|OP^2 - R^2|}$

2°) a) $*$ <u>Supposons : $P \notin (BC)$</u>

Alors, les points P, B, S_3 sont non alignés et on a : $\dfrac{PB}{\sin\widehat{PS_3B}} = \dfrac{PS_3}{\sin\widehat{PBS_3}}$ d'où : $\dfrac{PB}{PS_3} = \dfrac{\sin\widehat{PS_3B}}{\sin\widehat{PBS_3}}$

Justifions que : $\sin\widehat{PS_3B} = \sin\widehat{A}$

voir figure 1 $*$ Si $P \notin T_C$, alors $S_3 \neq C$; $\widehat{PS_3B}$ et $\widehat{CS_3B}$ sont égaux ou supplémentaires.

on a : $\sin\widehat{PS_3B} = \sin\widehat{CS_3B}$ et $\sin\widehat{CS_3B} = \sin\widehat{CAB}$ (angles inscrits), d'où : $\sin\widehat{PS_3B} = \sin\widehat{CAB}$

voir figure 4 $*$ Si $P \in T_C$, alors $S_3 = C$; $\widehat{PS_3B} = \widehat{PCB}$ et $\sin\widehat{PCB} = \sin\widehat{CAB}$ d'où : $\sin\widehat{PS_3B} = \sin\widehat{CAB}$

Justifions que : $\sin\widehat{PBS_3} = \sin\widehat{S_1}$

voir figure 1 $*$ Si $P \notin T_B$, alors $S_2 \neq B$; $\widehat{PBS_3}$ et $\widehat{S_2BS_3}$ sont égaux ou supplémentaires

on a : $\sin\widehat{PBS_3} = \sin\widehat{S_2BS_3}$ et $\sin\widehat{S_2BS_3} = \sin\widehat{S_2S_1S_3}$ (angles inscrits), d'où : $\sin\widehat{PBS_3} = \sin\widehat{S_2S_1S_3}$

voir figure 3 $*$ Si $P \in T_B$, alors $S_2 = B$; $\widehat{PBS_3} = \widehat{PS_2S_3}$ et (PS_2) est tangente en S_2 à $\mathcal{C}$.

On a alors $\sin\widehat{PS_2S_3} = \sin\widehat{S_2S_1S_3}$, d'où : $\sin\widehat{PBS_3} = \sin\widehat{S_2S_1S_3}$

On a donc démontré : $\boxed{\text{si } P \notin (BC), \text{ alors } \dfrac{PB}{PS_3} = \dfrac{\sin A}{\sin S_1}}$

voir figure 5 $*$ <u>Supposons : $P \in (BC)$</u>. Alors $S_3 = B$ et $S_2 = C$.

On a : $\dfrac{PB}{PS_3} = 1$ et $\begin{cases} \sin\widehat{S_2S_1S_3} = \sin\widehat{BS_1C} \\ \sin\widehat{BS_1C} = \sin\widehat{BAC} \text{ (angles inscrits)}, \end{cases}$ d'où : $\sin\widehat{S_2S_1S_3} = \sin\widehat{BAC}$

On a donc : $\dfrac{\sin A}{\sin S_1} = 1$ et on trouve encore : $\dfrac{PB}{PS_3} = \dfrac{\sin A}{\sin S_1}$

2°) b) $2\rho = PB\dfrac{\sin B}{\sin S_2}$ et $2\rho' = PS_3\dfrac{\sin S_3}{\sin C}$, d'où : $\dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{PB}{PS_3} \times \dfrac{\sin B}{\sin S_2} \times \dfrac{\sin C}{\sin S_3}$, soit : $\boxed{\dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{\sin A \times \sin B \times \sin C}{\sin S_1 \times \sin S_2 \times \sin S_3}}$

Théorème de Simson .

3^{eme} partie : ensemble des points M du plan dont le triangle podaire $M_1M_2M_3$ relativement au triangle ABC a une aire imposée s .

Soit S l'aire d'un triangle ABC , inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R , de centre O .

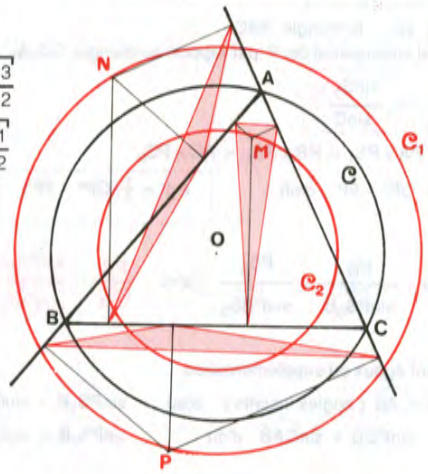
1°) Soit P un point n'appartenant pas à $\mathcal{C}$ et soit σ l'aire du triangle podaire $P_1P_2P_3$ de P relativement au triangle ABC .

Démontrer : $\sigma = \dfrac{S}{4R^2} \cdot |OP^2 - R^2|$

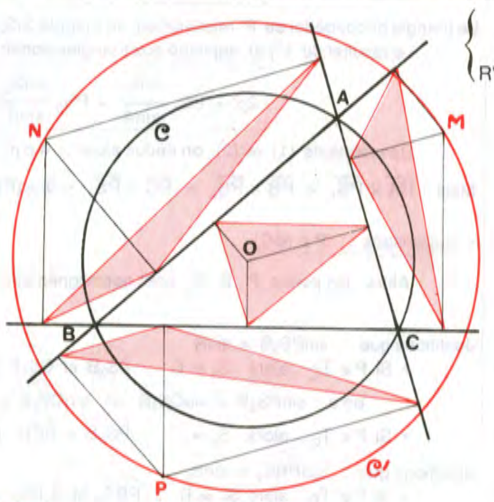
2°) Soit $s \in R^{+*}$. Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont le triangle podaire $M_1M_2M_3$ relativement au triangle ABC a une aire égale au réel s donné .

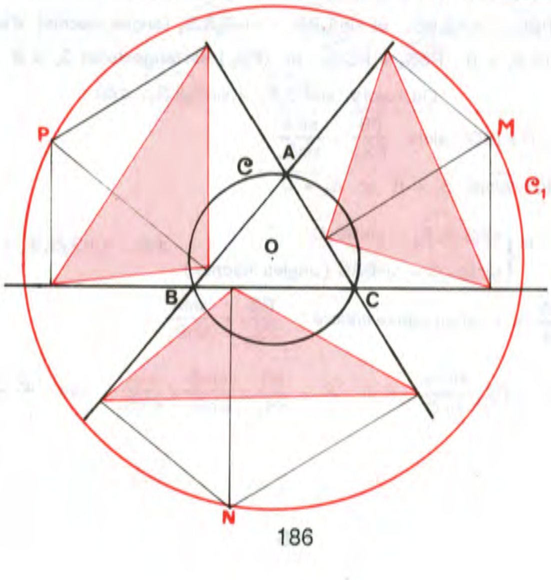
Démontrer que :
* si $s > S/4$, alors $\Gamma = \mathcal{C}_1$; $\mathcal{C}_1$: cercle de centre O , de rayon R_1 ; $R\sqrt{2} < R_1$.
* si $s = S/4$, alors $\Gamma = \mathcal{C}' \cup \{O\}$; $\mathcal{C}'$: cercle de centre O, de rayon $R\sqrt{2}$.
* si $0 < s < S/4$, alors $\Gamma = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$; $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$: cercles de centre O , de rayons R_1 et R_2 ; $R_2 < R < R_1 < R\sqrt{2}$

$$\begin{cases} s = \dfrac{S}{8} \\ R_1 = R\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ R_2 = R\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} s = \dfrac{S}{4} \\ R' = R\sqrt{2} \end{cases}$$





$$\begin{cases} s = 2S \\ R_1 = 3R \end{cases}$$

1°) Pour un triangle ABC dont l'aire est S et dont le cercle circonscrit a pour rayon R, on a : $\sin\widehat{A} . \sin\widehat{B} . \sin\widehat{C} = \dfrac{S}{2R^2}$

voir 1°) d) page 102 Le triangle podaire $P_1P_2P_3$, d'aire σ, inscrit dans un cercle de rayon ρ vérifie alors : $\sin\widehat{P_1} . \sin\widehat{P_2} . \sin\widehat{P_3} = \dfrac{\sigma}{2\rho^2}$

voir page 182 Le triangle circonpédal $S_1S_2S_3$ de P relativement au triangle ABC est semblable au triangle $P_1P_2P_3$.

On a donc : $\widehat{S_1} = \widehat{P_1}$; $\widehat{S_2} = \widehat{P_2}$; $\widehat{S_3} = \widehat{P_3}$ et, par conséquent : $\sin\widehat{S_1} . \sin\widehat{S_2} . \sin\widehat{S_3} = \dfrac{\sigma}{2\rho^2}$.

voir 2°) page 184 On sait que : $\dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{\sin A . \sin B . \sin C}{\sin S_1 . \sin S_2 . \sin S_3}$, donc : $\dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{S}{R^2} \times \dfrac{\rho^2}{\sigma}$

voir 1°) c) page 184 On trouve ainsi : $\sigma = \dfrac{S}{\rho^2} . \rho\rho'$, c'est à dire, puisque $\rho\rho' = \dfrac{1}{4} | OP^2 - R^2 |$, $\boxed{\sigma = \dfrac{S}{4R^2} . | OP^2 - R^2 |}$

2°) Γ est l'ensemble des points M, n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, qui vérifient : $\dfrac{S}{4R^2} . | OM^2 - R^2 | = s$

c'est à dire : $OM^2 = R^2 \left(1 + \dfrac{4s}{S} \right)$ ou $OM^2 = R^2 \left(1 - \dfrac{4s}{S} \right)$ (1)

$\boxed{\text{Si } s > \dfrac{S}{4}}$ alors $1 - \dfrac{4s}{S} < 0$. $\boxed{\Gamma \text{ est le cercle de centre O, de rayon } R_1, \ R_1 = R\sqrt{1 + \dfrac{4s}{S}}}$

On a alors $\dfrac{4s}{S} > 1$, donc : $R_1 > R\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Si } s = \dfrac{S}{4}}$ alors M appartient à Γ si, et seulement si $OM^2 = 2R^2$ ou $OM^2 = 0$.

$\boxed{\Gamma = \mathcal{C}' \cup \{O\} \text{ où } \mathcal{C}' \text{ est le cercle de centre O et de rayon } R\sqrt{2}.}$

remarque

Le point O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, le triangle podaire de O est le triangle médian A'B'C' du triangle ABC (A' = m (B, C) ; B' = m (C, A) ; C = m (A, B)).

voir page 12 Les points A', B', C' sont images respectives de A, B, C par l'homothétie $\mathcal{H}(G, -\frac{1}{2})$

(où G est l'isobarycentre de { A, B, C } .

L'aire du triangle médian A'B'C' est : $(-\frac{1}{2})^2 \times$ aire (ABC).

On retrouve ainsi que le triangle podaire de O relativement au triangle ABC a une aire égale à S/4 .

$\boxed{\text{Si } 0 < s < \dfrac{S}{4}}$ alors M appartient à Γ si, et seulement si : $OM = R\sqrt{1 + \dfrac{4s}{S}}$ ou $OM = R\sqrt{1 - \dfrac{4s}{S}}$,

or $0 < \dfrac{4s}{S} < 1$, donc $0 < R\sqrt{1 - \dfrac{4s}{S}} < R < R\sqrt{1 + \dfrac{4s}{S}} < R\sqrt{2}$.

$\boxed{\Gamma \text{ est la réunion de deux cercles concentriques (de même centre O que } \mathcal{C}) \text{ dont les rayons respectifs } R_1 \text{ et } R_2 \text{ vérifient : } 0 < R_2 < R < R_1 < R\sqrt{2}.}$

remarque Si on convient d'écrire : aire $(M_1M_2M_3) = 0$ si, et seulement si les points M_1, M_2, M_3 sont alignés,

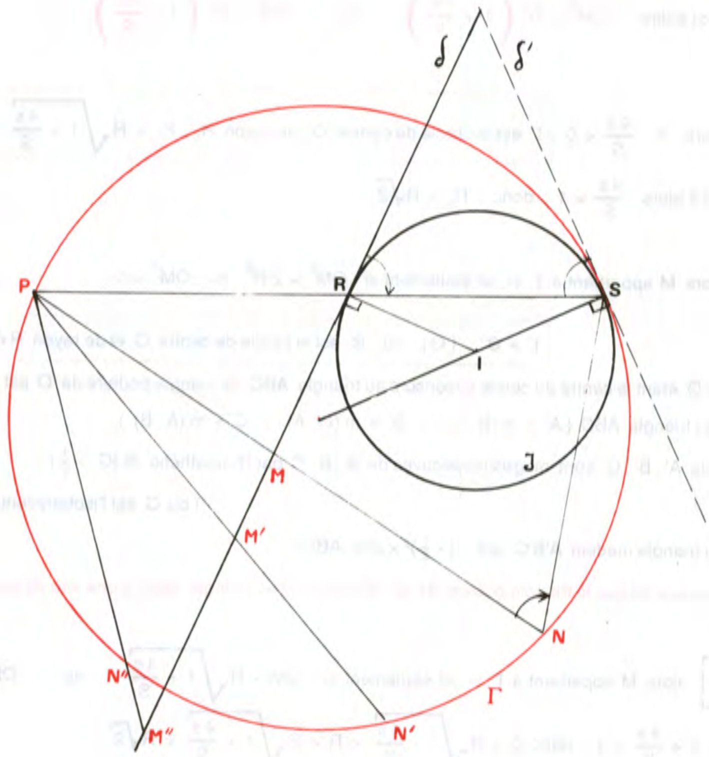
voir page 42 les conditions (1) permettent de retrouver la caractérisation déja étudiée : aire $(M_1M_2M_3) = 0 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$.

Théorème de Feuerbach . Points de Feuerbach .

1ère partie : préliminaire .

Soit $\mathcal{J}$ un cercle de centre I et de rayon r .
Soit P un point fixé , $P \notin \mathcal{J}$.
Soit δ une tangente à $\mathcal{J}$, δ ne contenant pas P .
Soit $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(P)$ la puissance du point P par rapport à $\mathcal{J}$. Alors : $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(P) = IP^2 - r^2$.

A tout point M de δ , on associe le point N de la droite (PM) tel que : $\overline{PM} \times \overline{PN} = \mathcal{P}_{\mathcal{J}}(P)$
Démontrer que : quand le point M décrit la droite δ , l'ensemble des points N est un cercle Γ , contenant P et tangent au cercle donné $\mathcal{J}$, privé du point P .



Notions utilisées :
* cocyclicité de quatre points
* angles orientés de droites
* puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit R le point de contact de δ et de $\mathcal{J}$.

La droite (PR) recoupe alors $\mathcal{J}$ en un point S distinct de R (puisque $P \notin \delta$).

Supposons $M \in \delta$ et $M \neq R$.

Soit δ' la tangente en S à $\mathcal{J}$.

voir rappel page 83

Les droites δ et δ' sont symétriques par rapport à la médiatrice de (R , S) .

On a donc : $(SR , \delta') \equiv - (RS , \delta) \quad (\pi)$

Lisons : $(SP , \delta') \equiv (RM , RS) \quad (\pi)$ (1)

voir I 1°) page 176

On a par ailleurs : $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(P) = \overline{PR} \times \overline{PS}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(P) \neq 0$ car $P \notin \mathcal{J}$

On a : $M \neq R$, donc les droites (PM) et (PR) sont distinctes et donc : $N \neq S$.

voir I 2°) page 176

La condition : $\overline{PM} \times \overline{PN} = \overline{PR} \times \overline{PS}$ équivaut alors à la condition :

les points M , N , R , S sont cocycliques et distincts de P (car $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(P) \neq 0$) (2)

Par conséquent , la condition (2) est équivalente à : $(RM , RS) \equiv (NP , NS) \quad (\pi)$

En utilisant (1) , la condition $\overline{PM} \times \overline{PN} = \mathcal{P}_{\mathcal{J}}(P)$ équivaut à : $(SP , \delta') \equiv (NP , NS) \quad (\pi)$ (3)

or l'ensemble des points N , distincts de P et S , vérifiant (3) est le cercle Γ , contenant P et S , tangent en S à δ' , privé des points P et S .

Supposons : $M \in \delta$ et $M = R$.

La relation : $\overline{PM} \times \overline{PN} = \overline{PR} \times \overline{PS}$ équivaut alors à : $\overline{PN} = \overline{PS}$, c'est à dire à : N = S

conclusion

Quand le point M décrit la droite δ , le point N décrit le cercle Γ privé de P où Γ est le cercle contenant P et tangent en S à $\mathcal{J}$.

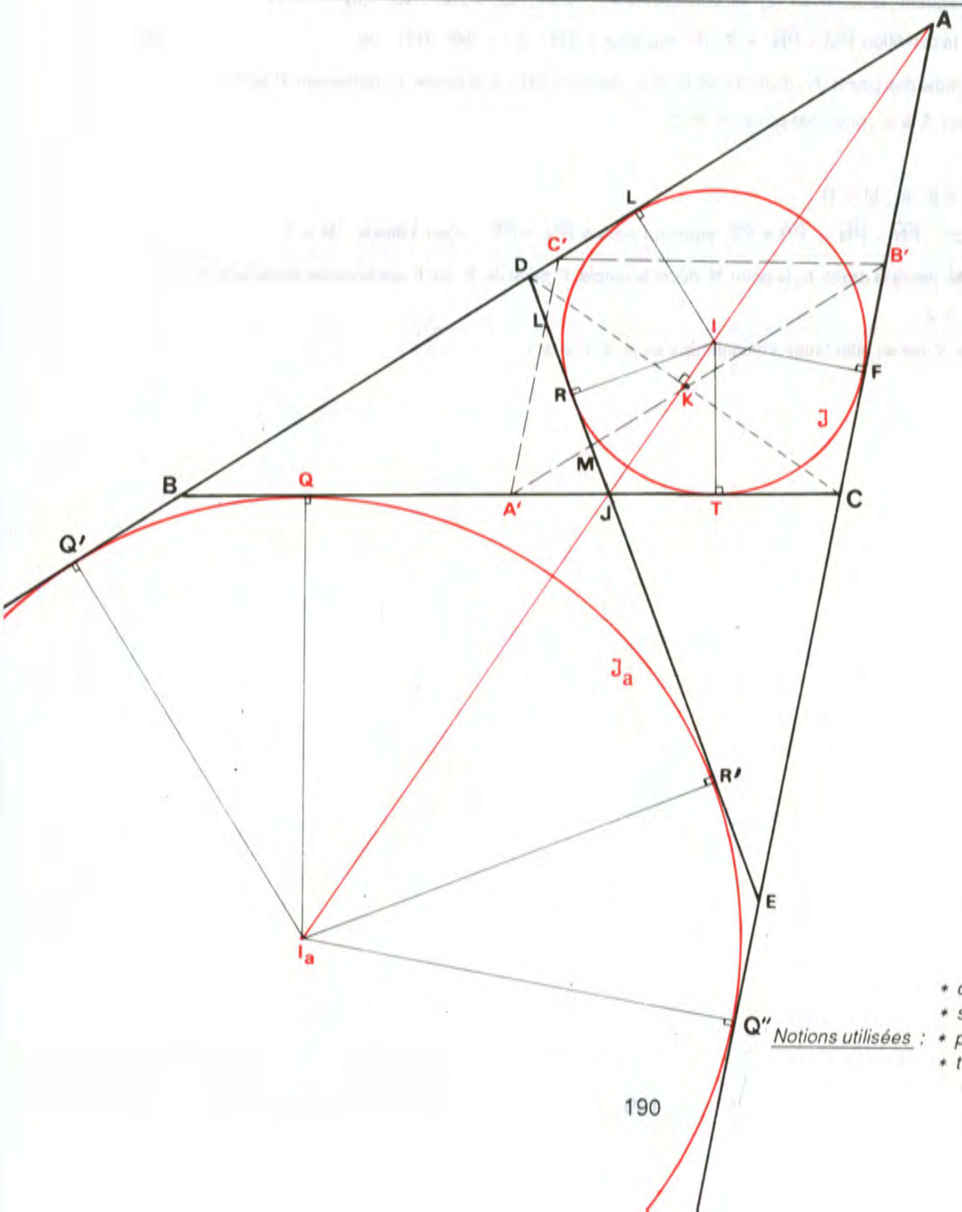
La droite δ' est en effet tangente commune en S à $\mathcal{J}$ et à Γ .

Théorème de Feuerbach . Points de Feuerbach .

2eme partie : lemmes .

Soit ABC un triangle supposé non isocèle .
Soit A', B', C' les milieux respectifs de (B, C), (C, A), (A, B) .
Soit $\begin{cases} \mathcal{J} \text{ le cercle de centre } I \text{, inscrit dans le triangle } ABC . \\ \mathcal{J}_a \text{ le cercle de centre } I_a \text{, exinscrit dans l'angle } A \text{ du triangle } ABC . \end{cases}$
Soit T et Q les points de contact respectifs de (BC) avec $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}_a$.
On note : $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$; $a + b + c = 2p$.
On pose : $D = S_{IA}(C)$ et $E = S_{IA}(B)$.

1°) Justifier que le milieu K de (D, C) appartient à (AI) et à $(A'B')$.
2°) Justifier que A' est milieu de (Q, T) . Etablir : $A'K' = A'T$.
3°) La droite (DE) coupe $(A'B')$ et $(A'C')$ respectivement en M et L .
Démontrer : $\overline{A'M} \times \overline{A'B'} = A'K^2$ et $\overline{A'L} \times \overline{A'C'} = A'K^2$.



Notions utilisées :
- *colinéarité*
- *symétrie orthogonale*
- *propriétés des bissectrices*
- *théorème de Thalès*

Le triangle ABC est supposé non isocèle . Supposons , par exemple , AB > AC .

$D = S_{IA}(C)$ et $E = S_{IA}(B)$ donc $D \in]AB[$ et $C \in]AE[$.

Soit $R = S_{IA}(T)$ et $R' = S_{IA}(Q)$.

La droite (BC) est tangente à $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}_a$ respectivement en T et Q , donc :

la droite (DE) est tangente à $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}_a$ respectivement en R et R' .

1°) La droite (AI) est la médiatrice de (D , C) , donc : $\boxed{K \in (AI)}$.

$$\overrightarrow{A'K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et non nuls (car AB > AC > 0) .

Les vecteurs $\overrightarrow{A'K}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont donc , eux aussi , colinéaires et non nuls .

On a donc (A'K) // (A'B') et , plus précisément , (A'K) = (A'B') , donc : $\boxed{K \in (A'B')}$.

2°) Comparons les distances A'K , A'T et A'Q .

$\overrightarrow{A'K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ donc $A'K = \frac{1}{2}BD$. Or $BD = AB - AD$, donc : $A'K = \frac{c - b}{2}$.

voir 3°) page 80 On a déja démontré que : $A' = m(T, Q)$, donc : $A'Q = A'T$

voir 2°) page 83 et que : $BQ = CT = p - c$ c'est à dire : $BQ = CT = \frac{a + b - c}{2}$

On a supposé $c > b$, donc : $BQ < \frac{a}{2}$ et $CT < \frac{a}{2}$, c'est à dire : $BQ < BA'$ et $CT < CA'$

Les points B , Q , A' , T , C sont donc alignés dans cet ordre , et on a : $A'T = A'C - CT$, c'est à dire : $A'T = \frac{c - b}{2}$.

On a donc : $\boxed{A'K = A'T = A'Q}$

3°) Démontrons que : $\overline{A'M} \times \overline{A'B'} = A'K^2$.

Les points A' , M , K , B' sont alignés sur une parallèle à (AB) .

On a : $J \neq A'$ (sinon le triangle ABC serait isocèle) , donc il existe k tel que : $\overrightarrow{JA'} = k\overrightarrow{JB}$ et $k \in \mathbb{R}^*$

Projetons les points alignés J , A' , B suivant la direction de la droite (AB) ,

* d'une part sur la droite (JD) , alors : $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JD}$
* d'autre part sur la droite (JA) , alors : $\overrightarrow{JK} = k\overrightarrow{JA}$

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{JM} - \overrightarrow{JA'} = k(\overrightarrow{JD} - \overrightarrow{JB}) \\ \overrightarrow{A'K} = \overrightarrow{JK} - \overrightarrow{JA'} = k(\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB}) \end{cases}$ donc : $\begin{cases} \overrightarrow{A'M} = k\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{A'K} = k\overrightarrow{BA} \end{cases}$

On obtient par conséquent : $\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'K}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}$ (1)

mais $\overrightarrow{A'K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, donc : $\overline{A'K} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ et $\overline{A'B'} = \frac{1}{2}\overline{BA}$

Par conséquent , on a aussi : $\frac{\overline{A'K}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}$ (2)

Les relations (1) et (2) donnent : $\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'K}} = \frac{\overline{A'K}}{\overline{A'B'}}$, d'où : $\boxed{\overline{A'M} \times \overline{A'B'} = A'K^2}$.

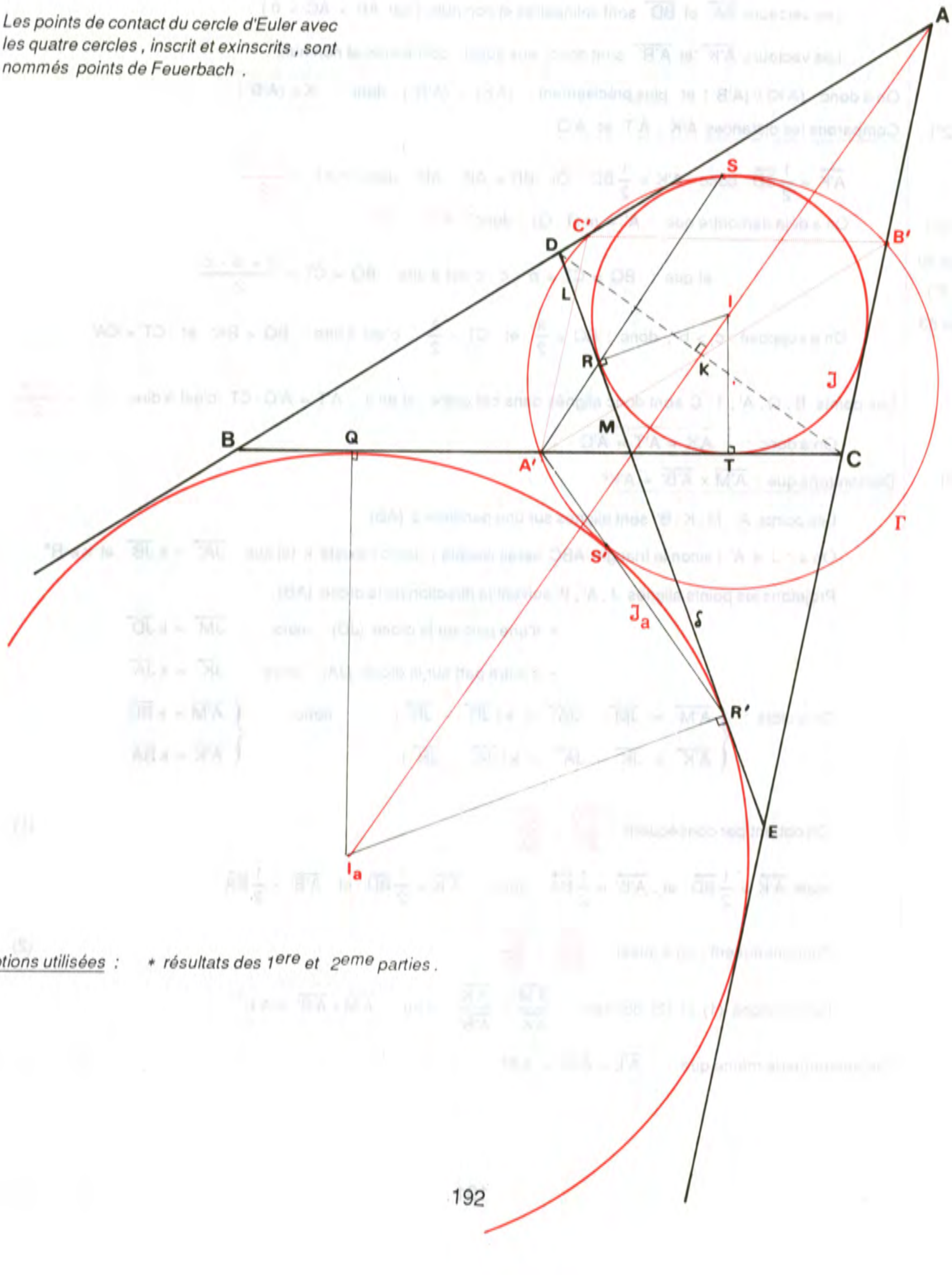
On démontre de même que : $\boxed{\overline{A'L} \times \overline{A'C'} = A'K^2}$

Théorème de Feuerbach et points de Feuerbach .

3^{eme} partie : théorème de Feuerbach .

> Le cercle d'Euler d'un triangle ABC est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits du triangle ABC .

Les points de contact du cercle d'Euler avec les quatre cercles , inscrit et exinscrits , sont nommés points de Feuerbach .



Notions utilisées : * *résultats des 1^{ere} et 2^{eme} parties .*

1°)	Supposons le triangle ABC non isocèle . Notons : $(DE) = \delta$.
1ere partie page 188	Utilisons le théorème préliminaire :
	$A' \notin \mathcal{J}$ (sinon le triangle ABC serait isocèle) . De même , $A' \notin \mathcal{J}_a$.
	La droite δ est tangente à $\mathcal{J}$ en R et à $\mathcal{J}_a$ en R' (voir page 191) . En outre : $A' \notin \delta$.
1°) a)	La puissance de A' par rapport au cercle inscrit $\mathcal{J}$ est $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(A') = A'T^2$.
	On sait que : $\overline{A'M} \times \overline{A'B'} = A'K^2$ et $A'K^2 = A'T^2$, donc : $\overline{A'M} \times \overline{A'B'} = \mathcal{P}_{\mathcal{J}}(A')$
	par ailleurs : $M \in \delta$.
	On sait que : $\overline{A'L} \times \overline{A'C'} = A'K^2$ et $A'K^2 = A'T^2$, donc : $\overline{A'L} \times \overline{A'C'} = \mathcal{P}_{\mathcal{J}}(A')$
	par ailleurs : $L \in \delta$.
	Le théorème préliminaire assure alors que :
	Les points B' et C' appartiennent à un cercle Γ contenant A' et tangent au cercle $\mathcal{J}$.
	Ce cercle Γ , qui contient alors A' , B' , C' est donc le cercle d'Euler du triangle ABC .
	Le point de contact S de Γ et de $\mathcal{J}$ est le point où (A'R) recoupe $\mathcal{J}$.
1°) b)	La puissance de A' par rapport au cercle exinscrit $\mathcal{J}_a$ est $\mathcal{P}_{\mathcal{J}_a}(A') = A'Q^2$.
	On sait que : $\overline{A'M} \times \overline{A'B'} = A'K^2$ et $A'K^2 = A'Q^2$, donc : $\overline{A'M} \times \overline{A'B'} = \mathcal{P}_{\mathcal{J}_a}(A')$
	par ailleurs : $M \in \delta$.
	On sait que : $\overline{A'L} \times \overline{A'C'} = A'K^2$ et $A'K^2 = A'Q^2$, donc : $\overline{A'L} \times \overline{A'C'} = \mathcal{P}_{\mathcal{J}_a}(A')$
	par ailleurs : $L \in \delta$.
	Le théorème préliminaire assure alors que :
	Les points B' et C' appartiennent à un cercle Γ_2 contenant A' et tangent au cercle $\mathcal{J}_a$.
	Ce cercle Γ_2 , qui contient A' , B' , C' est alors le cercle d'Euler du triangle ABC , et , par conséquent , $\Gamma_2 = \Gamma$.
	Le point de contact S' de Γ et de $\mathcal{J}_a$ est le point où (A'R') recoupe $\mathcal{J}_a$.
conclusion	Le cercle d'Euler Γ du triangle ABC est tangent en S au cercle inscrit $\mathcal{J}$ et tangent en S' au cercle exinscrit $\mathcal{J}_a$.
2°)	Supposons le triangle ABC isocèle (supposons , par exemple , AB = AC) .
	Le cercle d'Euler Γ , le cercle inscrit $\mathcal{J}$ et le cercle exinscrit $\mathcal{J}_a$ sont alors tangents à (BC) en A' .
	La propriété précédente reste donc encore vraie .
3°)	On démontre de même que Γ est tangent aux deux autres cercles exinscrits $\mathcal{J}_b$ et $\mathcal{J}_c$.

Cercles d'Apollonius .

1ère partie : centres isodynamiques d'un triangle ABC .

1°) Soit ABC un triangle supposé non isocèle . On pose : BC = a ; CA = b ; AB = c .
La droite (BC) coupe la bissectrice de $[\widehat{BAC}]$ en I_1 et la bissectrice extérieure de $[\widehat{BAC}]$ en J_1.
La droite (CA) coupe la bissectrice de $[\widehat{CBA}]$ en I_2 et la bissectrice extérieure de $[\widehat{CBA}]$ en J_2.
La droite (AB) coupe la bissectrice de $[\widehat{ACB}]$ en I_3 et la bissectrice extérieure de $[\widehat{ACB}]$ en J_3.
Soit $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ les cercles de diamètres respectifs $[I_1J_1]$, $[I_2J_2]$, $[I_3J_3]$.
On pose : $\Omega_1 = m(I_1, J_1)$; $\Omega_2 = m(I_2, J_2)$; $\Omega_3 = m(I_3, J_3)$.

a) Démontrer que $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ ont deux points communs M et N qui vérifient :
$$a\,MA = b\,MB = c\,MC \quad \text{et} \quad a\,NA = b\,NB = c\,NC .$$
b) En déduire que les points Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 sont alignés sur la médiatrice de (M , N) .

2°) Application : étant donné un triangle quelconque ABC , déterminer l'ensemble $\mathcal{G}$ des points P du plan dont le triangle podaire $P_1P_2P_3$, relativement au triangle ABC , est un triangle équilatéral .

Lorsque $\mathcal{G}$ est une paire { M , N } , les points M et N sont dits centres isodynamiques du triangle ABC .

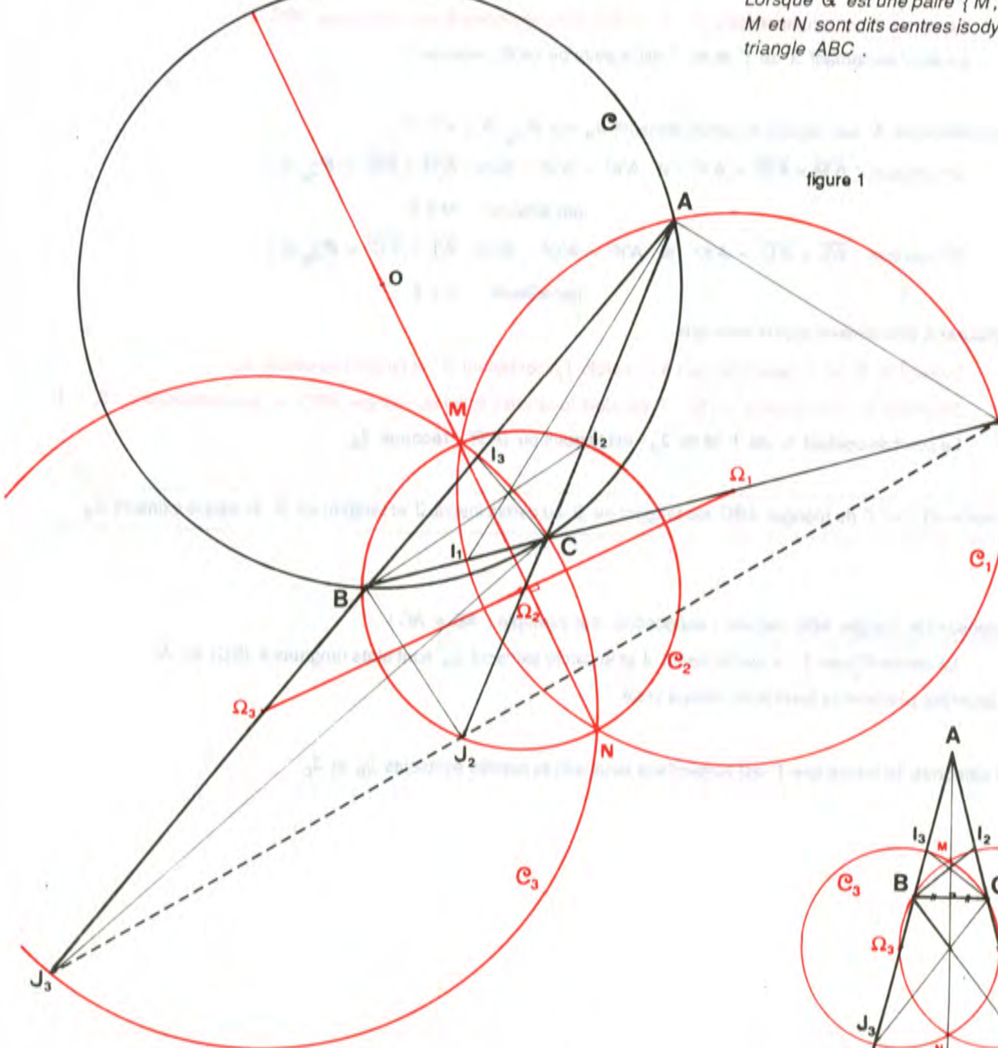


figure 1

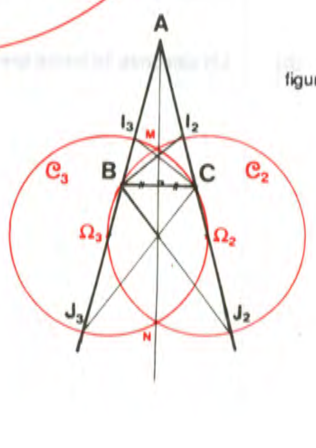


figure 2

1°) a) voir page 72

Démontrons que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants . (On sait que $\mathcal{C}_1$ contient A et que $\mathcal{C}_2$ contient B) . Rappelons que :

$I_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, c)\}$; $J_1 = \text{Bar}\{(B, b), (C, -c)\}$; $I_2 = \text{Bar}\{(A, a), (C, c)\}$; $J_2 = \text{Bar}\{(A, a), (C, -c)\}$

Supposons : $a < b < c$, alors : $\overrightarrow{CI_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CJ_1} = \frac{b}{b-c}\overrightarrow{CB}$ et $b - c < 0$, d'où : $C \in]I_1J_1[$.

$\overrightarrow{CI_2} = \frac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CJ_2} = \frac{a}{a-c}\overrightarrow{CA}$ et $a - c < 0$, d'où : $C \in]I_2J_2[$.

Le point C est donc strictement intérieur à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_2$.

Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont donc sécants ou bien l'un de ces deux cercles est intérieur à l'autre (éventuellement tangent intérieurement à l'autre) .

voir 1°) c) page 74

On a établi : $\overline{\Omega_1B} \times \overline{\Omega_1C} = \Omega_1I_1^2$, d'où : $\overline{\Omega_1B} \times \overline{\Omega_1C} = R_1^2$ (R_1 : rayon de $\mathcal{C}_1$) .

Le point C étant strictement intérieur à $\mathcal{C}_1$, $\Omega_1C < R_1$, donc : $\Omega_1B > R_1$.

Le point B est donc extérieur strictement à $\mathcal{C}_1$, or B appartient à $\mathcal{C}_2$.

Le cercle $\mathcal{C}_2$ n'est donc ni intérieur à $\mathcal{C}_1$, ni tangent intérieurement à $\mathcal{C}_1$.

On a aussi : $\overline{\Omega_2A} \times \overline{\Omega_2C} = \Omega_2I_2^2$, d'où : $\overline{\Omega_2A} \times \overline{\Omega_2C} = R_2^2$ (R_2 : rayon de $\mathcal{C}_2$) .

Le point C étant strictement intérieur à $\mathcal{C}_2$, $\Omega_2C < R_2$, donc : $\Omega_2A > R_2$.

Le point A est donc extérieur strictement à $\mathcal{C}_2$, or A appartient à $\mathcal{C}_1$.

Le cercle $\mathcal{C}_1$ n'est donc ni intérieur à $\mathcal{C}_2$, ni tangent intérieurement à $\mathcal{C}_2$.

Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont donc sécants . Posons $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{M, N\}$.

Démontrons que les points M et N appartiennent à $\mathcal{C}_3$.

Les points M et N appartiennent à $\mathcal{C}_1$, donc ils vérifient : $\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$ et $\frac{NB}{NC} = \frac{c}{b}$

Les points M et N appartiennent à $\mathcal{C}_2$, donc ils vérifient : $\frac{MC}{MA} = \frac{a}{c}$ et $\frac{NC}{NA} = \frac{a}{c}$

Calculons $\frac{MB}{MA} = \frac{MB}{MC} \times \frac{MC}{MA}$, soit $\frac{MB}{MA} = \frac{a}{b}$. Le point M appartient donc aussi à $\mathcal{C}_3$

De même $\frac{NB}{NA} = \frac{NB}{NC} \times \frac{NC}{NA}$, soit $\frac{NB}{NA} = \frac{a}{b}$. Le point N appartient aussi à $\mathcal{C}_3$

conclusion

Les cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ ont deux points communs M et N qui vérifient : $a\,MA = b\,MB = c\,MC$ et $a\,NA = b\,NB = c\,NC$

1°) b)

Les points M et N sont deux points distincts de $\mathcal{C}_1$, donc : $\Omega_1M = \Omega_1N$, d'où : $\Omega_1 \in$ med (M , N) .

De même : $\Omega_2M = \Omega_2N$, donc : $\Omega_2 \in$ med (M , N) et $\Omega_3M = \Omega_3N$, donc : $\Omega_3 \in$ med (M , N) .

Les points Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 sont donc alignés sur la médiatrice de (M , N) .

2°)

Les points P_1 , P_2 , P_3 sont non alignés si , et seulement si $\mathcal{P} \notin \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$: cercle circonscrit au triangle ABC) .

Soit R le rayon de $\mathcal{C}$ et $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les mesures respectives de $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{CBA}]$, $[\widehat{ACB}]$.

voir 1°) a) page 185

On sait que : $P_2P_3 = AP \sin\hat{A}$; $P_3P_1 = BP \sin\hat{B}$; $P_1P_2 = CP \sin\hat{C}$; $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

On a donc : $P_2P_3 = \frac{a.\,AP}{2R}$; $P_3P_1 = \frac{b.\,BP}{2R}$; $P_1P_2 = \frac{c.\,CP}{2R}$.

Le triangle podaire $P_1P_2P_3$ d'un point P relativement au triangle ABC est donc équilatéral si et seulement si P vérifie :

$a.\,PA = b.\,PB = c.\,PC$, c'est à dire : $\frac{PB}{PC} = \frac{c}{b}$ et $\frac{PC}{PA} = \frac{a}{c}$ (1)

Si le triangle ABC est non isocèle : la relation (1) équivaut à $P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, or $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{M, N\}$.

Si le triangle ABC est isocèle et non équilatéral (par exemple $b = c$, $c \neq a$) (1) équivaut à : $P \in$ med (B, C) $\cap \mathcal{C}_2$.

voir 1°) a) ci-dessus

* si $c > a$, le point C est strictement intérieur à $\mathcal{C}_2$ et B appartient à $\mathcal{C}_2$, donc m (B , C) est strictement intérieur à $\mathcal{C}_2$, or m (B , C) $\in$ med (B , C) , donc : med (B , C) $\cap \mathcal{C}_2$ est une paire { M , N } .

* si $c < a$, $\overrightarrow{AI_2} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ_2} = \frac{-c}{a-c}\overrightarrow{AC}$, donc A est strictement intérieur à $\mathcal{C}_2$

or $A \in$ med (B , C) , donc med (B , C) $\cap \mathcal{C}_2$ est encore une paire { M , N } .

Si le triangle ABC est équilatéral , la relation (1) équivaut à : PA = PB = PC , c'est à dire à :

le point P est le centre O du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .

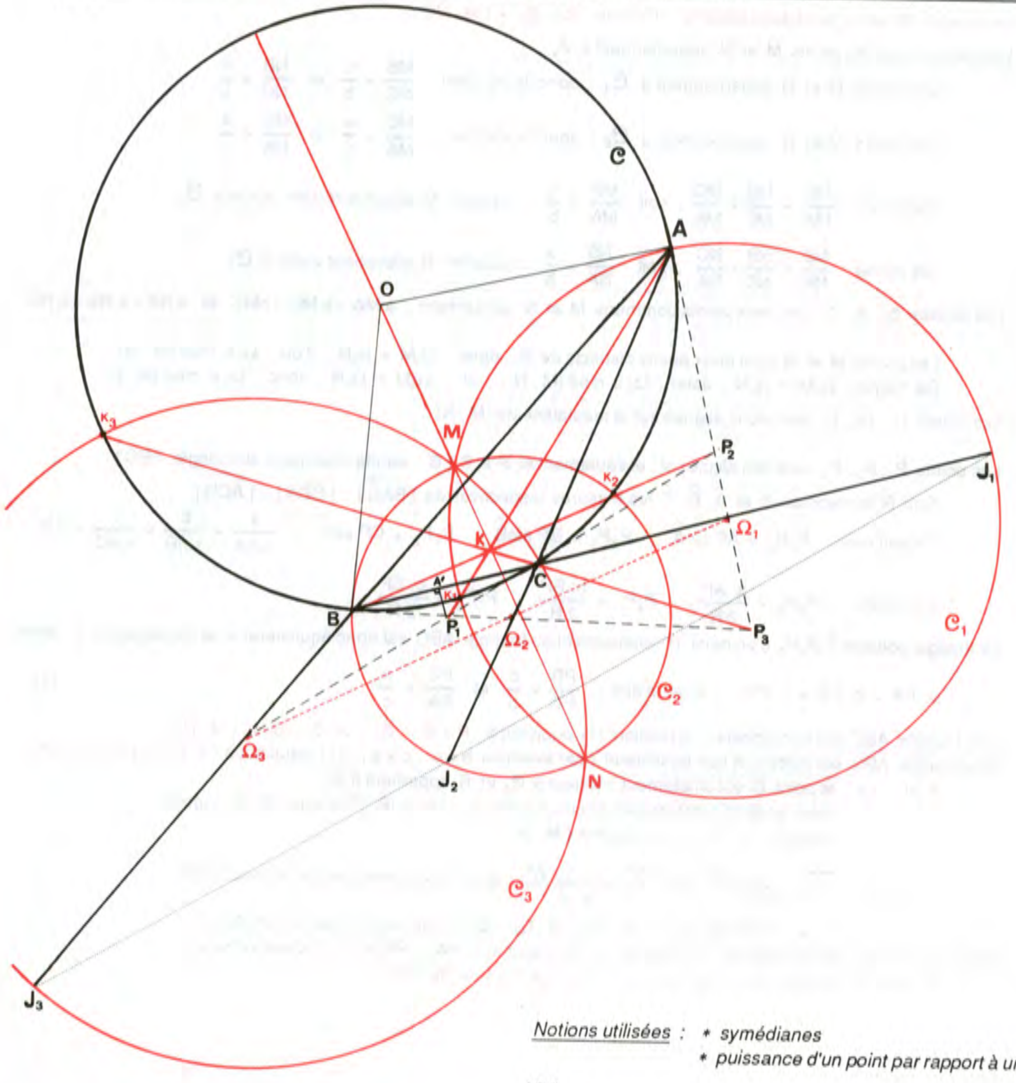
Cercles d'Apollonius .

2$^{\text{eme}}$ partie : alignement des centres isodynamiques , du point de Lemoine et du centre du cercle circonscrit .

Soit ABC un triangle supposé non isocèle , de cercle circonscrit $\mathcal{C}$.
Soit Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 les centres respectifs des trois cercles d'Apollonius $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ du triangle ABC .
Soit M et N les centres isodynamiques du triangle ABC .

1°) Démontrer que : a) * Les droites $(\Omega_1 A)$, $(\Omega_2 B)$, $(\Omega_3 C)$ sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$.
* Le cercle $\mathcal{C}$ est orthogonal à chacun des cercles d'Apollonius $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$.
b) Le centre O du cercle $\mathcal{C}$ appartient à la droite (MN) .

2°) Soit K_1 , K_2 , K_3 les points définis par : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_1 = \{A , K_1\}$; $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_2 = \{B , K_2\}$; $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_3 = \{C , K_3\}$.
a) Démontrer que (AK_1) est la symédiane issue de A dans le triangle ABC .
b) Justifier que (AK_1) , (BK_2) , (CK_3) sont trois droites concourantes et que le point de Lemoine K du triangle ABC appartient à la droite (MN) .



Notions utilisées : * *symédianes*
* *puissance d'un point par rapport à un cercle*

1°) a) On a établi la relation : $\overline{\Omega_1 B} \times \overline{\Omega_1 C} = \Omega_1 I^2$, or $\Omega_1 I_1 = \Omega_1 A$, d'où : $\overline{\Omega_1 B} \times \overline{\Omega_1 C} = \Omega_1 A^2$.

voir 1°) c) page 74 D'autre part : $\overline{\Omega_1 B} \times \overline{\Omega_1 C} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\Omega_1) = \Omega_1 O^2 - OA^2$, d'où : $\Omega_1 A^2 = \Omega_1 O^2 - OA^2$,

ce qui démontre que : $(OA) \perp (\Omega_1 A)$.

La droite $(\Omega_1 A)$ est tangente en A à $\mathcal{C}$ et la droite (OA) est tangente en A à $\mathcal{C}_1$.

Les tangentes en A aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont perpendiculaires , les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont donc orthogonaux .

On démontre de même que : les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux et que : les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_3$ sont orthogonaux .

1°) b) Le cercle $\mathcal{C}$ est orthogonal à la fois aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Le centre O de $\mathcal{C}$ appartient donc à l'axe radical (MN) de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$ (voir 2°) page 177) .

2°) a) Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont orthogonaux , donc sécants en deux points distincts A et K_1 .

L'axe radical de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}_1$ est donc (AK_1) .

Les points O et Ω_1 sont centres respectifs de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}_1$, par conséquent : $(AK_1) \perp (O\Omega_1)$.

* Si le triangle ABC est rectangle en A , le centre O de $\mathcal{C}$ est le milieu de (B , C) . La droite $(O\Omega_1)$ est alors (BC) .

La droite (AK_1) , qui est perpendiculaire à (BC) est alors la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

Cette hauteur (AK_1) est aussi la symédiane issue de A dans le triangle rectangle ABC (voir 1°) page 152)

voir 2°) page 152

* Si le triangle ABC n'est pas rectangle en A , les tangentes en B et C à $\mathcal{C}$ sont alors sécantes , en un point P_1 .

La symédiane issue de A , dans le triangle ABC est la droite (AP_1) . Remarquons : $\{P_1\} = (B\Omega_2) \cap (C\Omega_3)$

Pour prouver que $(AK_1) = (AP_1)$, il suffit de prouver que (AP_1) est l'axe radical de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}_1$.

Démontrons que : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P_1) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}_1}(P_1)$.

La droite (P_1B) est tangente en B à $\mathcal{C}$ et la droite (P_1C) est tangente en C à $\mathcal{C}$.

On a donc : $P_1B = P_1C$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P_1) = P_1B^2 = P_1C^2$ (1)

Le point Ω_1 est centre de $\mathcal{C}_1$ et $\Omega_1 I_1$ est rayon de $\mathcal{C}_1$, donc : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1}(P_1) = P_1\Omega_1^2 - \Omega_1 I_1^2$.

Posons : $A' = m(B , C)$. La droite (P_1A') est alors la médiatrice de (B , C) , donc : $(P_1A') \perp (A'\Omega_1)$.

D'une part , on a : $P_1\Omega_1^2 = P_1A'^2 + A'\Omega_1^2$ (théorème de Pythagore) (2)

D'autre part : $\begin{cases} \overline{\Omega_1 B} \times \overline{\Omega_1 C} = \Omega_1 I_1^2 \\ \overline{\Omega_1 B} \times \overline{\Omega_1 C} = (\overline{\Omega_1 A'} + \overline{A'B}).(\overline{\Omega_1 A'} - \overline{A'B}) , \end{cases}$ d'où : $\Omega_1 I_1^2 = \Omega_1 A'^2 - A'B^2$ (3)

De (2) et (3) , on déduit : $P_1\Omega_1^2 - \Omega_1 I_1^2 = P_1A'^2 + A'B^2$,

soit , puisque $(P_1A') \perp (A'B)$, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1}(P_1) = P_1B^2$ (4)

Les relations (1) et (4) assurent que : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P_1) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}_1}(P_1)$.

conclusion

La droite (AK_1) est la symédiane issue de A dans le triangle ABC .

2°) b) Les droites (AK_1) , (BK_2) , (CK_3) sont les symédianes du triangle ABC .

Elles sont donc concourantes et leur point de concours K est le point de Lemoine du triangle ABC .

La droite (AK_1) est l'axe radical de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}_1$ et $K \in (AK_1)$, donc : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(K) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}_1}(K)$.

La droite (BK_2) est l'axe radical de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}_2$ et $K \in (BK_2)$, donc : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(K) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}_2}(K)$.

On a alors : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1}(K) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}_2}(K)$, donc le point K appartient à l'axe radical (MN) de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$.

conclusion

Le centre O du cercle contenant A , B , C , le point de Lemoine K et les deux centres isodynamiques M et N sont alignés sur une droite perpendiculaire à la droite portant les centres Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 des trois cercles d'Apollonius $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$.

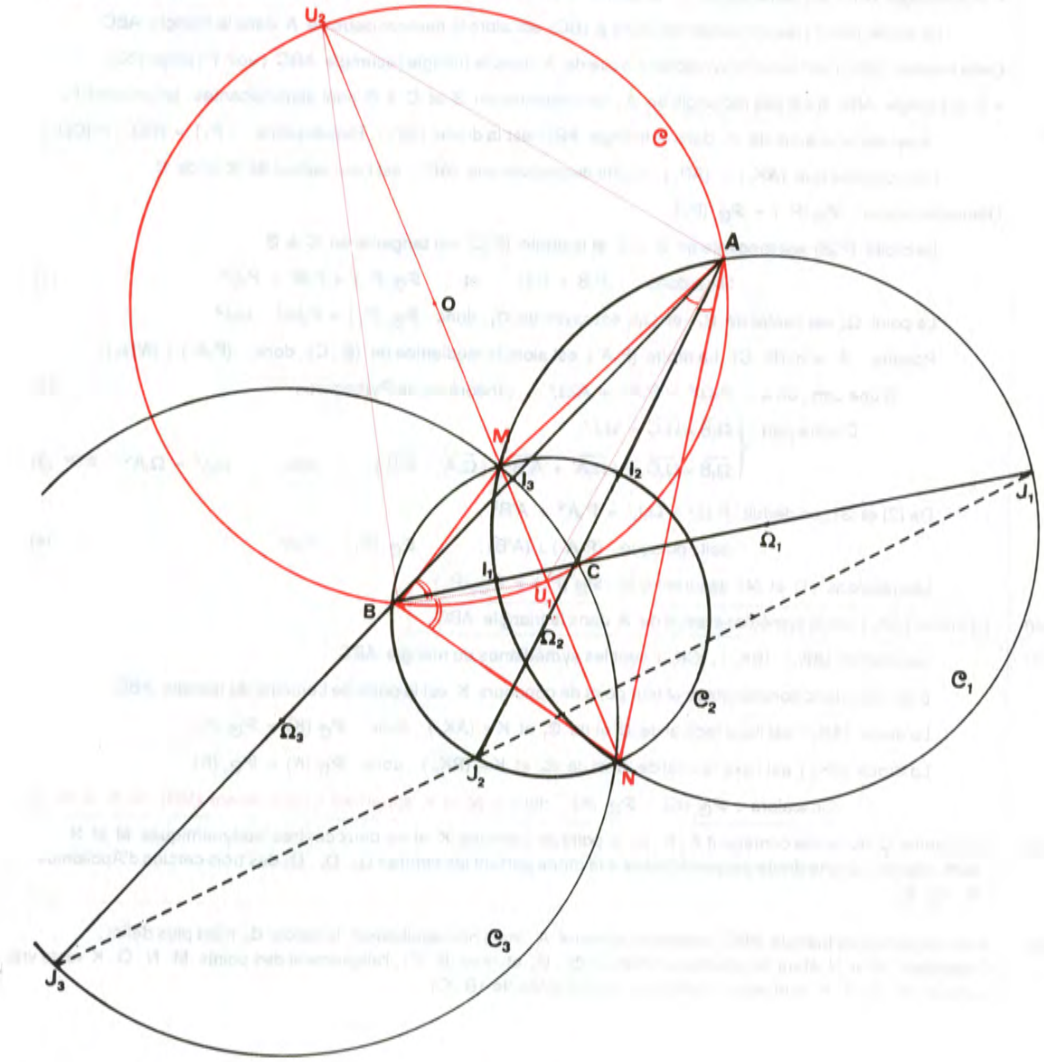
remarque

Si on considère un triangle ABC isocèle de sommet A , mais non équilatéral , le cercle $\mathcal{C}_1$ n'est plus défini . Cependant M et N étant les points communs à $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et med (B , C) , l'alignement des points M , N , O , K reste vrai puisque M , N , O , K sont alors alignés sur la médiatrice de (B , C) .

Cercles d'Apollonius .

3^{eme} partie : une propriété des centres isodynamiques .

Les notations sont celles de la 2^{eme} partie . Le triangle ABC est supposé non isocèle . Soit M et N les deux points communs aux trois cercles d'Apollonius $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ du triangle ABC . On rappelle que (MN) contient le centre O du cercle $\mathcal{C}$ et on pose : $(MN) \cap \mathcal{C} = \{ U_1, U_2 \}$. Démontrer que : les droites (AU_1) et (AU_2) sont les bissectrices de la paire { (AM) , (AN) } . les droites (BU_1) et (BU_2) sont les bissectrices de la paire { (BM) , (BN) } . les droites (CU_1) et (CU_2) sont les bissectrices de la paire { (CM) , (CN) } .



remarque

Démontrons que les points M et N n'appartiennent pas à $\{A, B, C\}$.

* Supposons, par exemple $M = A$, alors : $\overline{OA} = \overline{OM}$.

On a : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(O) = \overline{OM} \times \overline{ON} = OA^2$

On aurait donc : $\overline{ON} = \overline{OA}$, et, par conséquent : $N = A = M$,

* ce qui est impossible puisque les points N et M sont distincts.

voir page 194

Les points M et N vérifient $\begin{cases} a\,MA = b\,MB = c\,MC \\ a\,NA = b\,NB = c\,NC \end{cases}$

d'où : $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{BM}{BN} = \dfrac{CM}{CN}$

Posons λ la valeur commune de ces trois rapports $\dfrac{AM}{AN}$, $\dfrac{BM}{BN}$, $\dfrac{CM}{CN}$.

* Si on avait $\lambda = 1$, on aurait : $A \in \text{med}(M, N)$; $B \in \text{med}(M, N)$; $C \in \text{med}(M, N)$.
* Les points A, B, C seraient alignés, ce qui est impossible, donc $\lambda \neq 1$.

Soit Γ l'ensemble des points P du plan qui vérifient : $\dfrac{PM}{PN} = \lambda$.

voir 2°) a) page 74

$\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AM}{AN}$; Γ est donc un cercle dont le centre appartient à (MN), et $A \in \Gamma$.

De même, $B \in \Gamma$ et $C \in \Gamma$.

Le cercle Γ est donc le cercle circonscrit au triangle ABC.

Par conséquent : $\Gamma \cap (MN) = \mathcal{C} \cap (MN) = \{U_1, U_2\}$.

voir 2°) b) page 74

On sait que : pour tout point P de $\Gamma - \{U_1, U_2\}$, (donc de $\mathcal{C} - \{U_1, U_2\}$), les droites (PU_1) et (PU_2) sont bissectrices de la paire $\{(PM), (PN)\}$. — propriété (α)

Démontrons que : $A \in \mathcal{C} - \{U_1, U_2\}$. Par définition, $A \in \mathcal{C}$.

* Supposons $A \in \{U_1, U_2\}$; on aurait alors $A \in (U_1U_2)$, or (U_1U_2) est l'axe radical (MN) de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$.

On sait que : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1}(A) = 0$, on aurait donc : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_2}(A) = 0$.

Le point A appartiendrait à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_2$, donc $A \in \{M, N\}$,

* ce qui est impossible (voir remarque ci-dessus).

De même, on démontre que : $B \in \mathcal{C} - \{U_1, U_2\}$ et $C \in \mathcal{C} - \{U_1, U_2\}$.

La propriété (α), appliquée aux points A, B, C garantit alors que :

les droites (AU_1) et (AU_2) sont bissectrices de la paire $\{(AM), (AN)\}$.
les droites (BU_1) et (BU_2) sont bissectrices de la paire $\{(BM), (BN)\}$.
les droites (CU_1) et (CU_2) sont bissectrices de la paire $\{(CM), (CN)\}$.

Point de Torricelli .

1ère partie : existence et définition du point de Torricelli d'un triangle ABC .

Soit ABC un triangle dont le plan est supposé orienté en sorte que les angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ admettent pour mesures respectives les réels α, β, γ appartenant à $]0, \pi[$.
Soit r_1, r_2, r_3 les rotations d'angle mesurant $\frac{\pi}{3}$ rd , de centres respectifs A , B , C .
On construit , à l'extérieur du triangle ABC les triangles équilatéraux ACB' , BAC' , CBA' .
De façon plus précise , $B' = r_1(C)$; $C' = r_2(A)$; $A' = r_3(B)$.

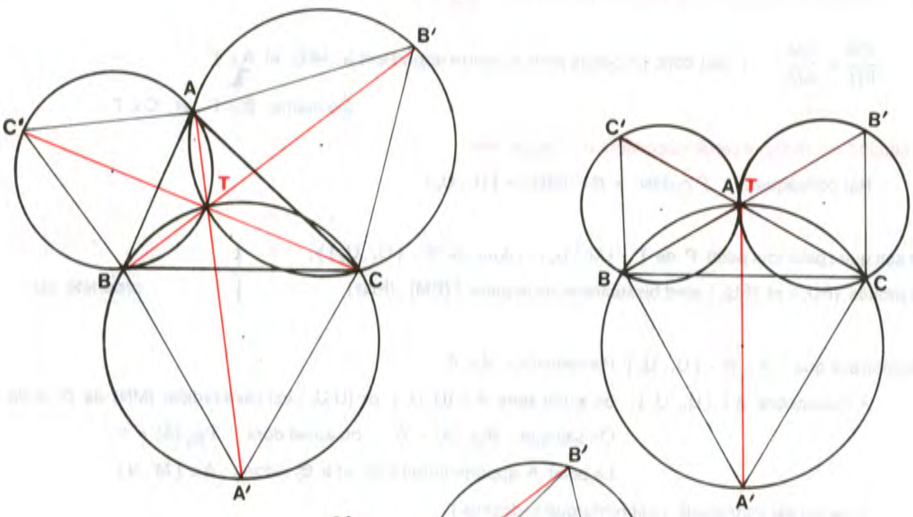
1°) Démontrer que les droites (BB') et (CC') sont sécantes et que : $CC' = BB' = AA'$.

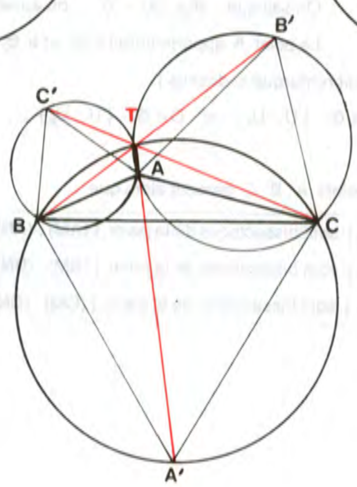
2°) On pose : $(BB') \cap (CC') = \{T\}$.

a) Démontrer que : B' , A , C , T sont cocycliques ; C' , A , B , T sont cocycliques ; A' , B , C , T sont cocycliques

b) Déterminer une mesure de l'angle de droites $(\widehat{TA, TA'})$, dans le cas où il est défini .
En déduire que : les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes .

Le point de concours T des droites (AA') , (BB') , (CC') est dit point de Torricelli du triangle ABC .





<u>*Notions utilisées*</u> :
- *rotation*
- *cocylicité*
- *symétrie orthogonale*
- *angles de vecteurs et angles de droites*

rappel | Si M et N sont deux points distincts, leurs images respectives M' et N' par une rotation d'angle mesurant θ radians vérifient : $M'N' = MN$ et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta \ (2\pi)$; on a alors : $\overline{(MN, M'N')} \equiv \theta \ (\pi)$

1°) La symétrie orthogonale par rapport à med (A, C) échange A et C, et laisse B' invariant.

On a donc : $(\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CA}) \equiv -(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC}) \ (2\pi)$, d'où : $(\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CA}) \equiv +\frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

De même : $(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) \equiv +\frac{\pi}{3} \ (2\pi)$ et $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}) \equiv +\frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

On a alors : r_1 : $C \longmapsto B'$

$C' \longmapsto B$ donc : $BB' = CC'$ et : $(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{B'B}) \equiv +\frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

Les droites (BB') et (CC') sont donc sécantes.

On a aussi : r_2 : $A \longmapsto C'$

$A' \longmapsto C$ donc : $CC' = AA'$.

2°) a) Démontrons que les points T, A, C, B' sont cocycliques et que les points T, A, B, C' sont cocycliques.

* Si $T \in \{C, B'\}$, alors T, A, C, B' sont cocycliques, car trois points non alignés sont cocycliques.
* Si $T \notin \{C, B'\}$, alors (TC) = (CC') et (TB') = (BB'), donc : $\overline{(TC, TB')} \equiv \frac{\pi}{3} \ (\pi)$ (1)

mais $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}) \equiv +\frac{\pi}{3} \ (2\pi)$, donc : $\overline{(AC, AB')} \equiv \frac{\pi}{3} \ (\pi)$ (2)

Les relations (1) et (2) assurent que les points T, A, C, B' sont cocycliques.

De même, on démontre que les points T, A, B, C' sont cocycliques.

Démontrons que les points T, B, C, A' sont cocycliques.

* Si $T \in \{C, B\}$, alors T, B, C, A' sont trois points non alignés, donc cocycliques.
* Si $T \notin \{C, B\}$, alors (TC) = (C'C) et (TB) = (B'B), donc : $\overline{(TC, TB)} \equiv \frac{\pi}{3} \ (\pi)$ (3)

Par ailleurs : $\overline{(A'C, A'B)} \equiv \overline{(CA', CB)} + \overline{(BC, BA')} \ (\pi)$

donc : $\overline{(A'C, A'B)} \equiv (-\frac{\pi}{3}) + (-\frac{\pi}{3}) \ (\pi)$, soit : $\overline{(A'C, A'B)} \equiv \frac{\pi}{3} \ (\pi)$ (4)

Les relations (3) et (4) assurent que les points T, B, C, A' sont cocycliques.

2°) b) * Si $T \in \{A, A'\}$, alors $T \in (AA')$

* Si $T \notin \{A, A'\}$, démontrons que : $\overline{(TA, TA')} \equiv 0 \ (\pi)$

** Si $T \neq C$, écrivons : $\overline{(TA, TA')} \equiv \overline{(TA, TC)} + \overline{(TC, TA')} \ (\pi)$

T, A, C, B' sont cocycliques, donc : $\overline{(TA, TC)} \equiv \overline{(B'A, B'C)} \ (\pi)$, d'où : $\overline{(TA, TC)} \equiv +\frac{\pi}{3} \ (\pi)$.

T, C, B, A' sont cocycliques, donc : $\overline{(TC, TA')} \equiv \overline{(BC, BA')} \ (\pi)$, d'où : $\overline{(TC, TA')} \equiv -\frac{\pi}{3} \ (\pi)$.

On a alors : $\overline{(TA, TA')} \equiv (+\frac{\pi}{3}) + (-\frac{\pi}{3}) \ (\pi)$, soit : $\overline{(TA, TA')} \equiv 0 \ (\pi)$

** Si $T = C$, alors $T \neq B$. Ecrivons : $\overline{(TA, TA')} \equiv \overline{(TA, TB)} + \overline{(TB, TA')} \ (\pi)$

T, A, B, C' sont cocycliques, donc : $\overline{(TA, TB)} \equiv \overline{(C'A, C'B)} \ (\pi)$, d'où : $\overline{(TA, TB)} \equiv -\frac{\pi}{3} \ (\pi)$

T, B, C, A' sont cocycliques, donc : $\overline{(TB, TA')} \equiv \overline{(CB, CA')} \ (\pi)$, d'où : $\overline{(TB, TA')} \equiv +\frac{\pi}{3} \ (\pi)$

On a alors : $\overline{(TA, TA')} \equiv (-\frac{\pi}{3}) + (+\frac{\pi}{3}) \ (\pi)$, soit : $\overline{(TA, TA')} \equiv 0 \ (\pi)$

Dans tous les cas, on a prouvé que : $\overline{(TA, TA')} \equiv 0 \ (\pi)$,

c'est à dire que le point T, commun à (BB') et (CC') appartient aussi à (AA').

Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont donc concourantes en T.

Point de Torricelli .

2^{eme} partie : position du point de Torricelli T d'un triangle ABC .

Les notations sont celles de la première partie .On se propose d'analyser comment les mesures α, β, γ des angles $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}$, $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$ permettent de préciser la position du point T .

1°) a) Démontrer que si T est intérieur strictement au triangle ABC , alors les angles $\widehat{(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB})}$, $\widehat{(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA})}$ ont même mesure $\frac{2\pi}{3}$.

b) Démontrer que les trois réels α, β, γ appartiennent alors à $]0, \frac{2\pi}{3}[$.

2°) On veut justifier que si T est extérieur strictement au triangle ABC alors l'un des réels α, β, γ appartient à $]\frac{2\pi}{3}, \pi[$

Soit $\mathcal{P}_A$ le demi-plan fermé de frontière (BC) , contenant le point A .
Soit $\mathcal{P}_B$ le demi-plan fermé de frontière (CA) , contenant le point B .
Soit $\mathcal{P}_C$ le demi-plan fermé de frontière (AB) , contenant le point C .

On suppose , par exemple , que T est extérieur strictement au triangle ABC et que $T \in \mathcal{P}_A$.

Déterminer les mesures de $\widehat{(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB})}$, $\widehat{(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA})}$.

En déduire que T n'appartient ni à $\mathcal{P}_B$ ni à $\mathcal{P}_C$. Démontrer alors : $\alpha > \frac{2\pi}{3}$.

3°) Démontrer que , si $T \in [AB] \cup [BC] \cup [CA]$, alors T est un sommet du triangle ABC .

Justifier que T est en A si , et seulement si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

4°) Conclure que : le point de Torricelli du triangle ABC est strictement intérieur au triangle ABC si , et seulement si α, β, γ appartiennent à $]0, \frac{2\pi}{3}[$.

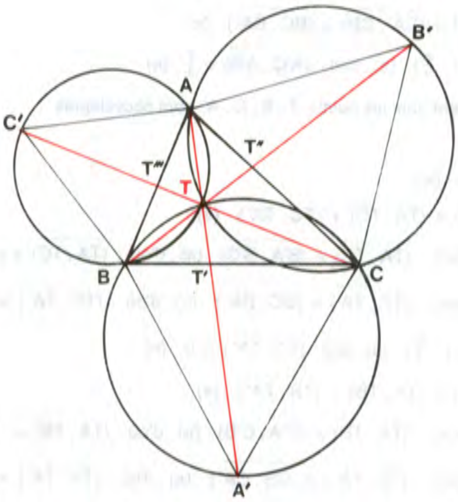


figure 1

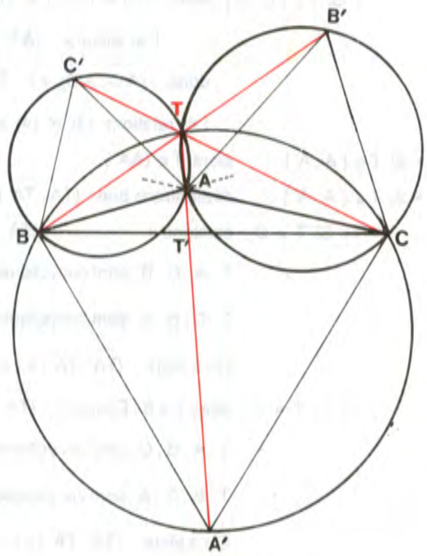
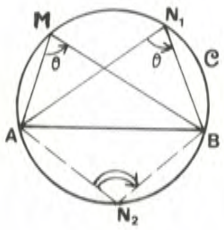


figure 2



Rappel : supposons $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta \ (2\pi)$

- Si M et N_1 appartiennent au même arc de $\mathcal{C}$, d'extrêmités A , B , alors : $(\overrightarrow{N_1A}, \overrightarrow{N_1B}) \equiv \theta \ (2\pi)$
- Si M et N_2 appartiennent à deux arcs différents de $\mathcal{C}$, d'extrêmités A , B , alors : $(\overrightarrow{N_2A}, \overrightarrow{N_2B}) \equiv \theta + \pi \ (2\pi)$

Rappelons que α, β, γ sont des réels appartenant à $]0, \pi[$.

1°) a) Supposons T intérieur strictement au triangle ABC.

Alors T et A' appartiennent à deux arcs différents, d'extrémités B et C du même cercle contenant B, C et A'.

voir figure 1 Donc : $(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) \equiv \pi + (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})$ (2π). Or on sait que : $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (2π),

on a donc : $(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) \equiv \frac{2\pi}{3}$ (2π). De même, $(\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA}) \equiv \frac{2\pi}{3}$ (2π) et $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) \equiv \frac{2\pi}{3}$ (2π)

1°) b) Posons : $(AT) \cap (BC) = \{T'\}$. Le point T est strictement intérieur au triangle ABC, donc $T' \in]BC[$ et $T \in]AT'[$.

Soit β' et γ' les mesures respectives, dans $]0, \pi[$, de $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BT})}$ et de $\widehat{(\overrightarrow{CT}, \overrightarrow{CB})}$.

On a : $(0 < \beta' < \beta)$ et $(0 < \gamma' < \gamma)$ donc : $0 < \beta' + \gamma' < \beta + \gamma$.

Dans le triangle BTC, on a : $\beta' + \frac{2\pi}{3} + \gamma' = \pi$ (1) Dans le triangle ABC, on a : $\beta + \alpha + \gamma = \pi$ (2)

Des relations (1) et (2), on déduit : $\frac{2\pi}{3} - \alpha = (\beta + \gamma) - (\beta' + \gamma')$, donc : $\alpha < \frac{2\pi}{3}$.

En posant : $(BT) \cap (CA) = \{T''\}$ et $(CT) \cap (AB) = \{T'''\}$, on démontre par la même méthode que : $\beta < \frac{2\pi}{3}$ et $\gamma < \frac{2\pi}{3}$

2°) Supposons T extérieur strictement au triangle ABC et T appartenant à $\mathcal{P}_A$.

Les points T et A' appartiennent à deux arcs différents, d'extrémités B et C du cercle contenant B, C et A'.

voir figure 2 On a encore : $(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) \equiv \pi + (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})$ (2π) d'où : $(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) \equiv \frac{2\pi}{3}$ (2π)

Les points T, A, B, C' sont cocycliques, donc $(TA, TB) \equiv (C'A, C'B)$ (π), or $(C'A, C'B) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (π).

On a alors : $(TA, TB) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (π), d'où : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (2π) ou bien $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) \equiv -\frac{\pi}{3} + \pi$ (2π)

* Supposons : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) \equiv -\frac{\pi}{3} + \pi$ (2π). On sait que : $(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (2π) On déduirait que :
T et C' appartiennent à deux arcs différents, d'extrémités A et B du cercle contenant A, B, C', or $C' \notin \mathcal{P}_C$ donc $T \in \mathcal{P}_C$

On aurait par ailleurs : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) + (\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) \equiv (-\frac{\pi}{3} + \pi) + \frac{2\pi}{3}$ (2π), c'est à dire : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC}) \equiv -\frac{2\pi}{3}$ (2π)

Or on sait que : $(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'C}) \equiv \frac{\pi}{3}$ (2π). On déduirait que :

T et B' appartiennent à deux arcs différents, d'extrémités A et C du cercle contenant A, C, B', or $B' \notin \mathcal{P}_B$ donc $T \in \mathcal{P}_B$

* On aurait donc $P \in \mathcal{P}_A \cap \mathcal{P}_B \cap \mathcal{P}_C$, ce qui est impossible puisque P est extérieur strictement au triangle ABC..

Par conséquent : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (2π), c'est à dire : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) \equiv (\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B})$ (2π),

ce qui prouve que T appartient à l'arc $[\overset{\frown}{AC'B}]$.

Les points T et C' appartiennent au même demi-plan de frontière (AB), or $C' \notin \mathcal{P}_C$, donc $T \notin \mathcal{P}_C$.

On a alors : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) + (\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$ (2π), d'où : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC}) \equiv \frac{\pi}{3}$ (2π)

La relation : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC}) \equiv (\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'C})$ (2π) prouve que T appartient à l'arc $[\overset{\frown}{AB'C}]$.

Les points T et B' appartiennent au même demi-plan de frontière (AC), or $B' \notin \mathcal{P}_B$, donc $T \notin \mathcal{P}_B$

conclusion Le point T appartient au secteur angulaire symétrique par rapport à A du secteur $[\widehat{BAC}]$.

(TA) coupe donc (BC) en un point T' qui vérifie : $T' \in]BC[$ et $A \in]TT'[$, donc A est strictement intérieur au triangle BTC

$(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) \equiv \frac{2\pi}{3}$ (2π) et $\frac{2\pi}{3} \in]0, \pi[$. On démontre, comme au 1°) b), en échangeant les rôles de A et T, que : $\frac{2\pi}{3} < \alpha$

3°) Supposons : $T \in [AB] \cup [BC] \cup [CA]$. Par exemple, supposons : $T \in [AB]$

On sait que T appartient au cercle $\mathcal{C}_3$ contenant A, B et C', or $\mathcal{C}_3 \cap [AB] = \{A, B\}$, donc $T \in \{A, B\}$.

* Si T = A, alors A appartient au cercle $\mathcal{C}_1$ contenant B, C et A', mais A et A' appartiennent à deux arcs différents

d'extrémités B et C. On a : $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ (2π), donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} + \pi$ (2π), soit : $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

réciproque * Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, alors : $A \in [BB']$ et $A \in [CC']$; on a donc $(BB') \cap (CC') = \{A\}$, d'où : T = A.

4°) Supposons que les trois réels α, β, γ appartiennent à $]0, \frac{2\pi}{3}[$.

* Si on avait $T \in [AB] \cup [BC] \cup [CA]$, on aurait T = A ou T = B ou T = C, donc $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ou $\beta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\gamma = \frac{2\pi}{3}$,
ce qui contrarie l'hypothèse (voir 3°)).

voir 2°) ** Si on avait T extérieur strictement au triangle ABC, l'un des réels α, β, γ n'appartiendrait pas à $]0, \frac{2\pi}{3}[$
(par exemple, si $T \in \mathcal{P}_A$, alors $\alpha > \frac{2\pi}{3}$), ce qui contrarie l'hypothèse.

Le point T est donc intérieur strictement au triangle ABC. Compte tenu du 1°), on conclut :

conclusion $\boxed{\text{Le point T est intérieur strictement au triangle ABC si, et seulement si } \alpha, \beta, \gamma \text{ appartiennent à }]0, \tfrac{2\pi}{3}[.}$

Point de Torricelli .

3^{eme} partie : valeur minimale de la somme MA + MB + MC . Problème de Fermat

A) Encadrement de cette valeur minimale .

Les notations sont celles des deux premières parties .

$\mathcal{P}$ désigne le plan contenant les sommets A , B , C du triangle ABC .

On considère l'application f : $\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$M \longmapsto f(M) = MA + MB + MC$.

On se propose de déterminer , s'il existe , le minimum de l'application f .

1°) Démontrer que: s'il existe un point μ en lequel f atteint un minimum , alors μ est intérieur (au sens large) au triangle ABC .

2°) Soit μ un point intérieur (au sens large) , au triangle ABC .

a) Démontrer : si $\mu \neq A$, alors $\mu B + \mu C < AB + AC$.

b) En déduire l'inégalité stricte : $\mu A + \mu B + \mu C < 2p$. (2p : périmètre du triangle ABC) .

3°) Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$. On pose : $M_1 = r_1(M)$; $M_2 = r_2(M)$; $M_3 = r_3(M)$.

a) Démontrer les égalités : $\begin{cases} f(M) = AM + MM_3 + M_3A' \\ f(M) = BM + MM_1 + M_1B' \\ f(M) = CM + MM_2 + M_2C' \end{cases}$.

b) Démontrer que f est minorée par le réel CC' .

4°) Conclure que : si μ est un point en lequel f atteint un minimum , alors on a :

$CC' \leq f(\mu) < AB + BC + CA$

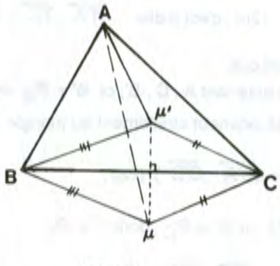


figure 1

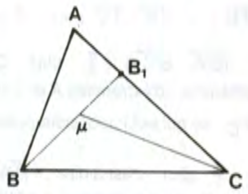


figure 2

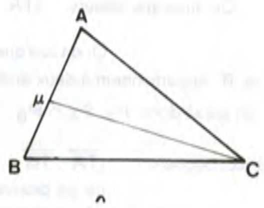


figure 3

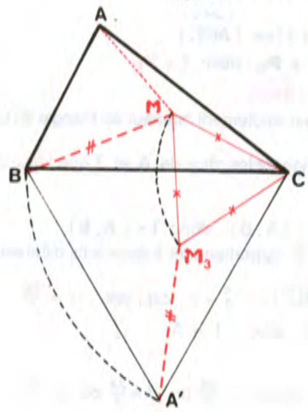


figure 4

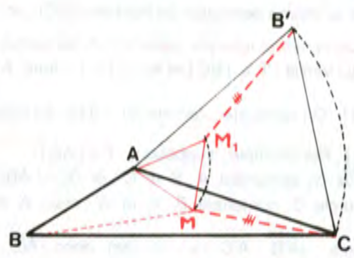


figure 5

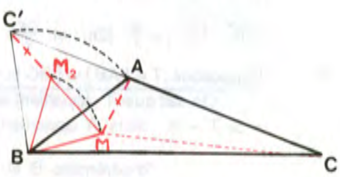


figure 6

Notions utilisées : * *inégalité triangulaire*
* *rotation*

1°) Supposons l'existence d'un point μ du plan tel que $f(\mu)$ soit minimale .

L'ensemble des points intérieurs (au sens large) au triangle ABC est $\mathcal{P}_A \cap \mathcal{P}_B \cap \mathcal{P}_C$.

voir figure 1 — * Supposons μ non intérieur au triangle ABC , alors $\mu \notin \mathcal{P}_A$ ou $\mu \notin \mathcal{P}_B$ ou $\mu \notin \mathcal{P}_C$. Supposons , par exemple $\mu \notin \mathcal{P}_A$

alors le symétrique μ' de μ par rapport à (BC) appartient à $\mathcal{P}_A$, donc $\mu'A < \mu A$.

Mais on a : $\mu'B = \mu B$ et $\mu'C = \mu C$, d'où : $\mu'A + \mu'B + \mu'C < \mu A + \mu B + \mu C$.

* $f(\mu)$ ne serait donc pas minimale , puisque μ' vérifie : $f(\mu') < f(\mu)$.

Le point μ appartient donc à $\mathcal{P}_A$, et de même , on prouve : $\mu \in \mathcal{P}_B$ et $\mu \in \mathcal{P}_C$.

$\boxed{\text{Le point } \mu \text{ est donc intérieur (au sens large) au triangle ABC .}}$

2°) a) Soit μ un point intérieur (au sens large) au triangle ABC , μ distinct de A .

Posons : $(B\mu) \cap (AC) = \{B_1\}$. Alors $\begin{cases} \mu \in [BB_1] & \text{donc } \mu B + \mu B_1 = BB_1 \\ B_1 \in [AC] & \text{donc } AB_1 + B_1C = AC \end{cases}$

voir figure 2 — * Si $\mu \notin [AB]$, alors $B_1 \neq A$, donc : $BB_1 < AB + AB_1$ (inégalité triangulaire)

on a : $\mu C \leq \mu B_1 + B_1C$, donc : $\mu B + \mu C \leq \mu B + \mu B_1 + B_1C$

On obtient : $\mu B + \mu C \leq BB_1 + B_1C < AB + AB_1 + B_1C$, d'où : $\mu B + \mu C < AB + AC$

voir figure 3 — * Si $\mu \in\,]AB]$, alors les points μ , A , C sont non alignés donc : $\mu C < \mu A + AC$, d'où : $\mu B + \mu C < \mu B + \mu A + AC$

Or $\mu B + \mu A = AB$. On trouve encore : $\mu B + \mu C < AB + AC$

2°) b) Soit μ un point intérieur (au sens large) au triangle ABC .

* Si $\mu \notin \{A , B , C\}$, on a $\begin{cases} \mu B + \mu C < AB + AC & \text{(inégalité stricte car } \mu \neq A) \\ \mu C + \mu A < BC + BA & \text{(inégalité stricte car } \mu \neq B) \\ \mu A + \mu B < CA + CB & \text{(inégalité stricte car } \mu \neq C) \end{cases}$

Additionnons membre à membre ces trois inégalités , alors : $2(\mu A + \mu B + \mu C) < 2(AB + BC + CA)$

d'où : $\mu A + \mu B + \mu C < AB + BC + CA$

* Si $\mu \in \{A , B , C\}$, par exemple , si $\mu = A$, alors : $\mu A + \mu B + \mu C = AB + AC$

mais $BC > 0$. On trouve encore : $\mu A + \mu B + \mu C < AB + BC + CA$

3°) a) r_3 est la rotation de centre C , d'angle mesurant $+\frac{\pi}{3}$.

voir figure 4 — $r_3 : \begin{array}{l} C \longmapsto C \\ M \longmapsto M_3 \\ B \longmapsto A' \end{array}$ donc $\left.\begin{cases} MB = M_3A' \\ CM_3 = CM \\ (\overrightarrow{CM} , \overrightarrow{CM_3}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \end{cases}\right\}$ Le triangle CMM_3 est donc équilatéral

On a alors : $MC = MM_3$, or $f(M) = MA + MB + MC$, d'où : $f(M) = MA + M_3A' + MM_3$

r_1 est la rotation de centre A , d'angle mesurant $+\frac{\pi}{3}$.

voir figure 5 — $r_1 : \begin{array}{l} A \longmapsto A \\ M \longmapsto M_1 \\ C \longmapsto B' \end{array}$ donc $\left.\begin{cases} MC = M_1B' \\ AM_1 = AM \\ (\overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AM_1}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \end{cases}\right\}$ Le triangle AMM_1 est donc équilatéral

On a alors : $MA = MM_1$, or $f(M) = MA + MB + MC$, d'où : $f(M) = MM_1 + MB + M_1B'$

r_2 est la rotation de centre B , d'angle mesurant $+\frac{\pi}{3}$.

voir figure 6 — $r_2 : \begin{array}{l} B \longmapsto B \\ M \longmapsto M_2 \\ A \longmapsto C' \end{array}$ donc $\left.\begin{cases} MA = M_2C' \\ BM_2 = BM \\ (\overrightarrow{BM} , \overrightarrow{BM_2}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \end{cases}\right\}$ Le triangle BMM_2 est donc équilatéral

On a alors : $MB = MM_2$, or $f(M) = MA + MB + MC$, d'où : $f(M) = M_2C' + MM_2 + MC$

3°) b) On a : $MM_2 + M_2C' \geq MC'$ (inégalité triangulaire) et $MC + MC' \geq CC'$,

d'où : $MC + M_2M + M_2C' \geq MC + MC' \geq CC'$, soit : $f(M) \geq CC'$

4°) $\boxed{\text{Si } f(\mu) \text{ est un minimum pour } f \text{, alors } \mu \text{ est intérieur au sens large au triangle ABC, et : } CC' \leq f(\mu) \leq AB + BC + CA}$

Point de Torricelli .

3eme partie : valeur minimale de la somme MA + MB + MC .

B) Si α , β , γ appartiennent à $]\,0\,,\frac{2\pi}{3}\,[$, la somme MA + MB + MC est minimale si , et seulement si M est le point de Torricelli T du triangle ABC

On suppose que les trois réels α , β , γ appartiennent à $]\,0\,,\frac{2\pi}{3}\,[$.

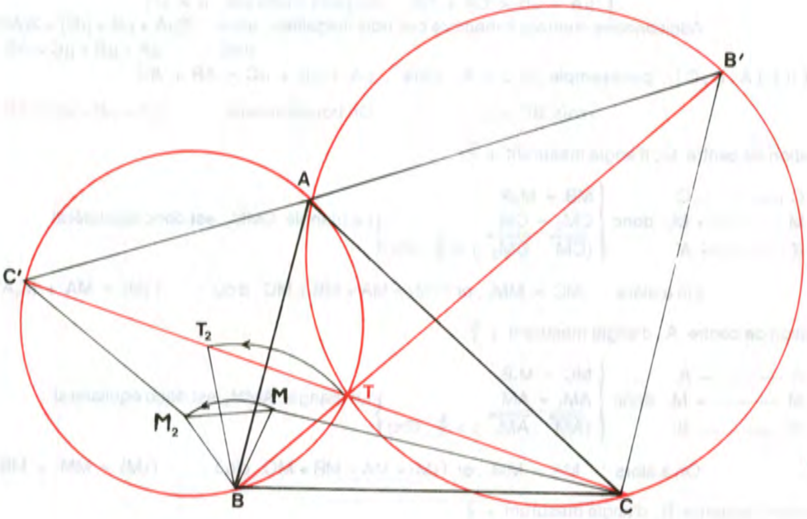
1°) Démontrer que le point de Torricelli T du triangle ABC appartient au segment [CC'] .

2°) On pose : $T_2 = r_2(T)$. Démontrer que T_2 appartient au segment [TC'] .

3°) a) Justifier que f (T) est le minimum de f .

b) Démontrer que , si M est un point du plan n'appartenant pas à [CC'] , alors f (M) > CC' .

4°) Conclure que : le point de Torricelli T du triangle ABC est l'unique point du plan en lequel f atteint son minimum .



Notions utilisées :
- *angles de vecteurs*
- *rotation*
- *cocyclicité*

1°) On sait que le point T est strictement intérieur au triangle ABC si, et seulement si α, β, γ appartiennent à $]0, \frac{2\pi}{3}[$.

On a alors : $(\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ et $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

On sait aussi que le point T appartient à (CC').

Evaluons $(\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TC'})$. On a : $(\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TC'}) = (\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA}) + (\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC'})\ (2\pi)$ (relation de Chasles).

Comparons $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC'})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'})$. Observons que les points T, A, C', B sont cocycliques, et justifions que les points T et B appartiennent à un même arc de cercle d'extrémités A et C'.

$(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) \equiv +\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) \equiv \alpha'\ (2\pi)$ avec $0 < \alpha' < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

$(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AT}) \equiv (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT})\ (2\pi)$. Une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AT}})$ est donc $\frac{\pi}{3} + \alpha'$.

Mais $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + \alpha' < \pi$, donc le point T appartient au demi-plan de frontière (AC'), celui contenant B.

On a : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC'}) \equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'})\ (2\pi)$, donc $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC'}) \equiv \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

On trouve alors : $(\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TC'}) \equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$, c'est à dire : $(\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TC'}) \equiv \pi\ (2\pi)$

conclusion

Le point T appartient à [CC'].

2°) Pour démontrer que $T_2 \in [TC']$, démontrons que : $(\overrightarrow{T_2C'}, \overrightarrow{T_2T}) \equiv \pi\ (2\pi)$.

$(\overrightarrow{T_2C'}, \overrightarrow{T_2T}) \equiv (\overrightarrow{T_2C'}, \overrightarrow{T_2B}) + (\overrightarrow{T_2B}, \overrightarrow{T_2T})\ (2\pi)$ (1)

r_2 : $B \longmapsto B$, $T \longmapsto T_2$, $A \longmapsto C'$ donc $(\overrightarrow{T_2C'}, \overrightarrow{T_2B}) \equiv (\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB})\ (2\pi)$;

or on sait : $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$, donc : $(\overrightarrow{T_2C'}, \overrightarrow{T_2B}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

On a également : $BT_2 = BT$ et $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BT_2}) \equiv \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$;

Le triangle BTT_2 est donc équilatéral et vérifie : $(\overrightarrow{T_2B}, \overrightarrow{T_2T}) \equiv \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

La relation (1) devient : $(\overrightarrow{T_2C'}, \overrightarrow{T_2T}) \equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$, c'est à dire : $(\overrightarrow{T_2C'}, \overrightarrow{T_2T}) \equiv \pi\ (2\pi)$

conclusion

Le point T_2 appartient à [TC'].

3°) a) $f(T) = CT + TT_2 + T_2C'$; $\begin{cases} T_2 \in [TC'] \text{, donc } TT_2 + T_2C' = TC' \text{, d'où : } f(T) = CT + TC'. \\ T \in [CC'] \text{, donc } TC + TC' = CC' \text{, d'où : } f(T) = CC'. \end{cases}$

Le réel CC', minorant de f, est donc atteint au moins une fois par f en T

Le réel CC', égal à f(T) est donc le minimum de f.

3°) b) Soit M un point de $\mathcal{P}$

* Si $M \notin (CC')$, alors $MC + MC' > CC'$ (inégalité stricte).
  L'inégalité $M_2M + M_2C' \geq MC'$ est vraie pour tous les points M, M_2, C'.
  On a alors : $MC + (M_2M + M_2C') \geq MC + MC' > CC'$, soit $f(M) > CC'$.
* Si $M \notin (BB')$, alors $MB + MB' > BB'$. Or : $M_1M + M_1B' \geq MB'$
  d'où : $MB + (MM_1 + M_1B') \geq MB + MB' > BB'$, soit : $f(M) > BB'$
* Si $M \notin (AA')$, alors $MA + MA' > AA'$. Or : $M_3M + M_3A' \geq MA'$
  d'où : $MA + (MM_3 + M_3A') \geq MA + MA' > AA'$, soit : $f(M) > AA'$

4°) Soit μ un point tel que $f(\mu)$ soit minimale. Alors $f(\mu) = CC' = AA' = BB'$ (2)

On a : $\begin{cases} \mu \in (CC') \text{, sinon on aurait } f(\mu) > CC' \text{, en contradiction avec (2)} \\ \mu \in (BB') \text{, sinon on aurait } f(\mu) > BB' \text{, en contradiction avec (2)} \\ \mu \in (AA') \text{, sinon on aurait } f(\mu) > AA' \text{, en contradiction avec (2)} \end{cases}$

d'où : $\mu \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$. Le point μ est donc le point de Torricelli T.

conclusion

Le point de Torricelli T du triangle ABC est l'unique point du plan en lequel f atteint son minimum, égal à CC'

Point de Torricelli .

3ème partie : valeur minimale de la somme MA + MB + MC .

C) Si $\alpha \in [\frac{2\pi}{3}, \pi[$, alors la somme MA + MB + MC est minimale si , et seulement si M est en A .

> On suppose : $\alpha \in [\frac{2\pi}{3}, \pi[$
>
> Calculer f (A) .
>
> Démontrer : si M est un point intérieur au sens large au triangle ABC , et M distinct de A , alors on a : f (M) > f (A)
>
> En déduire que : f atteint alors son minimum en A , et en A seulement.
>
> (On pourra envisager d'abord : $\alpha \in]\frac{2\pi}{3}, \pi[$, puis : $\alpha = \frac{2\pi}{3}$) .

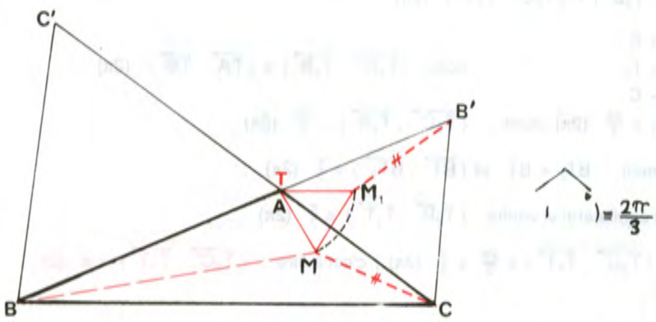
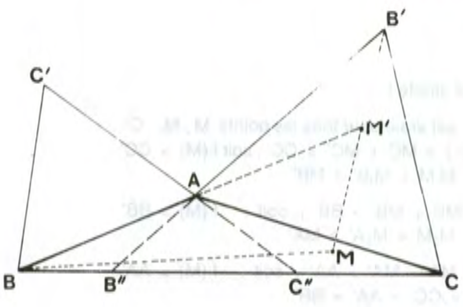


figure 1



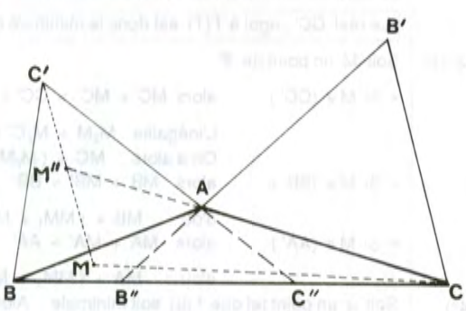


figure 2

figure 3

Notions utilisées :
* *axiomes de séparation (voir page 34)*
* *inégalité triangulaire*

1°) $\boxed{\text{Supposons : } \alpha \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[}$

voir pages 202 et 204

Le point de Torricelli est alors strictement extérieur au triangle ABC, donc f (T) ne peut pas être un minimum pour f.

On a : $f(A) = AB + AC$, donc $f(A) = AB + AB'$ et $f(A) = AC + AC'$.

Soit M un point intérieur (au sens large) au triangle ABC, et M distinct de A. L'hypothèse $\alpha \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ assure que :

* la droite (AB') coupe (BC) en un point B" appartenant à] BC [.
* la droite (AC') coupe (BC) en un point C" appartenant à] BC [.
* le secteur $[\widehat{BAC}]$ est réunion des secteurs $[\widehat{B"AC}]$ et $[\widehat{BAC"}]$.

* Si M appartient au secteur $[\widehat{B"AC}]$ et $M \neq A$, démontrons que A est intérieur (au sens large) au triangle MBB'.

voir figure 2

D'une part : { le point M appartient au demi-plan fermé de frontière (AB), celui contenant C
le point B' appartient au demi-plan ouvert de frontière (AB), celui ne contenant pas C.
Donc (MB') coupe la frontière (AB) en un point M', $M' \in [MB']$ (1)

D'autre part : { le point M appartient au demi-plan fermé Q_C, de frontière (AB'), contenant C.
$B' \in Q_C$ et $M' \in [MB']$; donc $M' \in Q_C$.
Mais $B \notin Q_C$ et $A = (BM') \cap (AB')$, donc : $A \in [BM']$ (2)

voir 2°) a) page 204

Les relations (1) et (2) assurent que le point A est intérieur (au sens large) au triangle MBB'. De plus $A \neq M$.

Donc : $AB + AB' < MB + MB'$, c'est à dire : $f(A) < MB + MB'$.

Rappelons que : $f(M) = MB + MM_1 + M_1B'$ où $M_1 = r_1(M)$ et $MM_1 + M_1B' \geq MB'$.

On a donc : $f(M) \geq MB + MB' > f(A)$

* Si M appartient au secteur $[\widehat{BAC"}]$, et $M \neq A$,

voir figure 3

on démontre de même que la droite (MC') coupe (AC) en un point M"' tel que : $M"' \in [MC']$, et $A \in [CM"]$.

Le point A est donc intérieur (au sens large) au triangle MCC' et $A \neq M$.

Par conséquent : $AC + AC' < MC + MC'$, c'est à dire : $f(A) < MC + MC'$.

or : $f(M) = MC + MM_2 + M_2C'$ où $M_2 = r_2(M)$ et $MM_2 + M_2C' \geq MC'$.

On a donc : $f(M) \geq MC + MC' > f(A)$

Pour tout point M intérieur (au sens large) au triangle ABC, et distinct de A, on a : $f(M) > f(A)$.

conclusion

$\boxed{\text{Le minimum de f est donc f (A), atteint seulement en A.}}$

2°) $\boxed{\text{Supposons : } \alpha = \frac{2\pi}{3}}$ Alors $A \in [BB']$, donc $AB + AB' = BB'$.

voir figure 1

On sait que le point de Torricelli T du triangle ABC est en A.

voir 3°) b) page 204

On a alors : $f(A) = AA + AB + AC$ et $AC = AB'$, donc $f(A) = BB'$. f atteint donc son minimum en A.

Prouvons que ce minimum n'est atteint qu'en A.

Soit M un point, autre que A, intérieur (au sens large) au triangle ABC.

Soit $M_1 = r_1(M)$. On a : $f(M) = BM + MM_1 + M_1B'$ (voir 3°) page 204)

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}})$ admet alors une mesure θ vérifiant : $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM_1}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_1})$ (2π). Une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM_1}})$ est donc $\theta + \frac{\pi}{3}$.

* Si $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{3}$, alors $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < \pi$, donc $M_1 \notin (BB')$. D'où l'inégalité stricte : $BM_1 + M_1B' > BB'$

or $BM + MM_1 \geq BM_1$, d'où : $(BM + MM_1) + M_1B' \geq BM_1 + M_1B' > BB'$.

* Si $\theta = \frac{2\pi}{3}$, alors $M \notin (BB')$. On a l'inégalité stricte : $BM + MB' > BB'$

or $MM_1 + M_1B' \geq MB'$, d'où : $(BM + (MM_1 + M_1B') \geq BM + MB' > BB'$.

Pour tout point M intérieur, au sens large, au triangle ABC et $M \neq A$, on a : $f(M) > BB'$, c'est à dire $f(M) > f(A)$.

Or le minimum de f ne peut être atteint qu'en un point intérieur (au sens large) au triangle ABC, donc :

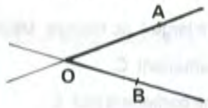
conclusion

$\boxed{\text{le minimum de f est f (A). Il n'est atteint qu'en A, qui est alors le point de Torricelli du triangle ABC.}}$

Bissectrices .

I Angle $[\widehat{AOB}]$ et bissectrice de $[\widehat{AOB}]$.

1°) Notation $[\widehat{AOB}]$

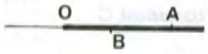


Soit [OA) et [OB) deux demi-droites de même origine O .

* Si les droites (OA) et (OB) sont sécantes en O , $[\widehat{AOB}]$ désigne $\mathcal{P}_A \cap \mathcal{P}_B$ où :

  $\mathcal{P}_A$ est le demi-plan fermé de frontière (OB) , celui contenant A .

  $\mathcal{P}_B$ est le demi-plan fermé de frontière (OA) , celui contenant B .



* Si [OA) = [OB) , $[\widehat{AOB}]$ désigne [OA)

* Si [OA) et [OB) sont deux demi-droites opposées ,

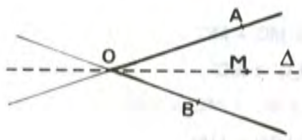
  $[\widehat{AOB}]$ désigne l'un quelconque des demi-plans fermés de frontière (AB)

La notation $\widehat{AOB}$ désigne le réel appartenant à $[0, \pi]$, mesure en radians de $[\widehat{AOB}]$.

Les demi-droites [OA) et [OB) sont dites les côtés du secteur angulaire $[\widehat{AOB}]$, ou de l'angle $[\widehat{AOB}]$.

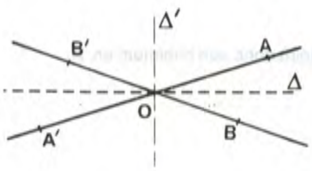
2°) On appelle bissectrice de $[\widehat{AOB}]$ l'unique droite Δ telle que la symétrie orthogonale S_Δ échange les demi-droites [OA) et [OB) .

* La droite Δ est aussi appelée la bissectrice de la paire de demi-droites { [OA) , [OB) }



* Un point M du plan appartient à Δ - { O } si , et seulement si il vérifie : $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$

3°) Soit $A' = S_O(A)$ et $B' = S_O(B)$.



a) la bissectrice de $[\widehat{A'OB'}]$ est égale à la bissectrice de $[\widehat{AOB}]$

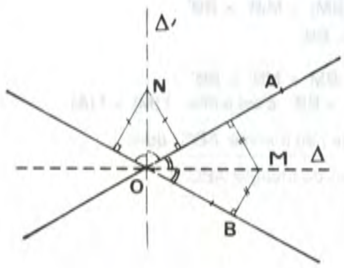
b) la droite Δ' perpendiculaire en O à Δ est bissectrice de $[\widehat{BOA'}]$ et bissectrice de $[\widehat{AOB'}]$.

la droite Δ' est dite la bissectrice extérieure de $[\widehat{AOB}]$.

II Bissectrices d'une paire de droites sécantes .

Soit (OA) et (OB) deux droites sécantes en O .

Soit Δ la bissectrice de $[\widehat{AOB}]$ et Δ' la bissectrice extérieure de $[\widehat{AOB}]$.



a) les symétries orthogonales S_Δ et $S_{\Delta'}$ sont les seules symétries orthogonales qui échangent les droites (OA) et (OB) .

Les droites Δ et Δ' , qui sont perpendiculaires , sont dites les bissectrices de la paire de droites { (OA) , (OB) } .

b) Si le plan contenant O , A , B est orienté , les bissectrices de la paire { (OA) , (OB) } sont les seules droites δ contenant O et vérifiant la relation : $(\overline{OA}, \delta) \equiv (\delta, \overline{OB}) \quad (\pi)$

c) $\Delta \cup \Delta'$ est l'ensemble des points du plan équidistants des droites (OA) et (OB) .

NOTES

COLLECTION

FORMATION DES ENSEIGNANTS ET FORMATION CONTINUE

Bertin	Calcul par l'informatique
Bouvier	La mystification mathématique
Carrega	Théorie des corps. La règle et le compas
Elbaz	Interactions fondamentales et structure de la matière
Faisant	L'équation diophantienne du second degré
Sénéchal	Géométrie classique et mathématiques modernes
Sénéchal	Groupes et géométrie
Sortais	La géométrie du triangle
Sortais	Géométrie de l'espace et du plan
Tisseron	Géométries affine, projective et euclidienne
Viennot	Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire
Ziglon	Vers les structures

Imprimé en Belgique, Imprimerie Campin
Dépôt légal : janvier 1997
Numéro d'édition : 1429 b
HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Cet ouvrage s'adresse essentiellement aux élèves des classes de seconde, première S et terminale C, ainsi qu'à leurs professeurs. Le lecteur y trouvera une succession d'exercices avec solutions, lui permettant d'explorer les richesses de cette figure fondamentale en géométrie plane qu'est le triangle.

Les solutions proposées utilisent uniquement les outils mis à leur disposition depuis la seconde jusqu'à la terminale C : théorème de Thalès, projections, homothéties, symétries et rotations, barycentre, produit scalaire, angles inscrits. Une rubrique rappelant les notions utilisées accompagne chaque énoncé.

Afin de rendre la recherche facile et attrayante, une attention particulière a été accordée à la présentation des figures. Celles-ci sont en effet le support visuel essentiel de la géométrie déductive qui est développée dans cet ouvrage.

Les exercices proposés sont regroupés par thèmes, chacun pouvant ainsi approfondir l'étude selon son niveau et sa curiosité. Grâce à leur enchaînement, les professeurs pourront facilement élaborer des problèmes de géométrie riches et captivants.

L'objectif de cet ouvrage est de familiariser le lecteur avec les outils élémentaires de la géométrie déductive et de lui faire découvrir les propriétés les plus classiques du triangle. En progressant dans sa lecture, il pourra savourer la recherche d'autres propriétés moins connues mais tout aussi fascinantes. Les enseignants du second cycle des lycées y puiseront matière à étayer et à enrichir leur enseignement.

ISBN 2 7056 1429 4

9 782705 614294

Hermann, éditeurs des sciences et des arts 293 rue Lecourbe, 75015 Paris