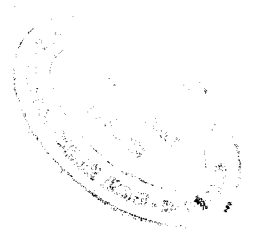


**Progress in Mathematics**  
**Vol. 18**

**Edited by**  
**J. Coates and**  
**S. Helgason**

Birkhäuser  
Boston • Basel • Stuttgart



18  
FRE  
8-1a

Jean Fresnel

Marius van der Put

**Géométrie Analytique  
Rigide  
et Applications**

1981

**Birkhäuser  
Boston · Basel · Stuttgart**

Authors:

Jean Fresnel  
Université de Bordeaux I  
U.E.R. de Mathématiques  
351, cours de la Libération  
F-33405 Talence  
France

Marius van der Put  
Rijksuniversiteit Groningen  
Mathematisch Instituut  
Postbus 800  
NL-9700 AV Groningen  
The Netherlands

LC 81-71609

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the copyright owner.

©Birkhäuser Boston, 1981  
ISBN 3-7643-3069-4  
Printed in USA

1 9261 a

LIBRARY

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	VII
I. - La droite projective	1
I. 1. - Définitions	2
I. 2. - L'algèbre des fonctions holomorphes sur un affinoïde	9
I. 3. - Le théorème des résidus	19
I. 4. - Topologie de Grothendieck sur $\mathbb{P}(K)$	24
I. 5. - La cohomologie du faisceau $\mathcal{O}$	27
I. 6. - Exemples de faisceaux sur $\mathbb{P}$	30
I. 7. - Sous-espaces analytiques de $\mathbb{P}$	33
I. 8. - Cohomologie sur un sous-espace analytique de $\mathbb{P}$	38
II. - Algèbres affinoïdes	53
II. 1. - Définition des algèbres affinoïdes	54
II. 2. - Théorème de préparation de Weierstrass	54
II. 3. - Quelques conséquences	56
II. 4. - Espaces affinoïdes - Exemples	62
II. 5. - Propriétés de la (semi-)norme spectrale	70
II. 6. - Extensions entières d'algèbres affinoïdes	73
II. 7. - Le module différentiel d'une algèbre affinoïde	80
II. 8. - Un exemple, l'algèbre $k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$	82
III. - Espaces analytiques sur $k$	90
III. 1.- Les ensembles rationnels	90
III. 2.- Topologie de Grothendieck	93
III. 3.- Espaces analytiques	99
III. 4.- Exemples	101

III. 5. - Faisceaux sur un espace analytique - Exemples	105
III. 6. - Faisceaux cohérents sur un espace analytique	108
III. 7. - Le faisceau des fonctions méromorphes	116
III. 8. - Faisceaux localement libres	123
IV. - Les courbes et leurs réductions	130
IV. 1. - La courbe de Tate	130
IV. 2. - Modèle de Néron	147
IV. 3. - Réduction stable d'une courbe	156
IV. 4. - Réductions analytiques	164
V. - Réduction d'un sous-espace de $\mathbb{P}^1$	170
V. 1. - Réduction d'un sous-espace de $\mathbb{P}^1$	171
V. 2. - Démonstration d'un résultat de Drinfeld	175
V. 3. - Quelques mots sur la cohomologie étale	177
VI. - Tores analytiques et variétés abéliennes	183
VI. 1. - Le cas complexe	183
VI. 2. - Le cas non archimédien	186
VI. 3. - L'espace analytique $G = (k^{\times})^{\mathbb{G}}$	187
VI. 4. - Le tore analytique $\mathbb{T} = G/\Lambda$	192
VI. 5. - Les fonctions méromorphes sur $\mathbb{T} = G/\Lambda$	194
VI. 6. - Tores analytiques et variétés abéliennes	197
Bibliographie	203
Table des notations	208
Index	211

## INTRODUCTION

Soit  $K$  un corps complet pour une valeur absolue non-archimédienne. Une fonction  $f : K^n \rightarrow K$  est dite holomorphe en

$\underline{0} = (0, 0, \dots, 0) \in K^n$  si  $f$  coïncide avec une série convergente

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$$

sur un voisinage de  $\underline{0} \in K^n$ .

Cette définition évidente donne une théorie locale des fonctions holomorphes (ou germes de fonctions holomorphes) qui est essentiellement analogue à la théorie des germes de fonctions holomorphes complexes. La théorie en est bien connue (S.S. Abhyankar, *Analytic geometry* [1]; H. Grauert et R. Remmert, *Analytische Stellenalgebren* [24]) et ne donne pas de surprises (sauf peut-être en caractéristique positive).

En revanche la définition de fonction holomorphe sur un ouvert  $U$  de  $K^n$  (par exemple) n'est pas évidente. Les fonctions continues sur  $U$  et holomorphes en chaque point de  $U$  forment une algèbre de fonctions trop grande : en effet, les fonctions caractéristiques continues appartiennent à cette algèbre ( $K$  est totalement discontinu). C'est M. Krasner [33] qui a le premier donné une définition des fonctions analytiques à une variable. Mais les bases d'une théorie des espaces analytiques sont dues à J. Tate (*Rigid analytic spaces*, I.H.E.S. 1962, private notes reproduced with (out) the permission of the author, officiellement publié aux *Inventiones Mathematicae* en 1971 [59]). Cette notion permet de munir (canoniquement) toute variété algébrique d'une structure d'espace analytique et comme première application de donner une représentation analytique des courbes elliptiques à réduction multiplicative sur le corps résiduel de  $K$ . Cette courbe est maintenant appelée courbe de Tate. Les bases de la théorie ont été

ensuite complétées et améliorées par de nombreux mathématiciens, entre autres, H. Grauert, R. Remmert, R. Kiehl, L. Gerritzen, M. Raynaud.

Par la suite, D. Mumford [40], donna une construction "analytique" des courbes de genre supérieur à 1 avec réduction dégénérée, ainsi que des variétés abéliennes avec réduction multiplicative. Ici le mot "analytique" signifie schéma formel sur un anneau local complet (en particulier un anneau de valuation discrète, complet). Cette voie donna de nombreux développements dans le cadre de la géométrie analytique rigide : M. Raynaud (non publié!), Y. Manin et V. Drinfeld, L. Gerritzen, S. Bosch. Dans [21] (L. Gerritzen et M. van der Put, Schottky groups and Mumford curves) on trouve un exposé (détaillé) des constructions analytiques des courbes à réduction dégénérée et de leurs jacobiniennes.

Le présent travail rédigé en commun a pour origine un cours de troisième cycle enseigné durant l'année 1979-1980 par M. van der Put. Cet exposé vise à donner les bases de la géométrie analytique rigide (chapitres I, II, III) et quelques exemples d'applications (chapitres IV, V, VI). Les démonstrations concernant la géométrie analytique sont presque toujours complètes ; en revanche plusieurs résultats de géométrie algébrique ont été admis. Donnons maintenant un résumé des divers chapitres.

Le chapitre I est l'étude de la droite projective  $\mathbb{P}^1(k)$  comme espace analytique ou encore l'étude des fonctions holomorphes à une variable. On profite de ce chapitre pour définir la topologie de Grothendieck, la notion de faisceau et la cohomologie d'un recouvrement relativement à un faisceau. On donne plusieurs exemples de faisceaux sur  $\mathbb{P}^1$  : le faisceau  $\mathcal{O}$  des fonctions holomorphes,  $\mathcal{O}^x$  des fonctions inversibles,  $\mathcal{M}$  des fonctions méromorphes,  $\tilde{\mathcal{A}}$  le faisceau constant,  $\mathcal{O}^{\circ}$  le faisceau des fonctions de norme majorée par 1... On définit la cohomologie d'un sous-espace analytique relativement à un faisceau. Plusieurs calculs sont effectués pour les faisceaux  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}^x$ ,  $\mathcal{M}$  et aussi pour les faisceaux  $\mathcal{D}iv$  (diviseurs) et  $\mathcal{P}$  (partie

principale) ; certains généralisent des résultats de M. Lazard [35], d'autres sont en relation avec des résultats de Drinfeld [10]. Plusieurs résultats de la fin de ce chapitre sont originaux soit par leur contenu, soit par leur formulation.

Le but du chapitre II est de déterminer les propriétés des algèbres affinoïdes qui permettront de définir les espaces analytiques. Ce chapitre met en place l'équivalent du matériel de l'algèbre commutative pour les variétés algébriques. Un des résultats fondamentaux est le théorème de préparation de Weierstrass qui montre que l'algèbre affinoïde de Tate  $T_n$  se comporte comme l'anneau  $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ . L'aspect analytique des algèbres affinoïdes est assez bien déterminé par les propriétés de la (semi-) norme. Un théorème sur les extensions entières d'algèbres affinoïdes est démontré il sera utile pour l'étude de la réduction des espaces analytiques. Enfin le module des différentielles d'une algèbre affinoïde est introduit ainsi que certaines de ses propriétés.

L'objet du chapitre III est de définir la notion d'espace analytique et d'étudier quelques faisceaux. On détermine les espaces analytiques par "recollement" d'espaces analytiques affinoïdes. L'espace topologique sous-jacent d'un espace affinoïde est le spectre d'une algèbre affinoïde, les parties admissibles (pour la topologie de Grothendieck) sont les sous-ensembles rationnels définis par un nombre fini "d'inégalités". La cohomologie du faisceau structural est donnée par le théorème de Tate qui dit que tout recouvrement d'un espace affinoïde est acyclique. On montre ensuite qu'une variété algébrique (séparée et de type fini) est canoniquement munie d'une structure d'espace analytique ; en particulier les variétés projectives sont un recollement fini d'espaces affinoïdes. On montre ensuite qu'un faisceau sur un espace analytique peut se définir par recollement de faisceaux sur le recouvrement par des affinoïdes. On définit ainsi le faisceau des différentielles. Un exemple important est celui de faisceau cohérent, on montre qu'un faisceau cohérent sur un espace affinoïde est défini par tensorisation à partir de sa section sur l'affinoïde tout entier (comme dans le cas



algébrique). Comme première application on montre que le (pré-) faisceau des fonctions méromorphes est un faisceau. Enfin on étudie les faisceaux localement libres de rang  $n$ , on montre le lien avec le premier groupe de cohomologie du faisceau  $GL_n$  des matrices inversibles. Plus précisément dans le cas d'un espace affinoïde connexe et régulier on démontre l'équivalence entre la trivialité de  $Cl(\mathcal{O}(X))$  (classes d'isomorphismes de  $\mathcal{O}(X)$ -module projectif de rang 1),  $H^1(X, \mathcal{O}^*)$  et la factorialité de  $\mathcal{O}(X)$ .

Tous les résultats de ce chapitre sont "classiques", néanmoins les démonstrations présentent parfois une certaine originalité.

Le chapitre IV est certainement la motivation historique de la construction de la géométrie analytique rigide : représentation analytique des courbes algébriques. On montre que les courbes elliptiques dont l'invariant modulaire est de valeur absolue strictement supérieur à 1 admettent une représentation analytique analogue au cas complexe, appelée la courbe de Tate. On présente ensuite trois méthodes de réduction des courbes ainsi que leurs liens respectifs : le modèle de Néron, la réduction stable et la réduction analytique. En général, les démonstrations concernant l'aspect géométrie analytique sont complètes, en revanche tous les résultats de géométrie algébrique sont énoncés sans preuve et pour les courbes de Mumford le lecteur est renvoyé à l'ouvrage de Gerritzen et van der Put [21] .

Le chapitre V est l'étude de la réduction d'un sous-espace de  $\mathbb{P}^1$ . Soient  $K$  un corps valué complet algébriquement clos,  $k$  un sous-corps localement compact de  $K$  et  $\Omega = \mathbb{P}^1(K) - \mathbb{P}^1(k)$ . Cet espace analytique  $\Omega$  est important, il joue ici le rôle du demi-plan de Poincaré. La réduction de  $\Omega$  est associée à un recouvrement pur, qui lui-même est associé à l'arbre  $T$  des sous-modules libres de rang 2 sur  $k^\circ$  (l'anneau de valuation de  $k$ ). Ceci permet de montrer un résultat de Drinfeld qui n'est autre que le calcul de  $H_{\text{ét}}^1(\Omega, \mu_\ell)$ .

Au chapitre VI, on définit un tore analytique sur  $K$  comme l'espace analytique  $(K^x)^g/\Lambda$ , quotient du groupe  $(K^x)^g$  par le groupe  $\Lambda$  qui est un réseau multiplicatif de rang  $g$ . L'étude du faisceau  $\mathcal{M}$  des fonctions méromorphes sur  $(K^x)^g/\Lambda$  introduit naturellement les fonctions thêtas qui sont fondamentales pour caractériser les tores qui sont des variétés abéliennes.

\*  
\* \*

Nous adressons à Mademoiselle Madeleine Neau, qui a accompli la frappe de ce manuscrit avec patience et compétence, tous nos remerciements.

Bordeaux, le 14 juillet 1981

Jean Fresnel, Marius van der Put

Dans tout cet ouvrage, on appelle corps valué un corps  $k$  (commutatif) muni d'une valeur absolue ultramétrique ; c'est-à-dire d'une application  $a \mapsto |a|$  de  $k$  dans  $\mathbb{R}$  (le corps des nombres réels) qui vérifie les propriétés suivantes :

- 0)  $|a| \geq 0$ , pour tout  $a \in k$
- 1)  $|a| = 0$  si et seulement si  $a = 0$
- 2)  $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$ , pour tout  $a, b \in k$
- 3)  $|ab| = |a| \cdot |b|$ , pour tout  $a, b \in k$ .

La valeur absolue définit la distance  $(a, b) \mapsto |a-b|$  et on dit que le corps  $k$  est valué complet s'il est complet pour cette distance.

Le groupe  $|k^\times| = \{|a| \mid a \in k^\times = k - \{0\}\}$  s'appelle le groupe des valeurs absolues de  $k$ .

L'anneau  $k^\circ = \{a \in k \mid |a| \leq 1\}$  s'appelle l'anneau de valuation de  $k$ , l'idéal  $k^{\circ\circ} = \{a \in k \mid |a| < 1\}$  s'appelle l'idéal de valuation de  $k$  (c'est un idéal maximal de  $k^\circ$ ) enfin le corps  $k^\circ / k^{\circ\circ}$  s'appelle le corps résiduel et se note  $\bar{k}$ .

## CHAPITRE I : LA DROITE PROJECTIVE

- I.1. - Définitions
- I.2. - L'algèbre des fonctions holomorphes sur un affinoïde
- I.3. - Le théorème des résidus
- I.4. - Topologie de Grothendieck sur  $\mathbb{P}(K)$
- I.5. - La cohomologie du faisceau  $\mathcal{O}$
- I.6. - Exemples de faisceaux sur  $\mathbb{P}$
- I.7. - Sous-espaces analytiques de  $\mathbb{P}$
- I.8. - Cohomologie sur un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}$

Ce chapitre I, intitulé la droite projective, a pour but de définir les fonctions analytiques à une variable et les sous-espaces analytiques de la droite projective. Les paragraphes I.1 et I.2, ne sont que des cas particuliers du chapitre II et auraient pu être omis ; néanmoins nous avons pensé que quelques développements spécifiques à la dimension 1 seraient plus agréables au lecteur habitué aux fonctions d'une variable. Le paragraphe I.4 définit la notion de topologie de Grothendieck, de faisceau et de cohomologie de Čech d'un recouvrement ; ces notions seront utilisées dans les chapitres suivants. Le paragraphe I.5 est le calcul de la cohomologie du faisceau structural  $\mathcal{O}$  (des fonctions holomorphes) et le paragraphe I.6 donne quelques exemples et études de faisceaux sur  $\mathbb{P}$ . Au paragraphe I.7 est définie la notion de sous-espace analytique de  $\mathbb{P}$ , notion développée de façon générale au chapitre III. Enfin le paragraphe I.8 donne plusieurs calculs de la cohomologie d'un faisceau sur un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}$ .

Dans tout ce chapitre,  $K$  est un corps valué, complet, algébriquement clos.

### I. 1. - Définitions

Ce paragraphe I. 1 est dévolu à diverses définitions de base : droite projective, disque ouvert, disque fermé, ensemble affinoïde, ensemble affinoïde connexe et fonctions holomorphes sur un affinoïde. Ce paragraphe se terminera par la décomposition de Mittag-Leffler d'une fonction holomorphe selon les "trous" de l'affinoïde.

#### I. 1. 1. - La droite projective

La droite projective notée  $\mathbb{P}^1(K)$  (ou  $\mathbb{P}(K)$ , ou  $\mathbb{P}$ ) est l'ensemble des droites  $L$  de  $K^2$  passant par  $(0, 0)$ . Soit  $(x_0, x_1) \neq (0, 0)$  et  $L = \{\lambda(x_0, x_1) \mid \lambda \in K\}$ , alors le point  $p \in \mathbb{P}$  et correspondant à  $L$  sera noté  $\ulcorner x_0, x_1 \urcorner$  (on a clairement  $\ulcorner x_0, x_1 \urcorner = \ulcorner y_0, y_1 \urcorner$  si et seulement si il existe  $\lambda \in K^\times$  tel que  $(x_0, x_1) = \lambda(y_0, y_1)$ ). On identifie  $K$  avec  $\mathbb{P} - \{\ulcorner 0, 1 \urcorner\}$  par l'application  $\lambda \longmapsto \ulcorner 1, \lambda \urcorner$  et le point  $\ulcorner 0, 1 \urcorner$  sera noté  $\infty$ . Ainsi donc on identifie  $\mathbb{P}(K)$  à  $K \cup \{\infty\}$ .

DÉFINITION. - Soit  $Gl_2(K)$  le groupe des matrices inversibles à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients dans  $K$ . Une application  $\varphi$  de  $\mathbb{P}$  dans lui-même est appelée automorphisme de  $\mathbb{P}$  s'il existe  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl_2(K)$  tel que, pour tout  $\ulcorner x_0, x_1 \urcorner \in \mathbb{P}$ , on ait

$$\varphi(\ulcorner x_0, x_1 \urcorner) = \ulcorner cx_1 + dx_0, ax_1 + bx_0 \urcorner.$$

REMARQUE. - Le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}$  est isomorphe à  $P Gl_2(K)$  (le groupe projectif linéaire) où

$$P Gl_2(K) = Gl_2(K) / \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in K^\times \right\}.$$

#### I. 1. 2. - Ensembles affinoïdes

DÉFINITION. - Une partie  $D$  de  $\mathbb{P}$  est appelée disque ouvert de  $\mathbb{P}$  s'il existe  $a \in K$  et  $\rho \in |K^\times|$  tels que

$$D = \{z \in K \mid |z-a| < \rho\} \text{ ou } D = \{z \in K \mid |z-a| > \rho\} \cup \{\infty\}.$$

Avec quelques abus on notera ces ensembles respectivement

$$D = \{z \in \mathbb{P} \mid |z-a| < \rho\} \quad \text{ou} \quad D = \{z \in \mathbb{P} \mid |z-a| > \rho\}.$$

Une partie  $D$  de  $\mathbb{P}$  est appelée disque fermé de  $\mathbb{P}$  s'il existe  $a \in K$  et  $\rho \in |K^\times|$  tels que

$$D = \{z \in K \mid |z-a| \leq \rho\} \quad \text{ou} \quad D = \{z \in K \mid |z-a| \geq \rho\} \cup \{\infty\}.$$

Avec les mêmes abus on notera ces ensembles respectivement

$$D = \{z \in \mathbb{P} \mid |z-a| \leq \rho\} \quad \text{ou} \quad D = \{z \in \mathbb{P} \mid |z-a| \geq \rho\}.$$

REMARQUE. - La notion de disque ouvert (resp. fermé) n'est pas topologique, un disque ouvert (resp. fermé) est à la fois ouvert et fermé pour la topologie. Certains auteurs utilisent la notion de disque non circonferencié (resp. circonferencié).

REMARQUE. - L'image par un automorphisme de  $\mathbb{P}$  d'un disque fermé (resp. ouvert) est un disque fermé (resp. ouvert).

EXERCICE. - Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux disques ouverts tels que  $B_1 \cup B_2 \neq \mathbb{P}$ . Montrer que  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  ou que  $B_1 \cap B_2$  est un disque ouvert. Quelle est la forme de  $B_1 \cap B_2$  lorsque  $B_1 \cup B_2 = \mathbb{P}$  ?

DÉFINITION. - On appelle ensemble affinoïde connexe de  $\mathbb{P}$  toute partie de  $\mathbb{P}$  qui est le complémentaire d'une réunion finie de disques ouverts. On appelle ensemble affinoïde de  $\mathbb{P}$  toute partie de  $\mathbb{P}$  qui est réunion finie d'affinoïdes connexes.

EXERCICE. - Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux ensembles affinoïdes connexes de  $\mathbb{P}$  tels que  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ . Montrer que  $F_1 \cap F_2$  et  $F_1 \cup F_2$  sont des affinoïdes connexes.

Montrer que tout ensemble affinoïde  $F$  se décompose de façon unique comme réunion d'affinoïdes connexes disjoints 2 à 2. Ces affinoïdes connexes s'appellent les composantes affinoïdes connexes de  $F$ .

EXERCICE. - Affinoïde défini par une fraction rationnelle

Soit  $K$  un corps algébriquement clos et complet,  $\frac{p}{q} \in K(z)$  une fraction rationnelle et  $c \in |K^\times|$ . Soit  $F = \{z \in \mathbb{P}^1 \mid |\frac{p}{q}(z)| \leq c\}$ . Alors  $F$  est un affinoïde ou un ensemble vide.

Pour démontrer ceci on procède en plusieurs étapes. On écrit  $\frac{p}{q}(z) = \prod_{i=1}^s (z-a_i)^{n_i}$  où  $a_i \neq a_j$  pour  $i \neq j$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$  et  $n_i \neq 0$  (le cas où  $p/q \in K$  est trivial).

1°) Montrer que  $F$  est un affinoïde si  $s=1$ .

2°) On suppose ici que  $|a_i| = 1$  pour  $1 \leq i \leq s$  et  $|a_i - a_j| = 1$  pour  $i \neq j$ .

a) On suppose en plus que  $c \geq 1$ . Montrer que  $F_0 = \{z \in \mathbb{P}^1 \mid |\frac{p}{q}(z)| \leq c \text{ et } |z-a_i| \geq 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq s\}$  est un affinoïde connexe. Soit  $F_1 = \{z \in \mathbb{P}^1 \mid |\frac{p}{q}(z)| \leq c \text{ et } |z-a_i| < 1\}$ . Montrer que  $F_0 \cup F_1$  est un affinoïde connexe. En conclure que  $F$  est un affinoïde connexe.

b) On suppose ici que  $c < 1$ . Montrer que  $F_0 = \{z \in \mathbb{P}^1 \mid |\frac{p}{q}(z)| \leq c \text{ et } |z-a_i| \geq 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq s\}$  est un ensemble affinoïde connexe ou un ensemble vide.

Soit  $F_1 = \{z \in \mathbb{P}^1 \mid |\frac{p}{q}(z)| \leq c \text{ et } |z-a_i| < 1\}$ . Montrer que  $F_1$  est un ensemble affinoïde connexe ou un ensemble vide. En conclure que  $F$  est un affinoïde.

3°) On revient au cas général. Soient  $\rho = \max |a_i - a_j|$  et  $B(a_i, \rho^-) = \{z \in K \mid |z-a_i| < \rho\}$ .

a) On suppose que pour tout  $i \neq j$  on a  $|a_i - a_j| = \rho$ . Montrer en utilisant 2°) que  $F$  est un affinoïde.

b) On suppose que  $a_1, a_2, \dots, a_t \in B(a_1, \rho^-)$ ,  $t \geq 2$  et  $a_j \notin B(a_1, \rho^-)$  pour  $t < j \leq s$ . Soit  $\rho'$  tel que  $\max_{1 \leq i \leq t} |a_1 - a_i| < \rho' < \rho$  et  $\rho' \in |K^\times|$ . Soit  $F_1 = \{z \in \mathbb{P}^1 \mid |\frac{p}{q}(z)| \leq c \text{ et } |z-a_1| \leq \rho'\}$ .

Montrer que

$$F_1 = \{z \in \mathbb{P} \mid |(z-a_1)^{n_1} \dots (z-a_t)^{n_t}| \leq \frac{c}{|(a_1-a_{t+1})^{n_{t+1}} \dots (a_1-a_s)^{n_s}|} \cap \{z \in \mathbb{P} \mid |z-a_1| \leq \rho'\}.$$

Soit  $F_2 = \{z \in \mathbb{P} \mid \left| \frac{P}{Q}(z) \right| \leq c \text{ et } |z-a_1| \geq \rho'\}.$

Montrer que

$$F_2 = \{z \in \mathbb{P} \mid |(z-a_1)^{n_1+\dots+n_t} (z-a_{t+1})^{n_{t+1}} \dots (z-a_s)^{n_s}| \leq c \cap \{z \in \mathbb{P} \mid |z-a_1| \geq \rho'\}.$$

c) On supposera que si  $F$  est défini par une fraction rationnelle  $\frac{P'}{Q'}(z) = \prod_{i=1}^{s'} (z-b_i)^{n'_i}$  avec  $s' < s$ , alors  $F$  est affinofde. En conclure que  $F_1$  et  $F_2$  définis en 3°, b) sont affinofdes et que  $F$  défini par  $\frac{P}{Q}(z)$  est affinofde.

REMARQUE. - Le mot connexe n'est pas pris dans le sens topologique (puisque  $K$  est totalement discontinu) mais dans le "sens analytique" puisque l'on verra au §. I. 2 que l'anneau des fonctions holomorphes sur un affinofde connexe est intègre (donc n'a que les idempotents 0 et 1).

REMARQUE. - Les initiateurs de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable ont considéré des domaines plus compliqués que les affinofdes connexes. M. Krasner [33] considère les quasi-connexes et A. Escassut [11] les infraconnexes.

### I. 1. 3. - Fonctions holomorphes sur un affinofde

DÉFINITION. - Soit  $F$  un ensemble affinofde, on appelle fonction holomorphe sur  $F$  toute fonction définie sur  $F$  à valeurs dans  $K$  qui est limite pour la norme de la convergence uniforme de fonctions rationnelles sur  $\mathbb{P}$  sans pôles dans  $F$ . L'ensemble des fonctions holomorphes est un sous-anneau de l'anneau des fonctions définies sur  $F$ , il est noté  $\mathcal{O}(F)$ . On note de plus  $\| \cdot \|_F$  (ou  $\| \cdot \|$ ) la norme de la convergence uniforme sur  $F$  définie par



$$\|f\|_F = \sup_{z \in F} |f(z)|.$$

Ainsi  $\mathcal{O}(F)$  est une  $K$ -algèbre de Banach.

Soient

$$\mathcal{O}^\circ(F) = \{f \in \mathcal{O}(F) \mid \|f\| \leq 1\} \text{ et}$$

$$\mathcal{O}^{\circ\circ}(F) = \{f \in \mathcal{O}(F) \mid \|f\| < 1\}.$$

L'anneau  $\mathcal{O}^\circ(F)$  est une  $K^\circ$ -algèbre et  $\mathcal{O}^{\circ\circ}(F)$  est un idéal de  $\mathcal{O}^\circ(F)$ .

De plus  $\overline{\mathcal{O}(F)} = \mathcal{O}^\circ(F) / \mathcal{O}^{\circ\circ}(F)$  est une algèbre sur  $\overline{K}$ , le corps résiduel de  $K$ .

EXEMPLE 1. - Soit  $F = \{z \in K \mid |z| \leq 1\}$ .

Alors  $\mathcal{O}(F) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mid a_n \in K, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \}$  et on a

$$\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \| = \max_n |a_n|. \text{ De plus}$$

$$\mathcal{O}^\circ(F) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mid a_n \in K^\circ \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \},$$

$$\mathcal{O}^{\circ\circ}(F) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mid a_n \in K^{\circ\circ} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \} \text{ et}$$

$$\overline{\mathcal{O}(F)} = \overline{F}[Z]_{\overline{K}}.$$

Pour montrer cela il suffit de considérer un polynôme

$$f(z) = \sum a_n z^n \in K^\circ[z] \text{ avec } 1 = \max |a_n|. \text{ Alors}$$

$$\overline{f}(z) = \sum \overline{a_n} z^n \in \overline{K}[z] \text{ est un polynôme non nul, il existe donc } z_0 \in K^\circ$$

tel que  $\overline{f}(z_0) \neq 0$ . Ce qui veut dire que  $1 = |f(z_0)|$ . Ainsi on a

$$\|f\| = \max_n |a_n|.$$

EXEMPLE 2. - Soit  $F = \{z \in K \mid |z| = 1\}$ . Alors,

$$\mathcal{O}(F) = \{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \mid a_n \in K, \lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n = 0 \},$$

$$\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \| = \max_n |a_n| \text{ et } \overline{\mathcal{O}(F)} = \overline{K}[z, z^{-1}].$$

PROPOSITION (décomposition de Mittag-Leffler). - Soient

$D_i = \{z \in K \mid |z - a_i| < |\pi_i|\}, 1 \leq i \leq n$ ,  $n$  disques ouverts disjoints avec

$a_i \in K$ . Soient  $F_i = \{z \in K \mid |z - a_i| \geq |\pi_i|\} \cup \{\infty\}$ ,  $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$ ,

$\mathcal{O}(F)_+ = \{f \in \mathcal{O}(F) \mid f(\infty) = 0\}$  et  $\mathcal{O}(F_i)_+ = \{f \in \mathcal{O}(F_i) \mid f(\infty) = 0\}$ . Alors

$\mathcal{O}(F)_+ = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(F_i)_+$  et pour tout  $f_i \in \mathcal{O}(F_i)_+$  on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_F = \max \|f_i\|_F \quad \text{et} \quad \|f_i\|_F = \|f_i\|_{F_i}.$$

De plus  $\mathcal{O}(F_i) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{\pi_i}{z - a_i}\right)^n \mid b_n \in K \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \right\}$  et

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{\pi_i}{z - a_i}\right)^n \right\|_{F_i} = \max_n |b_n|.$$

Démonstration. - Soit  $f \in \mathcal{O}(F)_+$  une fonction rationnelle. Alors  $f$  se décompose en éléments simples sous la forme

$$f = \sum_{n, b} \frac{\alpha_n b}{(z - b)^n} \quad (n \geq 1, \alpha_n, b \in K, b \notin F).$$

Soit

$$f_i = \sum \frac{\alpha_n b}{(z - b)^n} \quad \text{avec} \quad |b - a_i| < |\pi_i|.$$

Alors

$$f = \sum_{i=1}^m f_i \quad \text{et} \quad f_i \in \mathcal{O}(F_i)_+.$$

Il est facile de montrer que  $f_i$  se décompose de façon unique sous la forme

$$f_i(z) = \sum_{n \geq 1} b_n^i \left(\frac{\pi_i}{z - a_i}\right)^n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^i = 0$$

et que

$$\|f_i\|_F = \|f_i\|_{F_i} = \max_n |b_n^i|.$$

Il reste donc à montrer que  $\max_{n, i} |b_n^i| = 1$  implique  $\|f\|_F = 1$ .

Supposons  $1 = \max |b_n^1|$ . Soit  $1 \leq s \leq n$  tel que  $|a_1 - a_s| = |\pi_1|$  pour  $1 \leq i \leq s$  et  $|a_i - a_1| > |\pi_1|$  pour  $s < i \leq m$ . Soit  $z \in F$  tel que  $|z - a_1| = |\pi_1|$  et  $|z - a_i| \geq |\pi_1|$  pour  $1 \leq i \leq m$ . Alors on a  $|f_i(z)| < 1$  pour  $s < i$  et  $|f_i(z)| < 1$  pour  $i$  tel que  $|\pi_i| < |\pi_1|$ .

Soit :

$$g(z) = \sum_{i=1}^s f_i(z) \quad .$$

$$|\pi_i| = |\pi_1|$$

Il nous reste à montrer qu'il existe  $z \in F$  tel que  $|z - a_1| = |\pi_1|$ ,  $|z - a_i| \geq |\pi_1|$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $|g(z)| = 1$ . Après un changement de variable on peut écrire  $g$  sous la forme

$$g(z) = \sum_{i=1}^t \sum_{n \geq 1} \frac{c_n^i}{(z - d_i)^n}$$

avec  $1 = \max_{i,m} |c_n^i|$ ,  $d_i \in K^\circ$  et  $|d_i - d_j| = 1$  pour  $i \neq j$ .  
On a

$$\bar{g}(z) = \sum_{i=1}^t \sum_{n \geq 1} \frac{\bar{c}_n^i}{(z - \bar{d}_i)^n} .$$

Comme les  $\bar{d}_i$  sont deux à deux distincts et que les  $\bar{c}_n^i$  ne sont pas tous nuls, il existe une infinité de  $\bar{z}_0$  tels que  $\bar{g}(\bar{z}_0) \neq 0$ . Ce qui montre qu'il existe  $z_0 \in F$  tel que  $|z_0 - a_1| = |\pi_1|$ ,  $|z_0 - a_i| \geq |\pi_1|$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $|g(z_0)| = 1$ . Ainsi donc pour toute fonction rationnelle  $f \in \mathcal{O}(F)_+$  on a

$$\|f\|_F = \max_i \|f_i\|_F \quad \text{et} \quad \|f_i\|_F = \|f_i\|_{F_i} .$$

Il est alors aisé de passer à la limite et de montrer la proposition pour  $f \in \mathcal{O}(F)_+$ .

EXERCICE. - Soit  $\varphi$  un automorphisme de  $\mathbb{P}$ . Montrer que l'application  $f \mapsto f \cdot \varphi^{-1}$  est un isomorphisme isométrique de  $\mathcal{O}(F)$  sur  $\mathcal{O}(\varphi(F))$ .

EXERCICE. - Énoncer la décomposition de Mittag-Leffler lorsque  $\infty \notin F$ . Considérer le cas particulier  $F = \{z \in K \mid |\pi_1| \leq |z| \leq |\pi_2|\}$ .

REMARQUE. - La décomposition de Mittag-Leffler est encore valable pour les quasi-connexes et les infraconnexes (M. Krasner [33], Ph. Robba [49], Y. Amice [3]). Dans la terminologie de ces auteurs,

les limites uniformes de fractions rationnelles sans pôle dans le domaine considéré s'appellent des éléments analytiques.

## I. 2. - L'algèbre des fonctions holomorphes sur un affinoïde

Le but de ce paragraphe est de déterminer la nature arithmétique de l'algèbre  $\mathcal{O}(F)$  des fonctions holomorphes sur un affinoïde  $F$ . On montre d'abord (lemme I. 2. 1) que  $\mathcal{O}(F) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(F_i)$  où  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont les composantes affinoïdes connexes de  $F$ . Il reste donc à étudier l'algèbre  $\mathcal{O}(F)$  lorsque  $F$  est un affinoïde connexe (théorème I. 2. 2). On montre que cet anneau est principal, on détermine les idéaux maximaux et on caractérise les éléments inversibles de  $\mathcal{O}(F)$ . Ce théorème se déduit d'une étude générale sur les algèbres affinoïdes (chapitre II, (II. 4. 12), (II. 4. 13)). On en donne ici une démonstration élémentaire (c'est-à-dire spécifique à la dimension 1) que le lecteur peut se dispenser de lire.

(I. 2. 1) LEMME. - Soient  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des affinoïdes connexes de  $\mathbb{P}$  disjoints deux à deux. Alors  $\mathcal{O}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(F_i)$ .

DÉMONSTRATION. - Soient  $E_1, E_2$  deux affinoïdes tels que  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Nous allons montrer qu'il existe  $f \in \mathcal{O}(E_1 \cup E_2)$  tel que  $f(z) = 0$  pour  $z \in E_1$  et  $f(z) = 1$  pour  $z \in E_2$ . En effet, on peut supposer (quitte à effectuer un automorphisme de  $\mathbb{P}$ ) que

$$E_1 \subset \{z \in \mathbb{P} \mid |z| \leq |\pi|\} \quad \text{et} \quad E_2 \subset \{z \in \mathbb{P} \mid |z| \geq |\pi|^{-1}\}, \quad \text{avec} \quad 0 < |\pi| < 1.$$

Soit  $f_n(z) = \frac{z^n}{z^n + 1}$ , alors la suite  $f_n$  converge dans  $\mathcal{O}(E_1 \cup E_2)$  vers un élément  $f$  avec  $f(z) = 0$  pour  $z \in E_1$  et  $f(z) = 1$  pour  $z \in E_2$ .

Ainsi

$$\mathcal{O}(E_1 \cup E_2) = f \mathcal{O}(E_1 \cup E_2) \oplus (1-f) \mathcal{O}(E_1 \cup E_2),$$

il est clair que  $f \mathcal{O}(E_1 \cup E_2) \simeq \mathcal{O}(E_2)$ ;  $(1-f) \mathcal{O}(E_1 \cup E_2) \simeq \mathcal{O}(E_1)$ .

Ainsi

$$\mathcal{O}(E_1 \cup E_2) \simeq \mathcal{O}(E_1) \oplus \mathcal{O}(E_2).$$

Alors un raisonnement par récurrence sur  $n$  montre immédiatement le lemme.

(I. 2. 2.) THÉORÈME. - Soit  $F$  un affinoïde connexe de  $\mathbb{P}$  tel que  $\infty \notin F$ .

i) Soit  $f \in \mathcal{O}(F)$ ,  $f \neq 0$ . Alors  $f$  a un nombre fini de zéros,  $c_1, c_2, \dots, c_m$  et on a  $f(z) = g(z) \prod_{i=1}^m (z - c_i)$  où  $g \in \mathcal{O}(F)$  et  $g$  n'a pas de zéros sur  $F$ .

ii) Soit  $g \in \mathcal{O}(F)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes

$\alpha$ )  $g$  est un élément inversible

$\beta$ )  $g$  n'a pas de zéro sur  $F$

$\gamma$ ) il existe  $a > 0$  tel que  $|g(z)| \geq a$  pour tout  $z \in F$ .

iii) L'anneau  $\mathcal{O}(F)$  est principal, ses idéaux maximaux sont les  $(z - c) \mathcal{O}(F)$  où  $c \in F$ .

DÉMONSTRATION. - Elle se fait en plusieurs étapes que nous appellerons lemmes. Le procédé consiste à décomposer l'affinoïde connexe en parties simples sur lesquelles on étudie les zéros de  $f$ .

L'affinoïde  $F$  est le complémentaire de  $n+1$  disques ouverts disjoints deux à deux,  $D_0, D_1, \dots, D_n$  définis par

$$D_0 = \{z \in \mathbb{P} \mid |z| > |\pi_0|\}$$

$$D_i = \{z \in K \mid |z - a_i| < |\pi_i|\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Soient

$$F_i = \{z \in F \mid |z - a_i| \leq |z - a_j| \text{ pour } 1 \leq j \leq n\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Alors  $F_i$  est un affinoïde connexe et l'on a  $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ . Soient  $|\pi_i| = r_1 < r_2 < \dots < r_s$  l'ensemble  $\{|a_i - a_j| \mid i \neq j, 1 \leq j \leq n\}$ .

Soient

$$C_{r_t, r_{t+1}} = \{z \in K \mid r_t < |z - a_i| < r_{t+1}\}$$

$$C'_r = \{z \in K \mid |z - a_i| = r_t \text{ et } |z - a_j| = r_t \text{ pour } |a_j - a_i| = r_t\}.$$

Alors on a

$$F_i = \bigcup_{t=1}^{s-1} C_{r_t, r_{t+1}} \cup_{t=1}^s C'_r.$$

Soient  $r, r' \in |K^\times|$ ,  $u_0 \in K$ , on note  $C_{r, r'}$  la couronne

$$C_{r, r'} = \{z \in K \mid r < |z - u_0| < r'\}.$$

Soient  $r \in |K^\times|$ ,  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \in K$  tels que  $|u_i - u_0| = r$ , on note  $C'_r$  l'ensemble suivant

$$C'_r = \{z \in K \mid |z - u_i| = r, 1 \leq i \leq n \text{ et } |z - u_0| = r\}.$$

On peut donc décomposer  $F$ .

(I.2.3) LEMME. - Soit  $F$  un affinofde connexe tel que  $\infty \notin F$ .

Alors  $F$  est réunion finie d'ensembles de la forme  $C_{r, r'}$  et  $C'_r$ .

(I.2.4) LEMME. - Soient  $r \in |K^\times|$ ,  $D_r = \{z \in K \mid |z| \leq r\}$ .

i) Soit  $f \in \mathcal{O}(D_r)$ . Alors  $f$  se décompose de façon unique sous la forme  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  et on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n r^n = 0$ ,  $\|f\|_{D_r} = \max_n |a_n| r^n$

ii) Soient  $f, g \in \mathcal{O}(D_r)$ , alors on a  $\|f \cdot g\|_{D_r} = \|f\|_{D_r} \cdot \|g\|_{D_r}$ .

iii) Soit  $a \in D_r$ ,  $f \in \mathcal{O}(D_r)$  alors  $f$  se décompose de façon unique sous la forme  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$  et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n r^n = 0, \quad \|f\|_{D_r} = \max_n |b_n| r^n.$$

iv) Si  $r' \leq r$  on a  $\|f\|_{D_{r'}} \leq \|f\|_{D_r}$ .

DÉMONSTRATION. - Il suffit de considérer le cas où  $r = 1$ ,

$f(z) = \sum_{n=1}^N a_n z^n$  et  $\max_n |a_n| = 1$ . Alors  $\bar{f}(z)$  est un polynôme non nul de  $\bar{K}[z]$ , ainsi il existe  $z_0 \in K^0$  tel que  $\bar{f}(z_0) \neq \bar{0}$ , donc  $|f(z_0)| = 1$ . Ce qui montre que  $\|f\|_{D_1} = \max_n |a_n|$ . Le reste du lemme se déduit immédiatement de cette égalité.

(I. 2.5) LEMME. - Soient  $r \in |K^x|$ ,  $D_r = \{z \in K \mid |z| \leq r\}$ .

i) Soient  $f \in \mathcal{O}(D_r)$ ,  $f \neq 0$ ,  $m = \max\{n \mid |a_n| r^n = \|f\|_{D_r}\}$ .

Alors  $f$  a  $m$  zéros  $c_1, c_2, \dots, c_m$ ;  $f(z) = g(z) \prod_{i=1}^m (z - c_i)$ ,  $g \in \mathcal{O}(D_r)$  et n'a pas de zéro sur  $D_r$ .

ii) Soit  $g \in \mathcal{O}(D_r)$  les propriétés suivantes sont équivalentes

α)  $g$  est un élément inversible de  $\mathcal{O}(D_r)$

β)  $g$  n'a pas de zéro sur  $D_r$

γ) pour tout  $z \in D_r$  on a  $|g(z)| = \|g\|_{D_r}$ .

DÉMONSTRATION. - Il suffit de faire la démonstration pour  $r = 1$  et

$\|f\| = 1$ . Montrons i) lorsque  $m = 0$ . On a  $|a_0| = 1$  et il existe

$\pi \in K$  tel que  $|a_i| \leq |\pi| < 1$  pour  $i = 1, 2, \dots$ . Ainsi

$f = a_0(1 + a_0^{-1}\pi g)$ , avec  $g \in \mathcal{O}(D_1)$  et  $\|g\| \leq 1$ . Il suit que

$a_0^{-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (a_0^{-1}\pi g)^k \right)$  est un élément de  $\mathcal{O}(D_1)$  et est l'inverse de  $f$ .

Il est alors clair que  $f$  n'a pas de zéros.

On suppose maintenant le lemme (i) satisfait lorsque

$\max\{n \mid |a_n| r^n = \|f\|_{D_r}\} < m$ . Soit  $f \in \mathcal{O}(D_1)$  tel que

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\max_n |a_n| = 1$  et  $m = \max\{n \mid |a_n| = 1\}$ .

Soit  $f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ , si  $N \geq m$  on a

$$\bar{f}(z) = \bar{f}_N(z) = \sum_{n=0}^m \bar{a}_n z^n \text{ et } d^{\circ} \bar{f} = m.$$

Le polynôme  $f_N(z)$  se décompose sous la forme

$$f_N(z) = \lambda \prod_{i=1}^s (z - \alpha_i) \prod_{i=1}^k (1 - z/\beta_j), \text{ avec } |\lambda| = 1, |\alpha_i| \leq 1, |\beta_j| > 1.$$

On a

$$\bar{f}_N(z) = \bar{\lambda} \prod_{i=1}^s (z - \bar{\alpha}_i), \text{ puisque } d^\circ \bar{f} = d^\circ \bar{f}_N = m,$$

on a donc  $m = s$ .

Soit  $c \in D_1$  un zéro de  $f_M(z)$ . On a

$$|f_N(c)| = |f_N(c) - f_M(c)| = |\lambda| \prod_{i=1}^m |c - \alpha_i| \leq \|f_N - f_M\|.$$

Il existe donc  $i_0$  tel que  $|c - \alpha_{i_0}| \leq \|f_N - f_M\|^{1/m}$ .

Ceci montre qu'il existe une suite de Cauchy  $(d_N)_N$  telle que  $d_N \in D_1$  et  $f_N(d_N) = 0$ . Ainsi la limite  $c_1$  de la suite  $(d_N)$  est un zéro de  $f$  et  $c_1 \in D_1$ . Alors

$$f(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - c_1)^n, \text{ comme } f(c_1) = 0, \text{ on a}$$

$$f(z) = (z - c_1) h(z) \text{ où } h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - c_1)^{n-1} \in \mathcal{O}(D_1).$$

De plus

$$\bar{f}(z) = (z - \bar{c}_1) \bar{h}(z), \text{ ainsi } d^\circ \bar{h} = m - 1.$$

Ainsi  $h(z)$  satisfait l'hypothèse de récurrence. Il existe

$c_2, \dots, c_m \in D_1$  et  $g$  inversible de  $\mathcal{O}(D_1)$  tel que

$$h(z) = \prod_{i=1}^m (z - c_i) g(z).$$

Pour la partie ii) du lemme,  $\alpha$  implique  $\beta$  et  $\gamma$  implique  $\alpha$  sont évidents. Supposons  $\beta$ ) satisfait, alors d'après i) on a (toujours dans le cas où  $r=1$ )  $|a_0| > \max |a_n|$ . Ce qui prouve que  $|f(z)| = |a_0| = \|f\|_{D_1}$ .

(I.2.6) LEMME (de factorisation) [12]. - Soient  $F$  un affinoïde de  $\mathbb{P}$ ,  $\infty \notin F$ ,  $f \in \mathcal{O}(F)$ ,  $f \neq 0$ ,  $c \in F$  tel que  $f(c) = 0$ . Alors il existe  $g \in \mathcal{O}(F)$  tel que  $f(z) = (z - c) g(z)$  pour tout  $z \in F$ .



DÉMONSTRATION. - Il existe un disque fermé  $D$  contenant  $c$  et  $D \subset F$ , soit  $|\pi|$  son rayon. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions rationnelles sur  $F$  convergente vers  $f$ . Alors on a

$$f_n(z) - f_n(c) = (z-c) r_n(z).$$

Il s'agit de montrer que la suite  $(r_n)$  converge dans  $\mathcal{O}(F)$ .

On a d'après le lemme I.2.4, ii)

$$\|(z-c)(r_n(z) - r_{n+1}(z))\|_D = \|z-c\|_D \cdot \|r_n - r_{n+1}\|_D = \|f_n - f_{n+1} + f_{n+1}(c) - f_n(c)\|_D,$$

ainsi

$$\|r_n - r_{n+1}\| \leq \frac{2 \|f_n - f_{n+1}\|_F}{|\pi|}.$$

Soit  $z \in F-D$ , on a

$$|r_n(z) - r_{n+1}(z)| = \left| \frac{f_n(z) - f_{n+1}(z) + f_{n+1}(c) - f_n(c)}{z-c} \right| \leq \frac{2 \|f_n - f_{n+1}\|_F}{|\pi|}.$$

On a donc

$$\|r_n - r_{n+1}\|_F \leq \frac{2 \|f_n - f_{n+1}\|_F}{|\pi|},$$

ce qui prouve que la suite  $(r_n)$  converge vers un élément  $g$  de  $\mathcal{O}(F)$ .

(I.2.7) LEMME. - Soient  $D = \{z \in K \mid |z| < 1\}$ ,  $F$  un affinoïde tel que  $D \subset F$  et  $\infty \notin F$ . Soit  $f \in \mathcal{O}(F)$ ,  $f \neq 0$ . Alors  $f$  a un nombre fini de zéros sur  $D$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_m$  et  $f(z) = g(z) \prod_{i=1}^m (z - c_i)$ ,  $g(z) \in \mathcal{O}(F)$  et  $g$  n'a pas de zéros sur  $D$ , plus précisément on a  $|g(z)| = \|g\|_D$  pour tout  $z \in D$ .

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que  $f$  a un nombre fini de zéros sur  $D$ . Soient  $\rho = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \|f\|_{D_r}$  et  $p/q$  une fraction rationnelle sans pôles dans  $F$  telle que

$$\|f - p/q\|_F < \rho/2.$$

Il existe  $r_0 \in |K^x|$ ,  $0 < r_0 < 1$  tel que le polynôme  $p(z)$  n'ait pas de zéros dans la couronne,  $r_0 < |z| < 1$ .

Il existe  $r_1 \in |K^x|$ ,  $0 < r_1 < 1$  tel que  $\|f\|_{D_{r_1}} \geq \rho/2$ . Soit

$r_2 = \max(r_0, r_1)$ . On a donc pour  $1 > r > r_2$

$$\|f\|_D = \|p/q\|_{D_r} = |p(z)/q(z)|, \text{ pour tout } z \text{ tel que } |z| = r.$$

Ainsi les zéros de  $f$  dans  $D$  sont dans  $D_{r_2}$  et on a

$$|f(z)| \geq \|f\|_{D_{r_2}} \text{ pour } r_2 < |z| < 1.$$

Il suit donc du lemme I.2.5 que  $f$  a un nombre fini de zéros sur  $D$ .

Soient  $c_1, c_2, \dots, c_m$  ces zéros. Le lemme I.2.6 montre que

$$f = g \prod_{i=1}^m (z - c_i) \text{ où } g \in \mathcal{O}(F). \text{ Ainsi } g \text{ n'a pas de zéros sur } D_{r_2}$$

(lemme I.2.5) et comme  $f(z)$  n'a pas de zéros pour  $r_2 < |z| < 1$ ,

il suit que  $g$  n'a pas de zéros sur  $D$ . Ainsi le lemme I.2.5 montre

$$|g(z)| = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \|g\|_{D_r} = \|g\|_D.$$

(I.2.8) LEMME. - Soient  $r \in |K^x|$ ,  $a_1, \dots, a_n \in K$  et  $|a_i| = r$

$C'_r = \{z \in K \mid |z| = r \text{ et } |z - a_i| \geq r \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$ . Soient  $F$  un anneau localement fini, et  $F \supset C'_r$ .

i) Soit  $f \in \mathcal{O}(F)$ ,  $f \neq 0$ , alors  $f$  a un nombre fini de zéros sur

$C'_r$ ,  $c_1, \dots, c_m$  et  $f(z) = g(z) \prod_{i=1}^m (z - c_i)$  où  $g \in \mathcal{O}(F)$  et n'a pas de zéro sur  $C'_r$ .

ii) Si  $g \in \mathcal{O}(F)$  et n'a pas de zéro sur  $C'_r$ , alors

$$|g(z)| = \|g\|_{C'_r} \text{ pour tout } z \in C'_r.$$

DÉMONSTRATION. - Soit  $p/q$  une fraction rationnelle sans pôles dans  $F$  telle que

$$\|f - p/q\|_F < \|f\|_{C'_r}.$$

Soient  $d_1, d_2, \dots, d_s$  les zéros de  $p$  dans  $C'_r$ .

Soit  $z$  tel que  $z \in C'_r$  et  $|z - d_i| \geq r$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Alors

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| = \left\| \frac{p}{q} \right\|_{C'_r},$$

il s'ensuit que

$$|f(z)| = \|f\|_{C'_r}.$$

Il reste à considérer  $z \in \{z \mid |z - d_i| < r\}$ , c'est-à-dire un nombre fini de disques ouverts. Or le lemme I. 2. 7 montre que  $f$  a un nombre fini de zéros sur chacun de ces disques ouverts et que l'on peut obtenir la factorisation désirée.

Montrons ii). Soit  $f \in \mathcal{O}(F)$  sans zéros sur  $C'_r$  et  $p/q$  tel que

$$\|f - p/q\|_F < \|f\|_{C'_r}.$$

On a donc  $|f(z)| = \|f\|_{C'_r}$  sauf dans un nombre fini de disques de la forme  $D' = \{z \mid |z - d| < r\}$ . On a

$$\|p/q\|_{D'} = \|p/q\|_{C'_r},$$

il suit que

$$\|f\|_{D'} = \|p/q\|_{D'} = \|f\|_{C'_r}.$$

Or le lemme montre que

$$|f(z)| = \|f\|_{D'}, \text{ pour tout } z \in D',$$

ce qui prouve

$$|f(z)| = \|f\|_{C'_r} \text{ pour tout } z \in C'_r.$$

(I. 2. 9) LEMME. - Soient  $r_1, r_2 \in |K^\times|$ ,  $r_1 < r_2$ ,  $C_{r_1, r_2} = \{z \in K \mid r_1 < |z| < r_2\}$ . Soit  $F$  un affinoid tel que  $F \supset C_{r_1, r_2}$ .

i) Soit  $f \in \mathcal{O}(F)$ ,  $f \neq 0$ , alors  $f$  a un nombre fini de zéros  $c_1, c_2, \dots, c_m$  sur  $C_{r_1, r_2}$  et on a  $f(z) = g(z) \prod_{i=1}^m (z - c_i)$  où  $g \in \mathcal{O}(F)$  et n'a pas de zéros sur  $C_{r_1, r_2}$ .

ii) Si  $g \in \mathcal{O}(F)$  n'a pas de zéros sur  $C_{r_1, r_2}$ , alors il existe  $a > 0$  tel que  $a \leq |g(z)|$  pour tout  $z \in C_{r_1, r_2}$ .

DÉMONSTRATION. - Soit  $f \in \mathcal{O}(F)$ , alors  $f$  se développe de façon unique sous forme d'une série convergente sur  $C_{r_1, r_2}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n .$$

Posons pour  $r \in |K^\times|$  et  $r_1 < r < r_2$

$$\|f\|_r = \max_{|z|=r} |f(z)| .$$

On a

$$\|f\|_r = \max_n |a_n| r^n .$$

Soit

$$\theta = \inf_{r_1 < r < r_2} \|f\|_r ,$$

il est clair que  $\theta > 0$  puisque  $f \neq 0$ .

Soit  $p/q$  sans pôles dans  $F$  telle que

$$\|f - p/q\|_F < \theta .$$

Soient  $d_1, \dots, d_s$  les zéros de  $p$ .

Soit  $z$  tel que  $|z| = r$ ,  $|z - d_i| \geq r$  pour  $|d_i| = r$ . Alors on a

$$\| \frac{p}{q} \|_r = \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right|$$

donc

$$|f(z)| = \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| = \|f\|_r \geq \theta .$$

Donc  $|f(z)| \geq \theta$  sauf un nombre fini de circonférences  $C'_r$ . Ainsi le lemme I. 2. 8 permet de montrer les parties i) et ii).

Fin de la démonstration du théorème. - Les parties i) et ii) sont conséquences immédiates des lemmes I. 2. 3, I. 2. 8, I. 2. 9. Pour montrer iii) il faut d'abord remarquer que  $\mathcal{O}(F)$  est intègre. Soit  $f, g \in \mathcal{O}(F)$  tels que  $f \cdot g = 0$ , puisque  $F$  a une infinité d'éléments, donc  $f$  ou  $g$  a une infinité de zéros, ainsi  $f$  ou  $g$  est nul d'après i). Il est alors clair que  $\mathcal{O}(F)$  est principal.

(I.2.10) REMARQUE. - L'algèbre des éléments analytiques sur un quasi-connexe est intègre mais n'est pas nécessairement principale. L'algèbre des éléments analytiques sur un infraconnexe a pour seuls idempotents 0 et 1, mais elle n'est pas nécessairement intègre. Ces propriétés sont caractérisées par l'existence de filtres (A. Escassut [12], [13], [15]).

(I.2.11) REMARQUE. - La propriété pour l'algèbre  $\mathcal{O}(F)$  d'être principale est caractéristique des affinoïdes connexes  $F$  contenus dans  $\mathbb{P}$  dans le sens suivant : une algèbre affinoïde (cf. chapitre II pour la définition) est principale si et seulement si elle est isomorphe à  $\mathcal{O}(F)$  où  $F$  est un affinoïde connexe de  $\mathbb{P}$  (M. van der Put [44]).

(I.2.12) EXERCICE. - Affinoïde défini par des fonctions holomorphes.

Soient  $F$  un affinoïde,  $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(F)$  et  $R = \{z \in F \mid |f_1(z)| \leq |f_2(z)|\}$ . Alors  $R$  est ou bien vide ou bien affinoïde. On peut procéder ainsi

a) En factorisant  $f_1, f_2$  selon le théorème I.2.2, montrer qu'il existe  $p, q \in K[z]$  et  $u \in \mathcal{O}(F)^\times$  tels que

$$R = \{z \in \mathbb{P} \mid \left| \frac{p(z)}{q(z)} \cdot u(z) \right| \leq 1\}.$$

b) Soit  $m = \inf_{z \in F} |u(z)|$  et  $r(z)$  une fonction rationnelle sur  $F$  telle que  $\|r - u\|_F < m$ . Montrer que

$$R = \{z \in \mathbb{P} \mid \left| \frac{p(z)}{q(z)} \cdot r(z) \right| \leq 1\}.$$

En conclure que  $F$  est affinoïde (utiliser I.1.2).

### I. 3. - Le théorème des résidus

#### I. 3.1. - Fonctions sur une circonférence

La circonférence  $\{z \in K \mid |z| = 1\}$  sera notée  $F$ . On appelle paramètre sur  $F$  un élément inversible  $t$  de  $\mathcal{O}(F)$  tel que

$$\alpha) \quad \|t\| = 1.$$

$\beta)$  Chaque élément  $f$  de  $\mathcal{O}(F)$  s'écrit d'une façon unique

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\gamma) \quad \text{Si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{alors} \quad \|\sum a_n t^n\| = \max |a_n|.$$

PROPOSITION. - Soit  $t$  un paramètre sur la circonférence

$$F = \{z \in K \mid |z| = 1\}.$$

i) Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{O}(F)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$\alpha)$   $f$  est inversible,

$\beta)$   $f$  n'a pas de zéros,

$\gamma)$   $f$  est de la forme  $\lambda t^n (1 + \sum_{i \neq 0} b_i t^i)$  avec  $\lambda \in K^*$ ,  $|b_i| < 1$ .

ii) Soit  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n$  un élément non nul de  $\mathcal{O}(F)$ . Alors le nombre de zéros de  $f$  est :  $\max\{m \mid |a_m| = \|f\|\} - \min\{m \mid |a_m| = \|f\|\}$ .

iii) L'entier  $n$ , défini en i) est appelé l'ordre de  $f$  par rapport au paramètre  $t$  et on le note  $\text{ord}_t(f)$ . La fonction  $z \in \mathcal{O}(F)$  est un paramètre et on a  $\text{ord}_t(f) = \pm \text{ord}_z(f)$ . Plus précisément  $\text{ord}_t(f) = \text{ord}_t(z) \text{ord}_z(f)$  et  $\text{ord}_t(z) = \pm 1$ .

DÉMONSTRATION. - i) L'équivalence de  $\alpha)$  et  $\beta)$  est déjà démontrée dans (I. 2). L'implication  $\gamma) \Rightarrow \alpha)$  est évidente. Il reste à démontrer  $\alpha) \Rightarrow \gamma)$ . Il suffit de prendre un  $f \in \mathcal{O}(F)$  de norme 1. Comme la norme de  $\mathcal{O}(F)$  est multiplicative,  $f^{-1}$  est aussi de norme 1. L'élément  $\bar{f} \in \overline{\mathcal{O}(F)}$  est ainsi inversible. D'après la définition du paramètre  $t$ ,  $\overline{\mathcal{O}(F)} = \overline{K[t, t^{-1}]}$ . Alors  $\bar{f} = \bar{\lambda} t^n$  ( $\bar{\lambda} \neq 0$ ) et  $f$  est de

la forme  $\lambda t^n (1 + \sum_{i \neq 0} b_i t^i)$  avec  $|b_i| < 1$ .

ii) D'après (I.2)  $f = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_r) g$  où  $|\alpha_1| = \dots = |\alpha_r| = 1$  sont les zéros de  $f$  et où  $g$  est inversible. Selon i) on a  $g = \lambda t^n (1 + \sum_{i \neq 0} b_i t^i)$  avec  $|b_i| < 1$ . Le résultat ii) s'en déduit facilement.

iii) Soient  $t$  et  $z$  deux paramètres sur  $F$ , alors on a  $\overline{\mathcal{O}(F)} = \overline{K}[t', t'^{-1}] = \overline{K}[z', z'^{-1}]$  où  $t' = \overline{t}$  et  $z' = \overline{z}$ . Il suit que  $t' = cz'^\varepsilon$  avec  $\varepsilon = \pm 1$  et  $c \in \overline{K}^\times$ , donc  $\text{ord}_t(z) = \text{ord}_z(t)$ . Soit  $f \in \mathcal{O}(F)$ , inversible et de norme 1. Alors  $\overline{f} = at'^n = bz'^m$  avec  $a, b \in \overline{K}^\times$ ,  $n = \text{ord}_t f$ ,  $m = \text{ord}_z f$ . Il suit donc que  $\text{ord}_t f = \text{ord}_t z \cdot \text{ord}_z f$ .

REMARQUE. - On peut définir sur la circonférence  $F$  une orientation en se donnant un isomorphisme de groupes  $\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathcal{O}(F)}^\times / \overline{K}^\times$ . Sur une circonférence orientée  $\text{ord}_t(f)$  ne dépend pas du paramètre positif  $t$ . On pose  $\text{ord}_F(f) = \text{ord}_t(f)$ .

### I.3.2. - Le résidu d'une forme différentielle méromorphe

Une fonction méromorphe sur un affinoïde  $F$  est par définition un élément de l'anneau total des fractions de  $\mathcal{O}(F)$ . Si  $F$  est connexe, l'anneau  $\mathcal{O}(F)$  est intègre et les fonctions méromorphes sur  $F$  forment un corps. Une forme différentielle holomorphe (ou méromorphe)  $\omega$  sur un affinoïde  $F$  (avec  $\omega \in \mathcal{O}(F)$ ) sera une expression  $\omega = fdz$  où  $f$  est holomorphe (ou méromorphe) sur  $F$  (la définition des formes différentielles sur un espace analytique sera donnée en II.7).

Pour une circonférence orientée  $F$  et une forme différentielle holomorphe  $\omega$  sur  $F$  nous voulons définir le résidu de  $\omega$  par rapport à  $F$ , que l'on notera  $\text{Res}_t(\omega)$ .

Soit  $t$  un paramètre sur  $F$  (positif pour l'orientation), alors  $\omega$  est de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n dt$ . On notera  $\text{Res}_t(\omega) = a_{-1}$ .

Nous allons démontrer :

PROPOSITION. -  $\text{Res}_t(w)$  ne dépend pas de  $t$ .

DÉMONSTRATION. - Soit  $s$  un autre paramètre positif sur  $F$ . Il suffit de montrer  $\text{Res}_s(t^m \frac{dt}{t}) = \delta_{0,m}$  afin de démontrer que

$\text{Res}_t(w)$  ne dépend pas de  $t$ . On écrit  $t$  comme une série de Laurent en  $s$ ,  $t = \lambda s (1 + \sum_{n \neq 0} a_n s^n)$  avec  $|\lambda| = 1$  et  $|a_n| < 1$ . Par continuité il suffit de démontrer la formule dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de  $a_n \neq 0$ . Egalement on peut se borner à  $m \geq 0$ .

Pour  $m = 0$  la vérification est facile. Posons :

$$t = \mu s \prod_{i=1}^a (1 + \alpha_i s) \prod_{j=1}^b (1 + \beta_j s^{-1}) \quad \text{avec} \quad |\mu| = 1 ; |\alpha_i| < 1 ; |\beta_j| < 1.$$

$$\text{Alors} \quad \frac{dt}{t} = (1 + \sum \frac{\alpha_i s}{1 + \alpha_i s} - \sum \frac{\beta_j s^{-1}}{1 + \beta_j s^{-1}}) \frac{ds}{s} \quad \text{et} \quad \text{Res}_s(\frac{dt}{t}) = 1.$$

Si  $m > 0$  et si  $K$  est de caractéristique 0, on a

$$t^m \frac{dt}{t} = \frac{1}{m} dt^m = \frac{1}{m} d(\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n s^n) = \frac{1}{m} \sum n b_n s^{n-1} \frac{ds}{s}.$$

$$\text{Donc} \quad \text{Res}_s(t^m \frac{dt}{t}) = 0.$$

Le cas difficile est  $m > 0$  et  $K$  de caractéristique positive. On a

$$t^m \frac{dt}{t} = \lambda^m s^m (1 + \sum_{n \neq 0} a_n s^n)^{m-1} (1 + \sum_{n \neq 0} (n+1) a_n s^n) \frac{ds}{s}.$$

En remplaçant chaque  $a_n \neq 0$  par une variable  $X_n$  le terme constant de  $s^m (1 + \sum_{n \neq 0} a_n s^n)^{m-1} (1 + \sum_{n \neq 0} (n+1) a_n s^n)$  devient un polynôme  $P$  en  $\{X_n\}$  et à coefficient dans  $\mathbb{Z}$ .

Pour chaque valeur des  $\{X_n\}$  dans un corps de caractéristique 0 le polynôme  $P$  s'annule. Il s'ensuit que  $P$  est 0. Donc

$$\text{Res}_s(t^m \frac{dt}{t}) = 0.$$

REMARQUE. - Nous écrivons  $\text{Res}_F(w) = \text{Res}_t(w)$  où  $F$  est une circonférence orientée. Dans le cas complexe,  $\text{Res}_F(w)$  n'est autre que l'intégrale  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} w$ .



DEFINITIONS. - Soient  $p$  un point de  $\mathbb{P}$ ,  $f$  une fonction méromorphe sur un voisinage de  $p$  et  $\omega$  une forme différentielle méromorphe sur un voisinage de  $p$ . Alors  $f = \sum_{n \gg -\infty} a_n (z-p)^n$  et  $\omega = \sum_{n \gg -\infty} b_n (z-p)^n d(z-p)$ . On définit  $\text{ord}_p(f) = \min \{m \mid a_m \neq 0\}$  et  $\text{Res}_p \omega = b_{-1}$ .

EXERCICE. - Un paramètre local en  $p$  sera une fonction holomorphe  $t$  sur un voisinage de  $p$  tel que  $t = \sum_{i \geq 1} a_i (z-p)^i$  et  $a_1 \neq 0$ . La fonction  $f$  peut s'écrire comme  $\sum_{n \gg -\infty} a'_n t^n$  et  $\omega$  est de la forme  $\sum_{n \gg -\infty} b'_n t^n dt$ . Montrer que  $\min \{n \mid a'_n \neq 0\} = \text{ord}_p(f)$  et que  $b'_{-1} = b_{-1}$ .

### 1.3.3. - Le théorème des résidus

Soit  $B$  un disque ouvert de  $K$ ,  $B^+$  le disque fermé correspondant. On appelle  $\partial B = B^+ - B$  la circonférence de  $B$ . Soit  $f$  une fonction méromorphe sur  $B^+$  et  $\omega$  une forme différentielle méromorphe sur  $B^+$ . On suppose que  $f$  n'a ni zéros ni pôles sur  $\partial B$  et que  $\omega$  n'a pas de pôles sur  $\partial B$ .

LEMME. -  $\text{ord}_{\partial B}(f) = \sum_{p \in B} \text{ord}(f)$  et  $\text{Res}_{\partial B}(\omega) = \sum_{p \in B} \text{Res}_p(\omega)$ .

DÉMONSTRATION. - Soit  $B$  donné par  $\{z \in K \mid |z| < 1\}$ . Alors  $f$  s'écrit comme  $f = (z-\alpha_1)^{n_1} \dots (z-\alpha_r)^{n_r} g$  où  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in B$ ;  $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$  et  $g \in \mathcal{O}(B^+)$  est inversible. La fonction  $g$  a la forme  $\lambda (1 + \sum b_i z^i)$  où  $\lambda \in K^\times$ ,  $|b_i| < 1$ . On voit que

$\text{ord}_{\partial B}(f) = \sum_{i=1}^r n_i = \sum_{p \in B} \text{ord}_p(f)$ . La forme différentielle  $\omega$  peut s'écrire comme

$$\left( \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^N \frac{a_{i,n}}{(z-\alpha_i)^n} + \sum_{m \geq 0} a_m z^m \right) dz.$$

Un petit calcul montre que  $\text{Res}_{\partial B}(\omega) = \sum a_i$  et donc que

$$\text{Res}_{\partial B}(\omega) = \sum_{p \in B} \text{Res}_p(\omega).$$

**THÉORÈME (des résidus).** - Soient  $B_1, \dots, B_n$  des disques ouverts de  $K$  tels que les disques fermés correspondants  $B_1^+, \dots, B_n^+$  soient disjoints. L'affinoïde connexe  $\mathbb{P} - (B_1 \cup \dots \cup B_n)$  sera notée  $F$  et  $\overset{\circ}{F}$  désigne  $\mathbb{P} - (B_1^+ \cup \dots \cup B_n^+)$ . Soit  $f$  une fonction méromorphe sur  $F$  sans pôles ni zéros sur  $\partial B_1 \cup \dots \cup \partial B_n$ . Soit  $w$  une forme différentielle méromorphe sur  $F$  sans pôles sur  $\partial B_1 \cup \dots \cup \partial B_n$ . Alors

- i)  $\sum_{p \in \overset{\circ}{F}} \text{ord}_p(f) + \sum_{i=1}^n \text{ord}_{\partial B_i}(f) = 0$ .
- ii)  $\sum_{p \in \overset{\circ}{F}} \text{Res}_p(w) + \sum_{i=1}^n \text{Res}_{\partial B_i}(w) = 0$ .

**DÉMONSTRATION.** - i) Pour une fonction rationnelle  $f$  on sait que  $\sum_{p \in \mathbb{P}} \text{ord}_p(f) = 0$  et la formule i) est une conséquence du lemme.

En général, d'après (I.2), on peut écrire  $f = f_1 f_2$  où  $f_1$  est rationnelle et  $f_2 \in \mathcal{O}(F)$  n'a pas de zéros. Il suffit de montrer i) pour  $f_2$ . D'après (I.2),  $\delta = \inf_{x \in \overset{\circ}{F}} |f_2(x)| > 0$  et il existe une fonction rationnelle  $f_3$  avec  $\|f_2 - f_3\| < \delta$ . La fonction  $f_3$  n'a pas de zéros sur  $F$  et  $\text{ord}_{\partial B_i}(f_2) = \text{ord}_{\partial B_i}(f_3)$  pour chaque  $i$ . La formule i) est donc une conséquence de  $\sum \text{ord}_{\partial B_i}(f_3) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \text{ord}_p(f_3) = 0$ .

ii) On prend un point  $a \notin F$ . La forme différentielle  $w$  peut s'écrire comme

$$\left( \sum_{i=1}^s \sum_{n=1}^N \frac{a_{n,i}}{(z - \alpha_i)^n} + h(z) \right) d\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  sont les pôles de  $w$  dans  $\overset{\circ}{F}$  et  $h \in \mathcal{O}(F)$ . Alors il suffit de vérifier ii) pour un  $w$  de la forme  $g(z) d\left(\frac{1}{z-a}\right)$  avec  $g$  une fonction rationnelle sur  $\mathbb{P}$ . Pour un tel  $w$  on sait que

$\sum_{p \in \mathbb{P}} \text{Res}_p(w) = 0$  et le lemme achève la démonstration.

**EXERCICE.** - Supposons  $K$  de caractéristique 0. Montrer que la partie ii) du théorème implique la partie i).

EXERCICE. - Soit  $F$  l'affinofde connexe  $\{z \in K \mid |\pi| \leq |z| \leq |\pi|^{-1}\}$  avec  $\pi \in K$ ,  $0 < |\pi| < 1$ . Montrer que  $\mathcal{O}(F)$  est l'anneau des séries  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$  avec  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_n| |\pi|^{-|n|} = 0$ . Montrer que  $\|\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n\| = \max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| |\pi|^{-|n|}$ .

Trouver à l'aide du théorème des résidus une formule pour le nombre des zéros de  $f = \sum a_n z^n$  dans  $F$ .

EXERCICE. - Le théorème des résidus est formulé pour le cas où les disques fermés  $B_1^+, \dots, B_n^+$  sont disjoints. On peut le formuler dans le cas général.

Trouver une formule donnant le nombre des zéros d'une fonction  $f \neq 0$  sur  $F = \{z \in K \mid |z| = 1 \text{ et } |z-1| = 1\}$ .

#### I. 4. - Topologie de Grothendieck sur $\mathbb{P}(K)$

Il y a sur  $\mathbb{P}(K)$  une topologie définie à partir des disques ouverts, cependant elle n'est pas suffisante pour définir une "bonne notion" de fonction analytique. En effet, le préfaisceau des fonctions holomorphes (exercice I. 4. 2) n'est pas un faisceau. C'est pourquoi on munit  $\mathbb{P}(K)$  d'une structure plus forte appelée topologie de Grothendieck.

##### I. 4. 1. - Topologie de Grothendieck, faisceau et cohomologie

Une topologie de Grothendieck sur un espace topologique  $X$  est définie par les données suivantes et propriétés suivantes :

1) Une famille  $\mathfrak{F}$  de sous-ensembles ouverts de  $X$  telle que  $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$  et telle que  $U, V \in \mathfrak{F}$  entraîne  $U \cap V \in \mathfrak{F}$ ,

2) pour tout  $U \in \mathfrak{F}$  un ensemble  $\text{Cov}(U)$  de recouvrements de  $U$  par des éléments de  $\mathfrak{F}$ ,

3)  $\{U\} \in \text{Cov}(U)$ ,

4) Si  $\mathcal{U} \in \text{Cov}(U)$  et si  $V \subset U$ ,  $V \in \mathfrak{F}$ , alors

$$\mathcal{U} \cap V := \{U' \cap V \mid U' \in \mathcal{U}\} \in \text{Cov}(V).$$

5) Si  $\mathcal{U}_i \in \text{Cov}(U_i)$  et si  $(U_i)_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$  alors

$$\bigcup_i \mathcal{U}_i := \{U' \mid U' \in \mathcal{U}_i \text{ pour un } i\} \text{ appartient à } \text{Cov}(U).$$

On utilise souvent la terminologie suivante : les éléments de  $\mathfrak{F}$  sont appelés les sous-ensembles admissibles de  $X$  ; les éléments de  $\text{Cov}(U)$  sont appelés les recouvrements admissibles.

Un pré-faisceau  $\mathfrak{S}$  sur  $X$  (muni d'une topologie de Grothendieck) est défini par les données et propriétés suivantes :

i) pour tout  $U \in \mathfrak{F}$ , d'un groupe abélien  $\mathfrak{S}(U)$ ,

ii)  $\mathfrak{S}(\emptyset) = \{0\}$ ,

iii) pour tout  $U \subset V$ , avec  $U, V \in \mathfrak{F}$ , d'un homomorphisme de groupes  $\rho_U^V : \mathfrak{S}(V) \rightarrow \mathfrak{S}(U)$ ,

iv) si  $U \subset V \subset W$  et  $U, V, W \in \mathfrak{F}$ , alors  $\rho_U^V \rho_V^W = \rho_U^W$ ,

v)  $\rho_U^U = \text{id}$ .

On dit que le pré-faisceau  $\mathfrak{S}$  est un faisceau si en plus

vi) pour tout  $(U_i)_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$  la suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S}(U) \xrightarrow{\varepsilon} \prod_i \mathfrak{S}(U_i) \xrightarrow{d} \prod_{i < j} \mathfrak{S}(U_i \cap U_j)$$

est exacte.

L'ensemble des indices  $I$  est supposé totalement ordonné. Les applications sont données par :

$$\varepsilon(f) = (\rho_{U_i}^U f)_i$$

$$d((f_i)) = (\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i} (f_i) - \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j} (f_j))_{i < j}.$$

Pour un recouvrement  $(U_i) \in \text{Cov}(U)$  on peut continuer la suite vi) et former le complexe de Čech :

$$\text{vii) } 0 \longrightarrow \prod_{i_0} \mathfrak{S}(U_{i_0}) \xrightarrow{d^0} \prod_{i_0 < i_1} \mathfrak{S}(U_{i_0} \cap U_{i_1}) \xrightarrow{d^1} \prod_{i_0 < i_1 < i_2} \mathfrak{S}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap U_{i_2}) \xrightarrow{d^2} \dots$$

où  $d^0$  est l'application  $d$  de vi),

où  $d^1$  est donnée par

$$d^1((f_{i_0, i_1})) = (f_{i_1, i_2} - f_{i_0, i_2} + f_{i_0, i_1})_{i_0 < i_1 < i_2}$$

(pour abrégé, on n'écrit pas les  $\rho_{**}$ )

et en général

$$d^n((f_{i_0, \dots, i_n})) = \left( \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{n+1}} \right)_{i_0 < i_1 < \dots < i_{n+1}}.$$

On vérifie sans peine que  $d^{n+1} d^n = 0$  pour tout  $n$ . Donc vii) est un complexe. Les groupes de cohomologie  $H^n := \ker d^n / \text{im } d^{n-1}$  seront notés  $\check{H}^n((U_i), \mathfrak{S})$ . Ils s'appellent les groupes de cohomologie de Čech relatifs à  $\mathfrak{S}$  et au recouvrement  $(U_i)$ .

On peut reformuler vi) de la façon suivante :

Le pré-faisceau  $\mathfrak{S}$  est un faisceau si  $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}(U)$  pour tout  $U \in \mathfrak{F}$  et  $\mathcal{U} \in \text{Cov}(U)$ .

#### I.4.2. - Topologie de Grothendieck de $\mathbb{P}(K)$ , faisceau des fonctions holomorphes

Soit  $\mathfrak{F}$  la famille constituée de  $\emptyset$ ,  $\mathbb{P}$  et de tous les affinoïdes de  $\mathbb{P}$ . Soit  $U \in \mathfrak{F}$ ,  $\text{Cov}(U)$  est constitué de tous les recouvrements  $\mathcal{U}$  de  $U$  (par des éléments de  $\mathfrak{F}$ ) dont on peut extraire un recouvrement fini. Il est facile de vérifier que  $\mathfrak{F}$  et  $\text{Cov}$  définissent une topologie de Grothendieck sur  $\mathbb{P}$ . Désormais  $\mathbb{P}(K)$  sera muni de cette topologie de Grothendieck.

Soit  $U$  un affinoïde, notons toujours  $\mathcal{O}(U)$  le groupe abélien des fonctions holomorphes sur  $F$  (défini en I.1.3), de plus posons  $\mathcal{O}(\emptyset) = 0$  et  $\mathcal{O}(\mathbb{P}) = K$ . Si  $U \subset V$ , soit  $\rho_U^V$  l'application de  $\mathcal{O}(V)$  dans  $\mathcal{O}(U)$  qui est la restriction à  $U$ . Il est facile de voir que la

donnée de  $\mathcal{O}$  et des applications  $\rho_U^V$ , définit un pré-faisceau sur  $\mathbb{P}(K)$ , appelé le pré-faisceau  $\mathcal{O}$  des fonctions holomorphes. Nous montrerons au paragraphe I.5 que  $\mathcal{O}$  est un faisceau.

EXERCICE. - Montrer que  $\mathcal{O}$  n'est pas un faisceau pour la topologie ordinaire sur  $\mathbb{P}(K)$  (c'est-à-dire, il existe  $U \in \mathfrak{F}$  et un recouvrement  $(U_i)$  de  $U$  par des éléments de  $\mathfrak{F}$  tels que  $\check{H}^0((U_i), \mathcal{O}) \neq \mathcal{O}(U)$ ).

EXEMPLE. - Soient  $X_1 = \{z \in \mathbb{P} \mid |z| \leq 1\}$  et  $X_2 = \{z \in \mathbb{P} \mid |z| \geq 1\}$ . Le recouvrement admissible  $\{X_1, X_2\}$  de  $\mathbb{P}$  donne le complexe de Čech :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(X_1) \oplus \mathcal{O}(X_2) \xrightarrow{d^0} \mathcal{O}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0.$$

On a  $H^0 = \ker d^0$ ;  $H^1 = \text{coher } d^0$ ;  $\mathcal{O}(X_1) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mid \lim a_n = 0 \}$  ;

$\mathcal{O}(X_2) = \{ \sum_{n=0}^{-\infty} a_n z^n \mid \lim a_n = 0 \}$  ;  $\mathcal{O}(X_1 \cap X_2) = \{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \mid \lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n = 0 \}$  et  $d^0((\sum_0^{\infty} a_n z^n, \sum_0^{-\infty} b_n z^n)) = \sum_0^{\infty} a_n z^n - \sum_0^{-\infty} b_n z^n$ .

Un calcul immédiat donne  $H^0 = K$  et  $H^1 = 0$ .

### I.5. - La cohomologie du faisceau $\mathcal{O}$

(I.5.1) THÉORÈME. - Soit  $U = \mathbb{P}$  ou  $U$  un affinoïde de  $\mathbb{P}$  et soit  $\mathcal{U} \in \text{Cov}(U)$ . Alors

- i)  $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(U)$  et
- ii)  $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$  pour  $i \geq 1$ .

DÉMONSTRATION. - Un cas particulier du théorème est le suivant :

"  $X_1, \dots, X_n$  sont des affinoïdes connexes disjoints de  $\mathbb{P}$ . Alors

$$\mathcal{O}(X_1 \cup \dots \cup X_n) = \bigoplus \mathcal{O}(X_i) \quad \text{" (I.2.1).}$$

Nous avons besoin d'un autre cas particulier :

(I. 5. 2) LEMME. - Soient  $X_1, X_2$  deux affinoïdes connexes de  $\mathbb{P}^n$  tels que  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ . Alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(X_1 \cup X_2) \longrightarrow \mathcal{O}(X_1) \oplus \mathcal{O}(X_2) \longrightarrow \mathcal{O}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0$$

est exacte.

DÉMONSTRATION DU LEMME. - Supposons que  $\omega \in X_1 \cap X_2$  et posons  $\mathbb{P}^n - X_1 = B_1 \cup \dots \cup B_n$  et  $\mathbb{P}^n - X_2 = C_2 \cup \dots \cup C_m$ . Nous pouvons supposer que

$$B_1 \subseteq C_1, \dots, B_a \subseteq C_a; B_{a+1} \supseteq C_{a+1}, \dots, B_b \supseteq C_b; \text{ et}$$

$$B_{b+1}, \dots, B_n, C_{b+1}, \dots, C_m$$

sont disjoints. Nous utilisons les notations de (I. 1. 3) et la décomposition de Mittag-Leffler. D'abord il suffit de montrer que la suite

$$*) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(X_1 \cup X_2)_+ \longrightarrow \mathcal{O}(X_1)_+ \oplus \mathcal{O}(X_2)_+ \longrightarrow \mathcal{O}(X_1 \cap X_2)_+ \longrightarrow 0 \text{ est exacte.}$$

On a

$$\mathbb{P}^n - (X_1 \cup X_2) = B_1 \cup \dots \cup B_a \cup C_{a+1} \cup \dots \cup C_b$$

$$\mathbb{P}^n - (X_1 \cap X_2) = B_{a+1} \cup \dots \cup B_n \cup C_1 \cup \dots \cup C_a \cup C_{b+1} \cup \dots \cup C_m.$$

Et d'après (I. 1. 3)

$$\mathcal{O}(X_1 \cup X_2)_+ = \sum_1^a \mathcal{O}(\mathbb{P}^n - B_i)_+ \oplus \sum_{a+1}^b \mathcal{O}(\mathbb{P}^n - C_j)_+$$

$$\mathcal{O}(X_1)_+ \oplus \mathcal{O}(X_2)_+ = \sum_1^n \mathcal{O}(\mathbb{P}^n - B_i)_+ \oplus \sum_1^m \mathcal{O}(\mathbb{P}^n - C_j)_+$$

$$\mathcal{O}(X_1 \cap X_2)_+ = \sum_{a+1}^n \mathcal{O}(\mathbb{P}^n - B_i)_+ \oplus \sum_{\substack{1 \leq i \leq a \\ \text{et } b < i \leq m}} \mathcal{O}(\mathbb{P}^n - C_j)_+.$$

Ces décompositions permettent de vérifier que \*) est exacte.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. - Le complexe de Čech ne change pas si on remplace chaque  $U^i \in \mathcal{U}$  par ses composantes connexes. Posons maintenant  $\mathcal{U} = (U_i)_{i=1}^n$  où chaque  $U_i$  est connexe. Une récurrence sur  $n$  montrera le théorème. Le cas  $n=2$  est démontré dans (I. 5. 2).

Pour  $n=3$  il faut démontrer que

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(U_1 \cup U_2 \cup U_3) \longrightarrow \bigoplus \mathcal{O}(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{i < j} \mathcal{O}(U_{ij}) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{1,2,3}) \longrightarrow 0$$

est exacte. (On a abrégé par  $U_i \cap U_j \cap \dots \cap U_h = U_{i,j,h}$  etc.)

Si  $U_{12} = U_{13} = U_{23} = \emptyset$ , la suite (1) est exacte selon (I.3).

Soit maintenant  $U_{12} \neq \emptyset$ . La suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U_1 \cup U_2) \longrightarrow \mathcal{O}(U_1) \oplus \mathcal{O}(U_2) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{12}) \longrightarrow 0$$

est exacte. On supprime dans (1) le terme  $\mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$  et on remplace  $\mathcal{O}(U_1) \oplus \mathcal{O}(U_2)$  par  $\mathcal{O}(U_1 \cup U_2)$ . On obtient la suite

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(U_1 \cup U_2 \cup U_3) \longrightarrow \mathcal{O}(U_1 \cup U_2) \oplus \mathcal{O}(U_3) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{13}) \oplus \mathcal{O}(U_{23}) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{123}) \longrightarrow 0.$$

La suite (1) est exacte si et seulement si la suite (2) est exacte.

Comme  $U_1 \cup U_2$  est un affinoïde connexe, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U_1 \cup U_2 \cup U_3) \longrightarrow \mathcal{O}(U_1 \cup U_2) \oplus \mathcal{O}(U_3) \longrightarrow \mathcal{O}((U_1 \cup U_2) \cap U_3) \longrightarrow 0$$

est exacte.

On supprime  $\mathcal{O}(U_1 \cup U_2 \cup U_3)$  dans (2) et on remplace  $\mathcal{O}(U_1 \cup U_2) \oplus \mathcal{O}(U_3)$  par  $\mathcal{O}((U_1 \cup U_2) \cap U_3)$ . Le résultat est

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}((U_1 \cup U_2) \cap U_3) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{13}) \oplus \mathcal{O}(U_{23}) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{123}) \longrightarrow 0.$$

Comme avant, (2) est exacte si et seulement si (3) est exacte.

La suite (3) est exacte parce que c'est le cas  $n=2$  de l'énoncé.

EXERCICE. - Donner une démonstration complète de la récurrence sur  $n$  dans (I.5.1).

REMARQUE. - Pour un affinoïde  $U$  de  $\mathbb{P}^n$  le théorème (I.5.1) est un cas spécial d'un théorème de J. Tate (III, 2.2) : La cohomologie sur un affinoïde  $U$  de dimension quelconque satisfait

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(U) \quad \text{et} \quad H^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq 1.$$



REMARQUE. - Le résultat (I. 1. 3) est à son tour une conséquence de (I. 5. 1). En effet, on prend

$$X = \mathbb{P}^n - (B_1 \cup \dots \cup B_n) ; \quad X_1 = \mathbb{P} - B_1 ; \quad X_2 = \mathbb{P} - (B_2 \cup \dots \cup B_n) .$$

Le recouvrement  $\{X_1, X_2\}$  de  $\mathbb{P}^n$  donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathcal{O}(X_1) \oplus \mathcal{O}(X_2) \longrightarrow \mathcal{O}(X) \longrightarrow 0 .$$

Comme  $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n) = K$ , on a  $\mathcal{O}(X_1)_+ \oplus \mathcal{O}(X_2)_+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)_+$ . La récurrence sur  $n$  montre  $\mathcal{O}(X)_+ = \sum \mathcal{O}(\mathbb{P}^n - B_i)_+$

### I. 6. - Exemples de faisceaux sur $\mathbb{P}^n$

(I. 6. 1) Soit  $A$  un groupe abélien. On associe à  $A$  un faisceau constant  $\tilde{A}$  donné par  $\tilde{A}(\emptyset) = 0$  ;  $\tilde{A}(\mathbb{P}^n) = A$  ;  $\tilde{A}(U) = A^c$  où  $c$  est le nombre des composantes connexes de l'ouvert  $U$ . Il est évident que  $\tilde{A}$  est un pré-faisceau. En plus :

PROPOSITION. -  $\tilde{A}$  est un faisceau et  $\check{H}^i(\mathcal{U}, \tilde{A}) = 0$  pour  $i \geq 1$  et pour tout  $\mathcal{U}$ .

DÉMONSTRATION. - Comme dans la démonstration de (I. 5. 1) il suffit de vérifier :

- (a)  $\tilde{A}(U_1 \cup \dots \cup U_n) = \oplus \tilde{A}(U_i)$  si les  $U_i$  sont connexes et disjoints.  
 (b)  $0 \longrightarrow \tilde{A}(U_1 \cup U_2) \longrightarrow \tilde{A}(U_1) \oplus \tilde{A}(U_2) \longrightarrow \tilde{A}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$  est exacte si  $U_1, U_2$  sont connexes et  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .

La propriété (a) est évidente et (b) est vraie parce que  $U_1 \cap U_2$  est aussi connexe.

REMARQUE. - Il est étonnant que la circonférence  $\{z \in K \mid |z| = 1\}$  donne " $\check{H}^1 = 0$ ". Dans le cas complexe  $\check{H}^1(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \tilde{A}) = A$ .

Au chapitre V on introduira une autre topologie de Grothendieck, la topologie étale, qui donnera un  $\check{H}^1 \neq 0$ .

EXERCICE. - Trouver un recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$  tel que  $H^1(\mathcal{U}, \tilde{A}) = A$ .

(I. 6. 2) Le faisceau  $\mathcal{G}^x$  des fonctions holomorphes inversibles est donné par  $\mathcal{G}^x(U) =$  le groupe des éléments inversibles de  $\mathcal{O}(U)$  si  $U \neq \emptyset$  et  $\mathcal{G}^x(\emptyset) = \{1\}$ . On vérifie aisément que  $\mathcal{G}^x$  est un faisceau à l'aide de  $\mathcal{G}^x(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f(u) \neq 0 \text{ pour tout } u \in U\}$ .

On peut démontrer que  $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}^x) = 0$  pour  $i \geq 1$  et pour tout recouvrement admissible  $\mathcal{U}$  d'un affinoïde  $U$ . De plus  $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}^x) = 0$  si  $i \geq 2$ ,  $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}^x) = \mathbb{Z}$  pour tout recouvrement admissible  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{P}^1$ .

(I. 6. 3) Le faisceau  $\mathcal{M}$  des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{P}^1$  est donné par

i)  $\mathcal{M}(U) =$  l'anneau total de fractions de  $\mathcal{O}(U)$  si  $U$  est un affinoïde,

ii)  $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$

iii)  $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = K(z) =$  le corps des fonctions rationnelles.

On vérifie sans peine que  $\mathcal{M}$  est un faisceau.

EXERCICE. - Montrer que  $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = 0$  pour  $i \geq 1$  et pour tout recouvrement admissible  $\mathcal{U}$ .

EXERCICE. - Le pré-faisceau  $\mathcal{O}^\circ$  sur  $\mathbb{P}^1$  est donné par

$$\mathcal{O}^\circ(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid |f(u)| \leq 1 \text{ pour chaque } u \in U\}.$$

Montrer que  $\mathcal{O}^\circ$  est un faisceau et que  $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}^\circ) = 0$  pour  $i \geq 1$  et pour tout recouvrement admissible  $\mathcal{U}$ .

(I. 6. 4) Cohomologie d'un espace  $X$

Comme d'habitude, la cohomologie de Čech  $\check{H}^i(X, \mathfrak{S})$  est définie comme  $\lim_{\rightarrow} \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathfrak{S})$ , la limite est prise sur tous les  $\mathcal{U} \in \text{Cov}(X)$ .

Il y a d'autres groupes de cohomologie  $H^i(X, \mathfrak{S})$ . Ils sont donnés comme foncteurs dérivés de  $\mathfrak{S} \rightarrow H^0(X, \mathfrak{S}) := \mathfrak{S}(X)$ . Pour tout faisceau  $\mathfrak{S}$  on a  $H^i(X, \mathfrak{S}) = \check{H}^i(X, \mathfrak{S})$  pour  $i = 0, 1$ . Pour des faisceaux "raisonnables" et des espaces "raisonnables"  $H^i(X, \mathfrak{S}) = \check{H}^i(X, \mathfrak{S})$  pour tout  $i$ . Dans le cas classique, c'est-à-dire  $X$  est un espace topologique et  $\mathfrak{S}$  est un faisceau pour la topologie ordinaire la condition " $X$  paracompacte" suffit pour montrer  $H^i(X, \mathfrak{S}) = \check{H}^i(X, \mathfrak{S})$  pour tout  $i \geq 0$  et pour tout  $\mathfrak{S}$ .

Dans notre cas, c'est-à-dire  $X$  est un ensemble admissible de  $\mathbb{P}$ , on peut montrer que  $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) = 0$  pour  $i \geq 2$  (et donc  $\check{H}^i(X, \mathfrak{S}) = 0$  pour  $i \geq 2$ ). C'est une conséquence du fait que  $\mathbb{P}$  est de dimension 1. Dans tous les exemples précédents  $\check{H}^1(\mathbb{P}, \mathfrak{S}) = 0$ . Mais il existe des faisceaux  $\mathfrak{S}$  avec  $\check{H}^1(\mathbb{P}, \mathfrak{S}) \neq (0)$ . L'exercice suivant est un exemple.

EXERCICE. - Soit  $V = \{0, \pi, 1, \infty\} \subset \mathbb{P}$  avec  $0 < |\pi| < 1$ . On définit le faisceau  $\mathfrak{S}$  sur  $\mathbb{P}$  par :

- i)  $\mathfrak{S}(\mathbb{P}) = \mathbb{Z}$  et  $\mathfrak{S}(\emptyset) = 0$ ,
- ii) si l'ouvert connexe  $X$  satisfait  $V \subset \mathbb{P} - X = B_1 \cup \dots \cup B_n$  et si chaque  $B_i$  contient un nombre pair d'éléments de  $V$ , on pose  $\mathfrak{S}(X) = \mathbb{Z}^2$ ,
- iii) autrement on pose  $\mathfrak{S}(X) = \mathbb{Z}$  pour un ouvert connexe,
- iv) si l'ouvert  $X$  a les composantes connexes  $X_1, \dots, X_n$ , on pose  $\mathfrak{S}(X) = \oplus \mathfrak{S}(X_i)$ .

Montrer que  $\check{H}^1(\mathbb{P}, \mathfrak{S}) = \mathbb{Z}$ .

REMARQUE. - Le faisceau  $\mathfrak{S}$  de l'exercice précédent est obtenu de la façon suivante. Soit  $E$  la courbe elliptique donnée par l'équation  $y^2 = z(z - \pi)(z - 1)$  et soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{P}$  l'application donnée par  $(y, z) \rightarrow z$ . On verra plus tard que  $E$  possède aussi une topologie de Grothendieck (III. 4.7). Le faisceau constant, à fibre  $\mathbb{Z}$  sur  $E$ , sera noté  $\mathbb{Z}_E$ . L'image directe  $\varphi_* \mathbb{Z}_E$  est un faisceau  $\mathfrak{S}$  sur  $\mathbb{P}$ .

donné par  $\mathfrak{S}(X) = \mathbb{Z}_{\mathbb{E}}(\varphi^{-1}(X)) = \mathbb{Z}^c$  où  $c$  est le nombre des composantes connexes de  $\varphi^{-1}(X)$ . Pour un affinoïde connexe  $X$  de  $\mathbb{IP}$  on peut montrer que le nombre des composantes connexes de  $\varphi^{-1}(X)$  est 1 ou 2. En plus  $\varphi^{-1}(X)$  a deux composantes connexes si et seulement s'il existe  $f \in \mathfrak{O}(X)$  tel que  $f^2 = z(z-\pi)(z-1)$ . Un petit calcul montre que  $\varphi_* \mathbb{Z}_{\mathbb{E}}$  est le faisceau de l'exercice précédent. On peut montrer que  $\check{H}^1(E, \mathbb{Z}_{\mathbb{E}}) \simeq \check{H}^1(\mathbb{IP}, \varphi_* \mathbb{Z}_{\mathbb{E}})$ . Ainsi on peut reformuler l'exercice en : "montrer que  $\check{H}^1(E, \mathbb{Z}_{\mathbb{E}}) = \mathbb{Z}$  pour la courbe elliptique  $E$  donnée par  $y^2 = z(z-\pi)(z-1)$ ".

### I. 7. - Sous-espaces analytiques de $\mathbb{IP}$

On considère une famille  $\mathcal{Q}$  d'ensembles affinoïdes de  $\mathbb{IP}$  vérifiant

- i) si  $X_1, X_2 \in \mathcal{Q}$  et si  $X_1 \cup X_2$  est affinoïde, alors  $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{Q}$ ,
- ii) si  $X_1, X_2$  sont des affinoïdes et si  $X_1 \subset X_2 \in \mathcal{Q}$ , alors  $X_1 \in \mathcal{Q}$ ,
- iii)  $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ .

EXEMPLE. - Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{IP}$ . On associe à  $\mathcal{O}$  la famille  $\mathcal{Q} = \{X \subset \mathcal{O} \mid X \text{ est affinoïde dans } \mathbb{IP}\}$ .

Soit  $\mathcal{Q}$  une famille vérifiant i), ii) et iii). On associe à  $\mathcal{Q}$  un espace analytique  $\Omega = \Omega(\mathcal{Q})$ , appelé un sous-espace analytique de  $\mathbb{IP}$ . (La définition générale d'espace analytique sera donnée au chapitre III.) La structure de  $\Omega$  est donnée par :

- $\alpha$ ) un espace topologique  $\Omega$
- $\beta$ ) une topologie de Grothendieck sur  $\Omega$
- $\gamma$ ) un faisceau structural  $\mathcal{O}$  sur  $\Omega$ .

$\alpha$ ) Comme ensemble,  $\Omega$  est la réunion (plus précisément la limite inductive) de tous les  $X$  de  $\mathcal{Q}$ . Un ensemble  $U \subset \Omega$  est appelé ouvert si  $U \cap X$  est ouvert pour tous les  $X$  de  $\mathcal{Q}$ .

β)  $\mathfrak{F}$ , la famille des sous-ensembles admissibles de  $\Omega$ , est donnée par

(i) chaque  $X \in \mathcal{Q}$  appartient à  $\mathfrak{F}$ ,

(ii) un ouvert  $U \subset \Omega$ ,  $U \notin \mathcal{Q}$ , appartient à  $\mathfrak{F}$  si et seulement si pour chaque affinoïde connexe  $X \in \mathcal{Q}$  on a  $U \supset X$  ou  $U \cap X = \emptyset$ .

Un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  d'un élément  $U \in \mathfrak{F}$  est appelé admissible si

(i) chaque  $U_i \in \mathfrak{F}$ ,

(ii) pour chaque  $X \in \mathcal{Q}$  contenu dans  $U$  il existe un nombre fini d'éléments  $i_1, \dots, i_n$  de  $I$  avec  $X \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ .

γ) le (pré-)faisceau  $\mathcal{O}$  est donné par

(i)  $\mathcal{O}(X) =$  les fonctions holomorphes sur  $X$  (défini dans (I.1.3)) si  $X \in \mathcal{Q}$ ,

(ii) pour un ouvert  $U \subset \Omega$ ,  $U \in \mathfrak{F}$ ,  $U \notin \mathcal{Q}$ ,

$\mathcal{O}(U) = \varprojlim \mathcal{O}(X)$ , la limite est prise sur tous les  $X \subset U$ ,  $X \in \mathcal{Q}$ .

A l'aide de (I.5.1) on vérifie sans peine que  $\Omega$  est un espace topologique avec une topologie de Grothendieck et que  $\mathcal{O}$  est un faisceau.

On dit que l'espace  $\Omega$  est connexe si  $\mathcal{O}(\Omega)$  n'a pas d'autres idempotents que 0 et 1. On dit que  $\mathcal{Q}$  est engendré par une famille  $(X_i)$  d'affinoïdes si  $\mathcal{Q}$  est constitué par les sous-ensembles affinoïdes réunions finies des  $X_i$ .

Un petit calcul montre que  $\Omega = \Omega(\mathcal{Q})$  est connexe si et seulement si  $\mathcal{Q}$  est engendré par une suite  $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$  d'affinoïdes connexes.

Soit  $\mathcal{Q}$  une famille vérifiant i), ii), iii) et p un point de  $\Omega = \Omega(\mathcal{Q})$ .

Soit  $\mathcal{Q}_p$  la sous-famille de  $\mathcal{Q}$  engendrée par tous les affinoïdes connexes  $X$  avec  $p \in X$ . Alors  $\mathcal{Q}_p$  vérifie aussi i), ii) et iii) et  $\Omega_p = \Omega(\mathcal{Q}_p)$  est appelé la composante connexe de  $\Omega$  (en  $p$ ). Il est facile de voir que  $\Omega$  est la réunion disjointe de toutes ses composantes connexes  $\{\Omega_i\}_{i \in I}$  et que  $\mathcal{O}(\Omega) = \prod_{i \in I} \mathcal{O}(\Omega_i)$ .

#### EXEMPLES

(I. 7. 1) Si  $\mathcal{Q}$  est engendré par un seul élément  $X$ , alors  $\Omega(\mathcal{Q}) = X$  et les composantes connexes de  $\Omega(\mathcal{Q})$  sont les composantes connexes de l'affinoïde  $X$ .

(I. 7. 2) Si  $\mathcal{Q}$  est constitué de tous les affinoïdes  $X$  de  $\mathbb{P}$  avec  $0, \infty \in X$ , alors  $\Omega(\mathcal{Q}) = K^x$  et  $\mathcal{Q}$  est engendré par la suite d'affinoïdes

$$X_n = \{z \in K \mid |\pi|^n \leq |z| \leq |\pi|^{-n}\} \quad \text{où } \pi \in K, 0 < |\pi| < 1, \text{ et } n \geq 1.$$

$K^x$  est le seul ensemble admissible, non contenu dans  $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{O}(K^x) = \left\{ \sum a_n z^n \mid \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \right\} \quad \text{et } K^x \text{ est connexe.}$$

(I. 7. 3) Soit  $\mathcal{L}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{P}$ . On suppose que  $\infty \notin \mathcal{L}$ .  $\mathcal{Q}$  est la famille des affinoïdes  $X$  de  $\mathbb{P}$  avec  $X \cap \mathcal{L} = \emptyset$ . La famille est engendrée par la suite  $\{X_n\}$  où

$$X_n = \{z \in K \mid d(z, \mathcal{L}) \leq |\pi|^n\} = \mathbb{P} - \{\text{un nombre fini de disques ouverts de rayon } |\pi|^n\}.$$

Donc  $\Omega = \Omega(\mathcal{Q}) = \mathbb{P} - \mathcal{L}$  est un sous-espace analytique connexe.

(I. 7. 4) Supposons que  $K$  ne soit pas maximalement complet. Il existe une suite de disques ouverts  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$  dans  $K$  avec  $\bigcap_n B_n = \emptyset$ . On définit  $\mathcal{Q}$  par la suite d'affinoïdes  $\mathbb{P} - B_1 \subset \mathbb{P} - B_2 \subset \mathbb{P} - B_3 \subset \dots$ . L'espace  $\Omega = \Omega(\mathcal{Q})$  est donc connexe. Comme espace topologique  $\Omega$  s'identifie à  $\mathbb{P}$ . Mais la topologie de Grothendieck de  $\Omega$  est différente de celle de  $\mathbb{P}$ , par exemple  $B_n^+ \notin \mathcal{Q}$ . La différence est essentielle. En effet, on peut construire

des fonctions bornées non constantes sur  $\Omega$  alors que l'on sait que  $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n) = K$ .

(I. 7. 5) Soit  $X$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{P}^n$  de la forme  $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$  où chaque  $X_n$  est une réunion finie de disques ouverts. La famille  $\mathcal{Q}$  est donnée par :

$$\mathcal{Q} = \{ Y \mid Y \text{ est affinofde dans } \mathbb{P}^n \text{ et } Y \cap X = \emptyset \}.$$

Alors  $\Omega(\mathcal{Q}) = \mathbb{P}^n - X$  est un sous-espace analytique connexe. Si le corps  $K$  est maximalement complet, on peut démontrer que chaque sous-espace connexe de  $\mathbb{P}^n$  est de la forme  $\Omega(\mathcal{Q})$ . Pour un corps non-maximalement complet, on a vu dans (I. 7. 4), qu'il y a d'autres exemples de sous-espaces analytiques connexes de  $\mathbb{P}^n$ .

(I. 7. 6) REMARQUE. - Soit  $\mathcal{Q}$  une famille d'affinofdes vérifiant i), ii) et iii). La topologie de Grothendieck introduite dans  $\beta$ ) sur  $\Omega(\mathcal{Q})$  n'est pas la seule topologie raisonnable. Par exemple, on aurait pu définir :

(i)  $U \subset \Omega(\mathcal{Q})$  est admissible si  $U \cap X$  est affinofde pour chaque  $X \in \mathcal{Q}$ ,

(ii)  $(U_i) \in \text{Cov}(U)$  si chaque  $U_i$  est admissible,  $U$  est admissible et si pour tout  $X \subset U$ ,  $X \in \mathcal{Q}$  l'affinofde  $X$  est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'éléments  $U_i$ .

Cette définition conduit à la même famille de faisceaux sur  $\Omega(\mathcal{Q})$  et aux mêmes groupes de cohomologie.

(I. 7. 7) EXEMPLE. - Supposons que  $K \supset \mathbb{C}_p$  (le complété de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ ). Soit :

$$X = \{ \zeta \in K \mid \zeta^{p^n} = 1 \text{ pour un } n \geq 0 \}.$$

Le sous-espace analytique  $\Omega = \mathbb{P}^n - X$  est défini à partir de

$$\mathcal{Q} = \{ F \mid F \text{ est affinofde dans } \mathbb{P}^n \text{ et } F \cap X = \emptyset \}.$$

En fait  $\Omega$  est la réunion de deux composantes connexes :

$$\Omega_0 = \{z \in K \mid |z-1| < 1 \text{ et } z \notin X\} \text{ et } \Omega_\infty = \{z \in \mathbb{P} \mid |z-1| \geq 1\}.$$

A chaque  $\zeta \in X$  on associe un caractère  $\mathbb{Z}_p \rightarrow K$  donné par  $\lambda \mapsto \zeta^\lambda$ . Dans [16], J. Fresnel et B. de Mathan ont construit une suite non nulle  $\{a_\zeta \mid \zeta \in X\}$  avec  $\lim a_\zeta = 0$  telle que la fonction  $\lambda \mapsto \sum a_\zeta \zeta^\lambda$  sur  $\mathbb{Z}_p$  soit identiquement nulle.

On associe à la suite  $\{a_\zeta\}$  l'expression  $\sum_{\zeta \in X} \frac{a_\zeta}{1-\zeta z}$ . La somme converge uniformément sur chaque affinoïde  $Y$  avec  $Y \cap X = \emptyset$ .

Donc  $f = \sum_{\zeta \in X} \frac{a_\zeta}{1-\zeta z}$  appartient à  $\mathcal{O}(\Omega)$ . La fonction  $f$  est non nulle dans  $\Omega_0$ . Le développement de Taylor au voisinage de 0 est

$\sum_{n \geq 0} (\sum a_\zeta \zeta^n) z^n \equiv 0$ . Donc la fonction  $f$  est identiquement nulle sur  $\Omega_\infty$  (on peut voir aussi [14]).

#### REMARQUE. - Comparaison avec la théorie de Krasner

Un espace analytique (connexe) est donc une réunion d'une famille croissante, dénombrable d'affinoïdes connexes. On peut dire qu'un espace analytique  $X$  au sens de Krasner est une réunion filtrante de quasi-connexes. On définit l'anneau  $H(X)$  des fonctions analytiques sur  $X$  de la façon suivante : une fonction  $f$  définie sur  $X$  est analytique s'il existe une famille filtrante  $\{X_i\}_i$  de quasi-connexes telle que  $X = \bigcup_i X_i$  et que  $f|_{X_i}$  soit un élément analytique sur  $X_i$ . Si  $X$  est un espace analytique connexe, on a  $\mathcal{O}(X) = H(X)$ . Mais l'analogie s'arrête là. En effet,  $\Omega = \{z \in \mathbb{P} \mid |z| \neq 1\}$  a deux composantes connexes, alors que  $\Omega$  est connexe au sens de Krasner :  $\mathcal{O}(\Omega)$  a deux idempotents non triviaux et  $H(\Omega)$  n'a que les idempotents triviaux.

EXERCICE. - Soit  $X$  un ensemble fini dans  $\mathbb{P}$ . Déterminer les fonctions holomorphes sur l'espace analytique  $\mathbb{P}-X$ .



PROBLÈME OUVERT. - Soit  $X$  un ensemble compact dans  $\mathbb{P}^1$ .  
 Existe-t-il une représentation des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{P}^1 - X$   
 analogue au cas spécial où  $X$  est fini ? Un cas spécial et intéressant  
 est  $K \supset \mathbb{Q}_p$  et  $X = P^1(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbb{P}^1(K)$ .

I. 8. - Cohomologie sur un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}^1$

I. 8.1. - Généralités

Soit  $X$  un espace topologique muni d'une topologie de Grothendieck.  
 Un faisceau  $\mathfrak{S}$  est dit localement acyclique si  $X$  possède un recou-  
 vrement admissible  $\mathcal{U}$  tel que  $\check{H}^i(U, \mathfrak{S}) = 0$  pour  $i \geq 1$  et pour  
 chaque  $U$  qui est contenu dans un élément de  $\mathcal{U}$ .

D'après un résultat de J. Leray (voir [22], R. Godement pour une  
 démonstration dans le cas d'un espace topologique ordinaire)  
 on a  $\check{H}^i(X, \mathfrak{S}) = \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathfrak{S})$  pour  $i \geq 0$ .

Une suite exacte  $0 \rightarrow \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3 \rightarrow 0$  de faisceaux sur  
 $X$  est par définition une suite de faisceaux telle que :

(i) Pour chaque  $U \subset X$ ,  $U$  admissible,

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}_1(U) \rightarrow \mathfrak{S}_2(U) \rightarrow \mathfrak{S}_3(U) \text{ est exacte.}$$

(ii) Pour chaque  $U \subset X$ ,  $U$  admissible et pour chaque  
 $t \in \mathfrak{S}_3(U)$  il existe un recouvrement admissible  $(U_i)$  de  $U$  et il  
 existe des éléments  $s_i \in \mathfrak{S}_2(U_i)$  avec  $s_i \mapsto t|_{U_i}$  pour chaque  $i$ .

LEMME. - Pour chaque suite exacte  $0 \rightarrow \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3 \rightarrow 0$   
de faisceaux localement acycliques, on a une suite exacte de cohomolo-  
gie :

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathfrak{S}_1) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathfrak{S}_2) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathfrak{S}_3) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathfrak{S}_1) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathfrak{S}_2) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathfrak{S}_3) \rightarrow \check{H}^2(X, \mathfrak{S}_1) \rightarrow$$

DÉMONSTRATION. - On prend un recouvrement admissible  $\mathcal{U}$  de  $X$  tel que pour chaque  $U$ , contenu dans un élément de  $\mathcal{U}$ , on a  $\check{H}^i(U, \mathfrak{S}_j) = 0$  ( $i \geq 1$ ;  $j = 1, 2, 3$ ). Pour un tel  $U$ , la suite  $0 \rightarrow \mathfrak{S}_1(U) \rightarrow \mathfrak{S}_2(U) \rightarrow \mathfrak{S}_3(U) \rightarrow 0$  est exacte parce que  $\check{H}^1(U, \mathfrak{S}_1) = 0$ . Le complexe de Čech de  $\mathfrak{S}_i$  relativement à  $\mathcal{U}$  sera noté  $C(\mathcal{U}, \mathfrak{S}_i)$ . On trouve une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow C(\mathcal{U}, \mathfrak{S}_1) \rightarrow C(\mathcal{U}, \mathfrak{S}_2) \rightarrow C(\mathcal{U}, \mathfrak{S}_3) \rightarrow 0$$

est en conséquence une longue suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{S}_1) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{S}_2) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{S}_3) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{S}_1) \rightarrow \text{ect.}$$

D'après le résultat de J. Leray,  $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathfrak{S}_j) = \check{H}^i(X, \mathfrak{S}_j)$  et le lemme est démontré.

REMARQUE. - Un faisceau localement acyclique est certainement "raisonnable" et on peut démontrer  $\check{H}^i = H^i$  pour un tel faisceau (voir (I. 6. 4)). La suite exacte du lemme est donc la suite ordinaire de cohomologie de faisceaux.

(I. 8. 2) Pour nos calculs nous avons besoin d'un lemme élémentaire

LEMME. - Soit  $\mathcal{U} = (U_n)_{n \geq 1}$  un recouvrement admissible de  $X$  tel que  $U_n \subset U_{n+1}$  pour chaque  $n \geq 1$ . Soit  $\mathfrak{S}$  un faisceau sur  $X$ . Alors

(i)  $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{S})$  et  $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{S})$  sont isomorphes respectivement au  $\ker d$  et coker  $d$  où  $d : \prod \mathfrak{S}(U_n) \rightarrow \prod \mathfrak{S}(U_n)$  est défini par  $d(f_1, f_2, \dots) = (f_1 - f_2, f_2 - f_3, f_3 - f_4, \dots)$ .

(ii)  $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) = 0$  pour  $i \geq 2$ .

DÉMONSTRATION. - Une partie du complexe de Čech est

$$0 \rightarrow \prod_{n_0} \mathfrak{S}(U_{n_0}) \xrightarrow{d^0} \prod_{n_0 < n_1} \mathfrak{S}(U_{n_0} \cap U_{n_1}) \xrightarrow{d^1} \prod_{n_0 < n_1 < n_2} \mathfrak{S}(U_{n_0} \cap U_{n_1} \cap U_{n_2}) .$$

Un élément  $(f(n_0, n_1))_{n_0 < n_1}$  est dans le noyau de  $d^1$  si et seulement si pour chaque  $n_0 < n_1 < n_2$  on a  $f(n_0, n_2) = f(n_0, n_1) + f(n_1, n_2)$ .

Alors  $\varphi : \ker d^1 \rightarrow \prod \mathfrak{S}(U_n)$  donné par  $\varphi((f(n_0, n_1))_{n_0 < n_1}) = (f(n, n+1))_n$ , est un isomorphisme. L'application  $\varphi \circ d^0$  est égale à  $d$ . Cela démontre (i).

Un calcul combinatoire (laissé au lecteur) montre  $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathfrak{S}) = 0$  pour  $i \geq 2$ .

(I. 8. 3) PROPOSITION. - Soit  $\Omega$  un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}$ . Alors  $\check{H}^i(\Omega, \mathfrak{S}) = 0$  pour  $i \geq 1$ .

DÉMONSTRATION. - On peut, d'après (I. 7), supposer que  $\Omega$  est connexe. Selon (I. 5. 1) le faisceau  $\mathfrak{S}$  est localement acyclique et, d'après (I. 8. 1) et (I. 8. 2), il suffit de voir que  $d : \prod \mathfrak{S}(X_n) \rightarrow \prod \mathfrak{S}(X_n)$  est surjective où  $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$  est une suite d'affinoides connexes engendrant la famille  $\mathcal{Q}$  qui définit  $\Omega$ .

Soit  $(g_1, g_2, g_3, g_4, \dots)$  un élément de  $\prod \mathfrak{S}(X_n)$ . On décompose chaque  $g_n$  à l'aide de la formule de Mittag-Leffler. Ainsi il suffit de prendre le cas où chaque  $X_n$  est un disque fermé. Dans ce cas on écrit  $g_n = h_n + k_n$  avec  $h_n$  rationnel sans pôles sur  $X_{n+1}$  et  $\|k_n\|_{X_n} \leq |\pi|^n$  avec  $\pi \in K$ ,  $0 < |\pi| < 1$ .

La somme  $\sum_{m \geq n} k_m$  converge uniformément sur  $X_n$  et appartient ainsi à  $\mathfrak{S}(X_n)$ . On définit

$$f_n = -h_{n-1} + h_{n-2} - h_{n-3} \dots \pm h_1 + \sum_{m \geq n} k_m \quad \text{et on voit que}$$

$$d(f_1, f_2, f_3, \dots) = (g_1, g_2, g_3, \dots).$$

I. 8. 4. - Le faisceau des parties principales  $\mathcal{P}$ 

Le faisceau  $\mathcal{P}$  sur un sous-espace analytique  $\Omega$  de  $\mathbb{P}$  est défini par la suite  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0$  où  $\mathcal{M}$  est le faisceau des fonctions méromorphes introduit dans (I. 6. 3) (et adapté à  $\Omega$ ). Un ensemble  $V$  de  $\Omega$  est appelé discret si chaque  $U \in \mathcal{Q}$  ( $\mathcal{Q}$  définissant  $\Omega$ ) rencontre seulement un nombre fini d'éléments de  $V$ .

Afin de donner une description plus précise de  $\mathcal{P}$  on suppose que  $\infty \notin \Omega$ . Alors,  $\mathcal{P}(U)$  (où  $U$  est un sous-ensemble admissible de  $\Omega$ ) est constitué des expressions

$$\sum_{\alpha \in U} \sum_{n=1}^{n(\alpha)} \frac{a_{n,\alpha}}{(z-\alpha)^n}$$

où la somme est prise sur un sous-ensemble discret de  $\Omega$ .

Alors  $\mathcal{P}$  est un faisceau. La vérification facile est laissée au lecteur. L'application  $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$  associe à chaque fonction méromorphe  $f$  la somme formelle sur les pôles  $\alpha$  de  $f$  dans  $U$  de ces parties principales.

COROLLAIRE. - (i) Chaque somme formelle  $\sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{n=1}^{n(\alpha)} \frac{a_{n,\alpha}}{(z-\alpha)^n}$  à support discret est la partie principale d'une fonction méromorphe sur  $\Omega$ .

(ii)  $\check{H}^i(\Omega, \mathcal{M}) = 0$  pour  $i \geq 1$ .

DÉMONSTRATION. - D'après (I. 8. 3) on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow \mathcal{M}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow 0 \rightarrow \check{H}^1(\Omega, \mathcal{M}) \rightarrow \check{H}^1(\Omega, \mathcal{P}) \rightarrow 0 \dots$$

Un calcul élémentaire donne  $\check{H}^i(\Omega, \mathcal{P}) = 0$  pour  $i \geq 1$ . Cela démontre le corollaire.

I.8.5. - Le faisceau  $\mathcal{O}^X$ 

Le faisceau, défini par  $\mathcal{O}^X(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f(u) \neq 0 \text{ pour chaque } u \in U\}$  est beaucoup plus compliqué que  $\mathcal{O}$ .

PROPOSITION ([66]). - Soit  $U$  l'anneau connexe de  $\mathbb{P}$  donné par  $|z - a_i| \geq |\pi_i|$  ( $i = 1, \dots, n$ ), où les disques ouverts  $\{z \in K \mid |z - a_i| < |\pi_i|\} = B_i$  sont disjoints.

(i) Chaque élément de  $\mathcal{O}(U)^X$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$(z - a_1)^{\mu_1} \dots (z - a_n)^{\mu_n} \lambda(1+h) \quad \text{où } \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{Z}; \quad \sum \mu_i = 0; \quad \lambda \in K^X;$$

$$h \in \mathcal{O}(U); \quad \|h\| < 1, \quad h(\infty) = 0.$$

(ii)  $H^i(U, \mathcal{O}^X) = 0$  pour  $i \geq 1$ .

DÉMONSTRATION. - (i) La fonction  $f \in \mathcal{O}(U)^X$  est approchée par une fonction rationnelle  $g$  sans pôles dans  $U$ , telle que

$$\|f - g\|_U < \inf\{|f(u)| \mid u \in U\}.$$

En particulier  $|f(u) - g(u)| < |f(u)| = |g(u)|$  pour chaque point  $u \in U$ .

Soit  $\mu_i = \sum_{p \in B_i} \text{ord}_p(g)$ . Alors  $g = (z - a_1)^{-\mu_1} \dots (z - a_n)^{-\mu_n} g(\infty)$  et la fonction  $d$  est de la forme  $\prod_{i=1}^n \prod_{p \in B_i} (z - p)^{d_p}$  où  $d_p = \text{ord}_p(d)$ .

Soit  $t_i = \frac{\pi_i}{z - a_i}$ . Alors  $d = \prod_{i=1}^n \prod_{p \in B_i} (1 + \frac{a_i - p}{\pi_i} t_i)^{d_p}$  et la fonction  $d$  a la propriété  $\|d - 1\|_U < 1$ .

On voit aisément que cela implique

$$\|(z - a_1)^{-\mu_1} \dots (z - a_n)^{-\mu_n} f(\infty)^{-1} f - 1\|_U < 1$$

et (i) est démontré.

La démonstration de (ii) se fait comme dans (I.5.1). Il suffit donc de vérifier que

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^X(U_1 \cup U_2) \longrightarrow \mathcal{O}^X(U_1) \oplus \mathcal{O}^X(U_2) \longrightarrow \mathcal{O}^X(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

est exacte si  $U_1, U_2$  sont deux anneaux connexes avec  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .

Utilisant la partie (i) de la proposition, on est ramené à démontrer qu'une fonction  $1+h$  avec  $h \in \pi \mathcal{O}^\circ(U_1 \cap U_2)$  peut s'écrire comme  $(1+h_1)(1+h_2)^{-1}$  où  $h_i \in \pi \mathcal{O}^\circ(U_i)$  et  $0 < |\pi| < 1$ .  
 $(\mathcal{O}^\circ(U) := \{f \in \mathcal{O}(U) \mid |f(u)| \leq 1 \text{ pour tout } u \in U\})$ .

L'expression  $(1+h_1)(1+h_2)^{-1}$  se développe sur  $U_1 \cap U_2$  comme  $1+h_1-h_2+r$  avec  $r \in \pi^2 \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$ . Utilisant le lemme (I.5.2) pour le faisceau  $\mathcal{O}^\circ$  au lieu de  $\mathcal{O}$  on trouve  $k_i \in \pi \mathcal{O}(U_i)$  ( $i=1,2$ ) avec  $k_1-k_2=h$ . La fonction  $(1+h)(1+k_1)^{-1}(1+k_2)$  à la forme  $1+h'$  où  $h' \in \pi^2 \mathcal{O}^\circ(U_1 \cap U_2)$ . De la même façon il existe  $k'_i \in \pi^2 \mathcal{O}(U_i)$  avec  $k'_1-k'_2=h'$ . La fonction  $(1+h')(1+k'_1)^{-1}(1+k'_2)$  a la forme  $1+h''$  où  $h'' \in \pi^4 \mathcal{O}^\circ(U_1 \cap U_2)$ . Un passage à la limite montre ainsi que  $(1+h) = (1+h_1)(1+h_2)^{-1}$ .

(I.8.6) THÉORÈME. - Soit  $\Omega$  un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}$ . Si le corps  $K$  est maximalement complet ou si  $\mathbb{P}-\Omega$  est compact et  $\mathcal{Q} = \{U \mid U \subset \Omega, U \text{ affinofde}\}$ , alors  $\check{H}^1(\Omega, \mathcal{O}^\times) = 0$ .

DÉMONSTRATION. - On peut supposer que  $\Omega$  est connexe et défini par une suite d'affinofdes connexes  $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$ . Selon (I.8.5), (I.8.1) et (I.8.2) il suffit de montrer que

$d : \prod \mathcal{O}(X_n)^\times \longrightarrow \prod \mathcal{O}(X_n)^\times$  est surjective.

(i) Le cas  $\mathbb{P}-\Omega = \mathcal{L}$  est compact et

$$\mathcal{Q} = \{U \mid U \subset \Omega \text{ et } U \text{ affinofde}\}$$

On peut supposer que  $\infty \notin \mathcal{L}$  et que

$$\mathbb{P}-X_n = \{z \in K \mid d(z, \mathcal{L}) < |\pi|^n\} \quad \text{où comme, d'habitude } \pi \in K, 0 < |\pi| < 1.$$

Chaque  $\mathbb{P}-X_n$  est réunion disjointe de disques ouverts de rayons  $\pi^n$  et de centres  $a(n,1), \dots, a(n,s)$  ( $s$  dépendant de  $n$ ). On peut supposer que les centres  $a(n,1), \dots, a(n,s)$  se trouvent dans  $\mathbb{P}-X_{n+1}$ . Soit une suite  $(g_1, g_2, \dots) \in \prod \mathcal{O}(X_n)^\times$  donnée. On décompose chaque  $g_n$  comme dans (I.8.5) :

$$g_n = \lambda_n (z - a(n,1))^{u(n,1)} \dots (z - a(n,s))^{u(n,s)} (1+h_n) = k_n (1+h_n).$$

On constate que les produits infinis  $\prod_{m \geq n} (1 + h_m)$  convergent dans  $X_n$ .  
 On définit  $f_n = k_{n-1}^{-1} k_{n-2}^{+1} k_{n-3}^{-1} \dots k_1^{\pm 1} \prod_{m \geq n} (1 + h_m)$  et on voit facilement  
 que  $d(f_1, f_2, \dots) = (g_1, g_2, g_3, \dots)$ .

(ii) Le cas : K est maximalelement complet

On procède comme dans (i). La seule chose qui n'est plus valable est la convergence sur  $X_n$  du produit infini  $\prod_{m \geq n} (1 + h_m)$ . La condition, K maximalelement complet, entraîne l'existence d'une limite de Banach  $\varphi : \ell^\infty(K) \rightarrow K$ . C'est-à-dire :  $\ell^\infty(K)$  est l'espace de Banach des suites bornées  $(a_1, a_2, \dots)$ , normé par  $\|(a_1, a_2, a_3, \dots)\| = \sup |a_n|$ . Il existe alors une forme linéaire  $\varphi$  telle que  $\|\varphi\| = 1$  et  $\varphi((a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)) = \lim_i a_i$  si la limite de la suite  $(a_i)_i$  existe.

On remplace le produit infini  $\prod_{m \geq n} (1 + h_m)$  qui ne converge pas, par la fonction  $F_n$ , définie sur  $X_n : z \mapsto \varphi\left(\left(\prod_{m=n}^{n+l} (1 + h_m(z))\right)_l\right)$ . On peut démontrer que  $F_n \in \mathcal{O}(X_n)^x$  et que  $F_n F_{n+1}^{-1} = 1 + h_n$  pour chaque  $n \geq 1$ . Une démonstration plus complète se trouve dans [21].

EXEMPLE. - Si K n'est pas maximalelement complet et si  $\mathbb{P}\text{-}\Omega$  n'est pas compact, alors on peut avoir  $H^1(\Omega, \mathcal{O}^x) \neq 0$ .

Nous montrons cela pour l'exemple  $\Omega = \{z \in K \mid |z| < r\}$  où  $\mathcal{O}$  est constitué de tous les affinoides contenus dans  $\Omega$ .

Soit  $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$  une suite de disques ouverts de rayons  $r_1^{-1} > r_2^{-1} > r_3^{-1} > \dots$ ;  $\lim r_n^{-1} = r^{-1}$ ; et de centres  $a_1, a_2, a_3, \dots$  et avec  $\bigcap B_i = \emptyset$ .

On définit  $X_n = \{z \in K \mid |z| \leq r_n\}$  et on pose  $a_0 = 0$  et pour  $n \geq 1$ ,  $g_n = 1 + (a_n - a_{n-1})z \in \mathcal{O}(X_n)^x$ . Supposons qu'il existe une suite  $(f_n) \in \prod \mathcal{O}(X_n)^x$  avec  $f_n f_{n+1}^{-1} = g_n$  pour tout n. On écrit  $f_n = \lambda (1 + \mu_n z + \dots)$ . Alors on trouve  $\mu_n - \mu_{n+1} = a_n - a_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ . Ainsi  $\mu_1 - \mu_{n+1} = a_n$  et  $\mu_1 \in B_n$ . Cela contredit  $\bigcap B_n = \emptyset$ .

I. 8. 7. - Div, le faisceau des diviseurs

Soit  $\Omega$  un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}$ . Le faisceau  $\mathcal{D}iv$  sur  $\Omega$  est défini par :  $\mathcal{D}iv(U) =$  le groupe des sommes formelles  $\sum_{u \in U} n_u [u]$  avec  $n_u \in \mathbb{Z}$  et à support discret dans  $\Omega$  (cela pour chaque  $U$  admissible dans  $\Omega$ ). Les éléments de  $\mathcal{D}iv(U)$  sont appelés diviseurs à support discret sur  $U$ .

Le faisceau  $\mathcal{D}iv$  n'a pas de cohomologie comme on voit aisément.

Le faisceau  $\mathcal{M}^x$  est défini par  $\mathcal{M}^x(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) \mid f \text{ inversible}\}$ .

On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^x \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}^x \xrightarrow{\beta} \mathcal{D}iv \longrightarrow 0.$$

L'application  $\alpha_U : \mathcal{O}(U)^x \longrightarrow \mathcal{M}(U)^x$  est l'inclusion. L'application  $\beta_U : \mathcal{M}(U)^x \longrightarrow \mathcal{D}iv(U)$  associe à chaque fonction méromorphe (inversible)  $f$  l'élément  $\sum_{u \in U} \text{ord}_u(f) [u]$ .

On voit que  $0 \longrightarrow \mathcal{O}(U)^x \longrightarrow \mathcal{M}(U)^x \longrightarrow \mathcal{D}iv(U)$  est toujours exacte.

Si  $U$  est un affinoïde, l'application  $\mathcal{M}(U)^x \longrightarrow \mathcal{D}iv(U)$  est surjective. Donc  $0 \longrightarrow \mathcal{O}^x \longrightarrow \mathcal{M}^x \longrightarrow \mathcal{D}iv \longrightarrow 0$  est bien une suite exacte de faisceaux.

COROLLAIRE. - Soit  $\Omega$  un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}$ . On suppose que l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :

- a)  $K$  est maximalement complet,
- b)  $\mathbb{P} - \Omega$  est compact et  $\mathcal{Q} = \{U \subset \Omega \mid U \text{ affinoïde dans } \mathbb{P}\}$ .

Alors

(i) Pour chaque diviseur  $D \in \mathcal{D}iv(\Omega)$  il existe une fonction méromorphe sur  $\Omega$  avec diviseur  $D$ ,

(ii)  $\check{H}^i(\Omega, \mathcal{M}^x) = 0$  pour  $i \geq 1$ .



DÉMONSTRATION. - La suite  $0 \rightarrow \mathcal{O}^x \rightarrow \mathcal{M}^x \rightarrow \mathcal{D}iv \rightarrow 0$  et le théorème (I. 8. 6) donnent la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)^x \rightarrow \mathcal{M}(\Omega)^x \rightarrow \mathcal{D}iv(\Omega) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{M}^x) \rightarrow 0 \dots$$

Cela démontre la proposition.

REMARQUE. - Les corollaires (I. 8. 7) et (I. 8. 4) généralisent des résultats de M. Lazard [35].

REMARQUE. - Si  $\alpha$ ) et  $\beta$ ) du corollaire ne sont pas satisfaits, alors on peut avoir  $H^1(\Omega, \mathcal{O}^x) \neq 0$ . De plus on peut démontrer que, en général, l'application  $\mathcal{M}(\Omega)^x \rightarrow \mathcal{D}iv(\Omega)$  n'est pas surjective. Un exemple de cela se trouve dans [35].

#### I. 8. 8. - Le faisceau $\mathcal{O}^\circ$

Dans [21] on a montré les résultats suivants :

PROPOSITION. - Soit  $\Omega$  un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}$ .

(i)  $\mathcal{O}(\Omega)^\circ = K^\circ$  si et seulement si  $\mathbb{P}-\Omega$  est compact et  $\mathcal{Q} = \{U \mid U \subset \Omega \text{ et } U \text{ affinofde}\}$ .

(ii)  $H^i(\Omega, \mathcal{O}^\circ) = 0$  pour  $i \geq 1$  si et seulement si une des conditions  $\alpha$ ),  $\beta$ ) du corollaire (I. 8. 7) est satisfaite.

Pour la démonstration, on renvoie à [21].

#### I. 8. 9. - Structure du groupe $\mathcal{O}(\Omega)^x$

Un sous-espace analytique  $\Omega$  de  $\mathbb{P}$  est réunion disjointe de ses composantes connexes  $\Omega_i$ . On sait que  $\mathcal{O}(\Omega) = \prod \mathcal{O}(\Omega_i)$ . Ainsi  $\mathcal{O}(\Omega)^x = \prod \mathcal{O}(\Omega_i)^x$ . Il suffit d'étudier le groupe  $\mathcal{O}(\Omega)^x$  lorsque  $\Omega$  est connexe. Soit  $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$  une suite d'affinofdes connexes qui définit  $\Omega$ . A chaque  $X_n$  on associe l'ensemble fini  $t(X_n)$  de ses trous. Un trou d'un affinofde connexe  $X$  est par définition un

disque ouvert maximal dans  $\mathbb{P} - X$ . Les ensembles  $\{t(X_n)\}_{n \geq 1}$  forment un système projectif et on associe à  $\Omega$  l'espace topologique compact, totalement discontinu  $\hat{\Omega} = \varprojlim t(X_n)$ . On peut aisément vérifier que  $\hat{\Omega}$  ne dépend pas du choix de la suite  $\{X_n\}$ .

Si  $\mathbb{P} - \Omega = \mathcal{L}$  est compact et que  $\Omega$  est défini par  $\mathcal{Q} = \{U \subset \mathbb{P} \mid U \cap \mathcal{L} = \emptyset \text{ et } U \text{ est affinofde}\}$  alors  $\hat{\Omega} \cong \mathcal{L}$ .

Une mesure sur un espace compact, totalement discontinu  $Z$  est par définition une fonction  $\mu : \{\text{ouverts compacts de } Z\} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $\mu(U_1 \cup U_2) + \mu(U_1 \cap U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2)$  pour chaque paire de sous-ensembles compacts et ouverts  $U_1, U_2$  de  $Z$ .

Notons  $M(Z)$  pour le groupe de toutes les mesures sur  $Z$  et  $M_0(Z) := \{\mu \in M(Z) \mid \mu(Z) = 0\}$ .

PROPOSITION. - (i) Soit  $\mathcal{L}$  compact et soit  $\Omega = \mathbb{P} - \mathcal{L}$  défini par  $\mathcal{Q} = \{U \subset \mathbb{P} \mid U \text{ affinofde et } U \cap \mathcal{L} = \emptyset\}$ .

Alors on a la suite exacte de groupes suivante :

$$(1) \longrightarrow K^x \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega)^x \longrightarrow M_0(\mathcal{L}) \longrightarrow 0.$$

(ii) Soit  $K$  maximalement complet et soit  $\Omega$  un sous-espace analytique connexe de  $\mathbb{P}$  qui contient  $\infty$ .

Alors on a la suite exacte de groupes suivante :

$$(1) \longrightarrow K^x (1 + \mathcal{G}_+^{\circ\circ}(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega)^x \longrightarrow M_0(\hat{\Omega}) \longrightarrow 0.$$

( $\mathcal{G}_+^{\circ\circ}(U)$  désigne  $\{f \in \mathcal{G}(U) \mid |f(u)| < 1 \text{ pour tout } u \in U \text{ et } f(\infty) = 0\}$ ).

DÉMONSTRATION. - Soit  $U$  un affinofde connexe qui contient  $\infty$ . Soit  $\{B_n, \dots, B_n\}$  l'ensemble des trous de  $U$ . Alors on peut reformuler (I. 8.5) en la suite

$$1 \longrightarrow K^x \cdot (1 + \mathcal{G}_+^{\circ\circ}(U)) \longrightarrow \mathcal{G}(U)^x \xrightarrow{R} M_0(t(U)) \longrightarrow 0 \text{ est exacte.}$$

L'application  $R$  associe à  $f = \lambda (1+h) (z-a_1)^{u_1} \dots (z-a_n)^{u_n}$  la mesure  $\mu$  définie par  $\mu(S) = \sum_{a_i \in S} u_i$  pour chaque  $S \subset t(U)$ .

Supposons maintenant que  $\Omega$  soit défini par la suite  $\{X_n\}$  d'affinofdes connexes et que  $\infty \in X_1$ . On obtient un système projectif de suites exactes :

$$(1) \longrightarrow K^\times \cdot (1 + \mathcal{G}_+^{\circ\circ}(X_n)) \longrightarrow \mathcal{G}(X_n)^\times \xrightarrow{R} M_O(t(X_n)) \longrightarrow 0.$$

La limite projective des suites est :

$$*) (1) \longrightarrow K^\times (1 + \mathcal{G}_+^{\circ\circ}(\hat{\Omega})) \longrightarrow \mathcal{G}(\hat{\Omega})^\times \xrightarrow{R} M_O(\hat{\Omega}) \longrightarrow 0,$$

parce que  $M_O(\hat{\Omega}) = \varprojlim M_O(t(X_n))$ . La suite  $*)$  est aussi exacte si le système projectif  $\{A_n = K^\times (1 + \mathcal{G}_+^{\circ\circ}(X_n))\}_n$  satisfait la condition de Mittag-Leffler (voir [22], R. Godement). Cette condition peut s'exprimer par :  $d : \prod A_n \longrightarrow \prod A_n$ , donnée par

$$d(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_1 a_2^{-1}, a_2 a_3^{-1}, a_3 a_4^{-1}, \dots) \text{ est surjective.}$$

Dans notre cas on voit que l'essentiel est de montrer que le système projectif  $\{\mathcal{G}_+^{\circ\circ}(X_n)\}_{n \geq 1}$  satisfait la condition de Mittag-Leffler.

De plus, dans le cas (i) de la proposition, on sait, d'après (I. 8. 8) que  $\mathcal{G}_+^{\circ\circ}(\Omega) = 0$ .

Donc la proposition se déduit du lemme suivant :

LEMME. - Dans les cas (i) et (ii) de la proposition, le système projectif  $\{\mathcal{G}_+^{\circ\circ}(X_n)\}$  satisfait la condition de Mittag-Leffler.

DÉMONSTRATION

Le cas (i). - On peut prendre  $X_n = \{z \in \mathbb{P} \mid d(z, \mathcal{L}) \geq |\pi|^n\}$ . Soit  $(g_1, g_2, g_3, \dots) \in \prod \mathcal{G}_+^{\circ\circ}(X_n)$  donné.

En utilisant la décomposition de Mittag-Leffler (I. 2. 1) on voit que pour chaque  $f \in \mathcal{G}_+^{\circ\circ}(X_{n+1})$  on a :  $\|f\|_{X_n} \leq |\pi| \|f\|_{X_{n+1}}$ .

Cela implique que  $\sum_{m \geq n} g_m$  converge uniformément sur  $X_n$  et appartient à  $\mathcal{G}_+^{\circ\circ}(X_n)$ . Posons  $f_n = \sum_{m \geq n} g_m$ ; alors

$$d(f_1, f_2, \dots) = (g_1, g_2, g_3, \dots).$$

Donc  $d$  est surjective.

Le cas (ii). - On donne aussi  $(g_1, g_2, g_3, \dots) \in \prod \mathcal{O}_+^{\circ\circ}(X_n)$ . La somme  $\sum_{m \geq n} g_m$  ne converge plus et comme dans la démonstration de (I. 8. 6) il faut utiliser une limite de Banach  $\varphi$ .

On définit  $f_n(z) = \varphi\left(\left(\sum_{m=n}^{n+l} g_m(z)\right)_l\right)$  pour  $z \in X_n$ . On peut montrer que  $f_n \in \mathcal{O}_+^{\circ\circ}(X_n)$  et que  $f_n - f_{n+1} = g_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Cela démontre encore " $d$  est surjective".

REMARQUE. - L'application  $R : \mathcal{O}(\Omega)^{\times} \longrightarrow M_0(\hat{\Omega})$  a la propriété suivante :

Soit  $B$  un disque ouvert de  $K$  tel que  $\partial B = B^+ - B$  appartient à  $\mathcal{Q}$ , la famille qui définit  $\Omega$ . Soit  $U$  le sous-ensemble compact et ouvert de  $\hat{\Omega}$  qui correspondent aux trous des  $X_n$  contenus dans  $B$ . Alors  $R(f)(U) = \text{ord}_{\partial B}(f)$ .

On vérifie cela pour un affinoïde connexe à l'aide du théorème des résidus et (I. 8. 5). Un passage à la limite démontre la formule pour  $\Omega$ .

(I. 8. 10) EXEMPLES. - Soit  $\mathcal{L}$  un sous-ensemble compact de  $K$  et soit  $\Omega = \mathbb{P}\text{-}\mathcal{L}$  défini par  $\mathcal{Q} = \{U \mid U \text{ affinoïde et } U \cap \mathcal{L} = \emptyset\}$ .

$\alpha$ ) Si  $\mathcal{L} = \{a_1, \dots, a_n\}$  est fini la proposition (I. 8. 9) montre que chaque élément de  $\mathcal{O}(\Omega)^{\times}$  s'écrit de façon unique

$$\lambda \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{\mu_i} \quad \text{où } \lambda \in K^{\times} \text{ et où } \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{Z} ; \sum \mu_i = 0.$$

$\beta$ )  $\mathcal{L}$  est un compact quelconque

Pour un point  $a \in \mathcal{L}$  la mesure de Dirac  $\delta_a \in M(\mathcal{L})$  est définie par

$$\delta_a(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin U \\ 1 & \text{si } a \in U. \end{cases}$$

Pour  $a, b \in \mathcal{L}$  avec  $a \neq b$  la fonction  $\frac{z-a}{z-b} \in \mathcal{O}(\Omega)^{\times}$  a pour image  $\delta_a - \delta_b \in M_0(\mathcal{L})$ . Une mesure quelconque  $\mu \in M_0(\mathcal{L})$  est une limite faible d'une suite  $\{\mu_k\} \subset M_0(\mathcal{L})$  telle que chaque  $\mu_k$  soit une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de mesure de Dirac. C'est-à-dire pour chaque ouvert compact  $U$  de  $\mathcal{L}$  il existe un entier  $k_0$  tel que  $\mu(U) = \mu_k(U)$  pour  $k \geq k_0$ .

Soit  $\mu_k = \sum_{i=1}^{s(k)} n_i(k) \delta_{a_i(k)}$  avec  $n_i(k) \in \mathbb{Z}$  et  $\sum n_i(k) = 0$ .

La fonction  $f_k = \prod_{i=1}^{s(k)} \left(1 - \frac{a_i(k)}{z}\right)^{n_i(k)} \in \mathcal{O}(\Omega)^{\times}$  a pour image  $\mu_k \in M_0(\mathcal{L})$ .

On peut vérifier que  $\lim f_k = f$  est uniformément convergent sur chaque affinoïde contenu dans  $\Omega$ . La limite  $f \in \mathcal{O}(\Omega)^{\times}$  a pour image  $\mu \in M_0(\mathcal{L})$ .

### I. 8. 11. - Prolongement d'une fonction méromorphe

PROPOSITION. - Soit  $\mathcal{L}$  un ensemble compact contenu dans un disque ouvert  $B \subset \mathbb{C}P$ . Sur l'ensemble ouvert  $\Omega = \mathbb{P} - \mathcal{L}$  la structure d'un sous-espace analytique connexe est donnée par la famille

$\mathcal{Q} = \{U \mid U \subset \Omega \text{ et } U \text{ affinoïde}\}$ . Soit  $f$  une fonction méromorphe non-constante sur  $\Omega$ . Alors  $f$  satisfait une seule des deux assertions suivantes :

(i)  $f$  se prolonge en fonction méromorphe sur  $B$ ,

(ii) pour chaque famille de disques ouverts  $D_1, \dots, D_n$  telle que  $\mathcal{L} \subset \bigcup_{i=1}^n D_i \subset B$  l'ensemble  $f(\bigcup_{i=1}^n D_i - \mathcal{L})$  est dense dans  $\mathbb{P}$ .

DÉMONSTRATION. - On voit aisément qu'une fonction méromorphe  $f$  sur  $B$  tout entier ne peut pas avoir la propriété (ii).

En plus, supposons qu'une fonction méromorphe  $f$  sur  $\Omega$  satisfasse  $f(\bigcup_{i=1}^n D_i - \mathcal{L})$  n'est pas dense dans  $\mathbb{P}$ . Il faut démontrer que  $f$  se prolonge en une fonction méromorphe sur  $B$ . La fonction étant considérée comme une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{P}$ , on peut supposer (après avoir appliqué un automorphisme de  $\mathbb{P}$  sur  $f(\bigcup_{i=1}^n D_i - \mathcal{L})$ )

que  $f(\cup D_1 - \mathcal{L}) \subset \{z \in K \mid |z| \leq 1\}$ . La proposition se déduit ainsi du lemme suivant :

LEMME. - Soit  $f$  une fonction holomorphe bornée sur  
 $\Omega = \{z \in K \mid |z| \leq 1\} - \mathcal{L}$  où  $\mathcal{L}$  est compact. Alors  $f$  est la restriction à  
 $\Omega$  d'une fonction holomorphe sur  $\{z \in K \mid |z| \leq 1\}$ .

DÉMONSTRATION. - En remarquant que  $\mathcal{L}$  est contenu dans une réunion finie de disques ouverts de centre  $a_1, \dots, a_s$  et de rayon  $\rho > 1$ , avec  $|a_i - a_j| > \rho$  pour  $i \neq j$ , on peut supposer que  $\mathcal{L} \subset \{z \in K \mid |z| < 1\}$ . On pose :

$$X_n = \{z \in \mathbb{P} \mid |z - \lambda| \geq |\pi|^{-n} \text{ pour tout } \lambda \in \mathcal{L}\} ; A_0 = \{z \in \mathbb{P} \mid |z| \leq 1\} ;$$

$$A_1 = \{z \in \mathbb{P} \mid |z| \geq 1\} \text{ et } A_{01} = \{z \in \mathbb{P} \mid |z| = 1\}.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{G}^\circ(X_n) \rightarrow \mathcal{G}^\circ(X_n \cap A_0) \oplus \mathcal{G}^\circ(X_n \cap A_1) \rightarrow \mathcal{G}^\circ(X_n \cap A_0 \cap A_1) \rightarrow 0.$$

La limite projective est la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{G}^\circ(\mathbb{P} - \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{G}^\circ(\Omega) \oplus \mathcal{G}^\circ(A_1) \rightarrow \mathcal{G}^\circ(A_{01}) \rightarrow 0.$$

Cette suite est aussi exacte, parce qu'on peut démontrer, comme dans le lemme de (I. 8. 9) cas (i), que le système projectif  $\{\mathcal{G}^\circ(X_n)\}$  satisfait la condition de Mittag-Leffler. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{G}^\circ(\mathbb{P}) & \rightarrow & \mathcal{G}^\circ(A_0) \oplus \mathcal{G}^\circ(A_1) & \rightarrow & \mathcal{G}^\circ(A_{01}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & \downarrow \gamma & \downarrow \delta \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{G}^\circ(\mathbb{P} - \mathcal{L}) & \rightarrow & \mathcal{G}^\circ(\Omega) \oplus \mathcal{G}^\circ(A_1) & \rightarrow & \mathcal{G}^\circ(A_{01}) \rightarrow 0. \end{array}$$

Les deux suites sont exactes et  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont les restrictions. D'après (I. 8. 8)  $\mathcal{G}^\circ(\mathbb{P} - \mathcal{L}) = K^\circ$ . Alors  $\alpha, \gamma, \delta$  sont bijectives. Il s'ensuit que  $\beta$  est un isomorphisme et le lemme est démontré.

EXERCICE. - Montrer que  $H^i(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}) = 0$  pour  $i \geq 1$ ;  $\Omega$  est un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}$  et  $\tilde{\mathcal{A}}$  un faisceau constant.

REMARQUE. - Le lecteur intéressé par le prolongement des fonctions holomorphes pourra lire [45] et voir que le théorème de Picard tombe en défaut.

## CHAPITRE II : ALGÈBRES AFFINOÏDES

- II. 1. - Définition des algèbres affinoïdes
- II. 2. - Théorème de préparation de Weierstrass
- II. 3. - Quelques conséquences
- II. 4. - Espaces affinoïdes - Exemples
- II. 5. - Propriétés de la (semi-) norme spectrale
- II. 6. - Extensions entières d'algèbres affinoïdes
- II. 7. - Le module différentiel d'une algèbre affinoïde
- II. 8. - Un exemple, l'algèbre  $k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$

On peut dire que les espaces analytiques (rigides) sur  $k$  sont définis par analogie avec la géométrie algébrique. Les espaces analytiques sont des recollements d'espaces analytiques affinoïdes et ces derniers sont les idéaux maximaux d'algèbres affinoïdes. On voit que ceci correspond aux schémas, schémas affines (de type fini) et algèbres de type fini. L'étude locale des espaces analytiques est donc essentiellement une étude des algèbres affinoïdes. Si les propriétés des algèbres affinoïdes présentent beaucoup d'analogies avec les algèbres de type fini, en revanche les démonstrations sont assez souvent spécifiques et un peu techniques. On conseille donc au lecteur de ne pas s'attacher en première lecture au détail des démonstrations mais d'examiner plutôt les exemples.

Le corps  $k$  est supposé complet pour une valeur absolue ultramétrique. Parfois on considère  $k$  comme sous-corps d'un corps  $K$ , complet, algébriquement clos.



## II. 1. - Définition des algèbres affinofdes

Pour des indéterminés  $z_1, \dots, z_n$  on désigne par  $T_n(k) = k\langle z_1, \dots, z_n \rangle$  l'algèbre des séries entières  $\sum a_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$  avec  $a_\alpha \in k$  ;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ;  $\lim a_\alpha = 0$ . La norme sur  $T_n (= T_n(k))$  est donnée par  $\|\sum a_\alpha z^\alpha\| = \max |a_\alpha|$ . L'anneau  $\{f \in T_n \mid \|f\| \leq 1\}$  est noté par  $T_n^\circ$  ; l'idéal  $\{f \in T_n \mid \|f\| < 1\}$  par  $T_n^{\circ\circ}$  et  $\bar{T}_n$  désigne  $T_n^\circ / T_n^{\circ\circ}$ . On voit que  $\bar{T}_n \simeq \bar{k}[z_1, \dots, z_n]$  où  $\bar{k} = k^\circ / k^{\circ\circ}$  est le corps résiduel de  $k$ . Comme  $\bar{T}_n$  n'a pas de diviseur de zéro, la norme sur  $T_n$  est multiplicative (i. e.  $\|fg\| = \|f\| \|g\|$ ).

Une algèbre affinofde  $A$  sur  $k$  (ou algèbre de Tate) est une  $k$ -algèbre qui est une extension finie d'un  $T_n(k)$ . C'est-à-dire, il existe un homomorphisme de  $k$ -algèbres  $T_n \longrightarrow A$  qui fait de  $A$  un module de type fini sur  $T_n$ .

L'algèbre de Tate  $T_n$  a beaucoup de propriétés communes avec l'anneau de polynômes  $\bar{k}[z_1, \dots, z_n]$ . Un outil indispensable pour les algèbres affinofdes est le théorème de Weierstrass. Nous avons besoin de quelques notations. La surjection canonique  $T_n^\circ \longrightarrow \bar{T}_n$  est notée  $f \longmapsto \bar{f}$ . Un élément  $f \in T_n$ , avec  $\|f\| = 1$  est appelé régulier en  $z_n$  de degré  $d$  si  $\bar{f} \in \bar{T}_n$  est de la forme  $\lambda z_n^d + \sum_{i < d} c_i z_n^i$  où  $\lambda \in \bar{k}$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $c_0, \dots, c_{d-1} \in \bar{k}[z_1, \dots, z_{n-1}]$ . Soit  $T_{n-1}$  le sous-anneau  $k\langle z_1, \dots, z_{n-1} \rangle$  de  $T_n$ , on considère aussi  $T_{n-1}[z_n]$  comme sous-anneau de  $T_n$ .

## II. 2. - THÉORÈME (Préparation et division de Weierstrass)

(1) Division. - Soit  $f \in T_n$  régulier en  $z_n$  de degré  $d$  et  $g \in T_n$  quelconque. Il existe des éléments uniques  $q \in T_n$  et  $r \in T_{n-1}[z_n]$  de degré en  $z_n$  plus petit que  $d$ , tels que  $g = qf + r$ .

En plus on a  $\|g\| = \max(\|q\|, \|r\|)$ .

(2) Préparation. - Soit  $f$  un élément de  $T_n$  de norme 1. Il existe un  $k$ -automorphisme  $\sigma$  de  $T_n$  tel que  $\sigma(f)$  soit régulier en  $z_n$ .

DÉMONSTRATION. - (1) La condition imposée sur  $f$  implique que  $f$  est de la forme  $f = f_0 + D$  où  $f_0 = \lambda z_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i z_n^i$  avec  $\lambda \in k$ ,  $|\lambda| = 1$ ;  $c_i \in T_{n-1}$  et  $\|c_i\| \leq 1$ ;  $D \in T_n$  et  $\|D\| < 1$ .

On voit sans peine que chaque  $g \in T_n$  peut s'écrire sous la forme  $g = q f_0 + r$  où  $q \in T_n$ ;  $r \in T_{n-1}[z_n]$  et de degré en  $z_n$  plus petit que  $d$ ;  $\|g\| = \max(\|q\|, \|r\|)$ . Nous voulons démontrer cela pour  $f$  au lieu de  $f_0$ . Pour  $g \in T_n$  on écrit  $g = q_0 f_0 + r_0 = q_0 f + r_0 + g_1$  où  $g_1 = -D q_0$ , ainsi  $\|g_1\| \leq \|D\| \|q_0\|$ . On écrit également  $g_1 = q_1 f + r_1 + g_2$  où  $g_2 = -D q_1$ , ainsi  $\|g_2\| \leq \|D\| \|q_1\| \leq \|D\|^2 \|q_0\|$ . Par récurrence on construit une suite d'éléments  $g_m, q_m, r_m$  avec  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|q_m\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|r_m\| = 0$  et en plus  $g_m = q_m f + r_m + g_{m+1}$  ( $m \geq 0$ ),  $r_m \in T_{n-1}[z_n]$  et  $d_{z_n}^0 r_m < d$ .

Comme  $T_n$  est complet pour la norme, on a :

$$g = \left( \sum_{i=0}^{\infty} q_i \right) f + \left( \sum_{i=0}^{\infty} r_i \right) \quad \text{et} \quad \|g\| = \max \left( \left\| \sum_{i=0}^{\infty} q_i \right\|, \left\| \sum_{i=0}^{\infty} r_i \right\| \right).$$

Alors la division par  $f$  existe et elle a la propriété désirée pour la norme. Supposons que la division par  $f$  ne soit pas unique. Alors  $g$  se décompose sous la forme  $g = q_1 f_1 + r_1 = q_2 f_2 + r_2$ , avec  $q_1 \neq q_2$ . Nous pouvons supposer que  $\|q_1 - q_2\| = 1$  et par conséquent que  $\|r_1 - r_2\| = 1$ . L'équation  $(q_1 - q_2)f = r_2 - r_1$  implique  $(\overline{q_1 - q_2}) \overline{f} = \overline{r_2 - r_1}$  dans  $\overline{T}_n$ . Cela est en contradiction avec "degré de  $\overline{f}$  en  $z_n$  est égal à  $d$ ".

(2) Une substitution des variables  $z_i \mapsto \sum \lambda_{ij} z_j$  avec  $(\lambda_{ij}) \in \text{Gl}_n(k^0)$  (i.e. tous les  $\lambda_{ij} \in k^0$  et  $|\det(\lambda_{ij})_{i,j}| = 1$ ) induit un  $k$ -automorphisme  $\sigma$  de  $T_n$  donné par  $\sigma(f) = f(\sum \lambda_{1j} z_j, \dots, \sum \lambda_{nj} z_j)$ . L'automorphisme  $\sigma$  induit un  $\overline{k}$ -automorphisme  $\overline{\sigma}$  de  $\overline{T}_n = \overline{k}[z_1, \dots, z_n]$  également défini par la substitution  $z_i \mapsto \sum \overline{\lambda}_{ij} z_j$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

On pose  $\overline{f} = h_0 + h_1 + \dots + h_d$  où  $h_i$  est une forme homogène en  $z_1, \dots, z_n$  de degré  $i$  et où  $h_d \neq 0$ . Pour un corps résiduel infini on trouve facilement un  $\sigma$ , tel que le polynôme homogène  $\overline{\sigma}(h_d)$  contienne le terme  $z_n^d$ . Donc  $\sigma(f)$  est régulier en  $z_n$  de degré  $d$ .

Pour un corps fini  $\bar{k}$  il faut prendre d'autres substitutions.

La substitution  $z_i \mapsto z_i + z_n^{e_i}$  ( $1 \leq i < n$ ) et  $z_n \mapsto z_n$  avec  $e_1, \dots, e_{n-1} \in \mathbb{N}$  donne évidemment un automorphisme  $\sigma$  de  $T_n$ . Posons  $\bar{f} = \sum a_\alpha z^\alpha \neq 0$ . Alors :

$$\overline{\sigma(f)} = \overline{\sigma(f)} = \sum a_\alpha (z_1 + z_n^{e_1})^{\alpha_1} \dots (z_{n-1} + z_n^{e_{n-1}})^{\alpha_{n-1}} z_n^{\alpha_n}.$$

On peut choisir les  $e_1, \dots, e_{n-1}$  tels que  $a_\alpha \neq 0$ ,  $a_\beta \neq 0$  et  $\alpha \neq \beta$  impliquent  $e_1 \alpha_1 + \dots + e_{n-1} \alpha_{n-1} + \alpha_n \neq e_1 \beta_1 + \dots + e_{n-1} \beta_{n-1} + \beta_n$ . Pour un tel choix, le degré total de  $\sigma(f)$  est égal à

$N = \max \{ e_1 \alpha_1 + \dots + e_{n-1} \alpha_{n-1} + \alpha_n \mid a_\alpha \neq 0 \}$ . Le degré de  $\overline{\sigma(f)}(0, \dots, 0, z_n) = \sum a_\alpha z_n^{(e_1 \alpha_1 + \dots + e_{n-1} \alpha_{n-1} + \alpha_n)}$  est aussi  $N$ .

Donc  $\overline{\sigma(f)}$  a la forme voulue.

### II. 3. - Quelques conséquences du théorème de Weierstrass

#### THÉORÈME

(II. 3. 1).- Une algèbre affinofde est un anneau noethérien.

(II. 3. 2).- L'anneau  $T_n$  est factoriel.

(II. 3. 3).- Soit  $\| \cdot \|$  une norme de Banach sur une algèbre affinofde  $A$ . Alors tout idéal de  $A$  est fermé pour  $\| \cdot \|$ .

(II. 3. 4).- Pour tout idéal  $\mathfrak{A}$  de  $T_n$  il existe un morphisme injectif et fini  $T_n \hookrightarrow T_n / \mathfrak{A}$ . Le nombre  $d$  est la dimension de Krull de l'anneau  $T_n / \mathfrak{A}$ .

(II. 3. 5).- Soit  $\mathfrak{M}$  un idéal maximal de  $T_n$ . Alors le corps  $T_n / \mathfrak{M}$  est une extension finie de  $k$ .

(II. 3. 6).- Une algèbre affinofde  $A$  est de la forme  $T_n / \mathfrak{A}$ , où  $\mathfrak{A}$  est un idéal de  $T_n$ . Cette représentation définit sur  $A$  une norme qui en fait une algèbre de Banach.

(II. 3. 7). - Soient  $A$  et  $B$  deux algèbres affinoïdes munies de normes de Banach  $\| \cdot \|$  et  $\| \cdot \|'$ , c'est-à-dire que  $(A, \| \cdot \|)$  et  $(B, \| \cdot \|')$  sont deux algèbres de Banach. Soit  $u$  un homomorphisme de l'algèbre  $A$  dans l'algèbre  $B$ . Alors  $u$  est un homomorphisme continu de  $(A, \| \cdot \|)$  dans  $(B, \| \cdot \|')$ . Ainsi toutes les normes de Banach sur une algèbre affinoïde sont équivalentes.

#### DÉMONSTRATION

(II. 3. 1). - Soit  $\mathfrak{U}$  un idéal non nul de  $T_n$ . D'après II. 2, (préparation) on peut supposer que  $\mathfrak{U}$  contient un élément  $f$ , régulier en  $z_n$  de degré  $d$ . La division par  $f$  montre que  $\mathfrak{U}$  est engendré par  $f$  et l'idéal  $\mathfrak{B} = \mathfrak{U} \cap T_{n-1}[z_n]$  de  $T_{n-1}[z_n]$ . Par récurrence,  $T_{n-1}$  et  $T_{n-1}[z_n]$  sont noéthériens. Donc  $\mathfrak{B}$  est engendré par un nombre fini d'éléments et par conséquent  $\mathfrak{U}$  est un idéal de type fini.

(II. 3. 2). - Soit  $f \in T_n$ ,  $f \neq 0$ . Après un changement de variables, on peut supposer que  $f$  est régulier en  $z_n$  de degré  $d$ . La division  $z_n^d = qf + r$  montre que  $z_n^d - r$  est aussi régulier en  $z_n$  de degré  $d$ . La division  $f = q'(z_n^d - r) + r'$  implique  $f = qq'f + r'$ . L'unicité de la division par  $f$  implique  $r' = 0$  et  $qq' = 1$ . Alors  $f = q'(z_n^d - r)$  où  $q' \in T_n$  est une unité. Par récurrence, les anneaux  $T_{n-1}$  et  $T_{n-1}[z_n]$  sont factoriels. Donc  $f = q'f_1 \dots f_s$  où les  $f_i \in T_{n-1}[z_n]$  sont des polynômes unitaires en  $z_n$ , de norme 1, et irréductibles comme éléments de  $T_{n-1}[z_n]$ .

Nous allons vérifier que chaque  $f_i$  est aussi irréductible dans  $T_n$ .

Soit  $g \in T_{n-1}[z_n]$ , unitaire en  $z_n$ , de norme 1, et irréductible comme élément de  $T_{n-1}[z_n]$ . Soit  $g = g_1 g_2$ , une décomposition dans  $T_n$ , où  $g_1$  n'est pas inversible dans  $T_n$ . On peut supposer que  $\|g_1\| = 1$  et il s'ensuit que  $g_1$  est régulier en  $z_n$ .

Comme plus haut, nous pouvons remplacer  $g_1$  par un polynôme unitaire en  $z_n$ . La division de  $g$  par  $g_1$  est unique dans  $T_n$  et dans  $T_{n-1}[z_n]$ . Alors  $g_2$  appartient à  $T_{n-1}[z_n]$ . L'élément  $g$

étant irréductible dans  $T_{n-1}[z_n]$ , on conclut que  $g_2$  est une unité.

Nous avons démontré que chaque élément  $f$  de  $T_n$  est un produit d'éléments irréductibles de  $T_n$ . Un raisonnement semblable montre l'unicité de la décomposition de  $f$  (à unités près).

Pour montrer (II.3.3), nous devons utiliser un lemme général sur les modules de Banach (le lecteur peut trouver la définition en III.7.5).

(II.3.8) - LEMME. - Soient  $A$  une algèbre de Banach qui est un anneau noethérien,  $M$  un  $A$ -module de Banach de type fini. Alors tout sous-module de  $M$  est fermé.

DÉMONSTRATION. - Soient  $N$  un sous-module,  $\hat{N}$  sa fermeture dans  $M$ . Puisque  $M$  est noethérien,  $\hat{N}$  est de type fini et il existe  $e_1, e_2, \dots, e_n$  tels que  $\hat{N} = \sum_{i=1}^n A e_i$ . L'application  $(a_i) \mapsto \sum a_i e_i$  de  $A^n$  dans  $\hat{N}$  est un morphisme strict d'après le théorème de Banach ( $A^n$  est muni de la norme  $\|(a_i)\|' = \max_i \|a_i\|$ ). Ainsi il existe une constante  $0 < c < 1$  telle que : pour tout  $x \in \hat{N}$ , il existe  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  avec

$$x = \sum a_i e_i \quad \text{et} \quad c \max_i \|a_i\| \leq \|x\|.$$

Soient  $f_1, f_2, \dots, f_n \in N$  tels que  $\|f_i - e_i\| \leq c^2$ , pour  $1 \leq i \leq n$ . Nous allons montrer que  $\hat{N} = \sum_{i=1}^n A f_i$ .

Soit  $s \geq 1$  un entier, supposons qu'il existe  $x_1^{(s)}, \dots, x_n^{(s)} \in A$  et  $x_s \in \hat{N}$  tels que

$$x = \sum x_i^{(s)} f_i + x_s \quad \text{et} \quad \|x_s\| \leq c^s.$$

Il existe  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  tels que

$$x_s = \sum a_i e_i \quad \text{et} \quad c \max_i \|a_i\| \leq \|x_s\|.$$

Posons  $x_i^{(s+1)} = x_i^{(s)} + a_i$  et  $x_{s+1} = \sum a_i (e_i - f_i)$ . On a alors :

$$x = \sum x_i^{(s+1)} f_i + x_{s+1}, \quad \|x_{s+1}\| \leq c^{s+1}, \quad \|x_i^{(s+1)} - x_i^{(s)}\| \leq c^{s-1}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite  $(x_i^{(s)})_s$  qui est de Cauchy, soit  $x_i$  sa limite. Il est alors clair que  $x = \sum x_i f_i$ . Ce qui prouve que  $N = \hat{N}$ .

(II.3.3) est alors une conséquence immédiate de (II.3.8).

En effet, un idéal  $\mathfrak{U}$  de  $A$  est un sous-module du  $A$ -module de Banach  $A$ , ainsi il est fermé.

(II.3.4). - Nous allons montrer qu'il existe un automorphisme  $\sigma$  de  $T_n$  et un entier  $d \leq n$  tel que l'homomorphisme canonique  $T_d \hookrightarrow T_n \rightarrow T_n/\sigma(\mathfrak{U})$  soit injectif et fini. Ce qui prouvera la première partie de II.3.4.

Soit  $\mathfrak{U} \neq (0)$  et  $f \in \mathfrak{U}$ ,  $f \neq 0$ . D'après (II.2), il existe un automorphisme  $\sigma$  de  $T_n$  tel que  $\sigma(f)$  soit régulier en  $z_n$  et la démonstration de (II.3.2) montre que  $\sigma(\mathfrak{U})$  contient un élément  $g$  de la forme  $g = z_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i z_n^i$  avec  $a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in T_{n-1}^\circ$ . Il est clair que  $T_n/(g)$  est un  $T_{n-1}$ -module libre engendré par  $1, z_n, \dots, z_n^{d-1}$ .

Soit  $\mathfrak{B} = \mathfrak{U} \cap T_{n-1}$ , alors  $T_{n-1}/\mathfrak{B} \rightarrow T_n/\sigma(\mathfrak{U})$  est un morphisme injectif et fini. Par récurrence sur  $n$  il existe  $d \leq n-1$  et un automorphisme  $\sigma'$  de  $T_{n-1}$  tel que  $T_d \hookrightarrow T_{n-1} \rightarrow T_{n-1}/\sigma'(\mathfrak{B})$  soit un morphisme injectif et fini. Comme  $\sigma'$  se prolonge canoniquement en un automorphisme toujours noté  $\sigma'$  de  $T_n$  tel que  $\sigma'(z_n) = z_n$ , l'homomorphisme  $T_d \hookrightarrow T_n \rightarrow T_n/\sigma'(\mathfrak{U})$  est injectif et fini. Ce qui prouve la première assertion.

(II.3.5). - Si  $T_d \hookrightarrow T_n/\mathfrak{M}$  est fini et injectif, alors  $T_d$  est un corps parce que  $T_n/\mathfrak{M}$  est un corps. Donc  $d=0$  et  $[T_n/\mathfrak{M} : k] < \infty$ .

Avant de démontrer (II.3.6), donnons une définition.

(II. 3. 9) DÉFINITION. - Soient  $(A, \|\cdot\|)$  une algèbre de Banach et  $X_1, X_2, \dots, X_s$  des indéterminées. On note  $A\langle X_1, X_2, \dots, X_s \rangle$  l'algèbre des séries  $\sum a_\alpha X^\alpha$  telles que  $\lim a_\alpha = 0$ . Cette algèbre est normée par  $\|\sum a_\alpha X^\alpha\| = \max_\alpha \|a_\alpha\|$ .

(II. 3. 6). - Soit  $A$  une algèbre affinofde, il existe  $T_n$  et un homomorphisme  $\varphi$  de  $T_n$  dans  $A$  tel que  $A$  soit fini sur  $\varphi(T_n)$ . D'après (II. 3. 4) il existe un morphisme injectif fini de  $T_d$  dans  $T_n/\ker \varphi$ , donc un morphisme injectif fini de  $T_d$  dans  $A$ . Soient  $e_1, \dots, e_s$  des générateurs de  $A$  comme  $T_d$ -module. Après multiplication des  $e_i$  par des éléments de  $k^X$ , les  $e_i$  satisfont une équation :

$$e_i^{d_i} + a_{d_i-1}^{(i)} e_i^{d_i-1} + \dots + a_0^{(i)} = 0, \quad i=1, \dots, s \quad \text{et} \quad a_j^{(i)} \in T_d^\circ.$$

Soit :

$$P_i = X_i^{d_i} + a_{d_i-1}^{(i)} X_i^{d_i-1} + \dots + a_0^{(i)}.$$

Le polynôme  $P_i$  est régulier en  $X_i$  de degré  $d_i$ . Soit :

$$f \in T_d\langle X_1, \dots, X_s \rangle \simeq T_{d+s},$$

en effectuant la division de  $f$  successivement par  $P_1, P_2, \dots, P_s$  (II. 2) on obtient :

$$f = q_1 P_1 + q_2 P_2 + \dots + q_s P_s + r, \quad q_i \in T_d\langle X_1, \dots, X_s \rangle$$

$$r = \sum_{i_1=0}^{d_1-1} \dots \sum_{i_s=0}^{d_s-1} a_{i_1 i_2 \dots i_s} X_1^{i_1} \dots X_s^{i_s}, \quad a_{i_1 i_2 \dots i_s} \in T_d$$

et  $\|r\| \leq \|f\|$ .

Alors l'unicité de la division dans  $T_d\langle X_1, \dots, X_s \rangle$  et dans  $T_d[X_1, \dots, X_s]$  impliquent que

$$R = \frac{T_d\langle X_1, X_2, \dots, X_s \rangle}{(P_1, P_2, \dots, P_s)} \simeq \frac{T_d[X_1, X_2, \dots, X_s]}{(P_1, P_2, \dots, P_s)}.$$

Le  $T_d$ -homomorphisme de  $T_d[X_1, \dots, X_s]$  dans  $A$  qui envoie  $X_i$  sur  $e_i$  induit un homomorphisme  $\varphi_1$  de  $R$  sur  $A$ . On en déduit un homomorphisme surjectif  $\varphi_2$  de  $T_d\langle X_1, \dots, X_s \rangle \cong T_{d+s}$  sur  $A$ . Puisque  $\ker \varphi_2$  est fermé (II. 3. 3) la norme sur  $T_{d+s}$  induit une norme de Banach  $\| \cdot \|_1$  sur  $A$ . Soit  $\| \cdot \|$  la norme de  $T_d$ , il est clair que pour tout  $a \in T_d$  on a  $\| a \|_1 \leq \| a \|$ . On verra en (II. 4. 8) que l'on a  $\| a \|_1 = \| a \|$  pour tout  $a \in T_d$ .

(II. 3. 7). - Si  $A$  et  $B$  sont de dimension finie sur  $k$  on sait que toute application  $k$ -linéaire est continue. Si  $B$  est finie sur  $k$ , l'idéal  $\mathfrak{U} = \ker u$  est fermé (II. 3. 3), alors  $A/\mathfrak{U}$  est normé par la norme quotient et ainsi  $u$  induit une injection continue de  $A/\mathfrak{U}$  dans  $B$  (d'après ce qui précède) et  $u$  est continu.

Dans le cas général on utilise le théorème du graphe fermé. Soit  $a_n$  une suite de  $A$  tendant vers 0 telle que  $u(a_n)$  converge dans  $B$  vers  $b$ . Nous allons montrer que  $b = 0$ . Ce qui prouvera que  $u$  est continu. Soit  $\mathfrak{M}$  un idéal maximal de  $B$  et  $n \geq 1$ , un entier. Comme  $B/\mathfrak{M}^n$  est fini sur  $k$ , l'application  $A \xrightarrow{u} B \longrightarrow B/\mathfrak{M}^n$  est continue et ainsi  $b \in \mathfrak{M}^n$ . D'après le lemme (II. 3. 10),  $b = 0$ .

(II. 3. 10) LEMME. - Soit  $M$  un module de type fini sur un anneau noethérien  $A$ . Alors :

$$\bigcap_{\mathfrak{M}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n M = 0$$

(où  $\mathfrak{M}$  parcourt les idéaux maximaux).

DÉMONSTRATION. - (i) Si  $A$  est déjà local avec  $\mathfrak{M}$  comme seul idéal maximal, on pose

$$N = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n M.$$

Le lemme d'Artin-Rees (N. Bourbaki, Algèbre commutative, chap. III, §. 3, n° 1 [6]) implique l'existence de  $e \geq 1$  avec  $\mathfrak{M}^e M \cap N \subset \mathfrak{M} N$ .



Alors  $\mathfrak{M} N = N$  et le lemme de Nakayama implique  $N = 0$ .

(ii) Le cas général. Pour chaque idéal maximal  $\mathfrak{M}_0$  de  $A$ , l'image de  $N = \bigcap_{\mathfrak{M}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n M$  dans  $M_{\mathfrak{M}_0}$  est nulle d'après (i).

Il existe alors  $f_0 \in A - \mathfrak{M}_0$  avec  $f_0 N = 0$ . Soient  $\xi \in N$  et  $\mathfrak{U} = \{f \in A \mid f \xi = 0\}$ . L'idéal  $\mathfrak{U} \subset A$  n'est pas contenu dans un idéal maximal. Donc  $\mathfrak{U} = A$  et  $\xi = 0$ .

(II. 3. 11) EXERCICE. - Montrer, en utilisant le théorème de division de Weierstrass, que tout idéal de  $k\langle z \rangle$  est de la forme  $f(z)k\langle z \rangle$  où  $f(z) \in k[[z]]$  et  $f$  est unitaire.

Montrer que tout idéal maximal de  $k\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle$  est engendré par  $n$  polynômes de  $k[[z_1, z_2, \dots, z_n]]$ .

#### II. 4. - Espace affinoïde. Exemples

(II. 4. 1) DÉFINITIONS. - A une algèbre affinoïde  $A$  sur  $k$ , nous associons  $X = \text{Sp}(A)$ , l'ensemble des idéaux maximaux de  $A$ .

Soit  $\mathfrak{x} \in X$  un idéal maximal,  $A/\mathfrak{x}$  est un corps extension finie de  $k$

(II. 3. 5) ainsi la valeur absolue de  $k$  se prolonge de façon unique à  $A/\mathfrak{x}$  et sera toujours notée  $|\cdot|$ . Si  $f \in A$ , on note  $f(\mathfrak{x})$  son image dans  $A/\mathfrak{x}$ .

Alors on peut définir une topologie sur  $X$ , c'est celle engendrée par les ensembles  $U_f = \{\mathfrak{x} \in X \mid |f(\mathfrak{x})| \leq 1\}$  (où  $f$  parcourt  $A$ ).

Un espace  $X = \text{Sp}(A)$  muni de cette topologie sera appelé un espace affinoïde (c'est en fait une définition provisoire qui sera complétée au chapitre III).

Nous définissons une semi-norme spectrale sur  $A$  par  $\|f\|_{\text{sp}} = \sup_{\mathfrak{x} \in X} |f(\mathfrak{x})|$ . Clairement la semi-norme spectrale est une norme si et seulement si le radical de  $A$  (c'est-à-dire l'intersection des maximaux) est nul.

Soit  $\|\cdot\|$  une norme de Banach sur  $A$ , elle induit sur  $A/\mathfrak{x}$  une norme qui est supérieure ou égale à la valeur absolue de  $A/\mathfrak{x}$  (puisque  $A/\mathfrak{x}$  est de dimension finie sur  $k$ ).

Il s'ensuit que pour tout  $f \in A$  on a  $\|f\|_{\text{sp}} \leq \|f\|$ .

Si  $A$  est une algèbre affinoïde,  $A^\circ$ ,  $A^{\circ\circ}$  et  $\bar{A}$  sont ainsi définis :

$$A^\circ = \{f \in A \mid \|f\|_{\text{sp}} \leq 1\}, \quad A^{\circ\circ} = \{f \in A \mid \|f\|_{\text{sp}} < 1\},$$

$A^{\circ\circ}$  est un idéal de  $A^\circ$  et on pose  $\bar{A} = A^\circ / A^{\circ\circ}$  ;  $A^\circ$  est donc une  $k^\circ$ -algèbre et  $\bar{A}$  une algèbre sur  $\bar{k} (= k^\circ / k^{\circ\circ})$ .

(II. 4. 2) REMARQUE. - Si on veut déterminer la transformation de Gelfand sur  $A$  il faut considérer  $K$  le complété de la clôture algébrique  $k$  et  $X' = \text{Hom}_{\text{cont}}(A, K)$ , l'ensemble des  $k$ -homomorphismes continus de  $A$  dans  $K$ . Le groupe  $G$  des  $k$ -automorphismes continus de  $K$  agit sur  $X'$  et alors  $X$  s'identifie aux orbites de  $X'$ . Soit  $f \in A$ , notons  $\mathcal{G}(f)$  l'application de  $X'$  dans  $K$  définie par  $\mathcal{G}(f)(x') = x'(f)$ . Ainsi  $\mathcal{G}$  (la transformation de Gelfand) est un homomorphisme de  $A$  dans l'algèbre des fonctions de  $X'$  dans  $K$ .

Un cas simple est celui où  $k = K$  (algébriquement clos et complet) et alors  $X = X'$ . Ainsi  $\mathcal{G}(A) \simeq A / \text{Rad}(A)$  est une sous- $K$ -algèbre de l'algèbre des fonctions de  $X$  dans  $K$ .

(II. 4. 3) EXERCICE. - Soit  $u$  un homomorphisme de  $A$  dans  $B$ ,  $A$  et  $B$  algèbres affinoïdes. Soit  $x \in \text{Sp}(B)$ , montrer que  $u^{-1}(x)$  est maximal. Montrer que l'application  $x \mapsto u^{-1}(x)$  de  $\text{Sp}(B)$  dans  $\text{Sp}(A)$  est continue. On notera parfois cette application  $\text{Sp}(u)$ .

(II. 4. 4) EXEMPLE : L'anneau  $T_n(K)$

Soit  $k = K$  (on suppose que  $k$  est algébriquement clos), alors  $A/x = K$  pour chaque idéal maximal de  $A$  et chaque  $f \in A$  donne une fonction  $X \rightarrow K$  au sens ordinaire. Un idéal maximal  $x$  de  $T_n = K\langle z_1, \dots, z_n \rangle$  est déterminé par les valeurs  $z_1(x), \dots, z_n(x)$ . De cette façon on identifie  $X$  avec le polyèdre

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid |x_i| \leq 1 \text{ pour chaque } i\}.$$

La topologie sur  $X$  coïncide avec sa topologie comme sous-espace de  $K^n$ . La norme sur  $T_n$  est égale à la norme spectrale. En effet,

on a toujours  $\|f\|_{\text{sp}} \leq \|f\|$ . Soit  $f \in T_n$  avec  $\|f\| = 1$ . Alors  $\bar{f} \in \bar{K}[z_1, \dots, z_n]$  n'est pas nul. Pour  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  et  $|x_i| \leq 1$  pour chaque  $i$ , on a  $\overline{f(x_1, \dots, x_n)} = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Si  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  n'est pas un zéro de  $\bar{f}$ , alors  $|f(x_1, \dots, x_n)| = 1$ , ainsi  $\|f\|_{\text{sp}} = 1$  et donc  $\|\cdot\|_{\text{sp}} = \|\cdot\|$ .

On peut caractériser les éléments inversibles de  $K\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle$ . On a le résultat suivant :  $f = a_0 + \sum_{\alpha \neq 0} a_\alpha z^\alpha \in K\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle$  est inversible si et seulement si  $f$  n'a pas de zéro dans  $\text{Sp}(T_n)$ , si et seulement si  $|a_0| > \max_{\alpha \neq 0} |a_\alpha|$ . Soit  $f \in T_n$  de norme 1 tel que  $\bar{f} \in \bar{K}[z_1, z_2, \dots, z_n]$  ne soit pas constant. Supposons que  $d_1^0 \bar{f} \neq 0$ . En choisissant convenablement  $x_2, x_3, \dots, x_n \in K$  avec  $|x_i| \leq 1$ , le polynôme  $\bar{f}(z_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \bar{K}[z_1]$  n'est pas constant. Soit  $g = f(z_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle z_1 \rangle$ . L'élément  $g$  est régulier en  $z_1$ , de degré  $d$ , ainsi  $g = q \cdot (z_1^d + a_{d-1} z_1^{d-1} + \dots + a_0)$  où  $q$  est un inversible de  $K\langle z_1 \rangle$  et  $a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in K^\circ$ . Ce polynôme de degré  $d$  a un zéro  $x_1 \in K^\circ$ . En conséquence,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Ce qui montre les trois équivalences. Cela implique que  $T_n$  est le complété pour la norme spectrale de l'anneau des fonctions rationnelles sur  $K^n$  sans pôles dans  $(K^\circ)^n$ .

On peut caractériser de façon analogue les inversibles d'une algèbre affinofde.

(II.4.5) EXERCICE. - Soient  $A$  une algèbre affinofde,  $f \in A$ .

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) il existe  $m > 0$  tel que pour tout  $x \in \text{Sp}(A)$  on ait  $|f(x)| \geq m$  ;
- ii) pour tout  $x \in \text{Sp}(A)$ , on a  $f(x) \neq 0$  ;
- iii)  $f$  est inversible dans  $A$ .

(II.4.6) EXERCICE. - Montrer que sur  $T_n(k)$  on a  $\|\cdot\|_{\text{sp}} = \|\cdot\|$  (ici  $k$  n'est pas nécessairement algébriquement clos).

(II. 4. 7) EXERCICE. - Soient  $K$  algébriquement clos, complet, de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $u$  l'homomorphisme de  $T_n(K)$  dans  $T_n(K)$  défini par  $u(z_i) = z_i^p$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Montrer que  $u$  induit (selon II. 4. 3) un homéomorphisme de  $\text{Sp}(T_n(K))$  sur lui-même et que  $u$  n'est pas un automorphisme de  $T_n(K)$  (on montrera que  $T_n(K)$  est un  $u(T_n(K))$ -module libre de rang  $p^n$ ).

(II. 4. 8) EXERCICE. - Soit  $T_d \xrightarrow{\text{fini}} A$ . Montrer qu'il existe sur  $A$  une norme de Banach telle que la restriction à  $T_d$  soit la norme de  $T_d$  (utiliser la démonstration de II. 3. 6, II. 4. 1 et II. 4. 4).

(II. 4. 9) EXERCICE. - Soient  $T_d \xrightarrow{\text{fini}} B$ ,  $\| \cdot \|$  une norme de Banach sur l'algèbre affinofde  $B$  dont la restriction à  $T_d$  soit la norme de  $T_d$ . Soit  $A$  une algèbre affinofde telle que  $T_d \subset A \subset B$ . Montrer que la restriction de  $\| \cdot \|$  à  $A$  est une norme de Banach pour  $A$ .

(II. 4. 10) EXERCICE. - Soient  $A \xrightarrow{\text{fini}} B$ , deux algèbres affinofdes. Montrer que pour tout  $f \in A$  on a  $\| f \|_{\text{sp}}^A = \| f \|_{\text{sp}}^B$ .

(II. 4. 11) EXERCICE. - Soient  $A$  l'algèbre des séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  avec  $a_n \rightarrow 0$  et  $B$  l'algèbre des séries  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \pi^{-n} z^n$  avec  $b_n \rightarrow 0$  et  $\pi \in K$  avec  $0 < |\pi| < 1$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont deux algèbres affinofdes telles que  $A \subset B$ . Montrer qu'il existe  $f \in A$  tel que  $\| f \|_{\text{sp}}^A < \| f \|_{\text{sp}}^B$ .

(II. 4. 12) EXEMPLE. - L'anneau des fonctions holomorphes sur un affinofde connexe de  $\mathbb{P}^1$

Nous prenons toujours  $k = K$  (algébriquement clos complet). Au chapitre I nous avons défini un espace affinofde connexe  $F$  de  $\mathbb{P}^1$  comme le complémentaire d'un nombre fini de disques ouverts de  $\mathbb{P}^1$  dont les rayons appartiennent à  $|K^{\times}|$ . Nous voulons identifier  $F$  à un espace affinofde au sens de II. 4. 1, plus précisément nous allons montrer que  $\mathcal{O}(F)$  est une algèbre affinofde et que  $F = \text{Sp}(\mathcal{O}(F))$ .

Supposons pour simplifier que  $\infty \notin F$ . Alors  $F$  est défini par  $F = \{z \in \mathbb{P} \mid |z - a_i| \geq |\pi_i|, 1 \leq i \leq n\}$  où  $a_i, \pi_i \in K$  et où les disques ouverts  $\{z \in K \mid |z - a_i| < |\pi_i|\}$  sont disjoints. Considérons l'application injective  $\varphi$  de  $F$  dans  $(K^\circ)^n$  définie par  $z \mapsto (\pi_1/z - a_1, \dots, \pi_n/z - a_n)$ . Soit  $G = \varphi(F)$ , cet ensemble est défini par les équations suivantes :

$$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (K^\circ)^n \mid \frac{\pi_i}{a_i - a_j} x_j + \frac{\pi_j}{a_j - a_i} x_i + x_i x_j = 0 \text{ pour } i \neq j\}.$$

Considérons les polynômes  $E_{ij}$  de  $T_n$ ,

$$E_{ij} = \frac{\pi_i}{a_i - a_j} z_j + \frac{\pi_j}{a_j - a_i} z_i + z_i z_j \quad i \neq j.$$

Soient  $\mathfrak{U}$  l'idéal de  $T_n$  engendré par les  $E_{ij}$  et  $A = T_n/\mathfrak{U}$ . Ainsi  $G$  s'identifie à  $\text{Sp}(A)$ . Nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme  $\varphi^*$  de  $A$  sur  $\mathcal{O}(F)$  tel que  $\varphi = \text{Sp}(\varphi^*)$ . Puisque

$\|\frac{\pi_i}{z - a_i}\|_F = 1$  il existe un homomorphisme  $\varphi^*$  de  $T_n$  dans  $\mathcal{O}(F)$  tel que  $\varphi^*(z_i) = \frac{\pi_i}{z - a_i}$  (rappelons que  $\mathcal{O}(F)$  est une algèbre de Banach

pour  $\|\cdot\|_F$ ). Il est facile de montrer que tout  $f \in T_n$  se décompose sous la forme  $f = f_0 + f_1$  avec  $f_0 = a + \sum_{m \geq 1} \sum_{i=1}^n a_{i,m} z_i^m$

( $a, a_{i,m} \in K, \lim_{i,m} a_{i,m} = 0$ ) et  $f_1 \in \mathfrak{U}$ . Il est clair que

$$\varphi^*(f) = \varphi^*(f_0) = a + \sum_{m \geq 1} \sum_{i=1}^n a_{i,m} \left(\frac{\pi_i}{z - a_i}\right)^m.$$

La décomposition de Mittag Leffler (unicité) (I.1.2) montre que  $\varphi^*(f) = 0$  si et seulement si  $f_0 = 0$ . Ainsi  $\ker \varphi^* = \mathfrak{U}$ . De plus (I.1.2) montre aussi que  $\varphi^*$  est surjectif. Ainsi  $\varphi^*$  induit un isomorphisme (toujours noté  $\varphi^*$ ) de  $T_n/\mathfrak{U} = A$  sur  $\mathcal{O}(F)$ . C'est un exercice de montrer que  $\varphi^*$  est une isométrie de  $A$  (muni de la norme induite par  $T_n$ ) sur  $\mathcal{O}(F)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_F$  (qui est en fait la norme spectrale de  $\mathcal{O}(F)$ ) et que  $\text{Sp}(\varphi^*) = \varphi$ .

Nous pouvons utiliser la technique des algèbres affinoïdes pour donner une autre démonstration du théorème I.2.2.

(II. 4. 13). - Soit  $F$  un affinoïde connexe de  $\mathbb{P}^n$

i) Soit  $f \in \mathcal{O}(F)$ ,  $f \neq 0$ , alors  $f$  n'a qu'un nombre fini de zéros.

ii) L'anneau  $\mathcal{O}(F)$  est principal.

DÉMONSTRATION. - La démonstration se fait en plusieurs étapes.

1) Nous démontrons d'abord que chaque idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $\mathcal{O}(F)$  est engendré par un seul élément. Comme  $\mathcal{O}(F) = k\langle z_1, \dots, z_n \rangle / \mathfrak{A}$  et comme  $k$  est algébriquement clos, on a  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' / \mathfrak{A}$  où l'idéal maximal  $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{A}$  de  $k\langle z_1, \dots, z_n \rangle$  est engendré par  $\{z_1 - \lambda_1, \dots, z_n - \lambda_n\}$  pour certains  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k^\circ$ . L'élément  $(z_i - \lambda_i)$  ( $i > 1$ ) s'écrit  $(z_i - \lambda_i) = (z_1 - \lambda_1) + E_{1i}$ . Il s'ensuit que  $\mathfrak{M}$  est engendré par  $z_1 - \lambda_1$  (ou bien par  $(\pi_1 / z - a_1) - \lambda_1 \in \mathcal{O}(F)$ ).

2) Ensuite, on va montrer que l'application  $\psi : k\langle T \rangle \longrightarrow \mathcal{O}(F)$ , donnée par  $T \longmapsto \frac{\pi_1}{z - a_1} + \dots + \frac{\pi_n}{z - a_n}$ , fait de  $\mathcal{O}(F)$  un  $k\langle T \rangle$ -module libre de rang  $n$ . On voit facilement que

$\bar{\psi} : \bar{k}[T] \longrightarrow \overline{\mathcal{O}(F)}$  fait de  $\overline{\mathcal{O}(F)}$  un  $\bar{k}[T]$ -module libre admettant pour base  $\{1, (\frac{\pi_1}{z - a_1}), \dots, (\frac{\pi_{n-1}}{z - a_{n-1}})\}$ . Il s'ensuit que, pour chaque  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in k\langle T \rangle$  on a

$$*) \quad \left\| b_0 1 + b_1 \frac{\pi_1}{z - a_1} + \dots + b_{n-1} \frac{\pi_{n-1}}{z - a_{n-1}} \right\| = \max_{0 \leq i < n} \|b_i\|.$$

Nous voulons démontrer que  $\{1, \frac{\pi_1}{z - a_1}, \dots, \frac{\pi_{n-1}}{z - a_{n-1}}\}$  est une base de  $\mathcal{O}(F)$  sur  $k\langle T \rangle$ . On montre facilement (par récurrence sur  $m$ ) que chaque  $(\frac{\pi_i}{z - a_i})^m$  est une combinaison  $K\langle T \rangle$ -linéaire de  $\{1, \frac{\pi_1}{z - a_1}, \dots, \frac{\pi_{n-1}}{z - a_{n-1}}\}$ . Chaque élément  $f$  de  $\mathcal{O}(F)$  est de la forme  $\lambda + \sum_{i=1}^n \sum_{m > 0} \lambda_{i,m} (\frac{\pi_i}{z - a_i})^m$  avec  $\lim |\lambda_{i,m}| = 0$ .

En utilisant \*) on trouve que cette somme infinie est aussi une combinaison linéaire de  $\{1, \frac{\pi_1}{z - a_1}, \dots, \frac{\pi_{n-1}}{z - a_{n-1}}\}$ .

3) On va montrer que  $\mathcal{O}(F)$  est intégralement clos. Soit  $a$  un élément de l'anneau total des fractions  $M$  de  $\mathcal{O}(F)$ . Supposons que  $a$  soit entier sur  $\mathcal{O}(F)$ .

Soit  $\mathfrak{B}$  l'idéal  $\{b \in \mathcal{O}(F) \mid ab \in \mathcal{O}(F)\}$ . Si l'idéal  $\mathfrak{B}$  est propre, alors  $\mathfrak{B}$  est contenu dans un idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $\mathcal{O}(F)$ . L'anneau  $\mathcal{O}(F)_{\mathfrak{M}}$  est local noethérien, sans nilpotents, et son idéal maximal est (d'après (1)) engendré par un seul élément. L'anneau  $\mathcal{O}(F)_{\mathfrak{M}}$  est donc un anneau de valuation discrète et en particulier  $\mathcal{O}(F)_{\mathfrak{M}}$  est intégralement clos. Donc  $a \in \mathcal{O}(F)_{\mathfrak{M}}$  et il existe  $b \in \mathcal{O}(F) - \mathfrak{M}$  avec  $ba \in \mathcal{O}(F)$ . Cela est une contradiction.

4) On montre maintenant que  $\mathcal{O}(F)$  est intègre. Soit  $L$  le corps des fractions de  $k\langle T \rangle$  et soit  $M$  l'anneau total des fractions de  $\mathcal{O}(F)$ . D'après 2),  $M$  est une extension de degré  $n$  de  $L$ . On décompose  $M$  comme somme directe de corps  $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ . Si  $s > 1$ , l'élément  $e = (1, 0 \dots 0) \in M_1 \oplus \dots \oplus M_s = M$  est entier sur  $\mathcal{O}(F)$  et d'après 3) on a  $e \in \mathcal{O}(F)$ . Posons :

$$F_1 = \{x \in F \mid |e(x)| = 1\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{x \in F \mid |e(x)| \leq |\pi|\}$$

où  $\pi \in k^*$  et  $0 < |\pi| < 1$ .

Clairement  $F$  est la réunion disjointe de  $F_1$  et  $F_2$ . Les ensembles  $F_1$  et  $F_2$  ne changent pas si on remplace  $e$  par une fonction rationnelle assez proche. D'après l'exercice I.1.2 du chapitre I cela montre que  $F_1$  et  $F_2$  sont des affinoides de  $\mathbb{P}^1$  au sens du chapitre I. Cela contredit que  $F$  est connexe. Donc  $s = 1$  et  $\mathcal{O}(F)$  est intègre.

5) On veut montrer qu'un  $f \in \mathcal{O}(F)$ ,  $f \neq 0$ , n'a qu'un nombre fini de zéros. L'équation irréductible unitaire  $X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_0$  de  $f$  sur le corps  $L$  a ses coefficients dans  $k\langle T \rangle$  parce que  $k\langle T \rangle$  est intégralement clos. Un zéro de  $f$  correspond à un idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $\mathcal{O}(F)$  tel que l'idéal maximal  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cap k\langle T \rangle$  contienne  $a_0$  (N. Bourbaki, Algèbre commutative, chap. V, §.2, n o 1, prop. 1 et 2 [6]). Le nombre des  $\mathfrak{M}'$  qui contiennent  $a_0$  est fini

parce que  $a_o$  n'a qu'un nombre fini de zéros. Comme l'extension  $k \langle T \rangle \rightarrow \mathcal{O}(F)$  est fini, il suit que le cardinal de  $\{ \mathfrak{M} \subset \mathcal{O}(F) \mid \mathfrak{M} \text{ maximal ; } f \notin \mathfrak{M} \}$  est fini.

6) Il s'ensuit de 5) et de 1) que l'anneau  $\mathcal{O}(F)$  est principal.

REMARQUE. - Rappelons la réciproque de ce théorème : soit  $A$  une algèbre affinoïde qui est un anneau principal ; alors il existe un affinoïde connexe  $F$  de  $\mathbb{P}^1(K)$  tel que  $A$  soit isomorphe à  $\mathcal{O}(F)$  ([44]).

(II 4.14). - L'espace affinoïde est un sous-ensemble de  $(K^\circ)^n$

On prend toujours  $k = K$  (algébriquement clos et complet). Soit  $\mathfrak{A} = (f_1, \dots, f_s)$  un idéal de  $T_n = K \langle z_1, \dots, z_n \rangle$  égal à son radical (i.e.  $f^2 \in \mathfrak{A}$  implique  $f \in \mathfrak{A}$ ), soit  $A = T_n / \mathfrak{A}$  (qui est réduite) et  $X = \text{Sp}(A)$ . Alors l'application  $x \mapsto (z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x))$  définit un homéomorphisme de  $X$  sur

$$\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (K^\circ)^n \mid f_j(x) = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq s \}.$$

Alors l'objet de II.5 et II.6 sera de répondre aux questions suivantes :

- si  $f \in T_n$  est nul sur  $X \hookrightarrow (K^\circ)^n$ , est-ce que  $f \in \mathfrak{A}$  ?
- est-ce que  $A$  est le complété pour la norme spectrale des fonctions rationnelles en  $z_1, \dots, z_n$  sans pôles sur  $X$  ?
- est-ce que la (semi-) norme spectrale sur  $A$  est équivalente à la norme induite par  $T_n \longrightarrow A$  ?

Les réponses à ces questions sont essentiellement contenues dans le théorème II.6.1.



## II. 5. - Propriétés de la (semi-) norme spectrale

(II. 5. 1) . - Soit  $N$  un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique,  $\hat{N}$  le complété de  $N$ ,  $N_1$  la clôture algébrique de  $\hat{N}$  muni de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de  $\hat{N}$ . Soit

$P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in N[X]$  . Alors

$$\max_i \sqrt{|a_i|} = \max \{ |\alpha| \mid \alpha \in N_1 \text{ racine de } P \} .$$

DÉMONSTRATION. - On écrit  $P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$  où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in N_1$  sont les racines de  $P$  . Supposons que  $|\alpha_1| = \max |\alpha_i|$  et posons  $X = \alpha_1 Y$  . Alors

$$(Y-1) \left( Y - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \dots \left( Y - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right) = Y^n + \frac{a_1}{\alpha_1} Y^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{\alpha_1^n} .$$

Et on voit aussitôt que

$$\max_i \left| \frac{a_i}{\alpha_1^i} \right| = 1 \quad \text{c.à.d. que} \quad \max_i \sqrt{|a_i|} = |\alpha_1| .$$

(II. 5. 2) . - Soit  $M$  une extension finie de  $N$  et  $f$  un élément de  $M$ , racine d'un polynôme irréductible  $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in N[X]$  sur  $N$ . Soient  $v_1, \dots, v_s$  les extensions à  $M$  de la valeur absolue de  $N$ . Alors :

$$\max_i \sqrt{|a_i|} = \max_{1 \leq j \leq s} v_j(f) .$$

DÉMONSTRATION. - On peut supposer  $M = N(f)$  . Chaque extension  $v$  sur  $M$  de la valeur absolue de  $N$  est obtenue par un morphisme  $N$ -linéaire de  $M$  dans  $N_1$  , (= la clôture algébrique de  $\hat{N}$ ) . Un tel morphisme correspond à un choix d'une racine de  $P$  dans  $N_1$  .

Alors  $\max_{1 \leq j \leq s} v_j(f) = \max \{ |\alpha| \mid \alpha \in N_1, \alpha \text{ racine de } P \}$  et (1) achève la démonstration.

(II. 5. 3). - Soit  $A$  une algèbre affine de sans diviseurs de zéro.  
Soit  $T_d \hookrightarrow A$  un morphisme injectif et fini. Alors chaque élément  
 $f \in A$  satisfait un polynôme irréductible  $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_0$  à  
coefficients dans  $T_d$ . En plus  $\|f\|_{sp} = \max_i \sqrt[i]{\|a_i\|}$  et il existe un  
 $x \in \text{Sp}(A)$  avec  $|f(x)| = \|f\|_{sp}$ . En particulier,  $\|f\|_{sp} \in \sqrt[k^*]{|k^*|}$ .

DÉMONSTRATION. - Le polynôme irréductible  $P$  de  $f$  sur le corps  
des fractions de  $T_d$  a ses coefficients dans  $T_d$  parce que  $T_d$  est un  
anneau factoriel, donc intégralement clos. Pour chaque  $y \in \text{Sp}(T_d)$  et  
chaque racine  $\lambda$  de  $X^n + a_1(y)X^{n-1} + \dots + a_n(y)$  il existe un  
 $x \in \text{Sp}(A)$  avec  $x \cap T_d = y$  et  $f(x) = \lambda$ . Alors :

$$\|f\|_{sp} = \max_{y \in \text{Sp}(T_d)} \left( \max_i \sqrt[i]{|a_i(y)|} \right) = \max_i \sqrt[i]{\|a_i\|}.$$

Il existe un  $y$  avec  $\max_i \sqrt[i]{|a_i(y)|} = \max_i \sqrt[i]{\|a_i\|}$  et (1) achève la  
démonstration.

(II. 5. 4) COROLLAIRE. - Soit  $A$  une algèbre affine. Alors le ra-  
dicale de  $A$  est égal au nilradical de  $A$ . Ainsi la semi-norme spectrale  
est une norme si et seulement si  $A$  est une algèbre réduite.

DÉMONSTRATION. - Supposons d'abord que  $A$  soit une algèbre intègre.  
Soit  $f$  un élément du radical de  $A$ , i.e.  $\|f\|_{sp} = 0$ , alors II. 5. 3  
montre que  $f$  est nilpotent, donc nul. Dans le cas général, soient  
 $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$  les idéaux premiers minimaux de  $A$  (ils sont en nombre  
fini puisque  $A$  est noethérien). Comme le radical de  $A/\mathfrak{P}_i$  est nul,  
il suit que  $\text{radical}(A) \subset \mathfrak{P}_i$ . Donc le radical est égal au nilradical.

(II. 5. 5). - Soit  $\varphi : T_d \hookrightarrow A$  injectif et fini. Alors  $\varphi(T_d^\circ) \subset A^\circ$   
et  $A^\circ$  est entier sur  $\varphi(T_d^\circ)$ . Il en résulte que  $A^\circ = \{f \in A \mid \sup_n \|f^n\| < \infty\}$ ,  
où  $\|\cdot\|$  est une norme de Banach sur  $A$ .

DÉMONSTRATION. - Il est clair que  $\varphi(T_d^\circ) \subset A^\circ$  (II. 4. 10). Soient  
 $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$  les idéaux premiers minimaux de  $A$ ,  $\psi$  l'homomorphisme  
canonique de  $A$  dans  $\bigoplus_{i=1}^s A/\mathfrak{P}_i$ .

Il est immédiat que

$$\|a\|_{\text{sp}} = \max_i \|\varphi_i(a)\|_{\text{sp}}$$

où  $\varphi_i$  est la surjection canonique de  $A$  sur  $A/\mathfrak{P}_i$ .

Soit  $\mathfrak{U} = \ker \varphi_i \cap T_d$ , ainsi  $A/\mathfrak{P}_i$  est fini sur  $T_d/\mathfrak{U}$ . D'après la démonstration (II.3.4), il existe un entier  $e \leq d$  et un automorphisme  $\sigma$  de  $T_d$  tel que  $T_e \xrightarrow{\subset} T_d \xrightarrow{\sigma} T_d/\sigma(\mathfrak{U})$  soit injectif et fini. Ainsi  $\sigma^{-1}(T_e) \xrightarrow{\subset} T_d \xrightarrow{\sigma} T_d/\mathfrak{U} \xrightarrow{\subset} A/\mathfrak{P}_i$  est injectif fini. Il suit de (II.5.3) que  $(A/\mathfrak{P}_i)^\circ$  est entier sur  $(\sigma^{-1}(T_e))^\circ$ . Or comme  $(\sigma^{-1}(T_e))^\circ \subset T_d^\circ$ , on trouve que  $(A/\mathfrak{P}_i)^\circ$  est entier sur  $\varphi_i(T_d^\circ)$ . On en déduit facilement que  $A^\circ$  est entier sur  $\varphi(T_d^\circ)$ .

Choisissons sur  $A$  une norme de Banach telle que sa restriction à  $T_d$  soit la norme spectrale de  $T_d$  (II.4.8). Comme  $f \in A^\circ$  satisfait une équation  $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  sur  $T_d^\circ$ , on a :

$$\sup_{m \geq 0} \|f^m\| = \max(1, \|f\|, \dots, \|f^{n-1}\|).$$

D'autre part,  $\sup_m \|f^m\| < \infty$  implique  $\sup_m \|f^m\|_{\text{sp}} < \infty$  et comme  $\|f^m\|_{\text{sp}} = \|f\|_{\text{sp}}^m$  on trouve  $\|f\|_{\text{sp}} \leq 1$ .

(II.5.6). - La semi-norme spectrale  $\|\cdot\|_{\text{sp}}$  sur une algèbre affinoïde satisfait :  $\|a\|_{\text{sp}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$ .

DÉMONSTRATION. - Conséquence élémentaire de (II.5.5).

(II.5.7). - Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un morphisme d'algèbres affinoïdes sur  $k$ . Alors  $\varphi$  admet un prolongement  $\psi : A\langle X_1, \dots, X_s \rangle \rightarrow B$  avec  $\psi(X_i) = b_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) si et seulement si  $b_1, \dots, b_s \in B^\circ$ . Si ces conditions sont réalisées, alors  $\psi$  est unique.

DÉMONSTRATION. - Si  $\psi$  existe, on a  $\psi(A\langle X_1, \dots, X_s \rangle^\circ) \subset B^\circ$  et alors  $b_1, \dots, b_s \in B^\circ$  puisque  $X_i \in A\langle X_1, \dots, X_s \rangle^\circ$  (II.5.5). D'autre part, si  $b_1, \dots, b_s \in B^\circ$  alors (II.5.5) montre que

$$\sup_{n_1, \dots, n_s} (\|b_1^{n_1} \dots b_s^{n_s}\|) < \infty. \text{ Ainsi l'application}$$

$\psi : \sum a_\alpha X^\alpha \longrightarrow \sum \varphi(a_\alpha) b^\alpha$  est bien définie. L'application  $\psi$  avec  $\psi(X_1) = b_1$  est unique parce que  $\psi$  est continue (II. 3. 7).

(II. 5. 8) .- EXERCICE. - Soient  $\rho > 0$  et  $A$  l'algèbre des séries  $\sum a_n z^n$  avec  $a_n \in K$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \rho^n = 0$ . Montrer que

$\text{Sp}(A) \simeq \{x \in K \mid |x| \leq \rho\}$ . Montrer que  $A$  est une algèbre affinofde si et seulement si  $\rho \in |K^\times|$  (on suppose  $K$  algébriquement clos). Montrer que  $A$  est un anneau principal.

## II. 6. - Extensions entières d'algèbres affinofdes

(II. 6. 1) THÉORÈME. - Soit  $A$  une algèbre affinofde réduite sur  $k$ . Alors  $A$  possède les propriétés suivantes :

1) La clôture intégrale de  $A$  dans son anneau total de fractions est un  $A$ -module de type fini.

2) Toute norme de Banach sur  $A$  est équivalente à la norme spectrale.

DÉMONSTRATION. - 1) Puisque  $A$  est un anneau noëthérien, les idéaux premiers minimaux de  $A$  sont en nombre fini. Soient

$\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$  ces idéaux. Puisque  $A$  est réduit, l'application canonique de  $A$  dans  $\bigoplus_{i=1}^s A/\mathfrak{P}_i$  est injective et  $\bigoplus_{i=1}^s A/\mathfrak{P}_i$  s'injecte canoniquement dans l'anneau total des fractions de  $A$  (N. Bourbaki, Algèbre commutative, chap. IV, §. 2, n° 5, prop. 10, [6]). Ainsi la clôture

intégrale  $A^\eta$  de  $A$  dans son anneau total des fractions est

$\bigoplus_{i=1}^s (A/\mathfrak{P}_i)^\eta$  si  $(A/\mathfrak{P}_i)^\eta$  désigne la clôture intégrale de  $A/\mathfrak{P}_i$  dans son corps de fractions (N. Bourbaki, algèbre commutative, chap. V, §. 1, n° 2, prop. 9, corol. 1, [6]). Il suffit donc de démontrer 1)

lorsque  $A$  est intègre. Nous allons faire la démonstration dans le cas particulier où  $[k : k^p] < \infty$  si la caractéristique de  $k$  est  $p > 0$  et sans restriction si  $\text{car}(k) = 0$  :

Nous considérons la situation  $T_d \xrightarrow{\text{fini}} A$  avec  $A$  intègre.

Soient  $N_0$  (resp.  $N_1$ ) le corps des fractions de  $T_d$  (resp.  $A$ ). Il existe un entier  $a$  (si  $\text{car}(k) = p > 0$ ) et une extension galoisienne finie  $N_2$  de  $N_0^{1/p^a}$  telle que  $N_1 \subset N_2$ . Il est clair que  $k^{1/p^a} \langle z_1^{1/p^a}, \dots, z_d^{1/p^a} \rangle$  est la clôture intégrale de  $T_d$  dans  $N_0^{1/p^a}$ , c'est un  $T_d$ -module de type fini (puisque  $[k : k^p] < \infty$ ). Puisque  $N_2$  est séparable fini sur  $N_0^{1/p^a}$  et  $k^{1/p^a} \langle z_1^{1/p^a}, \dots, z_d^{1/p^a} \rangle$  intégralement clos, il suit que la clôture intégrale  $B$  de  $T_d$  dans  $N_2$  est un  $k^{1/p^a} \langle z_1^{1/p^a}, \dots, z_d^{1/p^a} \rangle$ -module de type fini (N. Bourbaki, Algèbre commutative, chap. V, §.1, n° 6, prop. 18, [6]). Comme  $T_d$  est noethérien et que  $A \subset B$ , la clôture intégrale de  $A$  dans son corps de fractions est un  $T_d$ -module de type fini.

2) Soient toujours  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_s$  les idéaux premiers minimaux de  $A$  et  $i$  l'injection canonique de  $A$  dans  $\bigoplus_{i=1}^s A/\mathfrak{P}_i$ . Alors  $i$  est une isométrie pour les normes spectrales : si  $i(a) = a_1 + \dots + a_s$  avec  $a_i \in A/\mathfrak{P}_i$ , alors on a :

$$\|a\|_{\text{sp}} = \max_i \|a_i\|_{\text{sp}}.$$

Soit  $\|\cdot\|$  une norme de Banach sur  $A$ , c'est-à-dire une norme telle que  $(A, \|\cdot\|)$  soit une algèbre de Banach. Alors  $\|\cdot\|$  induit sur  $A/\mathfrak{P}_i$  une norme  $\|\cdot\|_i$  d'algèbre de Banach et  $\bigoplus_{i=1}^s A/\mathfrak{P}_i$  est un  $A$ -module de Banach pour la norme

$$\|\Sigma a_i\|' = \max_i \|a_i\|_i.$$

Puisque  $i(A)$  est un sous- $A$ -module de  $\bigoplus_{i=1}^s A/\mathfrak{P}_i$  il est fermé (II.3.8) ainsi  $i$  est un homéomorphisme de  $A$  sur  $i(A)$  pour les normes respectives  $\|\cdot\|$  et  $\max_i \|\cdot\|_i$ . Il suffit donc de démontrer 2) lorsque  $A$  est intègre.

Considérons la situation  $T_d \xrightarrow{\text{fini}} A$ ,  $A$  intègre. Soient  $N_0$  (resp.  $N_1$ ) le corps des fractions de  $T_d$  (resp.  $A$ ). Comme pour 1) il existe un entier  $a$  (lorsque  $\text{car}(k) = p > 0$ ) et  $N_2$  galoisien fini sur  $N_0^{1/p^a}$  tel que  $N_1 \subset N_2$ . La clôture intégrale  $B$  de  $T_d$  dans

$N_2$  est finie sur  $T_d$  (toujours sous l'hypothèse  $[k:k^p] < \infty$ ). Ainsi donc  $B$  est fini sur  $T_d^{1/p^a} \simeq T_d(k^{1/p^a})$ . Il suit alors du lemme II. 6. 2 ci-après, que toute norme  $\| \cdot \|$  de Banach sur  $B$  est équivalente à la norme spectrale. Donc la restriction de  $\| \cdot \|$  à  $T_d$  est équivalente à la norme spectrale de  $T_d$  (c'est-à-dire la norme de  $T_d$ ). Il suit que  $B$  est un  $T_d$ -module de Banach de type fini, ainsi le lemme II. 3. 8. montre que  $A$  est fermé pour  $\| \cdot \|$ . Donc  $\| \cdot \|$  est une norme de Banach sur  $A$  et elle est équivalente à la norme spectrale. Et comme toutes les normes de Banach sur  $A$  sont équivalentes, il suit que 2) est démontré.

(II. 6. 2) LEMME. - Soit  $B$  une algèbre affinofde intègre finie sur  $T_d$  telle que le corps des fractions de  $B$  soit une extension séparable du corps des fractions de  $T_d$ . Alors toute norme de Banach sur  $B$  est équivalente à la norme spectrale.

DÉMONSTRATION. - Soient  $N_0$  (resp.  $N_1$ ) le corps des fractions de  $T_d$  (resp.  $B$ ). Il existe  $\theta \in B$  tel que  $\|\theta\|_{sp} \leq 1$  et  $N_1 = N_0(\theta)$ . Soit  $\text{Tr}$  la trace de  $N_1$  sur  $N_0$ . Soit  $b \in B$ , alors  $\|\text{Tr}(b)\|_{sp} \leq \|b\|_{sp}$  : en effet, le polynôme irréductible de  $b$  sur  $N_0$  est de la forme  $a_0 + a_1 X + \dots + a_{s-1} X^{s-1} + X^s$  où  $a_i \in T_d$  ; il existe un entier  $n$  tel que  $\text{Tr}(b) = n a_{s-1}$ , il suit alors de II. 5. 3 que  $\|a_{s-1}\|_{sp} \leq \|b\|_{sp}$ . On a donc  $\text{Tr}(B^\circ) \subset T_d^\circ$ .

Soit  $f(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_{r-1} X^{r-1} + X^r$  le polynôme irréductible de  $\theta$  sur  $N_0$ , on a  $b_i \in T_d$  puisque  $T_d$  est intégralement clos et  $b_i \in T_d^\circ$  puisque  $\|\theta\|_{sp} \leq 1$  (d'après II. 5. 3, II. 5. 5). Soit  $(e_i)_{0 \leq i < r}$  la base duale de  $(\theta^i)_{0 \leq i < r}$  par rapport à la forme bilinéaire  $(x, y) \mapsto \text{Tr}(xy)$ , on sait que  $e_i \in \frac{1}{f'(\theta)} T_d^\circ[\theta]$  ([54], J.-P. Serre, corps locaux, chap. III, §. 6, prop. 11).

Soit  $\| \cdot \|$  une norme de Banach sur  $B$  telle que sa restriction à  $T_d$  soit la norme de  $T_d$  (II. 4. 8), alors la restriction de  $\| \cdot \|$  à  $A$  est une norme de Banach de  $A$  (II. 4. 9).

De l'inclusion  $f'(\theta)B^\circ \subset T_d^\circ[\theta]$  il suit qu'il existe  $c_1 > 0$  tel que pour tout  $b \in B$  on ait :

$$c_1 \|f'(\theta)b\| \leq \|b\|_{sp},$$

(il suffit de prendre  $c_1^{-1} = \max_{0 \leq i < r} \|\theta^i\|$ ).

L'application linéaire  $b \mapsto f'(\theta)b$  de  $B$  sur  $f'(\theta)B$  est bijective et continue pour  $\|\cdot\|$ . Comme  $f'(\theta)B$  est un idéal de  $B$  il est fermé (II. 3. 3), ainsi le théorème de Banach dit que  $b \mapsto f'(\theta)b$  est bicontinu. Il existe donc  $c_2 > 0$  tel que pour tout  $b \in B$  on ait :

$$c_2 \|f'(\theta)b\| \leq \|b\|.$$

Il s'ensuit que

$$c_1 c_2 \|b\| \leq \|b\|_{sp}.$$

Ce qui prouve que  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_{sp}$  sont équivalentes.

(II. 6. 3) REMARQUE. - Pour la démonstration dans le cas général, on peut lire [17], [18].

(II. 6. 4). - Si la valuation de  $k$  est discrète, l'anneau  $k^\circ$  est noethérien et on peut démontrer que  $k^\circ \langle z_1, \dots, z_{n-1} \rangle$  est également noethérien (II. 8. 10). Soit  $B \supset T_{n-1}^\circ$  une algèbre affinofde finie sur  $T_{n-1}^\circ$ . Alors on peut montrer que  $B^\circ$  est un  $T_{n-1}^\circ$ -module de type fini (il suffit de reprendre la démonstration de (II. 6. 2)).

Pour une valuation non-discrète,  $B^\circ$  n'est pas en général un  $T_{n-1}^\circ$ -module de type fini. Par contre, si on suppose en plus que  $k$  est algébriquement clos,  $B^\circ$  reste un  $T_{n-1}^\circ$ -module de type fini (voir [27]). Dans (II. 6. 8) nous reprenons la discussion de ce résultat.

(II. 6. 5). - Les algèbres affinofdes ont d'autres propriétés agréables. Elles sont en fait des anneaux excellents [5]. En particulier, une algèbre affinofde satisfait la condition universelle sur les chaînes d'idéaux premiers. La démonstration est simple. Par récurrence,

on montre que chaque  $T_n$  est un anneau régulier et possède alors cette propriété d'idéaux premiers. Une algèbre affinofde est une algèbre résiduelle d'un  $T_n$  et hérite cette propriété.

A l'aide du module des différentielles (voir (II.7)) on montre que le "lieu singulier" d'une algèbre affinofde est fermé (pour la topologie de Zariski sur le spectre premier de l'algèbre affinofde).

(II.6.7). - Rappelons quelques notations. Soit  $A$  une algèbre affinofde sur  $k$ , on note  $A^\circ = \{f \in A \mid \|f\|_{sp} \leq 1\}$ ,  $A^{\circ\circ} = \{f \in A \mid \|f\|_{sp} < 1\}$  et  $\bar{A} = A^\circ / A^{\circ\circ}$  qui est une  $\bar{k}$ -algèbre.

Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'algèbres affinofdes, alors on a  $\varphi(A^\circ) \subset B^\circ$  et  $\varphi(A^{\circ\circ}) \subset B^{\circ\circ}$  (II.4.3), il s'ensuit que  $\varphi$  induit un homomorphisme  $\bar{\varphi}$  de  $\bar{A}$  dans  $\bar{B}$ . Notons  $\varphi^\circ$  le morphisme de  $A^\circ$  dans  $B^\circ$  induit par  $\varphi$ . La réduction des espaces analytiques fera intervenir les algèbres  $\bar{A}$ , aussi le théorème qui suit est-il essentiel pour la suite.

**THÉORÈME.** - Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'algèbres affinofdes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $\varphi : A \rightarrow B$  est fini ;
- 2)  $\varphi^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$  est entier ;
- 3)  $\bar{\varphi} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$  est fini.

**DÉMONSTRATION.** - Il est facile de vérifier qu'il suffit de montrer le théorème lorsque  $A = T_d$  et  $\varphi$  injectif.

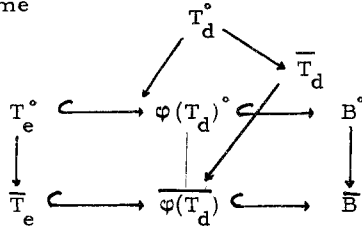
Alors 1)  $\Rightarrow$  2) n'est autre que (II.5.5)

Montrons 2)  $\Rightarrow$  3). Soient  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_s$  les idéaux premiers minimaux de  $B$ . On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 T_d & \hookrightarrow & B & \longrightarrow & \bigoplus B/\mathfrak{P}_i \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 T_d^\circ & \hookrightarrow & B^\circ & \longrightarrow & \bigoplus (B/\mathfrak{P}_i)^\circ \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{T}_d & \hookrightarrow & \bar{B} & \longrightarrow & \bigoplus \overline{(B/\mathfrak{P}_i)}
 \end{array}$$



Il suffit donc de considérer la situation  $\varphi : T_d \rightarrow B$  avec  $B$  intègre. Il existe  $e \leq d$  tel que  $T_e \hookrightarrow \varphi(T_d) \hookrightarrow B$  avec  $B$  fini sur  $T_e$ . On a donc le diagramme

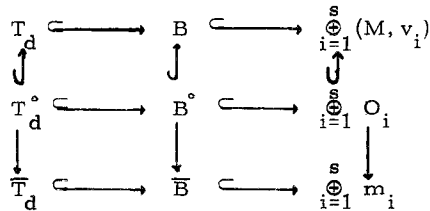


On a bien  $B^\circ$  entier sur  $T_e^\circ$ . Ainsi  $\overline{B}$  fini sur  $\overline{T}_e$  implique  $\overline{B}$  fini sur  $\overline{T}_d$ . Il suffit donc de considérer la situation  $T_d \hookrightarrow B$  avec  $B$  intègre.

La norme sur  $T_d$  définit une valeur absolue  $v$  sur son corps de fractions  $L$ , soient  $M$  le corps de fractions de  $B$  (qui est de dimension finie sur  $L$ ) et  $v_1, \dots, v_s$  les prolongements de  $v$  à  $M$ . Alors on a :

$$\|b\|_{sp} = \max_{1 \leq i \leq s} v_i(b) \quad (\text{II.5.2) et (II.5.3)}.$$

On a donc le diagramme suivant :



où  $O_i$  est l'anneau de valuation de  $(M, v_i)$  et  $m_i$  le corps résiduel de  $(M, v_i)$ . Comme le corps des fractions de  $\overline{T}_d$  ( $\simeq \overline{k}(z_1, \dots, z_d)$ ) est le corps résiduel de  $L$ , il suit que  $m_i$  est de dimension finie sur  $\overline{k}(z_1, \dots, z_d)$ . On sait que la clôture intégrale de  $\overline{k}[z_1, \dots, z_d]$  dans une extension finie de  $\overline{k}(z_1, \dots, z_d)$  est finie sur  $\overline{k}[z_1, \dots, z_d]$  ([6], N. Bourbaki, Algèbre commutative, chap. 5, §.3, n°2, th. 2). En conséquence,  $\overline{B}$  est fini sur  $\overline{T}_d$ , ce qui achève la démonstration de 2)  $\Rightarrow$  3).

Montrons 3)  $\Rightarrow$  1). Supposons  $\bar{\varphi} : \bar{T}_d \longrightarrow \bar{B}$  fini. Comme B est un quotient de  $k\langle z_1, \dots, z_n \rangle$ , soient  $b_1, \dots, b_n$  les images de  $z_1, \dots, z_n$ , on a  $b_i \in B^\circ$ . Il existe un homomorphisme  $\varphi_n$  de  $T_d\langle X_1, \dots, X_n \rangle$  dans B tel que  $\varphi_n|_{T_d} = \bar{\varphi}$  et  $\varphi_n(X_i) = b_i$  (II. 5. 7), il suit de la définition des  $b_i$  que  $\varphi_n$  est surjectif. L'élément  $\bar{b}_n$  satisfait une équation  $X^e + \bar{a}_1 X^{e-1} + \dots + a_e = 0$  avec  $a_i \in T_d^\circ$ . Donc  $p = b_n^e + a_1 b_n^{e-1} + \dots + a_e \in B^{\circ\circ}$  et une puissance  $p^f$  de p est l'image d'un élément  $q \in T_d\langle X_1, \dots, X_n \rangle$  avec  $\|q\| < 1$ . Le noyau de  $\varphi_n$  contient l'élément  $(X_n^e + a_1 X_n^{e-1} + \dots + a_e) - q$  qui est régulier en  $X_n$  (dans  $T_d\langle X_1, \dots, X_n \rangle \simeq T_{d+n}$ ). Le théorème de division (II. 2) montre que B est fini sur  $\varphi_n(T_d\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle)$ . Un raisonnement par récurrence sur n montre alors que B est fini sur  $T_d$ .

(II. 6. 8) COROLLAIRE. - Soit A une algèbre affinofde. Alors  $\bar{A}$  est une k-algèbre de type fini.

(II. 6. 9) EXEMPLE. - Une extension finie  $\ell$  de k peut être considérée comme morphisme  $k \rightarrow \ell$  d'algèbres affinofdes sur k. Supposons que la valuation de k ne soit pas discrète. et que  $k^\circ \rightarrow \ell^\circ$  soit fini, alors  $\ell^\circ$  est un  $k^\circ$ -module libre, ce qui implique  $[\ell : k] = [\bar{\ell} : \bar{k}]$ .

On peut deviner maintenant le résultat suivant :

(II. 6. 10) THÉORÈME. - Soit k un corps valué complet satisfaisant l'une des deux propriétés suivantes :

- 1) k est de valuation discrète,
- 2) k est de valuation dense et pour toute extension finie  $\ell$ , on a  $[\bar{\ell} : \bar{k}] = [\ell : k]$ .

Alors pour chaque morphisme fini  $\varphi : A \rightarrow B$  entre deux algèbres affinofdes sur k, le morphisme induit  $\varphi^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$  est aussi fini.

REMARQUE. - La démonstration de ce résultat est délicate.

Voir [21] pour une démonstration dans les cas : car  $k = 0$   
ou car  $k = p$  et  $[k : k^p] < \infty$  (voir aussi II. 8.10 pour le cas 1)).

## II. 7. - Module différentiel d'une algèbre affinofde

Nous supposons dans ce paragraphe que le corps  $k$  soit parfait  
(i. e.  $k^p = k$  si  $\text{car}(k) = p > 0$ ).

DÉFINITION. - Soient  $A$  une algèbre affinofde,  $M$  un  $A$ -module.  
Une dérivation  $D$  de  $A$  dans  $M$  est une application  $k$ -linéaire telle  
que  $D(ab) = aD(b) + bD(a)$  pour tout  $a, b \in A$ .

(II. 7.1) LEMME. - Soient  $A = \frac{k\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle}{\mathfrak{U}}$  une algèbre affinofde,  
s la surjection de  $k\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle$  sur  $A$ ,  $M$  un  $A$ -module de  
type fini et  $D$  une dérivation de  $A$  dans  $M$ . Alors  $D$  est déterminé  
par les  $D(s(z_i))$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

DÉMONSTRATION. - Il faut démontrer que  $D(s(z_i)) = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$   
implique que  $D = 0$ . Chaque idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $A$  est engendré  
par des polynômes en  $z_1, z_2, \dots, z_n$  (II. 3.11). Comme  $D$  est nulle  
sur les polynômes en  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , on trouve  $D(A) \subset \mathfrak{M}^n M$  pour  
chaque idéal  $\mathfrak{M}$  et  $n \geq 1$ . La conclusion résulte alors du lemme II.3.10.

Définition du module différentiel  $A \xrightarrow{d} \Omega_{A/k}^f$

Soit toujours  $A = \frac{k\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle}{\mathfrak{U}} = s(k\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle)$ .

Soit  $V$  le sous- $A$ -module de  $A^n$  engendré par

$$\left\{ \left( s\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right), s\left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right), \dots, s\left(\frac{\partial F}{\partial z_n}\right) \right) \in A^n \mid F \in \mathfrak{U} \right\}.$$

Alors le  $A$ -module  $A^n/V$  s'appelle le module différentiel de type  
fini de  $A$  sur  $k$  et se note  $\Omega_{A/k}^f$ . Il existe une application  $k$ -li-  
néaire  $d$  de  $A$  dans  $\Omega_{A/k}^f$  telle que

$$d(s(F)) = t\left(s\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right), s\left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right), \dots, s\left(\frac{\partial F}{\partial z_n}\right)\right)$$

où  $t$  est la surjection canonique de  $A^n$  sur  $\Omega_{A/k}^f$ . Il est facile de vérifier que  $d$  est une dérivation et que  $\Omega_{A/k}^f$  est le  $A$ -module engendré par  $d(A)$ .

Le lemme (II. 7. 1) permet alors de montrer que  $(d, \Omega_{A/k}^f)$  vérifie la propriété universelle suivante :

(II. 7. 2) COROLLAIRE. - Pour chaque dérivation  $D$  de  $A$  dans un  $A$ -module de type fini  $M$ , il existe une application  $A$ -linéaire unique  $\iota$  de  $\Omega_{A/k}^f$  dans  $M$  telle que  $D = \iota \circ d$ .

REMARQUES. - Le corollaire (II. 7. 2) montre que la description de  $\Omega_{A/k}^f$  ne dépend pas de la représentation  $A = k\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle / \mathfrak{A}$  choisie.

En caractéristique  $p \neq 0$ ,  $A$  est un  $A^p$ -module de type fini. Pour toute dérivation  $D : A \rightarrow M$ , le  $A$ -module engendré par  $D(A)$  est de type fini sur  $A^p$ . Il s'ensuit que  $\Omega_{A/k}^f$  est le module différentiel universel de  $A/k$ .

En revanche, si la caractéristique de  $k$  est nulle, on peut montrer qu'il existe des  $k$ -dérivations  $D : A \rightarrow M$  telles que  $D(A)$  ne soit pas contenu dans un  $A$ -module de type fini. Ainsi  $\Omega_{A/k}^f$  n'est pas le module différentiel universel si  $\text{car}(k) = 0$  et si  $A$  est de dimension de Krull non nulle.

(II. 7. 3) PROPOSITION. - Soient (pour simplifier)  $A$  une algèbre affinoïde sans diviseurs de zéro et  $\text{Qt}(A)$  le corps des fractions de  $A$ .

(1)  $\dim_{\text{Qt}(A)} \Omega_{A/k}^f \otimes_A \text{Qt}(A) = d = \text{dimension de Krull de } A$ .

(2) Soit  $\mathfrak{M}$  un idéal maximal de  $A$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

a)  $\mathfrak{M}$  est un idéal régulier (i. e.  $A_{\mathfrak{M}}$  est un anneau local régulier, i. e.  $\dim_{A/\mathfrak{M}} \mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_1^2 = \text{dimension de Krull de } A_{\mathfrak{M}}$  où  $\mathfrak{M}_1$  est le maximal de  $A_{\mathfrak{M}}$ ) ;

- b)  $(\Omega_{A/k}^f)_{\mathfrak{M}}$  est un  $A_{\mathfrak{M}}$ -module libre (de rang  $d$ ) ;
- c)  $\dim_{A/\mathfrak{M}} \Omega_{A/k}^f / \mathfrak{M} \Omega_{A/k}^f = d$  ;
- d) si  $A = \frac{k\langle z_1, \dots, z_n \rangle}{(F_1, F_2, \dots, F_s)} = s(k\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle)$  .

Il existe un  $(n-d) \times (n-d)$ -mineur  $\Delta$  de la matrice

$$\begin{pmatrix} s\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\right) & \dots & s\left(\frac{\partial F_s}{\partial z_1}\right) \\ s\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\right) & \dots & s\left(\frac{\partial F_s}{\partial z_2}\right) \\ \vdots & & \\ s\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_n}\right) & \dots & s\left(\frac{\partial F_s}{\partial z_n}\right) \end{pmatrix}$$

tels que  $\Delta \notin \mathfrak{M}$  .

On conclut de (2) que le "lieu singulier" d'une algèbre affinofde est fermé. C'est-à-dire

$$\{\mathfrak{M} \in \text{Sp}(A) \mid A_{\mathfrak{M}} \text{ n'est pas régulier}\} = \{\mathfrak{M} \in \text{Sp}(A) \mid \mathfrak{M} \supset \mathfrak{B}\}$$

pour un idéal  $\mathfrak{B}$  convenable de  $A$  .

Avec les techniques de modules différentiels on montre (entre autre) que les algèbres affinofdes sont des anneaux excellents (Berger, Kunz, Kiehl, Nastold) [5] .

## II. 8. - Un exemple, l'algèbre $k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$

L'objet de ce paragraphe est de montrer que l'algèbre des fonctions holomorphes sur un produit de disques et de circonférences est un anneau factoriel. Ce résultat sera essentiellement utilisé au chapitre VI pour construire les fonctions méromorphes d'un tore analytique. L'outil est la mise en place d'un théorème de préparation et de division.

(II. 8.1). - La norme de  $k\langle X, Y, Y^{-1}\rangle$

(II. 8.2) LEMME. - Soient  $A$  un anneau,  $s$  la surjection canonique  
de  $A[Y_1, \dots, Y_m, S_1, \dots, S_m]$  (noté aussi  $A[Y, S]$ ) sur  
 $A[Y_1, \dots, Y_m, S_1, \dots, S_m] / (1 - Y_1 S_1, \dots, 1 - Y_m S_m)$  (noté aussi  
 $A[Y_1, \dots, Y_m, Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1}]$ ) ou encore  $A[Y, Y^{-1}]$ . Alors la res-  
triction de  $s$  à  $(\bigoplus_{\nu} A Y^{\nu}) \oplus (\bigoplus_{\mu \neq 0} A S^{\mu})$  est bijective.

DÉMONSTRATION. - Clairement  $s((\bigoplus_{\nu} A Y^{\nu}) \oplus (\bigoplus_{\mu \neq 0} A S^{\mu})) = A[Y, Y^{-1}]$ .

Montrons que la restriction de  $s$  est injective. On considère d'abord le cas  $m = 1$ . On a donc

$$\sum_{\nu} a_{\nu} Y_1^{\nu} + \sum_{\mu \neq 0} b_{\mu} S_1^{\mu} = (1 - Y_1 S_1) f_1(Y, S).$$

en regardant les termes homogènes des deux côtés, on aboutit au fait que  $a_{\nu} = 0 = b_{\mu}$  pour tout  $\nu$  et  $\mu$ .

Soit  $m \geq 2$ , considérons l'égalité

$$(*) \quad \sum_{\nu} a_{\nu} Y^{\nu} + \sum_{\mu \neq 0} b_{\mu} S^{\mu} = \sum_{i=1}^m (1 - Y_i S_i) f_i.$$

Posons  $Y_2 = Y_3 \dots = Y_m = S_2 = S_3 \dots = S_m = 1$ . Ainsi (\*) devient

$$a_0, \dots, a_0 + \sum_{i>0} c_i Y_1^i + \sum_{j>0} d_j S_1^j = (1 - Y_1 S_1) g,$$

ainsi le cas  $m = 1$  implique  $a_0, a_0, \dots, a_0 = 0$ .

De plus, il est facile de vérifier que

$$\sum_{\nu} a_{\nu} Y^{\nu} S^{\nu_0} + \sum_{\mu \neq 0} b_{\mu} S^{\mu + \nu_0} = \sum_{\nu} a'_{\nu} Y^{\nu} + \sum_{\mu \neq 0} b'_{\mu} S^{\mu} + \sum_{i=1}^m (1 - Y_i S_i) g_i$$

avec  $a'_{0,0}, \dots, a'_{0,0} = a_{\nu_0}$ , ainsi le cas précédent montre que  $a_{\nu_0} = 0$ .

On montrerait de même que  $b_{\mu} = 0$  pour tout  $\mu$ . Ce qui montre le lemme.

Considérons maintenant la version analytique du lemme II. 8. 2.

(II. 8. 3) LEMME. - Soient  $A$  une algèbre de Banach,  $s$  la surjection canonique de  $A\langle Y_1, \dots, Y_m, S_1, \dots, S_m \rangle$  (noté aussi  $A\langle Y, S \rangle$ ) sur  $A\langle Y_1, \dots, Y_m, S_1, \dots, S_m \rangle / (1 - Y_1 S_1, 1 - Y_2 S_2, \dots, 1 - Y_m S_m)$  (noté aussi  $A\langle Y_1, \dots, Y_m, Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1} \rangle$ ) et aussi  $A\langle Y, Y^{-1} \rangle$ . Soient

$$B^+ = \{ x \in A\langle Y, S \rangle \mid x = \sum_{\nu} a_{\nu} Y^{\nu}, a_{\nu} \in A \text{ et } a_{\nu} \rightarrow 0 \}$$

$$B^- = \{ x \in A\langle Y, S \rangle \mid x = \sum_{\mu \neq 0} b_{\mu} S^{\mu}, b_{\mu} \in A \text{ et } b_{\mu} \rightarrow 0 \} .$$

Alors la restriction de  $s$  à  $B^+ \oplus B^-$  est bijective et isométrique.

DÉMONSTRATION. - Soit  $f(Y, S) \in A\langle Y, S \rangle$ , alors  $f$  se décompose sous la forme

$$f(Y, S) = \sum_{\nu} a_{\nu} Y^{\nu} + \sum_{\mu \neq 0} b_{\mu} S^{\mu} + \sum_{i=1}^m (1 - Y_i S_i) f_i$$

avec

$$\max \{ \| a_{\nu} \|, \| b_{\mu} \|, \| f_i \| \} \leq \| f \| .$$

Montrons la première partie du lemme pour  $m = 1$ . Considérons une égalité

$$\sum_{\nu} a_{\nu} Y_1^{\nu} + \sum_{\mu \neq 0} b_{\mu} S_1^{\mu} = (1 - Y_1 S_1) f_1 .$$

On peut supposer que  $1 = \max \{ \| a_{\nu} \|, \| b_{\mu} \|, \| f_1 \| \}$ . On considère l'image de cette égalité dans  $\overline{A\langle Y, S \rangle}$  et comme

$\| (1 - S_1 Y_1) f_1 \| = \| f_1 \|$  on aboutit en utilisant le lemme II. 8. 2 à une contradiction. Donc  $a_{\nu} = b_{\mu} = 0$  pour tout  $\nu$  et  $\mu$ .

Soit maintenant  $m \geq 2$ , considérons l'égalité

$$\sum_{\nu} a_{\nu} Y^{\nu} + \sum_{\mu \neq 0} b_{\mu} S^{\mu} = \sum (1 - Y_i S_i) f_i .$$

Alors en multipliant par  $S_1^0$ , en posant  $Y_2 = \dots = Y_m = S_2 = \dots = S_m = 1$  et en utilisant ce qui précède, on montre donc que  $a_{\nu} = 0$ . Ce qui prouve que  $a_{\nu} = b_{\mu} = 0$  pour tout  $\nu$  et  $\mu$ .

Il suit alors clairement de la décomposition (\*) que

$$\| s(f(Y, S)) \| = \max_{\nu, \mu} \{ \| a_{\nu} \|, \| b_{\mu} \| \} .$$

COROLLAIRE. - Soit A une algèbre de Banach. Alors l'algèbre  
 $A \langle Y, Y^{-1} \rangle$  est isomorphe à l'algèbre  $\bar{A}[Y, Y^{-1}]$ . De plus, si  $\bar{A}$  est intègre, alors  $A \langle Y, Y^{-1} \rangle$  est intègre.

Le spectre de  $k \langle X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m, Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1} \rangle$   
 (k algébriquement clos)

Il est facile de montrer que le spectre de  $A \langle Y_1, \dots, Y_m, Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1} \rangle$   
 s'identifie à  $\text{Sp}(A) \times C^m$  où  $C = \{z \in k \mid |z| = 1\}$  et plus particulièrement on a

$$\text{Sp}(k \langle X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m, Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1} \rangle) \simeq D^n \times C^m$$

avec  $D = \{z \in k \mid |z| \leq 1\}$ . C'est pourquoi l'on dit que  $k \langle X, Y, Y^{-1} \rangle$   
 est l'algèbre des fonctions holomorphes sur un produit de disques et  
 de circonférences.

(II. 8. 4) . - Lemme de préparation et de division dans  $k \langle X, Y, Y^{-1} \rangle$

Comme pour  $k \langle X \rangle$  où l'on montre d'abord un lemme de pré-  
 paration et de division dans  $k \langle X, Y, Y^{-1} \rangle = \bar{k}[X, Y, Y^{-1}]$ . Ce lemme  
 se "relèvera" alors à  $k \langle X, Y, Y^{-1} \rangle$  comme dans le cas de  $k \langle X \rangle$ .

(II. 8. 5) LEMME. - Soient A un anneau,

$f(Y) \in A[Y_1, \dots, Y_m, Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1}]$ , tel que  $f \neq 0$ .

i) Alors il existe un A-automorphisme  $\sigma$  de  $A[Y, Y^{-1}]$  tel que

$$\sigma(f(Y)) = u_0 Y_0^{\beta_0} Y_m^{\alpha_0} + u_1 Y_1^{\beta_1} Y_m^{\alpha_1} + \dots + u_k Y_k^{\beta_k} Y_m^{\alpha_k}$$

avec :

$$u_i \in A, u_i \neq 0 \text{ et } Y_i^{\beta_i} = Y_1^{\beta_1^i} Y_2^{\beta_2^i} \dots Y_{m-1}^{\beta_{m-1}^i} \quad \alpha_i, \beta_i^j \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k.$$

ii) Soient  $m \geq 2, N \geq 1$ , alors il existe un A-automorphisme  $\sigma'$   
de  $A[Y, Y^{-1}]$  tel que

$$\sigma' \left( \sum_{i=0}^k u_i Y_i^{\beta_i} Y_m^{\alpha_i} \right) = \sum_{i=0}^k u_i Y_i^{\beta_i'} Y_m^{\alpha_i'} \text{ avec } \alpha_{i+1}' - \alpha_i' > N.$$



DÉMONSTRATION. - Soient  $F$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^m$ ,

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in F$ , alors il existe  $N_1, N_2, \dots, N_{m-1} \in \mathbb{Z}$  tels que l'application  $s : \alpha \mapsto N_1 \alpha_1 + \dots + N_{m-1} \alpha_{m-1} + \alpha_m$  soit injective sur  $F$ .

Soit  $\sigma$  le  $A$ -automorphisme de  $A[Y, Y^{-1}]$  défini par

$$\sigma(Y_j) = Y_j \text{ pour } j \neq m \text{ et } \sigma(Y_m) = Y_1^{N_1} Y_2^{N_2} \dots Y_{m-1}^{N_{m-1}} Y_m.$$

Soit maintenant

$$f(Y) = \sum_{\alpha \in F} u_\alpha Y^\alpha, \quad u_\alpha \neq 0, \quad u_\alpha \in A \text{ et } Y^\alpha = Y_1^{\alpha_1} \dots Y_m^{\alpha_m}.$$

Il est alors clair que  $\sigma(f(Y))$  a la forme voulue.

Montrons ii). Soit  $\sigma'$  le  $A$ -automorphisme de  $A[Y, Y^{-1}]$  défini par

$$\sigma'(Y_1) = Y_1 Y_m^c, \quad \sigma'(Y_m) = Y_1^c Y_m^{c+1} \text{ et } \sigma'(Y_i) = Y_i \text{ pour } i \neq 1, m.$$

Clairement  $\sigma'$  convient si l'on choisit  $c$  assez grand.

DÉFINITION. - On dit que  $f(X, Y) \in k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m, Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1}]$  et biunitaire en  $Y_m$  si

$$f(X, Y) = \sum_{i=0}^k u_i Y_m^{\alpha_i}, \quad \text{avec } \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k,$$

$u_i \in k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{m-1}, Y_1^{-1}, \dots, Y_{m-1}^{-1}]$ ,  $u_0$  et  $u_k$  sont inversibles dans l'anneau  $k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{m-1}, Y_1^{-1}, \dots, Y_{m-1}^{-1}]$ .

(II. 8. 6) LEMME. - Soient  $k$  un corps,  $f_1, \dots, f_r \in k[X, Y_m, Y_m^{-1}]$ . Alors il existe un  $k[Y_m, Y_m^{-1}]$  -automorphisme de  $k[X, Y_m, Y_m^{-1}]$  tel que  $f_1, f_2, \dots, f_r$  soient biunitaires en  $Y_m$ .

DÉMONSTRATION. - Il suffit de considérer l'automorphisme  $\sigma$  défini par

$$\sigma(X_i) = X_i + Y_m^{c_i} + Y_m^{-c_i} \text{ et } \sigma(Y_m) = Y_m.$$

(II. 8. 7) LEMME (de préparation et de division)

i) Soient  $k$  un corps,  $f(X, Y) \in k[X, Y, Y^{-1}]$ . Alors il existe un  
 $k$ -automorphisme  $\sigma$  de  $k[X, Y, Y^{-1}]$  tel que  $\sigma(f(X, Y))$  soit bi-  
unitaire en  $Y_m$ .

ii) Soient  $A$  un anneau,  $f, g \in A[Y_m, Y_m^{-1}]$ ,  $g = \sum_{i=0}^k u_i Y_m^{\alpha_i}$  avec  
 $\alpha_0 < \alpha_1 \dots < \alpha_k$ ,  $u_i \in A$  et  $u_0, u_k \in A^\times$ . Alors il existe  
 $q, r \in A[Y_m, Y_m^{-1}]$  uniques tels que

$$f = q \cdot g + r, \quad r \in A[Y_m] \quad \text{et} \quad d^\circ r < \alpha_k - \alpha_0.$$

DÉMONSTRATION. - L'affirmation i) est conséquence des lemmes II. 8. 5 et II. 8. 6, quant à ii), la preuve est élémentaire.

Nous pouvons maintenant donner la version analytique du lemme II. 8. 7.

(II. 8. 8) LEMME (de préparation et de division). - Soit  $k$  un corps  
valué complet.

i) Soit  $f(X, Y) \in k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$  avec  $\|f\| = 1$ . Alors il existe un  
 $k$ -automorphisme  $\sigma$  de  $k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$  tel que  $\sigma(f(X, Y))$  soit bi-  
unitaire en  $Y_m$  dans l'anneau  
 $\bar{k}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{m-1}, Y_1^{-1}, \dots, Y_{m-1}^{-1}][Y_m, Y_m^{-1}]$ .

ii) Soient  $f, g \in k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$  tels que  $\|g\| = 1$  et que  
 $\bar{g}(X, Y) = u_0 Y_m^{\alpha_0} + \dots + u_k Y_m^{\alpha_k}$ , avec  $\alpha_0 < \dots < \alpha_k$ ,  
 $u_i \in \bar{k}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{m-1}, Y_1^{-1}, \dots, Y_{m-1}^{-1}]$  et  $u_0, u_k$  inversibles.  
Alors il existe  $q, r \in k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$  uniques tels que :

$$f = q \cdot g + r, \quad r \in k\langle X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{m-1}, Y_1^{-1}, \dots, Y_{m-1}^{-1} \rangle [Y_n^{-1}],$$

$$d_{Y_m}^\circ(r) < \alpha_k - \alpha_0 \quad \text{et} \quad \|f\| = \max(\|q\|, \|r\|).$$

DÉMONSTRATION. - Pour montrer i) il suffit de relever l'automorphisme défini par II. 8. 7, i). Pour la preuve de ii) on utilise II. 8. 7, ii) et on copie II. 2 (1).

Une conséquence importante est le théorème suivant qui sera utilisé au chapitre VI.

(II. 8. 9) THÉORÈME. - Soit  $k$  un corps valué complet. Alors l'anneau  $k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$  est factoriel.

DÉMONSTRATION. - L'anneau  $k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$  est intègre d'après le corollaire du lemme II. 8. 3 et il suffit de copier la preuve de II. 3. 2.

(II. 8.10) EXERCICE (si  $k$  est de valuation discrète  $Cl(\bar{A}) = 0$  implique  $Cl(A) = 0$ ).

Soit  $k$  un corps muni d'une valuation discrète,  $V$  son anneau de valuation,  $\pi V$  son idéal maximal.

1°) On souhaite démontrer que  $V\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$  est un anneau noethérien. On prendra comme hypothèse de récurrence que  $V\langle T_1, T_2, \dots, T_{n-1} \rangle$  est noethérien. Soit  $\mathfrak{U}$  un idéal de  $V\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$ .

a) Montrer qu'il existe un entier  $s \geq 0$  tel que

$$\pi^{-s}\mathfrak{U} \subset V\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle \text{ et } f \in \pi^{-s}\mathfrak{U} \text{ tel que } \|f\| = 1.$$

b) Soit  $f \in \pi^{-s}\mathfrak{U}$  tel que  $\|f\| = 1$ . Montrer qu'il existe un automorphisme  $\sigma$  de  $V\langle T_1, \dots, T_n \rangle$  et  $u \in V\langle T_1, \dots, T_n \rangle^{\times}$  tels que

$$u \cdot \sigma(f) = T_n^d + a_{d-1}(T_1, \dots, T_{n-1})T_n^{d-1} + \dots + a_0(T_1, \dots, T_{n-1})$$

où  $a_i \in V\langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$  (utiliser en II. 2 et II. 3. 2).

c) En déduire que  $V\langle T_1, \dots, T_n \rangle / (\sigma(f))$  est un  $V\langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$ -module libre de rang  $d$ .

d) En conclure que  $\sigma(\pi^{-s}\mathfrak{U}) / (\sigma(f))$  est de type fini et donc que  $\mathfrak{U}$  est de type fini.

e) Conclure que  $V\langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle$  est noethérien.

2°) Soit  $A$  une  $k$ -algèbre affinoïde, montrer que  $A^\circ$  est un  $T_d^\circ$ -module de type fini pour un certain  $d$  et que  $A^\circ$  est une algèbre noethérienne (selon le procédé de II. 6. 1, on se ramène au cas où  $A$  est une algèbre intègre  $B$  finie sur  $T_d$ , ensuite l'inclusion  $f(\theta)B^\circ \subset T_d^\circ$  de II. 6. 2 montre le résultat).

3°) Soit  $A$  une  $k$ -algèbre affinoïde.

a) Soit  $M$  un  $A^\circ$ -module projectif de rang 1. Montrer que  $\bar{M} = M \otimes_A \bar{A}$  est un  $\bar{A}$ -module projectif de rang 1 où  $\bar{A} = A^\circ/\pi A^\circ$ .

b) Montrer que  $\bar{M} = \bar{A} \bar{m}_0$  pour un  $m_0 \in M$  implique que  $M = A m_0$ .

c) Soit  $N$  un  $A$ -module projectif. Alors  $N \oplus N^r = A^r$  pour certain  $N^r$  et  $r > 0$ . Montrer qu'il existe un  $A^\circ$ -module projectif  $M$  avec  $N \simeq M \otimes A$  et  $N$  et  $M$  ont le même rang.

d) Montrer que  $Cl(A^\circ) \simeq Cl(\bar{A})$  où  $Cl(B)$  désigne les classes d'isomorphismes de  $B$ -modules projectifs de rang 1.

4°) Soit  $A$  une  $k$ -algèbre affinoïde telle que  $\bar{A} = A^\circ/\pi A^\circ$  soit une algèbre régulière.

a) Montrer que  $A^\circ$  et  $A$  sont aussi régulières. (Chaque idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $A^\circ$  contient  $\pi$  et  $\mathfrak{M}/\pi \mathfrak{M}$  est un idéal maximal de  $\bar{A}$ .)

b) Montrer à l'aide de 3°) et de III. 8.3 que  $Cl(\bar{A}) = 0$  implique que  $A^\circ$  est factoriel.

c) Montrer que  $A$  est factoriel et que  $Cl(A) = 0$ .

d) Montrer que l'anneau  $k\langle X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m, Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1} \rangle$  est factoriel.

e) Utiliser H. Bass, Algebraic K-theory, p. 144 (7.17) [65], pour montrer que  $A$  régulière et  $Cl(\bar{A}) = 0$  implique  $Cl(A) = 0$ .

CHAPITRE III : ESPACES ANALYTIQUES SUR  $k$

- III. 1. - Les ensembles rationnels
- III. 2. - Topologie de Grothendieck, faisceau structural
- III. 3. - Espaces analytiques
- III. 4. - Exemples
- III. 5. - Faisceaux sur un espace analytique - Exemples
- III. 6. - Faisceaux cohérents sur un espace analytique
- III. 7. - Le faisceau des fonctions méromorphes
- III. 8. - Faisceaux localement libres

Ce chapitre est dévolu à la définition de l'espace analytique et à l'étude de quelques faisceaux importants sur un espace analytique. Un espace analytique est défini par recollement d'espaces analytiques affinoïdes. Un espace analytique affinoïde est construit à partir d'un espace affinoïde (II. 4. 1) sur lequel on définit une topologie de Grothendieck et un faisceau (structural)  $\mathcal{O}$ . Enfin on met en place cette topologie et ce faisceau à l'aide d'affinoïdes particuliers : les ensembles rationnels.

III. 1. - Les ensembles rationnels

Dans ce paragraphe III. 1,  $A$  désigne une algèbre affinoïde et  $X = \text{Sp}(A)$  est l'ensemble des idéaux maximaux de  $A$ .

(III. 1. 1) DÉFINITION. - Un sous-ensemble  $R$  de  $X$  est dit rationnel (dans  $X$ ) s'il existe  $f_0, f_1, \dots, f_n \in A$  tels que

$$R = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq |f_0(x)| \text{ pour tout } 0 \leq i \leq n\}$$

et  $A = f_0 A + f_1 A + \dots + f_n A$ .

On associe à  $R$  l'algèbre affinofde

$$B = A \langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle / (f_1 - T_1 f_0, \dots, f_n - T_n f_0) .$$

Alors l'homomorphisme canonique  $\varphi$  de  $A$  dans  $B$  induit un homéomorphisme  $\text{Sp}(\varphi)$  de  $\text{Sp}(B)$  sur  $R \subset \text{Sp}(A)$ . L'algèbre  $B$  vérifie la propriété universelle suivante :

(III.1.2) LEMME. - Soit  $\psi$  un homomorphisme de  $A$  dans  $C$  (algèbre affinofde) tel que  $\text{Sp}(\psi)(\text{Sp}(C)) \subset R$ . Alors il existe un homomorphisme unique  $\tau$  de  $B$  dans  $C$  tel que  $\psi = \tau \circ \varphi$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & C \\ \varphi \downarrow & \searrow \tau & \\ B & & \end{array}$$

DÉMONSTRATION. - On a  $f_0(x) \neq 0$  pour tout  $x \in R$  puisque  $f_0, f_1, \dots, f_n$  n'ont pas de zéros communs, ainsi  $\psi(f_0)$  n'a pas de zéro dans  $\text{Sp}(C)$ , il s'ensuit que  $\psi(f_0)$  est inversible dans  $C$  (II.4.5). De plus on a pour tout  $z \in \text{Sp}(C)$   $|\psi(f_0)(z)| \geq |\psi(f_i)(z)|$ . Ainsi :

$$\frac{\psi(f_1)}{\psi(f_0)}, \dots, \frac{\psi(f_n)}{\psi(f_0)} \in C^\circ .$$

Il existe donc une application unique  $\tau_1$  de  $A \langle T_1, \dots, T_n \rangle$  dans  $C$  telle que  $\tau_1|_A = \psi$  et  $\tau_1(T_i) = \frac{\psi(f_i)}{\psi(f_0)}$ . Clairement,

$\ker \tau_1 \supset (f_1 - f_0 T_1, \dots, f_n - f_0 T_n)$ , ainsi il existe un homomorphisme  $\tau$  de  $B$  dans  $C$  avec  $\tau \circ \varphi = \psi$ . Montrons l'unicité, soit  $\tau'$  de  $B$  dans  $C$  satisfaisant (III.1.2). Alors  $\tau'$  définit canoniquement un homomorphisme  $\tau'_1$  de  $A \langle T_1, \dots, T_n \rangle$  dans  $C$  tel que  $\tau'_1|_A = \psi$  et  $\tau'_1(f_i - f_0 T_i) = 0$ . Ainsi  $\tau'_1(T_i) = \psi(f_i) / \psi(f_0)$  et l'unicité de (II.5.7) montre que  $\tau_1 = \tau'_1$ , donc  $\tau = \tau'$ .

Le lemme III.1.2 montre en particulier que l'algèbre

$$B = \frac{A \langle T_1, \dots, T_n \rangle}{(f_1 - f_0 T_1, \dots, f_n - f_0 T_n)}$$
 associée à l'ensemble rationnel (dans  $X$ )

$R$  ne dépend pas du choix de  $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ . Cette algèbre  $B$  sera notée  $\mathcal{O}_X(R)$  ou plus brièvement  $\mathcal{O}(R)$  s'il n'y a pas de confusion possible).

(III.1.3) LEMME. - 1) Soient  $R_1$  et  $R_2$  rationnels (dans  $X$ ),  
alors  $R_1 \cap R_2$  est rationnel (dans  $X$ ) et

$$\mathcal{O}_X(R_1 \cap R_2) = \mathcal{O}_X(R_1) \hat{\otimes}_A \mathcal{O}_X(R_2).$$

2) Soient  $R_1 \subset R_2 \subset X$ ,  $R_2$  rationnel dans  $X$  et  $R_1$  rationnel  
dans  $R_2$ . Alors  $R_1$  est rationnel dans  $X$ .

DÉMONSTRATION. - 1) Soient :

$$R_1 = \{x \in X \mid |f_0(x)| \geq |f_i(x)|, 0 \leq i \leq n\} \quad \text{et} \quad A = (f_0, \dots, f_n),$$

$$R_2 = \{x \in X \mid |g_0(x)| \geq |g_j(x)|, 0 \leq j \leq m\} \quad \text{et} \quad A = (g_0, \dots, g_m).$$

Alors il est facile de vérifier que

$$R_1 \cap R_2 = \{x \in X \mid |f_0(x) \cdot g_0(x)| \geq |f_i(x) \cdot g_j(x)| \text{ pour } 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

et  $A = \sum_{i,j} f_i g_j A$ . Ainsi  $R_1 \cap R_2$  est rationnel.

La deuxième partie de 1) résulte des isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(R_1) \hat{\otimes}_A \mathcal{O}_X(R_2) &= \frac{A \langle T_1, \dots, T_n \rangle}{(f_1 - f_0 T_1, \dots, f_n - f_0 T_n)} \hat{\otimes}_A \frac{A \langle S_1, \dots, S_m \rangle}{(g_1 - g_0 S_1, \dots, g_m - g_0 S_m)} \\ &\simeq \frac{A \langle T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m \rangle}{(f_1 - f_0 T_1, \dots, f_n - f_0 T_n, g_1 - g_0 S_1, \dots, g_m - g_0 S_m)} \simeq \frac{A \langle \dots, U_{ij}, \dots \rangle}{(\dots, f_i g_j - U_{ij} f_0 g_0, \dots)} \simeq \mathcal{O}_X(R_1 \cap R_2). \end{aligned}$$

2) Soient :

$$R_2 = \{x \in X \mid |g_0(x)| \geq |g_j(x)| \text{ pour } 0 \leq j \leq m\} \quad \text{et} \quad A = \sum_j A g_j$$

$$R_1 = \{x \in R_2 \mid |f_0(x)| \geq |f_i(x)| \text{ pour } 0 \leq i \leq n\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_X(R_2) = \sum_i \mathcal{O}_X(R_2) f_i.$$

Les éléments  $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{O}_X(R_2) = \frac{A \langle S_1, \dots, S_m \rangle}{(g_1 - g_0 S_1, \dots, g_m - g_0 S_m)}$  peuvent être

remplacés par  $f'_0, \dots, f'_n$  si  $\|f'_i - f_i\|$  est assez petit. Nous pouvons

donc supposer que  $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{O}_X(R_2)$  sont images de

$h_0, \dots, h_n \in A[S_1, \dots, S_m]$  de degré total majoré par  $N$ . Ainsi

$g_0^N f_0, \dots, g_0^N f_n \in A$  et nous pouvons supposer que  $f_0, \dots, f_n \in A$ .

Pour des constantes convenables  $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in k^*$  et pour tout  $x \in R_1$  on a

$$|f_0(x)| \geq |\lambda_j g_j(x)| \quad 0 \leq j \leq m.$$

Alors  $R_1 = R_2 \cap R_3$  où

$$R_3 = \{x \in X \mid |f_0(x)| \geq |f_i(x)|, 0 \leq i \leq n \text{ et } |f_0(x)| \geq |\lambda_j g_j(x)|, 0 \leq j \leq m\}.$$

Il est clair que  $R_3$  est rationnel dans  $X$ , ainsi  $R_1$  est rationnel dans  $X$  d'après 1).

### III. 2. - Topologie de Grothendieck, faisceau structural

(III. 2.1) DÉFINITIONS. - Soient  $A$  une algèbre affinofde,  $X = \text{Sp}(A)$ . On définit sur l'espace topologique  $X$  (II. 4.1) une topologie de Grothendieck. Les sous-ensembles admissibles de  $X$  sont les sous-ensembles rationnels de  $X$ , les recouvrements admissibles sont les recouvrements finis. Le lemme III. 1. 3 montre que ces données définissent sur  $X$  une topologie de Grothendieck (I. 4.1).

On a sur  $X$  (muni de la topologie de Grothendieck précédente) un (pré-) faisceau défini par  $R \mapsto \mathcal{O}_X(R)$  où l'algèbre  $\mathcal{O}_X(R)$  a été définie en III. 1. 2. Si  $R_1 \subset R_2 \subset X$ , le lemme III. 1. 2 définit l'homomorphisme de  $\mathcal{O}_X(R_2)$  dans  $\mathcal{O}_X(R_1)$ .

Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini, on définit sur  $X$  un (pré-) faisceau noté  $\tilde{M}$  ou  $M^\sim$  par  $\tilde{M}(R) = \mathcal{O}_X(R) \otimes_A M$ .

Le paragraphe qui suit montre en particulier que  $\mathcal{O}_X$  et  $\tilde{M}$  sont des faisceaux.



### III. 2. 2. - Le théorème de Tate

(III. 2. 3) DÉFINITION. - Soient  $A$  une algèbre affinoïde,  $X = \text{Sp}(A)$ ,  $\mathfrak{F}$  un (pré-) faisceau sur  $X$ . Un recouvrement admissible  $\mathcal{U}$  de  $X$  est dit acyclique pour le (pré-) faisceau  $\mathfrak{F}$  si

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}(X) \quad \text{et} \quad \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{pour } i > 0.$$

Le théorème de Tate détermine la cohomologie du (pré-) faisceau  $\tilde{M}$ .

(III. 2. 2) THÉORÈME. - Soient  $A$  une algèbre affinoïde,  $M$  un A-module de type fini,  $X = \text{Sp}(A)$ . Alors tout recouvrement admissible  $\mathcal{U}$  de  $X$  est acyclique pour le (pré-) faisceau  $\tilde{M}$ .

La démonstration de ce théorème nécessite quelques lemmes et définitions. L'un de ces lemmes montre le théorème pour un recouvrement particulier à deux éléments, l'autre permettra de faire une démonstration par récurrence sur le nombre d'éléments du recouvrement.

(III. 2. 4) DÉFINITION. - Soient  $A$  une algèbre affinoïde,  $X = \text{Sp}(A)$ . Un recouvrement admissible  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  de  $X$  est appelé recouvrement standard s'il existe  $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$  tels que

$$A = f_1 A + f_2 A + \dots + f_n A \quad \text{et} \\ U_i = \{x \in X \mid |f_i(x)| \geq |f_j(x)| \quad 1 \leq j \leq n\} \quad 1 \leq i \leq n.$$

On notera un tel recouvrement  $\mathfrak{X}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ .

(III. 2. 5) LEMME. - Soit  $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  un recouvrement admissible de  $X = \text{Sp}(A)$ . Alors il existe un recouvrement standard plus fin que  $\mathcal{V}$

DÉMONSTRATION. - Il existe  $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_m^{(i)} \in A$  tels que

$$A = f_1^{(i)} A + f_2^{(i)} A + \dots + f_m^{(i)} A \quad \text{et}$$

$$V_i = \{x \in X \mid |f_1^{(i)}(x)| \geq |f_k^{(i)}(x)| \quad \text{pour } 1 \leq k \leq m\}.$$

Posons  $f_\alpha = f_{\alpha_1}^{(1)} f_{\alpha_2}^{(2)} \dots f_{\alpha_n}^{(n)}$  avec  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \{1, 2, \dots, m\}^n = I$ .

Clairement on a :

$$A = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha A.$$

Posons :

$$U_\alpha = \{x \in X \mid |f_\alpha(x)| \geq |f_\beta(x)| \quad \text{pour tout } \beta \in I\}.$$

Alors on a

$$V_i = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  parcourt les éléments de  $I$  tels que  $\alpha_i = 1$ .

En effet, si  $x \in V_i$  on a  $|f_1^{(i)}(x)| \geq |f_k^{(i)}(x)|$  pour  $1 \leq k \leq m$ . De plus, soit  $\alpha_j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tel que  $|f_{\alpha_j}^{(j)}(x)| = \max(|f_1^{(j)}(x)|, \dots, |f_m^{(j)}(x)|)$ .

Ainsi  $x \in U_\alpha$  avec  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ .

Notons  $J = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in I \mid \text{il existe } i \text{ avec } \alpha_i = 1\}$ . Le recouvrement  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  est un recouvrement plus fin que  $\mathcal{V}$ .

Nous avons donc montré qu'il existe  $g_1, g_2, \dots, g_t \in A$  et  $s \leq t$  tels que

$$A = g_1 A + \dots + g_t A \quad \text{et que}$$

$\mathcal{U}' = \{U'_1, U'_2, \dots, U'_s\}$  soit un recouvrement plus fin que  $\mathcal{V}$  avec

$$U'_i = \{x \in X \mid |g_1(x)| \geq |g_k(x)| \quad \text{pour } 1 \leq k \leq t\}.$$

Il nous reste donc à montrer que

$$\mathcal{U}' = \{U'_1, \dots, U'_s\} = \mathfrak{X}(g_1, g_2, \dots, g_s).$$

Nous avons la relation suivante : soient  $x \in X$ ,  $1 \leq k \leq t$ , alors :

$$(*) \quad |g_k(x)| \leq \max(|g_1(x)|, |g_2(x)|, \dots, |g_s(x)|).$$

En effet,  $x \in X = U'_1 \cup U'_2 \dots \cup U'_s$ , par exemple  $x \in U'_1$ .

Alors  $|g_1(x)| \geq |g_k(x)|$ , ce qui prouve (\*).

La relation (\*) implique aussi que

$$U_i = \{x \in X \mid |g_i(x)| \geq |g_k(x)| \quad 1 \leq k \leq s\}, \quad 1 \leq i \leq s.$$

De plus l'idéal engendré par  $g_1, \dots, g_s$  est  $A$ , sinon il est contenu dans un idéal maximal  $\mathfrak{x}$ . Ce qui montre que

$g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_s(x) = 0$  et (\*) montre que  $g_k(x) = 0$  pour  $1 \leq k \leq s$ , ce qui est impossible puisque

$$A = g_1 A + g_2 A + \dots + g_s A.$$

Montrons le théorème de Tate pour un recouvrement standard très simple.

(III. 2. 6) LEMME. - Soient  $A$  une algèbre affine,  $X = \text{Sp } A$ ,  $f \in A$ ,  $M$  un  $A$ -module de type fini et  $\{X_1, X_2\}$  le recouvrement suivant,  $X_1 = \{x \in X \mid |f(x)| \leq 1\}$ ,  $X_2 = \{x \in X \mid |f(x)| \geq 1\}$ . Alors nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \tilde{M}(X) \xrightarrow{\alpha} \tilde{M}(X_1) \oplus \tilde{M}(X_2) \xrightarrow{d} \tilde{M}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. - On a :

$$\mathcal{O}(X_1) = \frac{A \langle T \rangle}{(T-f)}, \quad \mathcal{O}(X_2) = \frac{A \langle S \rangle}{(1-fS)}, \quad \mathcal{O}(X_1 \cap X_2) = \frac{A \langle T, S \rangle}{(T-f, 1-fS)}.$$

Il est alors facile de vérifier que la suite suivante de  $A$ -modules est exacte :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \frac{A \langle T \rangle}{(T-f)} \oplus \frac{A \langle S \rangle}{(1-fS)} \xrightarrow{d} \frac{A \langle T, S \rangle}{(T-f, 1-fS)} \longrightarrow 0.$$

Soient  $t$  (resp.  $s$ ) l'image de  $T$  (resp.  $S$ ) dans  $A \langle T \rangle / (T-f)$  (resp.  $A \langle S \rangle / (1-fS)$ ). L'homomorphisme  $\delta$  de  $A$ -module de  $A \langle T, S \rangle$  dans  $A \langle T \rangle / (T-f) \oplus A \langle S \rangle / (1-fS)$  défini par

$$\delta(T^i S^j) = t^{i-j} \quad \text{si } i \geq j$$

$$\delta(T^i S^j) = s^{j-i} \quad \text{si } i < j$$

induit un homomorphisme sur  $A \langle T, S \rangle / (T-f, 1-fS)$  et montre que la suite (\*) est scindée. Ainsi cette suite reste exacte par tensorisation par  $M$ .

Si  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  est un recouvrement de  $X$ , si  $Y \subset X$  est admissible, on notera  $\mathcal{U} \cap Y$  le recouvrement  $\{U_1 \cap Y, U_2 \cap Y, \dots, U_n \cap Y\}$  de  $Y$ .

Le lemme qui suit permettra de montrer le théorème de Tate par récurrence.

(III. 2. 7) LEMME. - Soient  $\mathcal{U}$  un recouvrement standard de  $X = \text{Sp } A$ ,  $X_1$  et  $X_2$  définis comme dans le lemme III. 2. 6. Si  $\mathcal{U} \cap X_1$ ,  $\mathcal{U} \cap X_2$ ,  $\mathcal{U} \cap X_1 \cap X_2$  sont acycliques pour  $\tilde{M}$ , alors  $\mathcal{U}$  est acyclique pour  $\tilde{M}$ .

DÉMONSTRATION. - Pour  $U = U_{i_1} \cap U_{i_2} \dots \cap U_{i_k}$ , on a d'après le lemme III. 2. 6, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{M}(U) \longrightarrow \tilde{M}(U \cap X_1) \oplus \tilde{M}(U \cap X_2) \longrightarrow \tilde{M}(U \cap X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0.$$

Aussi les complexes de Čech forment une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{U}, \tilde{M}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{U} \cap X_1, \tilde{M}) \oplus \mathcal{C}(\mathcal{U} \cap X_2, \tilde{M}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{U} \cap X_1 \cap X_2, \tilde{M}) \longrightarrow 0.$$

La longue suite exacte de cohomologie termine la démonstration.

### Démonstration du théorème de Tate (III. 2. 2)

Le lemme III. 2. 5 montre qu'il suffit de vérifier le théorème pour les recouvrements standards. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de fonctions qui définissent le recouvrement standard en utilisant un argument combinatoire simple.

Partons de l'hypothèse de récurrence suivante :

$(h_{n-1})$  Soit  $Y = \text{Sp}(B)$ ,  $s \leq n-1$ . Alors tout recouvrement standard de  $Y$  de la forme  $\mathfrak{X}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s)$  est acyclique.

Clairement  $(h_1)$  est satisfait.

Soient  $X = \text{Sp}(A)$  et  $\mathfrak{X}(f_1, f_2, \dots, f_n)$  un recouvrement standard de  $X$ . Soient  $g_1, g_2, \dots, g_n \in A$  tels que

$$1 = g_1 f_1 + \dots + g_n f_n \text{ et}$$

$\pi \in k^x$  tel que

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x \in X}} |g_i(x)| < |\pi|^{-1}.$$

Il suit alors que

$$|\pi| < \inf_{x \in X} (\max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|).$$

Soit  $1 \leq s \leq n$ , posons :

$$Y_s = \{x \in X \mid |f_1(x)| \geq |\pi|, \dots, |f_s(x)| \geq |\pi|\}.$$

Considérons une deuxième hypothèse de récurrence

(h'\_s) Le recouvrement standard  $\mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n) \cap Y_s$ , de  $Y_s$ , pour  $s < s' \leq n$  est acyclique.

Montrons que  $(h'_s)$  implique  $(h'_{s-1})$ . Posons :

$$Y_s^- = \{x \in X \mid |f_1(x)| \geq |\pi|, \dots, |f_{s-1}(x)| \geq |\pi|, |f_s(x)| \leq |\pi|\}.$$

Remarquons d'abord que

$$Y_s^- \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n) = Y_s^- \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_{s-1}, f_{s+1}, \dots, f_n).$$

D'après la définition de  $\pi$  on a pour  $x \in Y_s^-$ ,  $|g_s(x) f_s(x)| < 1$ , ainsi  $1 - g_s f_s$  est inversible dans  $\mathcal{O}(Y_s^-)$  ce qui montre que

$$\mathcal{O}(Y_s^-) = f_1 \mathcal{O}(Y_s^-) + \dots + f_{s-1} \mathcal{O}(Y_s^-) + f_{s+1} \mathcal{O}(Y_s^-) + \dots + f_n \mathcal{O}(Y_s^-).$$

Ainsi  $Y_s^- \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n)$  est le recouvrement standard

$\mathfrak{X}(f_1|_{Y_s^-}, \dots, f_{s-1}|_{Y_s^-}, f_{s+1}|_{Y_s^-}, \dots, f_n|_{Y_s^-})$ . Alors l'hypothèse  $(h'_{n-1})$

montre que  $Y_s^- \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n)$  est acyclique. Le même argument

montre que  $Y_s \cap Y_s^- \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n)$  est acyclique. Le lemme III.2.7

montre que  $Y_{s-1} \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n)$  est acyclique, ce qui est  $(h'_{s-1})$ .

Et  $(h'_0)$  n'est autre que le théorème.

Il nous reste pour terminer à montrer que  $(h'_n)$  est satisfait.

Posons

$$Y'_n = \{ x \in Y_n \mid |f_1(x)| \geq |f_2(x)| \}$$

$$Y''_n = \{ x \in Y_n \mid |f_1(x)| \leq |f_2(x)| \} .$$

Il est clair que

$$Y'_n \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n) = \{U'_1, U'_2, \dots, U'_n\} \text{ avec } U'_2 \subset U'_1 \text{ et}$$

$$Y'_n \cap \mathfrak{X}(f_1, f_3, \dots, f_n) = \{U'_1, U'_3, \dots, U'_n\}, \text{ de même}$$

$$Y''_n \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n) = \{U''_1, U''_2, \dots, U''_n\} \text{ avec } U''_1 \subset U''_2 \text{ et}$$

$$Y''_n \cap \mathfrak{X}(f_2, \dots, f_n) = \{U''_2, \dots, U''_n\} .$$

L'hypothèse  $(h_{n-1})$  montre que les recouvrements

$\{U'_1, U'_3, \dots, U'_n\}$  et  $\{U''_2, \dots, U''_n\}$  sont acycliques. Il est alors

immédiat que  $Y'_n \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n)$  et  $Y''_n \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n)$  sont aussi

acycliques. Le même raisonnement montre que  $Y'_n \cap Y''_n \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n)$

est acyclique. Ainsi le lemme III. 2. 7 permet de conclure que

$Y_n \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n)$  est acyclique parce que  $f_1$  et  $f_2$  sont inversibles sur  $Y_n$ .

### III. 3. - Espaces analytiques

(III. 3. 1) DÉFINITION. - On appelle espace analytique affinoïde, le triplet  $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{O}_X)$  où  $X = \text{Sp}(A)$ ,  $A$  algèbre affinoïde,  $\mathcal{Q}$  est la topologie de Grothendieck,  $\mathcal{O}_X$  est le faisceau structural.

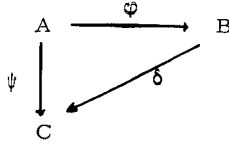
(III. 3. 2) DÉFINITION. - On appelle espace analytique (rigide), un triplet  $(X, \mathcal{Q}, \mathcal{O}_X)$  où  $X$  est un espace topologique,  $\mathcal{Q}$  est une topologie de Grothendieck sur  $X$  et  $\mathcal{O}_X$  est un faisceau ; en plus il existe un recouvrement admissible  $\{X_i\}_{i \in I}$  de  $X$  tel que pour tout  $i \in I$  le triplet  $(X_i, \mathcal{Q}|_{X_i}, \mathcal{O}_X|_{X_i})$  soit un espace analytique affinoïde.

(III. 3. 3) REMARQUE. - Signalons qu'on peut donner une autre topologie de Grothendieck sur un affinoïde  $X = \text{Sp}(A)$ . Un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  est appelé ouvert affinoïde de  $X$  s'il existe une algèbre affinoïde

B et un morphisme  $\varphi : A \rightarrow B$  possédant les propriétés suivantes :

1)  $\text{Sp}(\varphi)$  est un homéomorphisme de  $\text{Sp}(B)$  sur  $Y \subset X$  ;

2) si  $\psi$  est un morphisme de  $A$  dans  $C$  (algèbre affinofde) satisfaisant  $\text{im}(\text{Sp}(\psi)) \subset Y$ , alors il existe un morphisme unique  $\delta$  de  $B$  dans  $C$  tel que  $\psi = \delta \circ \varphi$



Cette propriété montre l'unicité de l'algèbre  $B$  que l'on note  $\mathcal{O}_X^!(Y)$ . Un sous-ensemble rationnel (dans  $X$ ) est donc un ouvert affinofde. On peut démontrer (H. Grauert, L. Gerritzen [19]) que  $Y$  est réunion finie de sous-ensembles rationnels  $X_1, X_2, \dots, X_s$  de  $X$ . Le théorème (III. 2. 2) montre alors que  $B$  est le noyau de l'homomorphisme  $\bigoplus \mathcal{O}_X(X_i) \rightarrow \bigoplus_{i < j} \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j)$ . Il en résulte que le faisceau  $\mathcal{O}_X$  détermine de façon unique le faisceau  $\mathcal{O}_X^!$ . C'est pourquoi les deux structures, définition par les ensembles rationnels ou par les ouverts affinofdes, sont essentiellement les mêmes.

### III. 3. 4. - Recollement des espaces analytiques affinofdes

Pratiquement on construit souvent un espace analytique à partir d'espaces analytiques affinofdes que l'on recolle.

Soit  $\{X_i\}$  une famille d'espaces analytiques affinofdes. Supposons que pour tout  $(i, j) \in I^2$  il existe  $X_{ij}$  (resp.  $X_{ji}$ ) un sous-ensemble rationnel de  $X_i$  (resp.  $X_j$ ) et  $\varphi_{j,i}$  un isomorphisme d'espace analytique affinofde de  $X_{ij}$  sur  $X_{ji}$  (les structures étant celles induites par  $X_i$ , resp.  $X_j$ ) satisfaisant aux propriétés suivantes

- 1)  $X_{ii} = X_i$  et  $\varphi_{ii} = \mathbb{1}_{X_i}$  pour tout  $i \in I$
- 2)  $\varphi_{ij}$  et  $\varphi_{ji}$  sont des isomorphismes réciproques pour tout  $i, j \in I$
- 3)  $\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$  sur  $X_{ij} \cap X_{ik}$  pour tout  $i, j, k \in I$

(il se peut que  $X_{ij} = \emptyset$ , alors  $X_{ji} = \emptyset$  et il n'y a pas vraiment d'application  $\varphi_{ij}$ ).

Alors il existe un espace analytique  $(X, \mathcal{Q}, \mathfrak{F})$  qui possède les propriétés suivantes :

- 1) il existe un homéomorphisme  $\psi_i$  de  $X_i$  sur un ouvert admissible  $\psi_i(X_i)$  de  $X$  qui respecte la topologie de Grothendieck
- 2) on a  $X = \bigcup_i \psi_i(X_i)$
- 3)  $\psi_i(X_{ij}) = \psi_j(X_{ji}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$  et  $\varphi_{ji}(x) = \psi_j^{-1} \psi_i(x)$  pour tout  $x \in X_{ij}$  et pour tout  $i, j \in I$
- 4)  $\psi_i$  induit un isomorphisme entre le faisceau structural  $\mathcal{G}_{X_i}$  et  $\mathfrak{F}|_{X_i}$ .

La démonstration de l'existence de  $X$  et  $\mathfrak{F}$  est assez facile. En revanche, la topologie de Grothendieck  $\mathcal{Q}$  n'est pas unique. Après avoir identifié (par  $\psi_i$ )  $X_i$  à une partie de  $X$  on peut prendre pour ouverts admissibles  $X, \emptyset$  et tous les ouverts  $Y$  qui sont admissibles dans un  $X_i$ . Un recouvrement  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  est un recouvrement admissible de  $Y$  si tout affinoïde  $Z \subset Y$  est contenu dans une réunion finie de  $U_i$ .

### III. 4. - Exemples

(III. 4. 1) Les sous-ensembles rationnels de  $X = \text{Sp } K \langle T \rangle$  . - Soit  $K$  un corps valué complet, algébriquement clos. On peut identifier  $X = \text{Sp } K \langle T \rangle$  à  $K^\circ = \{z \in K \mid |z| \leq 1\}$  par l'application  $(T-z)K \langle T \rangle \mapsto z$ . L'exercice (I. 2. 12) montre qu'un sous-ensemble rationnel  $Y$  de  $X$  est un ensemble affinoïde de  $\mathbb{P}^1(K)$  (selon le sens de I. 1. 2). On laisse au lecteur le soin de montrer qu'un ensemble affinoïde  $Y$  de  $\mathbb{P}^1(K)$  (selon I. 1. 2) et  $Y \subset X$  est un sous-ensemble rationnel de  $X$  (le cas où  $Y$  est affinoïde connexe est facile, le cas non connexe nécessite une récurrence sur le nombre de composantes connexes et argument utilisé dans I. 2. 1).

(III. 4. 2) Un ensemble affinoïde de  $\mathbb{P}^1(K)$  est un espace analytique affinoïde. - Soit  $X$  un ensemble affinoïde de  $\mathbb{P}^1(K)$ ,  $\mathcal{Q}|_X$  la restriction à  $X$  de la topologie de Grothendieck de  $\mathbb{P}^1(K)$  (I. 4. 2),



$\mathcal{O}|_X$  la restriction à  $X$  du faisceau des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{P}^1(K)$  (I. 4. 2). Soit  $A = \mathcal{O}(X)$ , c'est une algèbre affine (II. 4. 12). Alors l'espace analytique affine défini par  $A$  est isomorphe à  $(X, \mathcal{O}|_X, \mathcal{O}|_X)$ .

(III. 4. 3) La droite projective  $\mathbb{P}^1(K)$  est un espace analytique  
 Soit  $X = \mathbb{P}^1(K)$ ,  $\mathcal{O}$  la topologie de Grothendieck définie en (I. 4. 2),  $\mathcal{O}$  le faisceau des fonctions holomorphes défini en (I. 4. 2). Alors  $(X, \mathcal{O}, \mathcal{O})$  noté brièvement  $\mathbb{P}^1$  est un espace analytique (cela résulte immédiatement de III. 4. 2).

(III. 4. 4) Les sous-espaces analytiques de  $\mathbb{P}^1(K)$  sont des espaces analytiques.

Cela résulte de (I. 7), (III. 3. 2), (III. 4. 2)

(III. 4. 5) Une variété algébrique affine a une structure canonique d'espace analytique

Pour simplifier, supposons  $k = K$  algébriquement clos et la variété  $X$  réduite. L'espace topologique  $X$  s'identifie à une partie fermée de  $K^d$  (pour la topologie de Zariski). Il existe donc un idéal

$\mathfrak{A} = (f_1, f_2, \dots, f_s)$  de  $K[Z_1, \dots, Z_d]$  égal à son radical tel que

$$X = \{z = (z_1, \dots, z_d) \in K^d \mid 0 = f_1(z) \dots = f_s(z)\}.$$

Soient  $\pi \in K$ ,  $0 < |\pi| < 1$  et

$$X_n = \{z \in X \mid |z_i| \leq |\pi|^{-n} \text{ pour } 1 \leq i \leq d\}.$$

L'ensemble  $X_n$  s'identifie au spectre maximal de l'algèbre affine

$$A_n = \frac{K\langle T_1, T_2, \dots, T_d \rangle}{(f_1(\pi^{-n} T_1, \dots, \pi^{-n} T_d), \dots, f_s(\pi^{-n} T_1, \dots, T_d))}.$$

Les  $(X_n, \mathcal{O}_{X_n})$  se recollent de façon évidente parce que  $X_n$  est rationnel dans  $X_{n+1}$ . En particulier on a  $\mathcal{O}(X) = \varprojlim \mathcal{O}(X_n)$ .

On peut vérifier que la structure d'espace analytique sur  $X$  ne dépend pas de l'immersion  $X \hookrightarrow K^d$ .

Soit  $Y$  un ouvert affine de  $X$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  sa structure d'espace analytique,  $(X, \mathcal{O}_X)$  celle de  $X$ . Alors on peut vérifier que

$$(Y, \mathcal{O}_Y) = (X, \mathcal{O}_X)|_Y.$$

(III. 4.6) Une variété algébrique séparée de type fini a une structure canonique d'espace analytique

Soit  $X$  une variété algébrique, séparée, de type fini. On a donc  $X = \bigcup_i X_i$  où les  $X_i$  et  $X_i \cap X_j$  sont des ouverts affines. Les  $X_i$ , d'après (III. 4.5), sont munis de structure d'espace analytique que l'on peut recoller grâce à la dernière remarque de (III. 4.5) (il s'agit d'un recollement d'espaces analytiques qui est un peu plus général que (III. 3.4)).

On peut décrire assez simplement la structure analytique de  $X$ . Un ensemble  $Y \subset X$ ,  $Y \neq X$  est un ouvert admissible si  $Y$  est ouvert admissible (selon (III. 4.5)) dans un ouvert affine  $X' \subset X$ . Un recouvrement  $\{U_i\}$  est admissible si chaque ouvert admissible  $Y$ ,  $Y \neq \emptyset$ ,  $X$  qui est contenu dans  $\bigcup_i U_i$  est déjà contenu dans une réunion finie d'éléments de  $\{U_i\}$ . Le faisceau structural  $\mathcal{O}$  est défini à partir du cas affine.

(III. 4.7) Le cas des variétés algébriques projectives

La structure analytique des variétés algébriques projectives est particulièrement intéressante parce qu'elle correspond à un recollement fini d'espaces affines.

a) L'espace analytique  $\mathbb{P}^n$  .- Soient les affines

$$X_i = \{z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{P}^n(K) \mid |z_k| \leq |z_i| \ 0 \leq k \leq n\} = \text{Sp } K \left\langle \frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right\rangle$$

ici  $\frac{z_k}{z_i}$  est considéré comme une variable ( $k \neq i$ ) on a donc

$$X_{ij} (= X_i \cap X_j) = \text{Sp } K \left\langle \frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}, \left(\frac{z_i}{z_j}\right)^{-1} \right\rangle$$

$$X_{ji} (= X_j \cap X_i) = \text{Sp } K \left\langle \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j}, \left(\frac{z_i}{z_j}\right)^{-1} \right\rangle.$$

Les isomorphismes de recollement entre  $X_{ij}$  et  $X_{ji}$  sont définis par les isomorphismes d'algèbre

$$\rho_{ij} : K \left\langle \frac{Z_0}{Z_i}, \dots, \frac{Z_n}{Z_i}, \left(\frac{Z_j}{Z_i}\right)^{-1} \right\rangle \longrightarrow K \left\langle \frac{Z_0}{Z_j}, \dots, \frac{Z_n}{Z_j}, \left(\frac{Z_i}{Z_j}\right)^{-1} \right\rangle$$

définis par  $\rho_{ij} \left(\frac{Z_k}{Z_i}\right) = \frac{Z_k}{Z_j} \times \left(\frac{Z_i}{Z_j}\right)^{-1} \quad k \neq i$ .

Ainsi (III. 3.4) les  $X_n$  se recollent en un espace analytique noté  $\mathbb{P}^n$ . On notera que cette construction de l'espace analytique  $\mathbb{P}^n$  est très proche de celle de la variété algébrique  $\mathbb{P}^n$ . On peut vérifier que cette construction donne la même structure analytique que celle définie en (III. 4.6).

b) Le cas d'une variété algébrique projective. - Soit  $X \subset \mathbb{P}^n$  une variété projective définie par  $s$  polynômes homogènes  $f_1, f_2, \dots, f_s$  de  $K[Z_0, Z_1, \dots, Z_n]$ . Soient les affinoïdes

$$X_i = \{ \Gamma z_0, \dots, z_n \in \mathbb{P}^n \mid f_1(z_0, \dots, z_n) = \dots = f_s(z_0, \dots, z_n) = 0 \text{ et } |z_k| \leq |z_i| \}$$

pour  $0 \leq k \leq n$ .

On a :

$$X_i = \text{Sp} \frac{K \langle S_0, S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n \rangle}{(f_1(S_0, \dots, S_{i-1}, 1, S_{i+1}, \dots, S_n), \dots, f_s(S_0, \dots, S_{i-1}, 1, S_{i+1}, \dots, S_n))}$$

On définit les isomorphismes de recollement de façon analogue au cas a) .

(III. 4.8) REMARQUE. - Les variétés algébriques projectives sont complètes pour leur structure analytique (voir VI. 4.4).

(III. 4. 9) REMARQUE. - Soit  $X$  une variété algébrique affine sur  $k$  qui est un espace affinoïde pour sa structure analytique. Alors  $X$  est un ensemble fini. Une fonction régulière  $f$  sur  $X$  est aussi holomorphe sur l'affinoïde  $X$  et donc  $\sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$ . D'autre part, on sait que l'ensemble  $f(X) \subset k$  est constructible. Un sous-ensemble constructible et borné de  $k$  est nécessairement fini. Si  $X$  est en plus connexe, alors  $f$  est constante. Donc les composantes connexes de  $X$  sont constituées d'un seul point.

(III. 4. 10) EXERCICE. - Montrer que la structure analytique sur  $K^x$  définie par (I. 7. 2) ou par (III. 4. 6) ( $K^x$  est la variété algébrique affine définie par  $K[X, Y]/(1 - XY)$ ), est la même.

### III. 5. - Faisceaux sur un espace analytique. Exemples

Comme un espace analytique  $X$  est un espace topologique muni d'une topologie de Grothendieck, la notion de faisceau sur  $X$  a été introduite en (I. 4. 1). Comme un espace analytique est obtenu par recollement d'espaces affinoïdes, un faisceau sur  $X$  sera souvent défini par recollement de faisceaux définis sur les affinoïdes. Nous donnerons deux exemples, le faisceau des différentielles et le faisceau des fonctions méromorphes.

(III. 5. 1) . - Recollement de faisceaux

(III. 5. 1) LEMME. - Soient  $X$  un espace analytique réunion d'espaces affines  $\{X_i\}_{i \in I}$ , pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{F}_i$  un faisceau sur  $X_i$  et pour tout  $i, j \in I$   $\theta_{ij}$  un isomorphisme de  $\mathcal{F}_j|_{X_i \cap X_j}$  sur  $\mathcal{F}_i|_{X_i \cap X_j}$  tels que  $\theta_{ij} \circ \theta_{jk} = \theta_{ik}$  sur  $X_i \cap X_j \cap X_k$  pour tout  $i, j, k \in I$ . Alors il existe un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  et pour tout  $i \in I$  un isomorphisme  $\theta_i$  de  $\mathcal{F}|_{X_i}$  sur  $\mathcal{F}_i$  tels que  $\theta_{ij} = \theta_i \circ \theta_j^{-1}$  sur  $X_i \cap X_j$ . Le faisceau  $\mathcal{F}$  et la famille  $\{\theta_i\}$  sont uniques (à isomorphisme près).

DÉMONSTRATION. - Voir [52], p. 201.

(III. 5. 2) . - Le faisceau des différentielles

Soit  $X$  un espace affine, on définit le (pré-) faisceau  $\Omega_X$  des différentielles de la façon suivante : pour  $R \subset X$ , sous-ensemble rationnel de  $X$ , on pose  $\Omega_X(R) = \Omega_{\mathbb{C}(R)}^f|_k$  le  $\mathbb{C}(R)$ -module des différentielles défini en II. 7 ; si  $R' \subset R$  le corollaire II. 7. 2 montre qu'il existe un homomorphisme unique  $h$  de  $\Omega_{\mathbb{C}(R)}^f|_k$  dans  $\Omega_{\mathbb{C}(R')}^f|_k$  qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(R) & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{C}(R)}^f|_k \\ \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{C}(R') & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{C}(R')}^f|_k \end{array} .$$

En fait la proposition suivante et le théorème de Tate III. 2. 2 montrent que  $\Omega_X$  est un faisceau.

PROPOSITION. - Soient  $X$  un espace affine,  $\Omega_X$  le (pré-) faisceau des différentielles sur  $X$  et  $R$  un sous-ensemble rationnel de  $X$ .

Alors on a :

$$\Omega_X(R) = \Omega_X(X) \otimes_{\mathbb{C}(X)} \mathbb{C}(R) .$$

DÉMONSTRATION. - Soit  $A = \mathcal{O}(X) = k\langle z_1, \dots, z_n \rangle_{\mathfrak{A}} = s(k\langle z_1, \dots, z_n \rangle)$ ,  
 où  $s$  est la surjection canonique de  $k\langle z_1, \dots, z_n \rangle$  sur  
 $k\langle z_1, \dots, z_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ . Soit  $R$  le sous-ensemble rationnel de  $X = \text{Sp}(A)$  dé-  
 fini par

$$R = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq |f_0(x)|, 0 \leq i \leq m\}$$

où  $f_i \in A$  et  $A = f_0 A + f_1 A + \dots + f_m A$ . On sait que

$$\mathcal{O}(R) = B = \frac{A\langle T_1, \dots, T_m \rangle}{(f_1 - T_1 f_0, \dots, f_m - T_m f_0)}.$$

On a donc aussi

$$B = \frac{k\langle z_1, \dots, z_n, T_1, \dots, T_m \rangle}{\mathfrak{B}} = s_1(k\langle z, T \rangle),$$

où  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} k\langle z, T \rangle + (F_1 - T_1 F_0, \dots, F_m - T_m F_0)$  avec  $F_i \in k\langle z \rangle$ ,  $s(F_i) = f_i$   
 et où  $s_1$  est la surjection canonique de  $k\langle z_1, \dots, z_n, T_1, \dots, T_m \rangle$  sur  $B$ .

Soit  $V_1$  le sous-B-module de  $B e_1 \oplus \dots \oplus B e_n$  engendré par

$$\left\{ s_1 \left( \frac{\partial F}{\partial z_1} \right) e_1 + \dots + s_1 \left( \frac{\partial F}{\partial z_n} \right) e_n \mid F \in \mathfrak{A} \right\}.$$

Soit  $V_2$  le sous-B-module de  $B e_1 \oplus \dots \oplus B e_n \oplus B u_1 \oplus \dots \oplus B u_m$  en-  
 gendré par

$$\left\{ -s_1(F_0)u_i + \sum_{j=1}^n \left( s_1 \left( \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right) - s_1(T_j) s_1 \left( \frac{\partial F_0}{\partial z_j} \right) \right) e_j \mid 1 \leq i \leq m \right\}.$$

On a :

$$(V_1 + V_2) \cap (B e_1 \oplus \dots \oplus B e_n) = V_1.$$

Comme  $s_1(F_0)$  est inversible dans  $B$  on en déduit que

$$\Omega_{B|k}^f \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{B e_1 \oplus \dots \oplus B e_n \oplus B u_1 \oplus \dots \oplus B u_m}{V_1 + V_2} \simeq \frac{B e_1 \oplus \dots \oplus B e_n}{V_1}.$$

Soit  $V$  le sous-A-module de  $A e_1 \oplus \dots \oplus A e_n$  engendré par

$$\left\{ s \left( \frac{\partial F}{\partial z_1} \right) e_1 + \dots + s \left( \frac{\partial F}{\partial z_n} \right) e_n \mid F \in \mathfrak{A} \right\}.$$

Par définition on a :

$$\Omega_{A|k}^f = \frac{A e_1 \oplus \dots \oplus A e_n}{V}.$$

Il est alors clair que

$$\Omega_{B|k}^f = \Omega_{A|k}^f \otimes_A B$$

(où  $A \rightarrow B$  est l'homomorphisme induit par  $s_1$ ).

Soit  $X$  un espace analytique réunion d'affinoides  $\{X_i\}_{i \in I}$ . La proposition précédente montre que l'isomorphisme  $\varphi_{i,j}$  de  $\mathcal{O}_{X_j}(X_i \cap X_j)$  sur  $\mathcal{O}_{X_i}(X_i \cap X_j)$  définit un isomorphisme de  $\Omega_{X_j|X_i \cap X_j}$  sur  $\Omega_{X_i|X_i \cap X_j}$ . Par suite, le lemme de recollement des faisceaux montre qu'il existe un unique faisceau  $\Omega_X$  tel que  $\Omega_X|_{X_i} \simeq \Omega_{X_i}$ , ce faisceau est appelé le faisceau des différentielles sur l'espace analytique  $X$ .

### III. 6. - Faisceaux cohérents sur un espace analytique

(III. 6.1) DÉFINITIONS. - Soient  $X$  un espace analytique,  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $X$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est cohérent si  $X$  possède un recouvrement admissible  $\{X_i\}$  tel que

- i) chaque  $X_i$  est affinofde ;
- ii)  $\mathcal{F}(X_i)$  est un  $\mathcal{O}(X_i)$ -module de type fini ;
- iii)  $\mathcal{F}|_{X_i} \simeq \mathcal{F}(X_i)^\sim$ .

On dit que  $\mathcal{F}$  est localement libre de rang  $n$ , si on a en plus

- iv)  $\mathcal{F}(X_i)$  est un  $\mathcal{O}(X_i)$ -module libre de rang  $n$ .

Un faisceau inversible est un faisceau localement libre de rang 1.

REMARQUE. - La condition iii) veut dire que pour tout  $Y \subset X_i$  admissible, l'application canonique  $\mathcal{F}(X_i) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$  est bijective.

EXEMPLE. - Soit  $X$  un espace analytique, le faisceau  $\Omega$  des différentielles sur  $X$  est un faisceau cohérent (III. 5. 2). De plus  $\Omega$  est localement libre si et seulement si  $X$  n'a pas de singularités (II. 7. 2).

Nous avons un théorème important qui caractérise les faisceaux cohérents sur un espace analytique affinoïde.

(III. 6. 2) THÉORÈME. - Soient  $X$  un espace affinoïde,  $\mathfrak{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ . Alors  $\mathfrak{F}(X)$  est un  $\mathcal{O}(X)$ -module de type fini et  $\mathfrak{F}$  est canoniquement isomorphe au faisceau  $\mathfrak{F}(X)^\sim$ .

La démonstration de ce théorème nécessite quelques démarches préliminaires. L'idée est de montrer le théorème pour un recouvrement standard très simple et ensuite d'utiliser une récurrence analogue à la démonstration du théorème de Tate (III. 2. 2).

Soient  $X$  un espace affinoïde,  $f \in \mathcal{O}(X)$ ,

$$(*) \quad X_1 = \{x \in X \mid |f(x)| \leq 1\}, \quad X_2 = \{x \in X \mid |f(x)| \geq 1\} \quad \text{et} \quad X_{12} = X_1 \cap X_2.$$

Soit  $s_i$  l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}(X_i)$  dans  $\mathcal{O}(X_{12})$ .

On peut dire que les normes des algèbres  $\mathcal{O}(X_1)$ ,  $\mathcal{O}(X_2)$ ,  $\mathcal{O}(X_{12})$  sont telles que  $\|s_i\| \leq 1$ . On a la suite exacte suivante (lemme III. 2. 6)

$$\mathcal{O}(X_1) \oplus \mathcal{O}(X_2) \xrightarrow{d} \mathcal{O}(X_{12}) \longrightarrow 0$$

avec  $d((a_1, a_2)) = s_1(a_1) - s_2(a_2)$ . Le théorème de Banach montre alors que  $d$  est un morphisme strict ; ce qui veut dire qu'il existe un réel  $c$ ,  $0 < c < 1$  qui possède la propriété suivante :

Pour tout  $a \in \mathcal{O}(X_{12})$  il existe  $a_i \in \mathcal{O}(X_i)$  tels que

$$(**) \quad c \max(\|a_1\|, \|a_2\|) \leq \|a\| \quad \text{et} \quad a = d((a_1, a_2)).$$

Si  $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathcal{O}(Y))$  avec  $Y = X_1, X_2, X_{12}$  on pose  $\|M\| = \max_{i,j} \|m_{ij}\|$ . Si  $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathcal{O}(X_1))$  on notera  $s_i(M)$  la matrice  $(s_i(m_{ij}))$  de  $M_n(\mathcal{O}(X_{12}))$ .



(III. 6. 3) LEMME DE CARTAN (cas particulier). - Soient  $X$  un espace affinoïde,  $f \in \mathcal{O}(X)$ ,  $X_1, X_2, X_{12}$  définis par (\*) et  $c$  défini par (\*\*). Soit  $M \in \text{Gl}_n(\mathcal{O}(X_{12}))$  tel que  $\|M - I_n\| < c^3$ . Alors il existe  $M_i \in \text{Gl}_n(\mathcal{O}(X_i))$ ,  $i = 1, 2$  tels que  $M = s_1(M_1) s_2(M_2)$ .

DÉMONSTRATION. - Soit  $A_1 = M - I_n$ , d'après (\*\*) il existe  $B_1 \in M_n(\mathcal{O}(X_1))$  et  $C_1 \in M_n(\mathcal{O}(X_2))$  tels que  $c \cdot \max(\|B_1\|, \|C_1\|) \leq \|A_1\|$  et  $s_1(B_1) + s_2(C_1) = A_1$ . Soit  $A_2 = I_n - (I_n - s_1(B_1))(I_n + A_1)(I_n - s_2(C_1))$ . On a donc

$$A_2 = -s_1(B_1)A_1 + s_1(B_1)s_2(C_1) - A_1s_2(C_1) + s_1(B_1)A_1s_2(C_1)$$

ainsi

$$\|A_2\| \leq c^4.$$

Toujours en utilisant (\*\*), il existe  $B_2 \in M_n(\mathcal{O}(X_1))$  et  $C_2 \in M_n(\mathcal{O}(X_2))$  tels que

$$c \cdot \max(\|B_2\|, \|C_2\|) \leq \|A_2\| \quad \text{et} \quad s_1(B_2) + s_2(C_2) = A_2.$$

En posant  $A_3 = I_n - (I_n - s_1(B_2))(I_n + A_2)(I_n - s_2(C_2))$  on a  $\|A_3\| < c^6$ . On construit ainsi par récurrence deux suites  $(B_n)_n$  et  $(C_n)_n$  avec  $\|B_n\| \rightarrow 0$  et  $\|C_n\| \rightarrow 0$ , et

$$(I_n - s_1(B_k)) \dots (I_n - s_1(B_1)) (M) (I_n - s_2(C_1)) \dots (I_n - s_2(C_k)) = I_n + A_k$$

avec  $\|A_k\| \rightarrow 0$ . Ainsi on pose

$$M_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (I_n - (B_k)) \dots (I_n - (B_1))$$

$$M_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (I_n - (C_1)) \dots (I_n - (C_k)).$$

Il suit que

$$M = s_1(M_1)^{-1} s_2(M_2)^{-1}.$$

(III. 6. 4) LEMME. - Soient  $X$  un espace affinoïde,  $f \in \mathcal{O}(X)$ ,  $X_1, X_2, X_{12}$  définis par (\*). Soit  $\mathfrak{F}$  un faisceau de  $\mathcal{O}$ -module sur  $X$  tel que  $\mathfrak{F}(X_i)$  soit un  $\mathcal{O}(X_i)$ -module de type fini pour  $i=1, 2$  et que  $\mathfrak{F}|_{X_i} = \mathfrak{F}(X_i) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_2)$  dans  $\mathfrak{F}(X_2)$  est surjectif.

DÉMONSTRATION. - Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  une famille génératrice du  $\mathcal{O}(X_1)$ -module  $\mathfrak{F}(X_1)$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  une famille génératrice du  $\mathcal{O}(X_2)$ -module  $\mathfrak{F}(X_2)$ . Clairement  $\{s_1(a_1), \dots, s_1(a_n)\}$  et  $\{s_2(b_1), \dots, s_2(b_n)\}$  sont des familles génératrices de  $\mathfrak{F}(X_{12})$ . Il existe  $V = (v_{ij}) \in M_n(\mathcal{O}(X_{12}))$  et  $U = (u_{ij}) \in M_n(\mathcal{O}(X_{12}))$  tels que  $s_2(b_i) = \sum_j v_{ij} s_1(a_j)$  et  $s_1(a_i) = \sum_j u_{ij} s_2(b_j)$ .

Si  $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathcal{O}(X_1))$ , on notera  $M(a_1, \dots, a_n)$  le  $n$ -uplet  $(c_1, \dots, c_n)$  avec  $c_i = \sum_j m_{ij} a_j$ . On adoptera une notation analogue si  $M \in M_n(\mathcal{O}(X_2))$  ou si  $M \in M_n(\mathcal{O}(X_{12}))$ . On a donc :

$$(s_2(b_1), \dots, s_2(b_n)) = V(s_1(a_1), \dots, s_1(a_n)) ,$$

$$(s_1(a_1), \dots, s_1(a_n)) = U(s_2(b_1), \dots, s_2(b_n))$$

et par suite :  $VU(s_2(b_1), \dots, s_2(b_n)) = (s_2(b_1), \dots, s_2(b_n))$ .

Puisque  $s_1(\mathcal{O}(X_1))$  est dense dans  $\mathcal{O}(X_{12})$  il existe  $V' \in M_n(\mathcal{O}(X_1))$  tel que  $\|(s_1(V') - V)U\| < c$ . Ainsi on peut appliquer le lemme de Cartan (III. 6. 3) et

$$I_n + (s_1(V') - V)U = (s_1 M_1)^{-1} (s_2 M_2) \quad \text{avec} \quad M_1 \in \text{Gl}_n(\mathcal{O}(X_1)) .$$

Appliquons cette égalité au  $n$ -uplet  $(s_2(b_1), \dots, s_2(b_n))$ , on a :

$$s_1(V') \cdot U(s_2(b_1), \dots, s_2(b_n)) = (s_1 M_1)^{-1} (s_2 M_2) (s_2(b_1), \dots, s_2(b_n))$$

soit encore

$$s_1(M_1 V') (s_1(a_1), \dots, s_1(a_n)) = s_2(M_2) (s_2(b_1), \dots, s_2(b_n)) .$$

Posons :

$$(a'_1, \dots, a'_n) = M_1 V' (a_1, \dots, a_n) \quad \text{et} \quad (b'_1, \dots, b'_n) = M_2 (b_1, \dots, b_n) .$$

On a :

$$s_1(a'_k) = s_2(b'_k) ,$$

puisque  $\mathfrak{F}$  est un faisceau il existe  $d_1, \dots, d_n \in \mathfrak{F}(X)$  qui ont pour images respectives  $b'_1, \dots, b'_n$  dans  $\mathfrak{F}(X_2)$ . Puisque la matrice  $M_2$  est inversible, la famille  $\{b'_1, \dots, b'_n\}$  est donc génératrice, ce qui montre le lemme.

(III. 6. 5) LEMME. - Soient  $X$  un espace affinoïde,  $f \in \mathcal{O}(X)$ ,  $X_1, X_2, X_{12}$  définis par (\*). Soit  $\mathfrak{F}$  un faisceau sur  $X$  qui est un  $\mathcal{O}$ -module tel que  $\mathfrak{F}(X_i)$  soit un  $\mathcal{O}(X_i)$ -module de type fini et que  $\mathfrak{F}|_{X_i} = \mathfrak{F}(X_i)^\sim$ . Alors  $\mathfrak{F}(X)$  est un  $\mathcal{O}(X)$ -module de type fini et  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(X)^\sim$ .

DÉMONSTRATION. - D'après (III. 6. 4) il existe un sous- $\mathcal{O}(X)$ -module  $M$  de type fini de  $\mathfrak{F}(X)$  tel que l'homomorphisme canonique de  $M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_2)$  dans  $\mathfrak{F}(X_2)$  soit surjectif. On peut compléter l'homomorphisme (canonique) de faisceaux  $\tilde{M} \rightarrow \mathfrak{F}$  en la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0 ,$$

ainsi on a :

$$\mathcal{Q}|_{X_i} = (\mathfrak{F}(X_i)/M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_i))^\sim .$$

Il s'ensuit que  $\mathcal{Q}(X_2) = 0$  et  $\mathcal{Q}(X_{12}) = 0$ .

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{M}(X_1) \oplus \tilde{M}(X_2) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(X_1) \oplus \mathfrak{F}(X_2) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(X_1) \oplus \mathcal{Q}(X_2) & \longrightarrow & 0 \\ d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow & & \\ \tilde{M}(X_{12}) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(X_{12}) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(X_{12}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où les lignes sont exactes parce que  $\mathcal{Q}|_{X_i} = (\mathfrak{F}(X_i)/M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_i))^\sim$  et où la première colonne est exacte à cause du théorème de Tate (III.2.2).

Il s'ensuit que l'homomorphisme  $\mathfrak{F}(X_1) \oplus \mathfrak{F}(X_2) \xrightarrow{d} \mathfrak{F}(X_{12})$  est surjectif. Ce qui veut dire aussi que  $H^1(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}) = 0$  où  $\mathfrak{X} = \{X_1, X_2\}$ .

Soient  $x \in X_1$  et  $\mathfrak{M}_x$  l'idéal maximal correspondant. L'homomorphisme  $\mathfrak{M}_x \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$  se complète en la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{M}_x \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow 0,$$

on a encore  $\mathfrak{S}|_{X_1} = (\mathfrak{F}(X_1)/\mathfrak{M}_x \mathfrak{F}(X_1))^\sim$ .

Il s'ensuit que

$$\mathfrak{S}(X_1) = \frac{\mathfrak{F}(X_1)}{\mathfrak{M}_x \mathfrak{F}(X_1)} = \frac{\mathfrak{F}_x}{\mathfrak{M}_x \mathfrak{F}_x} = \mathfrak{S}(X_{12})$$

$$\mathfrak{S}(X_2) = \frac{\mathfrak{F}(X_2)}{\mathfrak{M}_x \mathfrak{F}(X_2)} = 0.$$

On a donc  $\mathfrak{S}(X) = \frac{\mathfrak{F}_x}{\mathfrak{M}_x \mathfrak{F}_x}$  puisque  $\mathfrak{S}$  est un faisceau.

Le faisceau  $\mathfrak{M}_x \mathfrak{F}$  satisfait les hypothèses du lemme III. 6. 5, ainsi  $H^1(\mathfrak{X}, \mathfrak{M}_x \mathfrak{F}) = 0$ . La suite exacte de cohomologie montre alors que l'homomorphisme de  $\mathfrak{F}(X)$  dans  $\mathfrak{S}(X)$  est surjectif. Soit  $M$  l'image de  $\mathfrak{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_1)$  dans  $\mathfrak{F}(X_1)$ . Alors l'homomorphisme de  $M$  dans  $\mathfrak{F}(X_1)/\mathfrak{M}_x \mathfrak{F}(X_1) = \mathfrak{S}(X)$  est surjectif. Ceci s'interprète ainsi, soit  $N = \mathfrak{F}(X_1)/M$ , alors pour tout idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $\mathcal{O}(X_1)$  on a  $N/\mathfrak{M}N = 0$ . Soit  $N \subset \bigcap_{\mathfrak{M}} \bigcap_{k \geq 1} \mathfrak{M}^k N$ , ainsi le lemme (II. 3. 10) montre que  $N = \{0\}$ . Ainsi l'homomorphisme de  $\mathfrak{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_1)$  dans  $\mathfrak{F}(X_1)$  est surjectif. Ce dernier résultat et le lemme III. 6. 4 montrent qu'il existe un sous-module  $M$  de type fini de  $\mathfrak{F}(X)$  tel que  $M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_i) \longrightarrow \mathfrak{F}(X_i)$  soit surjectif pour  $i = 1, 2$ . On a alors une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow 0.$$

Or  $\mathcal{X}$  satisfait les hypothèses du lemme III. 6. 5, ce qui montre qu'il existe un  $\mathcal{O}(X)$ -module de type fini  $N$  tel que l'on ait la suite

exacte suivante

$$\tilde{N} \xrightarrow{\delta} \tilde{M} \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow 0$$

et  $\mathfrak{F} = \tilde{Z}$  où  $Z$  est le conoyau de  $\delta_X$ .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III. 6. 2. - Nous dirons qu'un faisceau  $\mathfrak{F}$  qui est un  $\mathcal{O}$ -module est cohérent pour le recouvrement  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  si

- i) le  $\mathcal{O}(U_i)$ -module  $\mathfrak{F}(U_i)$  est de type fini pour  $1 \leq i \leq n$  ;
- ii)  $\mathfrak{F}|_{U_i} = \mathfrak{F}(U_i)^\sim$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Le théorème consiste à montrer qu'un faisceau  $\mathfrak{F}$  cohérent pour un recouvrement est isomorphe à  $\mathfrak{F}(X)^\sim$  où  $\mathfrak{F}(X)$  est un  $\mathcal{O}(X)$ -module de type fini. La démarche est analogue à la démonstration du théorème de Tate (III. 2. 2). Le lemme III. 2. 5 montre qu'il suffit de considérer les recouvrements standards et de faire une récurrence sur le nombre de fonctions qui interviennent dans le recouvrement.

Considérons l'hypothèse de récurrence suivante :

Soient  $Y = \text{Sp}(B)$ ,  $s \leq n-1$ ,  $\mathfrak{F}$  un faisceau sur  $Y$  qui est  $(C_{n-1})$  un  $\mathcal{O}$ -module, cohérent pour un recouvrement standard  $\mathfrak{X}(\rho_1, \dots, \rho_s)$ . Alors  $\mathfrak{F}(X)$  est un  $\mathcal{O}(X)$ -module de type fini et  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(X)^\sim$ .

Soient  $X = \text{Sp}(A)$ ,  $\mathfrak{F}$  un faisceau sur  $X$ ,  $\mathcal{O}$ -module, cohérent pour un recouvrement standard  $\mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n)$ . Soient  $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathcal{O}(X)$  tels que  $1 = g_1 f_1 + \dots + g_n f_n$ , et  $\pi \in k^x$  tel que

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x \in X}} |g_i(x)| < |\pi|^{-1}.$$

Posons :

$$Y_g = \{x \in X \mid |f_1(x)| \geq |\pi|, \dots, |f_s(x)| \geq |\pi|\}.$$

Considérons maintenant la deuxième hypothèse de récurrence suivante :

(C'<sub>s</sub>) Pour tout s' tel que s < s' ≤ n, le  $\mathcal{O}(Y_{s'})$ -module  $\mathfrak{F}(Y_{s'})$  est de type fini et  $\mathfrak{F}|_{Y_{s'}} = \mathfrak{F}(Y_{s'})^{\sim}$ .

Montrons que C'<sub>s</sub> implique C'<sub>s-1</sub>. Posons :

$$Y_s^- = \{x \in X \mid |f_1(x)| \geq |\pi|, \dots, |f_{s-1}(x)| \geq |\pi|, |f_s(x)| \leq |\pi|\}.$$

On a (comme pour la démonstration de III.2.2) :

$$Y_s^- \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n) = Y_s^- \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_{s-1}, f_{s+1}, \dots, f_n).$$

Alors l'hypothèse (C'<sub>n-1</sub>) montre que  $\mathfrak{F}(Y_s^-)$  est un  $\mathcal{O}(Y_s^-)$ -module de type fini et que  $\mathfrak{F}|_{Y_s^-} = \mathfrak{F}(Y_s^-)^{\sim}$ . Alors le lemme III.6.5 est applicable au recouvrement  $\{Y_s, Y_s^-\}$  de  $Y_{s-1}$ , il suit que  $\mathfrak{F}(Y_{s-1})$  est un  $\mathcal{O}(Y_{s-1})$ -module de type fini et que  $\mathfrak{F}|_{Y_{s-1}} = \mathfrak{F}(Y_{s-1})^{\sim}$ , ce qui est (C'<sub>s-1</sub>). Il est clair que (C'<sub>0</sub>) n'est autre que le théorème III.6.2.

Il nous reste à montrer que (C'<sub>n</sub>) est satisfait. Posons :

$$Y_n' = \{x \in Y_n \mid |f_1(x)| \geq |f_2(x)|\}$$

$$Y_n'' = \{x \in Y_n \mid |f_1(x)| \leq |f_2(x)|\}.$$

Il est clair que

$$Y_n' \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n) = \{U_1', U_2', \dots, U_n'\} \text{ avec } U_2' \subset U_1' \text{ et}$$

$$Y_n' \cap \mathfrak{X}(f_1, f_3, \dots, f_n) = \{U_1', U_3', \dots, U_n'\}, \text{ de même}$$

$$Y_n'' \cap \mathfrak{X}(f_1, \dots, f_n) = \{U_1'', U_2'', \dots, U_n''\} \text{ avec } U_1'' \subset U_2'' \text{ et}$$

$$Y_n'' \cap \mathfrak{X}(f_2, \dots, f_n) = \{U_2'', \dots, U_n''\}.$$

Alors l'hypothèse (C'<sub>n-1</sub>) appliquée à  $Y_n' \cap \mathfrak{X}(f_1, f_3, \dots, f_n)$  et  $Y_n'' \cap \mathfrak{X}(f_2, \dots, f_n)$  montre que  $\mathfrak{F}(Y_n')$  (resp.  $\mathfrak{F}(Y_n'')$ ) est un  $\mathcal{O}(Y_n')$ -module de type fini (resp.  $\mathcal{O}(Y_n'')$ ) et que  $\mathfrak{F}|_{Y_n'} = \mathfrak{F}(Y_n')^{\sim}$  (resp.  $\mathfrak{F}|_{Y_n''} = \mathfrak{F}(Y_n'')^{\sim}$ ).

Ainsi le lemme III.6.5 est applicable au recouvrement  $\{Y_n', Y_n''\}$  de  $Y_n$  parce que  $f_1$  et  $f_2$  sont inversibles sur  $Y_n$ , il permet de conclure que  $\mathfrak{F}(Y_n)$  est un  $\mathcal{O}(Y_n)$ -module de type fini et que  $\mathfrak{F}|_{Y_n} = \mathfrak{F}(Y_n)^{\sim}$ .

III. 7. - Le faisceau des fonctions méromorphes

On définit d'abord le faisceau des fonctions méromorphes sur un espace affinoïde et le lemme de recollement permet de le définir sur un espace analytique. La définition des applications de transition nécessite un résultat sur la platitude.

(III. 7.1) THÉORÈME. - Soit Y un sous-ensemble rationnel d'un espace affinoïde X . Alors  $\mathcal{O}(Y)$  est plat sur  $\mathcal{O}(X)$  .

Ce théorème sera conséquence du lemme suivant :

(III. 7.2) LEMME. - Soient Y un sous-ensemble rationnel d'un espace affinoïde X ,  $\varphi$  l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}(X)$  dans  $\mathcal{O}(Y)$  ,  $\mathfrak{M}_1$  un idéal maximal de  $\mathcal{O}(Y)$  ,  $\mathfrak{M}_1 = \varphi^{-1}(\mathfrak{M}_1)$  . Alors l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}(X)/\mathfrak{M}_1^n$  dans  $\mathcal{O}(Y)/\varphi(\mathfrak{M}_1^n)\mathcal{O}(Y)$  est bijectif pour  $n \geq 1$  et  $\mathfrak{M} = \varphi(\mathfrak{M}_1)\mathcal{O}(Y)$  .

DÉMONSTRATION. - Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(Y) \\
 \downarrow s & \searrow \psi & \downarrow s' \\
 \mathcal{O}(X)/\mathfrak{M}_1^n & \xrightarrow{\varphi'} & \mathcal{O}(Y)/\varphi(\mathfrak{M}_1^n)\mathcal{O}(Y) ,
 \end{array}$$

où  $s$  et  $s'$  sont les surjections canoniques,  $\varphi'$  est l'homomorphisme induit par  $\varphi$  qui rend le carré commutatif. De plus  $\psi$  est l'unique homomorphisme défini par la lemme III. 1.2 qui rend le triangle supérieur commutatif. Alors le triangle inférieur est commutatif. Ainsi  $\varphi'$  est surjectif puisque  $s'$  est surjectif et  $\psi'$  est injectif parce que  $\psi(\varphi(\mathfrak{M}_1^n)\mathcal{O}(Y)) \subset \mathfrak{M}_1^n$  .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III. 7.1. - Soit  $y \in Y$  , notons aussi  $y$  l'image réciproque de  $y$  dans  $\mathcal{O}(X)$  , alors le lemme III. 7.2 montre que

$$\mathcal{O}(X)_y^\wedge = \mathcal{O}(Y)_y^\wedge$$

où  $\mathcal{O}(X)_y^\wedge$  (resp.  $\mathcal{O}(Y)_y^\wedge$ ) est le complété de l'anneau local  $\mathcal{O}(X)_y$  (resp.  $\mathcal{O}(Y)_y$ ) pour la topologie  $y$ -adique.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X)_y & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}(Y)_y \\ \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \mathcal{O}(X)_y^\wedge & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{O}(Y)_y^\wedge \end{array}$$

Les morphismes  $\beta$  et  $\gamma$  sont fidèlement plats (théorème 56, p. 172, Matsumura, Com. Algebra, ou proposition 9, chap. III, §. 3, N. Bourbaki, Alg. Com.). Ainsi  $\tilde{\alpha} \circ \beta = \gamma \circ \alpha$  est plat et comme  $\gamma$  est fidèlement plat, il suit que  $\alpha$  est plat.

Ainsi  $\mathcal{O}(Y)_y$  est plat sur  $\mathcal{O}(X)_y$  pour tout maximal  $y$  il suit donc que  $\mathcal{O}(Y)$  est plat sur  $\mathcal{O}(X)$  (31, p. 24, Matsumura, Com. algebra, [37], ou prop. 15, chap. II, §. 3, algèbre commutative, N. Bourbaki, [6]).

### (III. 7. 3) . - Le (pré-) faisceau $\mathcal{M}$ des fonctions méromorphes

Soit  $X$  un espace affinoïde ; on définit le (pré-) faisceau des fonctions méromorphes sur  $X$  de la façon suivante :

Si  $R$  est un sous-ensemble rationnel de  $X$ ,  $\mathcal{M}(R)$  est l'anneau total des fractions de  $\mathcal{O}(R)$ . Soient  $R' \subset R \subset X$  deux sous-ensembles rationnels,  $\varphi$  l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}(R)$  dans  $\mathcal{O}(R')$ , puisque  $\mathcal{O}(R')$  est plat sur  $\mathcal{O}(R)$  (théorème III. 7. 1), l'image par  $\varphi$  d'un élément qui n'est pas diviseur de zéro est un élément qui n'est pas diviseur de zéro. Il suit que  $\varphi$  admet un prolongement unique  $\tilde{\varphi}$  qui rend le diagramme suivant commutatif :



$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(R) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(R') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{M}(R) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{M}(R') .
 \end{array}$$

Nous avons donc défini les applications de transition.

(III. 7. 4) THÉORÈME. - Le (pré-) faisceau  $\mathcal{M}$  des fonctions méromorphes sur un espace affinoïde est un faisceau.

Ce théorème est une conséquence du théorème III. 6. 2.

Donnons d'abord une idée de la démonstration. Soit  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  un recouvrement de l'espace affinoïde  $X$ , soient

$f_i \in \mathcal{M}(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  tels que  $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$ . La démonstration du théorème sera essentiellement achevée quand on aura montré que  $f_1, f_2, \dots, f_n$  admettent un "dénominateur" commun "appartenant" à  $\mathcal{O}(X)$ . La méthode consiste donc à étudier le "faisceau du dénominateur" associé à une fonction méromorphe.

(III. 7. 5) LEMME. - Soient  $Y$  un espace affinoïde,  $f \in \mathcal{M}(Y)$ ,  $R \subset Y$  rationnel. Posons :

$$\mathcal{J}(R) = \{a \in \mathcal{O}(R) \mid a f \in \mathcal{O}(R)\} .$$

Alors on a :

$$\mathcal{J}(R) \simeq \mathcal{O}(R) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{J}(Y) .$$

DÉMONSTRATION. - Pour simplifier les notations, on note de la même façon un élément de  $\mathcal{O}(X)$  et son image dans  $\mathcal{O}(R)$  ou  $\mathcal{M}(R)$ .

Soient  $f = t/n$ ,  $N = (t \mathcal{O}(Y) + n \mathcal{O}(Y))/n \mathcal{O}(Y)$ .

On a la suite exacte de  $\mathcal{O}(Y)$ -module

$$(0) \longrightarrow \mathcal{J}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{s} N \longrightarrow 0$$

où  $s(a)$  est l'image de  $at$  dans  $N$ . Comme  $\mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(R)$  est plat (III. 7. 1) on a la suite exacte

$$(*) \quad (0) \longrightarrow \mathcal{J}(Y) \otimes \mathcal{O}(R) \longrightarrow \mathcal{O}(R) \longrightarrow N \otimes \mathcal{O}(R) \longrightarrow 0 .$$

Considérons la suite exacte :

$$(0) \longrightarrow n \mathcal{O}(Y) \longrightarrow t \mathcal{O}(Y) + n \mathcal{O}(Y) \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

toujours par platitude, on a :

$$(**) \quad (0) \longrightarrow n \mathcal{O}(R) \longrightarrow t \mathcal{O}(R) + n \mathcal{O}(R) \longrightarrow N \otimes \mathcal{O}(R) \longrightarrow 0.$$

Ainsi (\*) et (\*\*) donnent

$$(0) \longrightarrow \mathfrak{J}(Y) \otimes \mathcal{O}(R) \longrightarrow \mathcal{O}(R) \longrightarrow \frac{t \mathcal{O}(R) + n \mathcal{O}(R)}{n \mathcal{O}(R)} \longrightarrow 0$$

ce qui prouve que

$$\mathfrak{J}(Y) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}(R) = \mathfrak{J}(R).$$

Le lemme III. 7. 5 veut donc dire que  $\mathfrak{J}$  est le faisceau cohérent  $\mathfrak{J}(Y)^\sim$ .

DÉMONSTRATION DE III. 7. 4. - Soient  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  un recouvrement d'un espace affinoïde  $X$ ,  $f_i \in \mathcal{M}(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tels que  $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$ . Soit  $\mathfrak{J}_i$  le faisceau cohérent défini sur  $X_i$  par

$$\mathfrak{J}_i(X_i) = \{ a \in \mathcal{O}(X_i) \mid a f_i \in \mathcal{O}(X_i) \}.$$

Le lemme III. 7. 5 montre que

$$\mathfrak{J}_i|_{X_i \cap X_j} \simeq \mathfrak{J}_j|_{X_i \cap X_j}.$$

Ainsi on peut recoller (III. 5. 1) les faisceaux  $\mathfrak{J}_i$  en un faisceau  $\mathfrak{J}$  sur  $X$ ; c'est un faisceau cohérent sur  $X$  et le théorème III. 6. 2 montre que  $\mathfrak{J} \simeq \mathfrak{J}(X)^\sim$ . De plus les injections  $\mathfrak{J}_i(X_i) \hookrightarrow \mathcal{O}(X_i)$  impliquent puisque  $\mathfrak{J}$  et  $\mathcal{O}$  sont des faisceaux, une injection de  $\mathfrak{J}(X)$  dans  $\mathcal{O}(X)$ , ainsi  $\mathfrak{J}(X)$  est un idéal de  $\mathcal{O}(X)$ .

Montrons que  $\mathfrak{J}(X)$  contient un élément qui n'est pas diviseur de zéro. Si  $\mathfrak{J}(X) \subset \{\text{diviseurs de zéro de } \mathcal{O}(X)\}$ , alors il existe  $b \neq 0$ ,  $b \in \mathcal{O}(X)$  tel que  $b \cdot \mathfrak{J}(X) = (0)$  (proposition 8, chap. IV, §. 1, algèbre commutative, N. Bourbaki, [6]). On a donc :

$$(0) = b \cdot \mathfrak{J}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_i) = b \cdot \mathfrak{J}_i(X_i).$$

Puisque  $b \neq 0$ , il existe un indice  $i$  tel que l'image de  $b$  dans  $\mathcal{O}(X_i)$  soit non nulle. Ceci donne une contradiction puisque  $\mathcal{J}_i(X_i)$  contient un élément qui n'est pas diviseur de zéro, un dénominateur de  $f_i$ .

Soit donc  $c$  non diviseur de zéro et  $c \in \mathcal{J}(X)$ , soient  $a_i = cf_i \in \mathcal{O}(X_i)$ , alors  $f_i = a_i/c$ . Puisque  $\mathcal{O}$  est un faisceau il existe  $a \in \mathcal{O}(X)$  qui a pour image  $a_i$  dans  $\mathcal{O}(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ainsi  $a/c \in \mathcal{M}(X)$  a pour image  $f_i$  dans  $\mathcal{M}(X_i)$ . De plus, si  $a/c \in \mathcal{M}(X)$  a pour image 0 dans chaque  $\mathcal{M}(X_i)$  il est clair que  $a|_{X_i} = 0$  et ainsi  $a = 0$  puisque  $\mathcal{O}$  est un faisceau. Ce qui montre bien que  $\mathcal{M}$  est un faisceau.

(III. 7. 5) EXERCICE (modules de Banach). - Soit  $(A, \|\cdot\|)$  une algèbre de Banach (commutative) sur le corps valué  $k$ . Soit  $M$  un  $A$ -module qui est un  $k$ -espace de Banach pour une norme notée aussi  $\|\cdot\|$ . On dit que  $M$  est un  $A$ -module de Banach si en plus on a

$$\|am\| \leq \|a\| \cdot \|m\| \quad \text{pour tout } a \in A \text{ et } m \in M.$$

Soient  $A$  une algèbre de Banach qui est un anneau noethérien,  $M$  un  $A$ -module de type fini.

1°) Montrer qu'il existe une surjection  $A^n \longrightarrow M$  qui définit sur  $M$  une norme de  $A$ -module de Banach (utiliser II. 3. 8).

2°) Montrer que toute autre norme de Banach sur  $M$  est équivalente à celle définie en 1°) (utiliser le théorème de Banach).

3°) Soit  $A = M = k \langle T \rangle$  et  $\|\cdot\|_M$  la norme sur  $M$  définie par

$$\|\sum a_n T^n\|_M = \max_n |a_n| \rho^n \quad \text{avec } 0 < \rho < 1.$$

Montrer que le  $A$ -module  $(M, \|\cdot\|_M)$  n'est pas complet (quoique de type fini !).

(III. 7. 6) EXERCICE. (semi-norme tensorielle). - Soient  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules de Banach, on définit sur  $M \otimes_A N$  une semi-norme  $\|\cdot\|$  de la façon suivante :

$$\|x\| = \inf \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|m_i\| \cdot \|n_i\| \mid x = \sum_{i=1}^n m_i \otimes n_i \right\}.$$

Cette semi-norme s'appelle la semi-norme tensorielle.

Soient  $A$  une algèbre affinofde,  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules de type fini munis de leur norme de Banach (III. 7. 5).

Montrer que la semi-norme tensorielle de  $M \otimes_A N$  est une norme (considérer les surjections  $A^m \xrightarrow{s} M$ ,  $A^n \xrightarrow{t} N$ ; remarquer que  $A^m \otimes A^n$  est un module de Banach pour la semi-norme tensorielle, remarquer que  $\ker s \otimes t$  est fermé (II. 3. 8) et que la semi-norme tensorielle de  $M \otimes N$  est induite par celle de  $A^m \otimes A^n$ ).

(III. 7. 7) EXERCICE. - Soient  $A$  une algèbre affinofde,  $M$  un  $A$ -module de type fini qui est un  $A$ -module de Banach pour une norme notée  $\| \cdot \|$  (III. 7. 5). Soit  $N \geq 0$

$$A_N^+ = \{f \in A \langle T \rangle \mid f = a_0 + a_1 T + \dots + a_N T^N\}$$

$$A_N^- = \{f \in A \langle T \rangle \mid f = a_{N+1} T^{N+1} + \dots\}.$$

1°) Montrer que

$$M \otimes_A A \langle T \rangle = M \otimes_A A_N^+ \oplus M \otimes_A A_N^-.$$

2°) Soit  $u \in M \otimes_A A_N^+$ . Montrer qu'il existe  $m_0, m_1, \dots, m_N \in M$  uniques tels que

$$u = m_0 \otimes 1 + m_1 \otimes T + \dots + m_N \otimes T^N.$$

Montrer que l'on a :

$$\|u\|_N = \max_{0 \leq i \leq N} \|m_i\|,$$

où  $\| \cdot \|_N$  est la norme tensorielle de  $M \otimes_A A_N^+$ .

3°) Montrer que l'injection de  $(M \otimes_A A_N^+, \| \cdot \|_N)$  dans  $(M \otimes_A A_{N+1}^+, \| \cdot \|_{N+1})$  est isométrique.

4°) Soit  $u \in M \otimes_A A_N$ . Montrer que  $\|u\| = \|u\|_N$ , où  $\| \cdot \|$  est la semi-norme tensorielle de  $M \otimes_A A \langle T \rangle$ . En déduire que  $(M \otimes_A A \langle T \rangle, \| \cdot \|)$  est un  $A$ -module de Banach.

5°) Soit  $u \in M \otimes A \langle T \rangle$ . Montrer qu'il existe une suite unique  $(m_0, m_1, \dots)$  de  $M$  telle que  $m_n \rightarrow 0$  et

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \otimes T^n.$$

De plus on a :

$$\|u\| = \max_n \|m_n\|.$$

(III. 7. 8) EXERCICE. - Soient  $X$  un espace affinoïde,  $A = \mathcal{O}(X)$ ,  $f \in \mathcal{O}(X)$ ,  $X_+ = \{x \in X \mid |f(x)| \geq 1\}$ ,  $B = \mathcal{O}(X_+) = A \langle T \rangle / (Tf-1)$  et  $s$  la surjection de  $A \langle T \rangle$  sur  $B$ .

1°) Soit  $M$  un  $A$ -module. Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow M \otimes_A A \langle T \rangle \xrightarrow{\mathbb{1}_M \otimes (Tf-1)} M \otimes_A A \langle T \rangle \xrightarrow{\mathbb{1}_M \otimes s} M \otimes B \longrightarrow 0$$

où  $\mathbb{1}_M \otimes (Tf-1)(m \otimes u) = m \otimes (Tf-1)u$  est une suite exacte (il suffit de montrer que  $\mathbb{1}_M \otimes (Tf-1)$  est injectif, utiliser III. 7. 7).

2°) En déduire que l'homomorphisme  $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X_+)$  est plat (utiliser 1°) et le diagramme du serpent).

(III. 7. 9) EXERCICE. - Soient  $X$  un espace affinoïde,  $A = \mathcal{O}(X)$ ,  $f \in A = \mathcal{O}(X)$ ,  $X_- = \{x \in X \mid |f(x)| \leq 1\}$ ,  $B = \mathcal{O}(X_-) = \frac{A \langle T \rangle}{(T-f)}$  et  $s$  la surjection de  $A \langle T \rangle$  sur  $B$ .

1°) Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini. Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow M \otimes_A A \langle T \rangle \xrightarrow{\mathbb{1}_M \otimes (T-f)} M \otimes_A A \langle T \rangle \xrightarrow{\mathbb{1}_M \otimes s} M \otimes B \longrightarrow 0.$$

est exacte (il suffit de montrer que  $\mathbb{1}_M \otimes (T-f)$  est injectif ; considérer  $\sum m_i \otimes T^i$  appartenant à  $\ker(\mathbb{1}_M \otimes (T-f))$ ,  $M_1$  le sous-module engendré par  $\{m_i\}$  qui est de type fini, en déduire l'existence d'un  $n$  tel que  $f^n M_1 = \{0\}$ , en conclure que  $m_0 = 0 \dots$  etc...).

2°) Déduire de 1°) que  $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X_-)$  est plat.

(III. 7. 10) EXERCICE (une autre démonstration de la platitude

$$\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$$

Soient  $X$  un espace affinoïde,  $Y$  un sous-ensemble rationnel défini par

$$Y = \{x \in X \mid |f_0(x)| \geq |f_i(x)| \text{ pour } 0 \leq i \leq n\},$$

où  $f_i \in \mathcal{O}(X)$  et  $\mathcal{O}(X) = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ .

1°) Montrer qu'il existe  $\pi \in k^X$  tel que

$$Y \subset \{x \in X \mid |f_0(x)| \geq |\pi| \} = X_+.$$

2°) Supposons  $\mathcal{O}(X_+) \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$  plat. Montrer que  $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$  est plat (remarquer que  $M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(Y) = (M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_+)) \otimes_{\mathcal{O}(X_+)} \mathcal{O}(Y)$  et utiliser III. 7. 8.

3°) Pour  $1 \leq k \leq n$ , posons :

$$Y_k = \{x \in X \mid |f_0(x)| \geq |f_i(x)| \text{ } 0 \leq i \leq k\}.$$

$$Y_{k+1} = \{x \in Y_k \mid |f_0(x)| \geq |f_{k+1}(x)| \}.$$

Montrer que  $\mathcal{O}(Y_k) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_{k+1})$  est plat ( $1 \leq k \leq n-1$ ) (remarquer que  $f_0|_{Y_k}$  est inversible et utiliser III. 7. 9).

4°) En déduire que  $\mathcal{O}(X_+) \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$  est plat et donc que  $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$  est plat.

### III. 8. - Faisceaux localement libres

Nous allons voir, dans ce paragraphe, que les faisceaux localement libres de rang  $n$  (III. 6. 1) sont reliés au premier groupe de cohomologie  $H^1(X, \text{Gl}_n)$  où  $\text{Gl}_n$  est le faisceau des matrices carrées inversibles, et que la trivialité de  $H^1(X, \mathcal{O}^X)$  est rattachée au fait que  $\mathcal{O}(X)$  est un anneau factoriel.

(III. 8. 1) Le faisceau  $Gl_n$ . - Soit  $X$  un espace analytique, pour tout ouvert admissible  $U$ , soit  $Gl_n(U) = Gl_n(\mathcal{O}(U))$  le sous-groupe de  $M_n(\mathcal{O}(U))$  des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathcal{O}(U)$  et inversibles dans  $M_n(\mathcal{O}(U))$ . Si  $U \subset V$  le morphisme de  $\mathcal{O}(V)$  dans  $\mathcal{O}(U)$  induit un morphisme de  $Gl_n(V)$  dans  $Gl_n(U)$ . Ainsi on définit un "faisceau" sur  $X$ , noté  $Gl_n$ . La notion de faisceau est un peu plus générale puisque  $Gl_n(\mathcal{O}(U))$  n'est pas (en général) un groupe commutatif. Si  $n=1$ , on a  $Gl_n = \mathcal{O}^*$ . Bien que  $Gl_n(U)$  ne soit pas un groupe abélien, on peut définir  $H^1(X, Gl_n)$  de façon analogue à (I. 4. 1) ; néanmoins  $H^1(X, Gl_n)$  n'a pas de structure de groupe.

Soit  $A$  un anneau commutatif,  $n \geq 1$  un entier, notons  $\mathcal{P}_n(A)$  l'ensemble des classes de  $A$ -modules projectifs de rang  $n$  sur  $A$  pour la relation d'équivalence d'isomorphie.

Soit  $X$  un espace analytique, notons  $\mathcal{L}_n(X)$  l'ensemble des classes de faisceaux sur  $X$  localement libres de rang  $n$  (III. 6. 1) pour la relation d'équivalence d'isomorphie.

Il est facile de vérifier que  $(M, N) \mapsto M \otimes_A N$  induit sur  $\mathcal{P}_1(A)$  une loi de groupe (N. Bourbaki, Alg. com., chap. II, §. 5, n° 4). De même  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \mapsto \mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}_2$  induit une loi de groupe sur  $\mathcal{L}_1(X)$ .

(III. 8. 2) THÉORÈME. - i) Soit  $X$  un espace analytique. Il y a une bijection "canonique" entre l'ensemble  $H^1(X, Gl_n)$  et  $\mathcal{L}_n(X)$ . Si  $n=1$  cette bijection est un homomorphisme de groupe, c'est-à-dire le groupe  $H^1(X, \mathcal{O}^*)$  est isomorphe au groupe  $\mathcal{L}_1(X)$  des classes de faisceaux inversible sur  $X$ .

ii) Soit  $X$  un espace analytique affinofde. Il y a une bijection "canonique" entre l'ensemble  $H^1(X, Gl_n)$  et l'ensemble  $\mathcal{P}_n(\mathcal{O}(X))$ . Si  $n=1$ , cette bijection est un isomorphisme, c'est-à-dire le groupe  $H^1(X, \mathcal{O}^*)$  est isomorphe au groupe  $\mathcal{P}_1(\mathcal{O}(X))$  aussi noté  $Cl(\mathcal{O}(X))$  des classes de modules projectifs de rang 1 sur  $\mathcal{O}(X)$ .

DÉMONSTRATION. - i) Soient  $\mathcal{F}$  un faisceau localement libre de rang  $n$  sur  $X$ ,  $\{X_i\}$  un recouvrement admissible de  $X$  possédant les propriétés i) à iv) de la définition III. 6.1. Soient

$\varphi_i : \mathcal{O}(X_i)^n \longrightarrow \mathcal{F}(X_i)$  un isomorphisme donné pour chaque  $i$ .

Soit  $\alpha_{ij}$  l'isomorphisme de  $\mathcal{O}(X_i \cap X_j)^n$  défini par

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}(X_i \cap X_j) & \\ \varphi_i \otimes \mathbb{1} \swarrow & & \searrow (\varphi_j \otimes \mathbb{1})^{-1} \\ \mathcal{O}(X_i \cap X_j)^n = \mathcal{O}(X_i)^n \otimes \mathcal{O}(X_i \cap X_j) & \xrightarrow{\alpha_{ij}} & \mathcal{O}(X_i \cap X_j)^n. \end{array}$$

Ainsi  $\alpha_{ij} \in \text{Gl}_n(\mathcal{O}(X_i \cap X_j))$ . L'élément  $(\alpha_{ij})$  est un 1-cocycle pour  $\text{Gl}_n$  et le recouvrement  $\{X_i\}$  de  $X$ . Un simple calcul montre que la construction précédente définit l'isomorphisme cherché.

ii) Soient  $X$  un espace affinoïde,  $\mathcal{F}$  un faisceau localement libre sur  $X$ , alors le théorème III. 6. 2 montre que  $M = \mathcal{F}(X)$  est un  $\mathcal{O}(X)$ -module de type fini et que  $\mathcal{F} = \tilde{M}$ .

Supposons  $M$  projectif de rang  $n$ . Alors il existe  $f_0, f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}(X)$  tels que  $f_0 \mathcal{O}(X) + f_1 \mathcal{O}(X) + \dots + f_s \mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$  et que le  $\mathcal{O}(X)_{f_i}$ -module  $M_{f_i}$  soit libre (de rang  $n$ ) pour  $0 \leq i \leq s$  (théorème 1, §. 5, n° 2, chap. II, algèbre commutative, N. Bourbaki, [6]).

Soit  $\{X_0, X_1, \dots, X_s\}$  le recouvrement de  $X$  défini par

$$X_i = \{x \in X \mid |f_i(x)| \geq |f_j(x)| \text{ pour } j = 0, 1, \dots, s\}.$$

Comme  $f_i$  est inversible dans  $\mathcal{O}(X_i)$  on a :

$$M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_i) = M_{f_i} \otimes_{\mathcal{O}(X)_{f_i}} \mathcal{O}(X_i).$$

Il s'ensuit que  $M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X_i)$  est un  $\mathcal{O}(X_i)$ -module libre de rang  $n$  et le faisceau  $\tilde{M}$  est donc localement libre de rang  $n$ .



Supposons  $\tilde{M}$  localement libre de rang  $n$ . Pour chaque  $x \in X$  (qui correspond à un idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $\mathcal{O}(X)$ ) on a  $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}^{\wedge} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{X, x}$  (où  $\hat{\phantom{x}}$  désigne, complété de l'anneau local pour la topologie définie par son idéal maximal). Ainsi donc  $M \otimes \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}^{\wedge} \xrightarrow{\sim} M \otimes \hat{\mathcal{O}}_{X, x}$  et comme  $\tilde{M}$  est localement libre, on en déduit que  $M \otimes \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}^{\wedge}$  est libre de rang  $n$  sur  $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}^{\wedge}$ . Le lemme de Nakayama montre alors que  $M \otimes \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}$  est libre sur  $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}$  de rang  $n$  (théorème 2, §.5, chap. II, algèbre commutative, N. Bourbaki, [6]).

Rappelons qu'un espace affinoïde  $X$  est dit connexe si les seuls idempotents de  $\mathcal{O}(X)$  sont 0 et 1 et qu'il est dit régulier si pour tout  $\mathfrak{M}$  de  $\mathcal{O}(X)$  l'anneau  $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}^{\wedge}$  est régulier (II.7.3).

(III.8.3) THÉORÈME. - Soit  $X$  un espace affinoïde connexe et régulier. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) Tout  $\mathcal{O}(X)$ -module projectif de rang 1 est isomorphe à  $\mathcal{O}(X)$
- ii)  $H^1(X, \mathcal{O}^x) = (0)$
- iii) l'anneau  $\mathcal{O}(X)$  est factoriel.

DÉMONSTRATION. - L'équivalence entre i) et ii) est donnée par le théorème III.8.2. Il nous reste à montrer l'équivalence entre i) et iii).

Montrons que i) implique iii). Il suffit de montrer que tout premier  $\mathfrak{P}$  de hauteur 1 est principal. Pour chaque idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $\mathcal{O}(X)$ , l'anneau  $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}$  est régulier. Ainsi  $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}$  est factoriel (théorème 48, p. 142, commutative algebra, Matsumura, [37]) et par conséquent, l'idéal premier  $\mathfrak{P} \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{M}}$  est engendré par un élément. Ceci implique que  $\mathfrak{P}$  est un module projectif de rang 1 (théorème 2, §.5, chap. II, algèbre commutative, N. Bourbaki, [6]). Ainsi i) montre que  $\mathfrak{P}$  est principal.

Montrons que iii) implique i). Soit  $M$  un  $\mathcal{O}(X)$ -module projectif de rang 1. Le module  $M$  se plonge dans  $M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \text{Qt}(\mathcal{O}(X)) \simeq \text{Qt}(\mathcal{O}(X))$  où  $\text{Qt}(\mathcal{O}(X))$  est le corps des fractions de  $\mathcal{O}(X)$ . Ceci montre qu'on peut supposer que  $M$  est un idéal (projectif) de  $\mathcal{O}(X)$ , engendré par  $m_1, \dots, m_t \in \mathcal{O}(X)$ . Comme  $\mathcal{O}(X)$  est un anneau factoriel on peut supposer que p. g. c. d.  $(m_1, m_2, \dots, m_t) = 1$ . Puisque  $M$  est projectif, il existe  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}(X)$  tels que  $f_1 \mathcal{O}(X) + \dots + f_s \mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$  et que  $M_{f_i}$  soit libre de rang 1 sur  $\mathcal{O}(X)_{f_i}$ . On a donc :  $M_{f_1} = \alpha \mathcal{O}(X)_{f_1} \subset \mathcal{O}(X)_{f_1}$ , on peut supposer que  $\alpha \in \mathcal{O}(X)$  et que p. g. c. d.  $(\alpha, f_1) = 1$ . Alors il existe un entier  $n$  tel que  $f_1^n M \subset \alpha \mathcal{O}(X)$ . Comme p. g. c. d.  $(\alpha, f_1) = 1$ , on trouve que  $\alpha \in \mathcal{O}(X)^{\times}$ . Ainsi  $M_{f_1} = \mathcal{O}(X)_{f_1}$  et il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $f_1^n \in M$ . De même, il existe  $n_2, \dots, n_s$  tels que  $f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \dots, f_s^{n_s} \in M$ . De  $f_1 \mathcal{O}(X) + \dots + f_s \mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$  il suit que  $M = \mathcal{O}(X)$ .

(III. 8. 4) THÉORÈME. - Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in k$  tels que  $0 \leq |a_i| \leq |b_i|$  et  $|b_i| > 0$ . Soit  $A$  l'algèbre des séries  $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} a_{\nu} Z^{\nu}$ ,  $a_{\nu} \in k$  et convergentes sur  $X(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$  défini par :

$$X(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \mid |a_i| \leq |z_i| \leq b_i \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Alors l'algèbre  $A$  est affinofde et factorielle et l'on a  $X = \text{Sp}(A)$ .

DÉMONSTRATION. - Supposons que  $|a_i| > 0$  pour  $1 \leq i \leq s$  et  $a_i = 0$  pour  $i > s$ . Il est alors aisé de montrer que  $A$  est isomorphe à l'algèbre

$$\frac{k \langle X_1, \dots, X_n, T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_s \rangle}{(X_1 - b_1 T_1, \dots, X_n - b_n T_n, X_1 S_1 - a_1, \dots, X_s S_s - a_s)}.$$

Si  $a_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ , on a :

$$A \simeq \frac{k \langle X_1, \dots, X_n, T_1, \dots, T_n \rangle}{(X_1 - b_1 T_1, \dots, X_n - b_n T_n)}.$$

Il est aussi facile de vérifier que  $X(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n)$  s'identifie à  $\text{Sp}(A)$ . D'autre part l'espace analytique  $X(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n) = \text{Sp}(A)$  est connexe et régulier. Alors (III. 8. 2) et (III. 8. 3) montrent qu'il suffit de prouver que tout faisceau inversible sur  $X(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n)$  est trivial (c'est-à-dire isomorphe à  $\tilde{A}$ ).

Si  $\left| \frac{a_i}{b_i} \right| = 0$  ou  $1$ , le théorème II. 8. 9 montre que  $A$  est factoriel. Soit  $\alpha_A$  le nombre d'indices  $i$  tels que  $\left| \frac{a_i}{b_i} \right| \notin \{0, 1\}$ . Supposons le théorème démontré pour  $\alpha_A < N$ . Soit  $A$  une algèbre satisfaisant les hypothèses du théorème III. 8. 4 avec  $\alpha_A = N$ , supposons  $0 < |a_1| < |b_1|$ . Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$ . Soit  $\mathcal{L}_1$  un faisceau inversible sur  $X(0, a_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$ , par hypothèse de récurrence et en utilisant III. 8. 3 et III. 8. 2, ce faisceau est unique à isomorphisme près. De même, sur  $X(a_1, a_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$  les faisceaux inversibles sont uniques à isomorphismes près. Il suit alors que  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}_1$  se recollent en un faisceau inversible  $\mathcal{L}'$  sur  $X(0, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$ . Or, par hypothèse de récurrence, le faisceau  $\mathcal{L}'$  est trivial ; ce qui prouve que  $\mathcal{L}$  est trivial.

(III. 8. 5) EXERCICE (un lemme de Cartan). - Soient  $\mathbb{P}$  la droite projective,

$$X_1 = \{z \in \mathbb{P} \mid |z| \leq 1\}, \quad X_2 = \{z \in \mathbb{P} \mid |z| \geq 1\} \quad \text{et} \quad X_{12} = X_1 \cap X_2.$$

1°) Montrer que le groupe des classes de faisceaux inversibles sur  $\mathbb{P}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  (utiliser I. 6. 2 et III. 8. 2).

2°) Soit  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\mathfrak{F}_n$  le faisceau sur  $\mathbb{P}$  défini ainsi : si  $U$  est admissible dans  $\mathbb{P}$  on pose

$$\mathfrak{F}_n(U) = \{(v_1, v_2) \in \mathcal{O}(X_1 \cap U) \oplus \mathcal{O}(X_2 \cap U) \mid v_1 = z^n v_2 \text{ sur } X_{12} \cap U\},$$

les applications de transition se déduisent de celles de  $\mathcal{O}$ .

Montrer que  $\mathfrak{F}_n$  est un faisceau inversible et que tout faisceau inversible sur  $\mathbb{P}$  est isomorphe à un  $\mathfrak{F}_n$  (c'est la démonstration de III. 8. 2).



## CHAPITRE IV : LES COURBES ET LEURS RÉDUCTIONS

- IV. 1. - La courbe de Tate
- IV. 2. - Modèle de Néron
- IV. 3. - Réduction stable d'une courbe
- IV. 4. - Réductions analytiques

Le but de ce chapitre est d'introduire quelques procédés pour étudier les courbes algébriques définies sur un corps valué complet. En (IV. 1) on étudie les courbes de genre 1, on montre que les courbes elliptiques  $E$  dont l'invariant modulaire  $j(E)$  est tel que  $|j(E)| > 1$  admettent une représentation analytique analogue au cas complexe, la courbe de Tate. On présente ensuite trois méthodes de réduction qui permettent d'associer à une courbe sur  $k$  une courbe définie sur  $\bar{k}$  : le modèle de Néron, la réduction stable et la réduction analytique. Le modèle de Néron (IV. 2) est particulièrement bien adapté aux variétés abéliennes, la réduction stable permet entre autre de caractériser les courbes de Mumford. Enfin on verra que les réductions analytiques (IV. 4) correspondent aux réductions algébriques dans le cas des variétés projectives.

### IV. 1. - La courbe de Tate

Une courbe algébrique  $\mathcal{C}$  sur le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$  possède une structure canonique d'espace analytique de dimension 1 sur  $\mathbb{C}$ . Si  $\mathcal{C}$  est non-singulière et complète, alors  $\mathcal{C}$  est une surface de Riemann compacte pour sa structure analytique. On peut étudier  $\mathcal{C}$  en utilisant son revêtement universel  $u : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ .

L'espace topologique  $\Omega$  est muni d'une structure de surface de Riemann telle que  $u$  soit localement biholomorphe. Le groupe  $\Gamma$  des automorphismes du revêtement  $u : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}$  (qui est isomorphe à  $\pi_1(\mathcal{C})$ ) agit sur  $\Omega$  sans point fixe et chaque  $\gamma \in \Gamma$  est une application biholomorphe sur  $\Omega$ .

La surface de Riemann  $\Omega$  qui est simplement connexe est isomorphe à l'une des trois surfaces de Riemann suivantes :

$$(1) \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$(2) \quad \mathbb{C}$$

$$(3) \quad H = \text{le demi-plan de Poincaré.}$$

Dans le cas (1) on a  $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ,  $\pi_1(\mathcal{C}) = \{1\}$  et le genre de  $\mathcal{C}$  est 0. Dans le cas (2),  $\Gamma$  agit comme groupe d'automorphismes de  $\mathbb{C}$  sans points fixes et tel que  $\mathbb{C}/\Gamma \simeq \mathcal{C}$  soit compact. On voit aisément que  $\Gamma = \{z \rightarrow z + \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  où  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbb{C}$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est de genre 1, c'est une courbe elliptique. Inversement, pour chaque réseau  $\Lambda$  de  $\mathbb{C}$ , la surface de Riemann  $\mathbb{C}/\Lambda$  est une courbe elliptique. Une courbe elliptique  $E$  peut être considérée comme une variété abélienne de dimension 1 ; une autre démonstration de  $E \simeq \mathbb{C}/\Lambda$  pour un réseau convenable  $\Lambda$  se trouve au chapitre VI.

Dans le cas (3),  $\Gamma$  est un sous-groupe du groupe  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  de tous les automorphismes de  $H$  et  $H/\Gamma$  est une courbe de genre supérieur à 1.

Nous désirons étudier la structure analytique d'une courbe  $\mathcal{C}$  définie sur un corps  $k$  valué complet (pour une valeur absolue non archimédienne). Le cas des courbes de genre supérieur à 1 est lié aux groupes de Schottky et ce cas est traité dans [21]. Les résultats principaux sont les théorèmes 2.12.2 et 3.10 [21] (voir ici le théorème IV.3.13).

Considérons maintenant une courbe  $E$  de genre 1, un calcul simple montre que  $k$  ne possède pas de sous-groupes discrets

d'automorphismes  $\Gamma$  tels que  $k/\Gamma$  soit isomorphe à  $E$ . Pour trouver une uniformisation dans le cas non archimédien il faut donc changer le point de vue dans le cas complexe. Deux réseaux  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  de  $\mathbb{C}$  donnent des courbes  $\mathbb{C}/\Lambda$  et  $\mathbb{C}/\Lambda'$  isomorphes si et seulement si il existe  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $a\Lambda = \Lambda'$ . On peut donc supposer que  $E \simeq \mathbb{C}/\Lambda$  où  $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$  avec  $\text{Im}(\tau) > 0$ . L'application  $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , donnée par  $e(z) = e^{2\pi iz}$  induit alors un isomorphisme  $\mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times / \langle q \rangle$  où  $\langle q \rangle$  est le sous-groupe de  $\mathbb{C}^\times$  engendré par  $q = e^{2\pi i\tau}$  (on a  $|q| < 1$ ).

Dans le cas non-archimédien, on cherche un isomorphisme de la forme  $E \xrightarrow{\sim} k^\times / \langle q \rangle$  où  $q \in k$  et  $0 < |q| < 1$ . Le "revêtement universel" de  $E$  est alors  $k^\times$  (dans [21] on a précisé la notion de revêtement universel). Contrairement au cas complexe, l'espace analytique  $k^\times$  n'a pas de cohomologie pour les faisceaux constants (exercice de I. 8.11) et on peut considérer  $k^\times$  comme un "espace connexe, simplement connexe". Contrairement aussi au cas complexe les quotients  $k^\times / \langle q \rangle$  ne décrivent pas toutes les courbes elliptiques (IV.1.9). Néanmoins, en caractéristique nulle il existe une représentation analytique locale pour toute courbe elliptique [36] : soit  $E$  une courbe elliptique sur  $K$  (de caractéristique nulle) ; alors il existe un affinoïde  $U \subset E$  et contenant l'élément neutre de  $E$  et un isomorphisme  $u : \{z \in K \mid |z| \leq 1\} \xrightarrow{\sim} U$ . L'application  $u$  est biholomorphe et est un isomorphisme de groupe.

(IV.1.0) L'espace analytique  $\mathbb{T} = K^\times / \langle q \rangle$

Soient  $K$  algébriquement clos complet et  $q \in K^\times$  avec  $0 < |q| < 1$ ,  $\langle q \rangle = \{q^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  le sous-groupe de  $K^\times$  engendré par  $q$ . Le quotient  $K^\times / \langle q \rangle$  est un groupe et nous allons voir que  $\mathbb{T} = K^\times / \langle q \rangle$  a aussi une structure d'espace analytique sur  $K$ . La topologie de  $\mathbb{T}$  est induite par celle de  $K^\times$ . La topologie de Grothendieck est définie de la façon suivante : une partie  $X \subset \mathbb{T}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $X \neq \mathbb{T}$  est admissible s'il existe un affinoïde  $Y \subset K^\times$  tel que la projection canonique

$\text{pr} : K^x \longrightarrow \mathbb{T}$  induit une bijection de  $Y$  sur  $X$ . Soient  $X_1, X_2$  admissibles et  $X_1 \neq \mathbb{T}$ , alors  $X_1 \cap X_2$  est admissible parce que  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (Y_1 \cap q^n Y_2)$  est une réunion finie d'affinofdes, donc est affinofde et que  $\text{pr}$  est une bijection de  $Y$  sur  $X_1 \cap X_2$ . Les recouvrements admissibles sont les recouvrements finis.

Le faisceau  $\mathcal{O}$  sur  $\mathbb{T}$  est défini par  $\mathcal{O}(\emptyset) = \{0\}$ ,  $\mathcal{O}(\mathbb{T}) = K$  et  $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)$  où  $Y$  est un affinofde de  $K^x$  tel que  $\text{pr}|_Y$  soit une bijection de  $Y$  sur  $X$ . On vérifie d'abord que pour tout autre choix de  $Y'$  on a  $\mathcal{O}(Y') \simeq \mathcal{O}(Y)$  ( $\mathcal{O}(Y)$  est défini selon I.1.3) et que  $\mathbb{T}$  est ainsi muni d'une structure d'espace analytique. L'espace  $\mathbb{T}$  est réunion des deux ensembles admissibles  $X_1, X_2$  images de

$$Y_1 = \{z \in K \mid \sqrt{|q|} \leq |z| \leq 1\}, \quad Y_2 = \{z \in K \mid |q| \leq |z| \leq \sqrt{|q|}\}.$$

L'intersection  $X_1 \cap X_2$  est l'image de  $U_1 \cup U_2$  avec

$$U_1 = \{z \in K \mid |z| = 1\}, \quad U_2 = \{z \in K \mid |z| = \sqrt{|q|}\}.$$

La cohomologie de  $\mathcal{O}$  sur  $\mathbb{T}$  est égale à la cohomologie de Čech pour le recouvrement  $\{X_1, X_2\}$  de  $\mathbb{T}$  parce que  $\mathcal{O}$  n'a pas de cohomologie sur  $X_1, X_2$  et  $X_1 \cap X_2$ . On considère donc le complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(X_1) \oplus \mathcal{O}(X_2) \xrightarrow{d} \mathcal{O}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0.$$

Prenons  $\pi \in K^x$  tel que  $q = \pi^2$ . Alors

$$\mathcal{O}(X_1) = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n > 0} b_n \left(\frac{\pi}{z}\right)^n \mid \lim a_n = \lim b_n = 0 \right\}$$

$$\mathcal{O}(X_2) = \left\{ \sum_{n \geq 0} c_n \left(\frac{z}{\pi}\right)^n + \sum_{n > 0} d_n \left(\frac{q}{z}\right)^n \mid \lim c_n = \lim d_n = 0 \right\}$$

$$\mathcal{O}(X_1 \cap X_2) = \mathcal{O}(U_1) \oplus \mathcal{O}(U_2) \quad \text{et}$$

$$\mathcal{O}(U_1) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n z^n \mid \lim e_n = 0 \right\}$$

$$\mathcal{O}(U_2) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\frac{z}{\pi}\right)^n \mid \lim f_n = 0 \right\}.$$

Un calcul immédiat montre que  $H^0(\mathbb{T}, \mathcal{O})$  est de dimension 1 engendré par l'élément  $(1, 1) \in \mathcal{O}(X_1) \oplus \mathcal{O}(X_2)$ , d'autre part  $H^1(\mathbb{T}, \mathcal{O})$



est aussi de dimension 1 engendré par  $(1, 0) \in \mathcal{O}(U_1) \oplus \mathcal{O}(U_2)$ .  
 Donc  $H^0(\mathbb{T}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(\mathbb{T}) = K$  et  $\dim_K H^1(\mathbb{T}, \mathcal{O}) = 1$ .

Le corps  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{T}$

Soit  $\mathcal{M}$  le faisceau des fonctions méromorphes sur l'espace analytique  $\mathbb{T}$  (III. 7). Clairement,  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  est défini par le noyau de  $\alpha : \mathcal{M}(X_1) \oplus \mathcal{M}(X_2) \longrightarrow \mathcal{M}(X_1 \cap X_2)$  avec  $\alpha(f_1 + f_2) = f_1 - f_2$ . Il est alors facile de montrer que  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  est un corps puisque  $\mathcal{O}(X_1)$  et  $\mathcal{O}(X_2)$  sont des anneaux principaux (I. 2. 2) ou (II. 4. 13). Nous allons montrer que ce corps est le corps des fonctions rationnelles d'une courbe algébrique complète non singulière.

Un diviseur  $D$  sur  $\mathbb{T}$  est par définition une somme formelle  $\sum_{i=1}^s n_i [x_i]$  où  $n_i \in \mathbb{Z}$  et  $x_i \in X$ . Autrement dit, les diviseurs sur  $\mathbb{T}$  constituent un groupe commutatif qui est le groupe abélien libre engendré par  $\{[x]\}_{x \in \mathbb{T}}$ .

Si  $D = \sum n_i [x_i]$  est un diviseur sur  $\mathbb{T}$  on appelle degré de  $D$  l'entier  $\sum n_i$  et on le note  $\text{deg}(D)$ .

Soit  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ ,  $f \neq 0$ , on définit comme en (I. 3. 1) l'ordre de  $f$  en  $x \in \mathbb{T}$  et on le note  $\text{ord}_x f$ . Ainsi à  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  et  $f \neq 0$  on associe le diviseur  $\sum \text{ord}_x f \cdot [x]$  et on note ce diviseur  $(f)$ .

On dit que le diviseur  $D = \sum n_i [x_i]$  est positif si  $n_i \geq 0$  pour tout  $i$  et on le note  $D \geq 0$ .

(IV. 1. 1) LEMME (Riemann-Roch). - Soient  $D \geq 0$ ,  $D \neq 0$  un diviseur sur  $\mathbb{T}$ ,  $L(D)$  l'espace vectoriel des  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  tels que  $(f) + D \geq 0$ . Alors on a  $\dim_K L(D) = \text{deg}(D)$ .

DÉMONSTRATION. - L'inégalité  $(f) \geq -D = \sum_{i=1}^s -n_i [x_i]$  signifie que  $f$  a seulement des pôles en  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , d'ordre au plus  $n_i$ .

Soit  $\{X_1, X_2\}$  un recouvrement de  $\mathbb{T}$  tel que  $\{x_1, x_2, \dots, x_s\} \cap X_1 \cap X_2 = \emptyset$ . Soient  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ ,  $x \in \mathbb{T}$  et  $t_x$  un

paramètre local pour  $x$ . Alors  $f$  se développe en série de Laurent sous la forme

$$f = \sum_{n \gg -\infty} a_n(x) t_x^n.$$

Soit  $V$  l'espace vectoriel des éléments  $\xi$  de la forme

$$\xi = \left( \sum_{-n_1 \leq n \leq 0} a_{n,1} t_{x_1}^n, \sum_{-n_2 \leq n < 0} a_{n,2} t_{x_2}^n, \dots, \sum_{-n_s \leq n < 0} a_{n,s} t_{x_s}^n \right).$$

L'espace vectoriel  $V$  a pour dimension  $\deg(D)+1$  ou  $\deg(D) = \sum n_i$ .

Pour  $\xi \in V$  il existe  $f_1 \in \mathcal{M}(X_1)$  (resp.  $f_2 \in \mathcal{M}(X_2)$ ) tel que pour  $x_i \in X_1$  (ou  $x_i \in Y_1$ ) on a

$$f_1 = \sum_{-n_1 \leq n \leq 0} a_{n,i} t_{x_i}^n + \sum_{n \geq 1} b_n t_{x_i}^n$$

et pour  $x_i \in X_2$

$$f_2 = \sum_{-n_1 \leq n \leq 0} a_{n,i} t_{x_i}^n + \sum_{n \geq 0} b_n t_{x_i}^n.$$

L'élément  $f_1 - f_2 \in \mathcal{O}(X_1 \cap X_2)$  a une image  $\alpha(\xi)$  dans  $H^1(\mathbb{T}, \mathcal{O})$  indépendante du choix de  $f_1$  et  $f_2$ . De plus l'application  $\beta : L(D) \rightarrow V$  définie par

$$\beta(f) = \left( \sum_{-n_1 \leq n \leq 0} a_n(x_1) t_{x_1}^n, \sum_{-n_2 \leq n < 0} a_n(x_2) t_{x_2}^n, \dots, \sum_{-n_s \leq n < 0} a_n(x_s) t_{x_s}^n \right)$$

est une injection et  $\text{im } \beta = \ker \alpha$ . Donc  $\deg(D) \leq \dim L(D) \leq \deg(D)+1$ .

Puisque  $D \neq 0$ , on peut supposer que  $n_1 \geq 1$ . Un calcul direct montre que  $\alpha(t_{x_1}^{-1}, 0, \dots, 0) \neq 0$ . Donc on a  $\dim L(D) = \deg(D)$ .

En effet, supposons  $x_1 \in X_1$ , prenons  $f_1 = \frac{1}{z-x_1}$  et  $f_2 = 0$ . On trouve que l'image de  $f_1 - f_2$  dans  $H^1(\mathbb{T}, \mathcal{O})$  est non nulle.

EXERCICES. - Soit  $\tilde{\mathbb{A}}$  un faisceau constant sur  $\mathbb{T}$ , calculer  $H^i(\mathbb{T}, \tilde{\mathbb{A}})$ . Soit  $\Omega$  le faisceau des différentielles sur  $\mathbb{T}$ , calculer  $H^i(\mathbb{T}, \Omega)$ .

L'espace analytique.  $\mathbb{T}$  est une courbe algébrique

Soit 1 l'élément neutre du groupe  $\mathbb{T}$ ,  $n \geq 1$ , alors  $L(n[1])$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  (IV.1.1). Soit  $\{1, x\}$  une base de  $L(2[1])$  et  $\{1, x, y\}$  une base de  $L(3[1])$ . Les sept éléments  $1, x, y, x^2, xy, x^3, y^2$  de  $L(6[1])$  sont linéairement dépendants sur  $K$ . Ces éléments satisfont donc une équation de la forme

$$(*) \quad y^2 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 xy + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y + \lambda_5 x + \lambda_6 = 0 \quad \text{avec } \lambda_i \in K \text{ et } \lambda_1 \neq 0.$$

THÉORÈME. - Soient  $x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$  définis comme ci-dessus.

(IV.1.2) Alors  $\mathfrak{M}(\mathbb{T}) = K(x, y)$ . De plus  $K(x)$  est une extension transcendante pure de  $K$  et  $K(x, y)$  est une extension de degré 2 de  $K(x)$ .

(IV.1.3) L'espace analytique  $\mathbb{T}$  est isomorphe à la courbe projective non singulière  $\mathcal{C}$  (comme espace analytique) définie par l'équation homogène

$$(*') \quad Y^2 Z + \lambda_1 X^3 + \lambda_2 X Y Z + \lambda_3 X^2 Z + \lambda_4 Y Z^2 + \lambda_5 X Z^2 + \lambda_6 Z^3 = 0, \lambda_1 \neq 0.$$

Cette courbe  $\mathcal{C}$  est de genre 1. Le corps  $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$  s'identifie par l'isomorphisme entre  $\mathbb{T}$  et  $\mathcal{C}$  au corps des fonctions rationnelles sur  $\mathcal{C}$ .

DÉMONSTRATION. - Soient toujours  $x, y$  les fonctions méromorphes sur  $\mathbb{T}$  définies comme ci-dessus. Soient  $p_0, p_1$  deux polynômes à coefficients dans  $K$ . Un calcul de l'ordre du point  $1 \in \mathbb{T}$  de  $p_0(x) + p_1(x)y$  montre que  $p_0(x) + p_1(x)y = 0$  si et seulement si  $p_0 = p_1 = 0$ . Ceci montre que  $K(x)$  est une extension transcendante

de  $K$  et que  $K(x, y)$  est une extension de degré 2 de  $K(x)$ .

Soit  $V_n = \{x^\alpha y^\beta \mid 0 \leq \alpha, 0 \leq \beta \leq 1 \text{ et } 2\alpha + 3\beta \leq n\}$ . Un calcul simple de l'ordre en  $1 \in \mathbb{T}$  montre facilement que les  $n$  éléments  $x^\alpha y^\beta$  sont linéairement indépendants, ils constituent donc une base de  $L(n[1])$ . Soit  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  le recouvrement de  $\mathbb{T}$  par  $\{X_1, X_2\}$  montre que  $f$  n'a qu'un nombre fini de pôles. Ainsi il existe un polynôme  $p$  à coefficients dans  $K$  tel que  $p(x) f$  n'a pas de pôle en dehors de  $1$ . Ainsi  $p(x) f \in L(n[1])$  pour un  $n$  convenable et donc  $f \in K(x, y)$ . Ce qui montre (IV.1.2).

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe irréductible projective dans  $\mathbb{P}^2$  donnée par l'équation (\*'). Alors  $\mathcal{C}$  a un seul point à l'infini,  $c_\infty = \Gamma 0, 1, 0 \Gamma$ . Soit  $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{C}$  l'application donnée par  $\varphi(t) = \Gamma x(t), y(t), 1 \Gamma$  où  $t \in \mathbb{T}$ ,  $t \neq 1$  et  $\varphi(1) = c_\infty$ . Il s'agit de montrer que  $\varphi$  est bijective. Le corps  $K(\mathcal{C})$  des fonctions rationnelles sur  $\mathcal{C}$  est  $K(x)[y]$ , i.e. l'extension de degré 2 définie par (\*) de l'extension transcendante  $K(x)$ . Alors (IV.1.2) montre que  $h \mapsto h \circ \varphi$  est un isomorphisme de  $K(\mathcal{C})$  sur  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ . Soient  $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ ,  $t_1 \neq t_2$ ; soit  $f \in L([t_1])$ , et  $f$  non constant, alors  $f(t_1) \neq f(t_2)$ . Il suit de l'isomorphisme entre  $K(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  que  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ . Soit  $c \in \mathcal{C}$ , il existe une fonction rationnelle  $h \in K(\mathcal{C})$  ayant pour seul pôle  $c$ . La fonction  $h \circ \varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  n'est pas constante (sinon  $h$  le serait), ainsi  $h \circ \varphi$  admet un pôle  $t_0 \in \mathbb{T}$  et l'on a  $\varphi(t_0) = c$ . Ainsi  $\varphi$  est bijective. On laisse au lecteur le soin de vérifier que  $\varphi$  est un isomorphisme pour les structures d'espaces analytiques.

Enfin la courbe  $\mathcal{C}$  est sans singularité, sinon elle serait de genre 0, ce qui contredit la formule  $\dim L(n[1]) = n$ . Donc  $\mathcal{C}$  est non singulière et de genre 1.

REMARQUE. - Lorsque le corps  $k$  n'est pas algébriquement clos, on peut lui associer de façon analogue l'espace analytique  $\mathbb{T} (\simeq k^x / \langle q \rangle)$  avec  $q \in k^x$ . Les résultats (IV.1.1), (IV.1.2), (IV.1.3) sont toujours valables. Désormais nous ne ferons plus d'hypothèses sur le corps  $k$  (sauf mention expresse).

Le modèle de Weierstrass pour la courbe  $\mathcal{C} \simeq \mathbb{T}$

Le but est d'expliciter des générateurs  $x$  et  $y$  de façon à obtenir une équation (\*) explicite en fonction  $q$ . Comme conséquence, on en déduit que la multiplication de  $\mathbb{T}$  fait de  $\mathcal{C}$  un groupe algébrique.

Si  $k^{(x)}$  est un corps valué complet, nous notons brièvement  $k^x$  la variété algébrique affine définie par l'algèbre  $k[X, Y]/(1-XY)$ . Cette variété est canoniquement munie d'une structure d'espace analytique (III. 4. 6) ou (I. 7. 2). Nous notons aussi  $k^x$  l'espace analytique associé. Les isomorphismes suivants sont faciles à vérifier et laissés en exercice

$$\mathcal{O}(k^x) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mid \lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_n| R^{|n|} = 0 \text{ pour tout } R > 0 \right\}$$

$$\mathcal{O}(k^x)^x = \{ \lambda z^n \mid \lambda \in k^x \text{ et } n \in \mathbb{Z} \} .$$

De plus  $\mathfrak{M}(k^x)$  est le corps des fractions de  $\mathcal{O}(k^x)$  (pour une généralisation en dimension  $g$ , voir VI. 3. 5).

(IV. 1. 4) COROLLAIRE. - Soient  $\mathbb{T} = k^x / \langle q \rangle$  et

$$\mathfrak{M}(k^x)^{\langle q \rangle} = \{ f \in \mathfrak{M}(k^x) \mid f(qz) = f(z) \text{ pour tout } z \in k^x \} .$$

Alors  $\mathfrak{M}(\mathbb{T}) = \mathfrak{M}(k^x)^{\langle q \rangle}$  .

Le livre de P. Roquette "Analytic theory of elliptic functions over local fields" [50], prend (IV. 1. 4) comme définition des fonctions méromorphes sur la courbe  $\mathbb{T}$ . Nous suivons maintenant ce livre pour obtenir des formules explicites pour  $x, y$  et l'équation (\*) .

(IV. 1. 5) LEMME. - Soit  $\text{Div}(k^x)$  le groupe des diviseurs  $\sum n_i [x_i]$ , sur  $k$ , dont le support  $\{x_i \mid n_i \neq 0\}$  est discret. Alors la suite

$$\{0\} \longrightarrow \{ \lambda z^n \mid n \in \mathbb{Z}, \lambda \in k^x \} \longrightarrow \mathfrak{M}(k^x)^x \xrightarrow{\alpha} \text{Div}(k^x) \longrightarrow \{0\}$$

où  $\alpha(f) = \sum_{x \in k^x} \text{ord}_x(f) [x]$ , est exacte.

DÉMONSTRATION. - Clairement, si  $f \in \mathcal{M}(k^x)^x$  n'a ni zéros ni pôles, alors  $f \in \mathcal{O}(k^x)^x$ . Il reste donc à montrer que  $\alpha$  est surjective.

Soit  $D = \sum n_i [x_i] \in \text{Div}(k^x)$ . Alors  $f(z) = \prod_{|x_i| > 1} (1 - z/x_i)^{n_i} \prod_{|x_i| \leq 1} (1 - x_i z^{-1})^{n_i}$

est une fonction méromorphe sur  $k^x$ . En effet,  $f$  est méromorphe sur chaque  $\{z \in k^x \mid |\pi|^n \leq |z| \leq |\pi|^{-n}\}$  parce que le support de  $D$  est discret. De plus  $\alpha(f) = D$ .

(IV.1.6) LEMME. - Soient  $\alpha$  l'homomorphisme de  $\mathcal{M}(\mathbb{T})^x$  dans  $\text{Div}(\mathbb{T})$  défini par  $\alpha(f) = \sum_{x \in \mathbb{T}} \text{ord}_x(f) [x]$  et  $\beta$  l'homomorphisme  $\text{Div}(\mathbb{T})$  dans  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{T}$  défini par  $\beta(\sum n_i [x_i]) = (\sum n_i, (\prod_i x_i^{n_i})^{-1})$ .

Alors la suite

$$\{0\} \longrightarrow k^x \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{T})^x \xrightarrow{\alpha} \text{Div}(\mathbb{T}) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{T} \longrightarrow \{0\}$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. - La suite (IV.1.6) est obtenue de la suite (IV.1.5) en utilisant la cohomologie du groupe  $\langle q \rangle = \mathbb{Z}$ . On a

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & H^0(\mathbb{Z}, k^x \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{Z}, \mathcal{M}(k^x)^x) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{Z}, \text{Div}(k^x)) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{Z}, k^x \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ \{0\} & \longrightarrow & k^x & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \text{Div}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus k^x / \langle q \rangle & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On peut procéder de façon plus élémentaire et plus constructive.

Soit  $\theta \in \mathcal{O}(k^x)$  défini par

$$\theta(z) = \prod_{n \geq 0} (1 - q^n z^{-1}) \prod_{n > 0} (1 - q^n z)$$

Soient  $x \in k^x$  et  $\theta_x \in \mathcal{O}(k^x)$  défini par

$$\theta_x(z) = \theta(x^{-1} z)$$

Soit  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})^x$ , alors  $f$  correspond à un élément toujours noté  $f \in \mathcal{M}(k^x)^{\langle q \rangle}$  (IV.1.4). Alors  $f$  a un nombre fini de zéros et de pôles  $y_i$  sur  $\mathbb{T}$  de multiplicités  $n_i$ . Soit  $x_i \in k^x$  ayant pour image  $y_i$ .

Il est clair que l'élément  $f(z) \prod_i \theta_{x_i}^{-n_i}(z) \in \mathcal{M}(k^X)$  n'a ni zéros ni pôles sur  $k^X$ , ainsi il existe  $\lambda \in k^X$  et  $d \in \mathbb{Z}$  tels que

$$f(z) = \lambda z^d \prod_i \theta_{x_i}^{n_i}(z).$$

Il est facile de vérifier que

$$\theta_x(q^{-1}z) = x^{-1} \times (-z) \theta_x(z) \quad \text{pour tout } z \in k^X.$$

Puisque  $f(q^{-1}z) = f(z)$  il suit que

$$1 = q^{-d} \prod_i x_i^{-n_i} (z)^{\sum n_i} \quad \text{pour } z \in k^X$$

ce qui prouve que  $0 = \sum n_i$  et que  $\prod_i y_i^{-n_i} = 1$ . Ainsi  $\text{im } \alpha \subset \ker \beta$ .

Inversement, soit  $D = \sum n_i [y_i] \in \text{Div}(\mathbb{T})$  tel que  $\sum n_i = 0$  et  $\prod_i y_i^{n_i} = 1$ . Soit  $x_i \in k^X$  ayant pour image  $y_i$  tel que  $\prod_i x_i^{n_i} = 1$ , et

$$f(z) = \prod_i \theta_{x_i}^{n_i}(z).$$

Il est clair que  $f(q^{-1}z) = f(z)$ , ce qui prouve que  $\ker \beta \subset \text{im } \alpha$ .

Nous sommes maintenant en mesure de construire le modèle de Weierstrass de la courbe  $\mathcal{C} \simeq \mathbb{T}$ .

Soient

$$p_1(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{q^n z}{(1 - q^n z)^2}, \quad p'_1(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{q^{2n} z^2}{(1 - q^n z)^3}$$

(en fait, on a  $p'_1(z) = \frac{1}{2}(D p_1(z) - p_1(z))$  avec  $D = z \frac{d}{dz}$ ).

Clairement  $p_1, p'_1 \in \mathcal{M}(k^X)^{<q>}$ , on peut donc identifier  $p_1$  et  $p'_1$  à des éléments de  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  (IV.1.4). De plus  $\{1, p_1\}$  est une base de  $L(2[1])$  et  $\{1, p_1, p'_1\}$  est une base de  $L(3[1])$ . Ainsi  $\mathcal{M}(\mathbb{T}) = k(p_1, p'_1)$  (IV.1.2).

Posons maintenant

$$p(z) = p_1(z) - 2s_1, \quad p'(z) = p'_1(z) + s_1$$

avec  $s_1 = \sum_{m \geq 1} \frac{q^m}{1 - q^m}$ .

(IV.1.7) THÉORÈME. - Les fonctions  $p$  et  $p'$  définies ci-dessus satisfont l'équation

$$(**) \quad p'^2 + p p' = p^3 + B p + C$$

avec

$$B = -5s_3, \quad C = -\frac{1}{12}(5s_3 + 7s_5) \quad \text{et} \quad s_k = \sum_{m \geq 1} \frac{m^k q^m}{1 - q^m}.$$

De plus  $B$  et  $C$  sont des séries en  $q$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  (resp.  $\mathbb{F}_p$ ) si  $\text{car}(k) = 0$  (resp.  $\text{car}(k) = p$ )

$$B = -5q - 45q^2 - 140q^3 - 365q^4 \dots, \quad C = -q - 23q^2 - 154q^3 - 647q^4 \dots$$

Enfin on a  $\mathcal{M}(\mathbb{T}) = k(p, p')$ .

DÉMONSTRATION. - Voir P. Roquette [50], p. 23 à 29.

REMARQUE. - Si  $\text{car}(k) \neq 2, 3$ . Posons :

$$p_2 = p + \frac{1}{12}, \quad p'_2 = z \frac{d}{dz} p \quad ;$$

alors on a :

$$(p'_2)^2 = 4p_2^3 - g_2 p_2 - g_3, \quad \mathcal{M}(\mathbb{T}) = k(p_2, p'_2)$$

$$\text{avec } g_2 = \frac{1}{12} + 20s_3, \quad g_3 = -\frac{1}{216} + \frac{7}{3}s_5.$$

(IV.1.8) EXERCICE (formules d'addition pour  $p$  et  $p'$ ,  
 $\mathbb{T}$  est une variété abélienne)

On supposera le corps  $k$  algébriquement clos et on identifiera  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  et  $\mathcal{M}(k^x)^{< q >}$ . De plus un élément  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  pourra de façon évidente être considéré comme une application de  $\mathbb{T}$  (ou  $k^x$ ) dans  $\mathbb{P}^1(k)$ .



1°) Soient  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ ,  $f \neq 0$  et  $(f)$  le diviseur associé à  $f$ .  
 Posons  $(f) = \sum n_i [x_i]$  avec  $n_i \neq 0$ . Montrer que  $\sum n_i = 0$  et  
 $\prod_i x_i^{n_i} = 1$  (dans  $\mathbb{T}$ ) (utiliser IV.1.6).

2°) Soit  $c \in k$ . Montrer que l'équation  $p(z) = c$  a exactement deux solutions (en tenant compte de la multiplicité, elles sont de la forme  $u, 1/u$ ) (utiliser IV.1.6). Soit  $d \in \mathbb{P}^1(k)$  tel que  $\text{card}\{p^{-1}(d)\} = 1$ . Déterminer les valeurs possibles de  $p^{-1}(d)$  (on fera attention à la caractéristique 2).

3°) Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$  tels que  $z_1 \neq z_2$  et  $z_1 z_2 \neq 1$ . Montrer qu'il existe  $\alpha, \beta \in k$  uniques tels que

$$p'(z_1) = \alpha p(z_1) + \beta \quad \text{et} \quad p'(z_2) = \alpha p(z_2) + \beta.$$

4°) Montrer que l'équation  $p'(z) = \alpha p(z) + \beta$  a exactement trois solutions dans  $\mathbb{T}$  (elles sont  $z_1, z_2, 1/z_1 z_2$ ).

5°) Soit  $u \in \mathbb{T}$  et  $u \neq 1$ . Montrer que  $p'(1/u) = -p'(u) - p(u)$  (utiliser la définition de  $p$ ).

6°) Montrer que

$$0 = \begin{vmatrix} p(z_1) & p(z_2) & p(z_1 z_2) \\ p'(z_1) & p'(z_2) & -p'(z_1 z_2) - p(z_1 z_2) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{utiliser 4° et 5°}).$$

7°) Montrer que  $p(z_1), p(z_2)$  et  $p(z_1 z_2)$  sont racines du polynôme  $-X^3 + (\alpha^2 + \alpha)X^2 + (\beta - B + 2\alpha\beta)X + \beta^2 - C$  (utiliser 4°) et IV.1.7 (\*\*).

8°) Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$  tels que  $3 = \text{card}\{p(z_1), p(z_2), p(z_1 z_2)\}$ . Montrer que

$$p(z_1) + p(z_2) + p(z_1 z_2) = \alpha^2 + \alpha.$$

9°) Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$  tels que  $p(z_1) \neq p(z_2)$ . Montrer que

$$p(z_1 z_2) = \left( \frac{p'(z_1) - p'(z_2)}{p(z_1) - p(z_2)} \right)^2 + \left( \frac{p'(z_1) - p'(z_2)}{p(z_1) - p(z_2)} \right) - (p(z_1) + p(z_2)).$$

Calculer de même  $p'(z_1 z_2)$  en fonction de  $p(z_1)$ ,  $p(z_2)$ ,  $p'(z_1)$  et  $p'(z_2)$  (utiliser 8° et 4°).

10°) Soit  $\mathcal{C}$  la courbe projective sur  $k$  définie par le polynôme homogène  $Y^2T + XYT - X^3 - BXT^2 - CT^3$  où  $B$  et  $C$  sont définies par IV.1.7.

Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  définie par

$$\varphi(z) = \Gamma p(z), p'(z), 1 \Gamma \quad \text{si } z \neq 1$$

$$\varphi(1) = \Gamma 0, 1, 0 \Gamma.$$

Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de l'espace analytique  $\mathbb{T}$  sur l'espace analytique  $\mathcal{C}$ .

11°) Soient  $m$  la multiplication de  $\mathbb{T}$ ,  $\tilde{m}$  l'application de  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}$  qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times \mathbb{T} & \xrightarrow{m} & \mathbb{T} \\ \downarrow \varphi \times \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\tilde{m}} & \mathcal{C} \end{array}$$

Montrer que  $\tilde{m}$  est un morphisme de variété algébrique.

12°) Montrer que  $(\mathcal{C}, \tilde{m})$  est un groupe algébrique dont l'élément neutre est  $\Gamma 0, 1, 0 \Gamma$ .

13°) a) Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$  tels que  $3 = \text{card}\{\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(\frac{1}{z_1 z_2})\}$ . Montrer que  $\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(\frac{1}{z_1 z_2})$  sont alignés dans  $\mathbb{P}^2$ .

b) Soient  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{T}$  tels que  $3 = \text{card}\{\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)\}$  et que  $\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)$  soient alignés dans  $\mathbb{P}^2$ . Soient donc  $\alpha, \beta, \gamma \in k$  tels que  $\alpha \varphi(z_1) + \beta \varphi(z_2) + \gamma \varphi(z_3) = 0$ . Soit la fonction méromorphe  $f = \alpha p + \beta p' + \gamma$ . Dédurre de 1°) que  $z_1 z_2 z_3 = 1$  (dans  $\mathbb{T}$ ).

c) Soit  $z_1 \neq \pm 1, \pm \sqrt{q}$ . Montrer que  $\varphi(1), \varphi(z_1), \varphi(\frac{1}{z_1})$  sont alignés dans  $\mathbb{P}^2$ .

d) Soit  $z_1 = -1$  (resp.  $\sqrt{q}, -\sqrt{q}$ ), montrer que la droite passant par  $\varphi(1)$  et  $\varphi(-1)$  (resp.  $\sqrt{q}, -\sqrt{q}$ ) est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $\varphi(-1)$  (resp.  $\sqrt{q}, -\sqrt{q}$ ) (on suppose  $\text{car}(k) \neq 2$ ).

e) Soit  $z_1 \in \mathbb{T}$  tel que  $z_1^3 \neq 1$  (dans  $\mathbb{T}$ ). Montrer que la droite passant par  $\varphi(z_1)$  et  $\varphi(z_1^{-2})$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $\varphi(z_1)$ .

f) Conclure que  $\tilde{m}$  est la multiplication usuelle de la courbe elliptique  $\mathcal{C}$  lorsque  $\Gamma(0, 1, 0)$

### La courbe de Tate et le j-invariant

Soit  $k$  un corps, à toute courbe elliptique  $E$  sur  $k$  on associe un élément  $j(E)$  de  $K$  la clôture algébrique de  $k$ , appelé le j-invariant de  $E$ . On sait que  $E \mapsto j(E)$  est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques sur  $K$  sur les points de  $E$  (Hartshorne, th. 4.1, p. 317, [28]).

La courbe de Tate  $\mathbb{T} \simeq k^x / \langle q \rangle$  définie par l'équation (\*\*)  
(IV.1.7). Elle permet donc de calculer son j-invariant que l'on note  $j(q)$ . On a

$$j(q) = \frac{(1-48B)^2}{\Delta} \quad \text{avec} \quad \Delta = B^2 - C - 64B^3 + 72BC - 432C^2.$$

$$\text{On a} \quad \Delta = q \prod_{n \geq 1} (1-q^n)^{24}.$$

En fait on a

$$j(q) = \frac{1}{q} + R(q) \quad \text{avec} \quad R(q) \in \mathbb{Z}[[q]] \quad (\text{resp. } \mathbb{F}_q[[q]])$$

si  $\text{car}(k) = 0$  (resp.  $\text{car}(k) = p$ ) ( $j(q) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \dots$ ).

Le j-invariant permet de caractériser les courbes elliptiques qui sont des courbes de Tate.

(IV.1.9) PROPOSITION. - Soient  $k$  un corps valué complet,  $E$  une courbe elliptique sur  $k$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) il existe une extension finie  $K$  de  $k$  telle que  $E \times_k K$  soit une courbe de Tate (i. e.  $\approx K^\times / \langle q \rangle$ )

ii) on a  $|j(E)| > 1$ .

DÉMONSTRATION. - Il suffit de démontrer la proposition pour  $k = K$  algébriquement clos.

Si  $E = K^\times / \langle q \rangle$  on a  $j(E) = j(q) = \frac{1}{q} + R(q)$ , ainsi  $|j(q)| = \left| \frac{1}{q} \right| > 1$ .

Supposons que  $|j(E)| > 1$ . Alors il existe  $q$  unique de  $K$  tel que  $j(q) = \frac{1}{q} + R(q) = j(E)$  et ainsi  $|q| < 1$ . Soit  $E_1 = K^\times / \langle q \rangle$ , alors on a  $j(E_1) = j(E)$ . Ce qui prouve que  $E \xrightarrow{\sim} E_1$  puisque  $E \mapsto j(E)$  est injectif.

REMARQUE. - Le théorème IV.1.7 montre que le polynôme  $Y^2 Z + X Y Z - X^3 - B X Z^2 - C Z^3$  appartient à  $k^\circ[X, Y, Z]$ . L'image de ce polynôme dans  $\bar{k}[X, Y, Z]$  est  $Y^2 Z - X Y Z - X^3$ . Ce polynôme définit une courbe rationnelle (i. e. de genre 0) avec  $\Gamma(0, 0, 1)$  comme point singulier unique ; c'est un point double ordinaire. La "réduction" d'une courbe de Tate est donc dégénérée. Cette propriété sera rigoureusement établie en IV.2 par le modèle de Néron et aussi par la réduction stable.

(IV.1.10) La courbe de Tate comme schéma formel

La théorie des fonctions méromorphes sur  $k^\times / \langle q \rangle$  est en fait "définie" sur  $\mathbb{Z}[[q]]$ . On peut préciser ce mot en utilisant les schémas formels sur  $\mathbb{Z}[[q]]$ .

Donnons quelques définitions. L'anneau des séries restreintes sur  $\mathbb{Z}[[q]]$  des variables  $T_1, T_2, \dots, T_n$  est

$$\mathbb{Z}[[q]] \langle T_1, T_2, \dots, T_n \rangle = \varprojlim \mathbb{Z}[[q]]/q^n \langle T_1, \dots, T_n \rangle \\ = \left\{ \sum a_\alpha T^\alpha \mid \text{pour chaque } \ell \geq 1 \quad a_\alpha \in (q)^\ell, \right. \\ \left. \text{sauf un nombre fini} \right\}.$$

Soit l'anneau  $A = \mathbb{Z}[[q]] \langle T_1, \dots, T_n \rangle / \mathfrak{A}$  où  $\mathfrak{A}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}[[q]] \langle T_1, \dots, T_n \rangle$ . Le spectrum formel de  $A$  est un espace annelé  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ , brièvement noté  $\text{Spf}(A)$ .

L'espace topologique  $\mathfrak{X}$  est défini par

$$\mathfrak{X} = \lim_{\rightarrow} \text{Spec}(A/q^n) = \text{Spec}(A/q).$$

Le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  est défini par

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(D(f)) = \varprojlim A_f/q^n A_f, \text{ où } f \in A; f \text{ mod } q \in A/q \text{ n'est}$$

pas nilpotent et  $D_f = \{x \in \mathfrak{X} \mid f(x) \neq 0\}$ .

Cette définition est proche de celle des espaces affinoïdes.

Un schéma formel  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  est un espace annelé qui possède un recouvrement ouvert  $(U_i)_i$  tel que

$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_{U_i}) \simeq \text{Spf}(A_i) \quad \text{où } A_i = \frac{\mathbb{Z}[[q]] \langle T_1, \dots, T_n \rangle}{\mathfrak{A}}.$$

L'espace analytique  $k^{\times}$  est défini comme le recollement des espaces affinoïdes  $\{z \in k^{\times} \mid |q|^{n+1} \leq |z| \leq |q|^n\}_n$  (ici  $k$  est algébriquement clos).

Dans le cas formel sur  $\mathbb{Z}[[q]]$  le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathbb{Z}[[q]]$  est défini comme le recollement des Spectrum formels  $\text{Spf}(A_n)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) où  $A_n = \mathbb{Z}[[q]] \langle T_n, S_n \rangle / (T_n S_n - q) = \mathbb{Z}[[q]] \langle t_n, s_n \rangle$ .

Les espaces topologiques  $\text{Spf}(A_n)$  et  $\text{Spf}(A_{n-1})$  sont recollés sur les ouverts  $\{t_n \neq 0\} \subset \text{Spf}(A_n)$  et  $\{s_{n-1} \neq 0\} \subset \text{Spf}(A_{n-1})$  par l'isomorphisme de recollement  $t_n \xrightarrow{\sim} s_{n-1}^{-1}$ .

La multiplication par  $q$  sur  $\mathbb{G}_m$  est définie par l'isomorphisme  $\text{Spf}(A_n) \xrightarrow{q} \text{Spf}(A_{n+1}), t_n \xrightarrow{\sim} t_{n+1}, s_n \xrightarrow{\sim} s_{n+1}$ .

On peut montrer que le quotient  $G_m / \langle q \rangle$  est muni "canoniquement" d'une structure de schéma formel sur  $\mathbb{Z}[[q]]$  et que  $G_m / \langle q \rangle$  est en fait un schéma projectif sur  $\mathbb{Z}[[q]]$ . Plus précisément,  $G_m / \langle q \rangle$  est le fermé de Zariski de  $\mathbb{P}_x^2 \mathbb{Z}[[q]]$  défini par le polynôme homogène  $Y^2Z + XYZ - (X^3 + BXZ^2 + CZ^3)$  où  $B$  et  $C$  sont les éléments de  $\mathbb{Z}[[q]]$  définis par (IV.1.7).

La courbe  $E$  (définie sur  $\mathbb{Z}[[q]]$ ) par ce polynôme s'appelle la courbe de Tate; c'est en quelque sorte la définition universelle.

Un morphisme  $\varphi : \mathbb{Z}[[q]] \longrightarrow R$  où  $R$  est un anneau induit la courbe  $E_x \times_{\mathbb{Z}[[q]]} R$  sur  $R$ . En particulier, si  $R$  est un corps et si  $\varphi(q) \neq 0$ , alors  $E_x R$  est une courbe elliptique sans singularités parce que  $\varphi(\Delta) \neq 0$ .

Si  $R$  est un corps et si  $\varphi(q) = 0$ , alors  $E_x R$  est une courbe rationnelle avec un point double ordinaire.

Le cas spécial  $R = k$ , un corps valué complet et  $\varphi$  définie par  $\varphi(q) = q'$  avec  $0 < |q'| < 1$ , donne la courbe  $k^x / \langle q' \rangle$ . L'homomorphisme  $\varphi : \mathbb{Z}[[q]] \longrightarrow k^\circ \longrightarrow \bar{k}$  donne la courbe rationnelle avec un point double ordinaire.

Si  $k = \mathbb{C}$  on peut définir un homomorphisme  $\varphi$  d'un sous-anneau convenable de  $\mathbb{Z}[[q]]$  dans  $\mathbb{C}$ , ce sous-anneau contenant  $B, C, q$ . On trouve ainsi une courbe  $E_x \mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}$ . Cette courbe est une courbe elliptique isomorphe à  $\mathbb{C}^x / \langle q' \rangle$  et aussi isomorphe à  $\mathbb{C} / \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$  où  $q' = \varphi(q) = e^{2i\pi\tau}$ .

#### IV. 2. - Modèles de Néron

Soit  $k$  le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète, complet  $k^\circ$  et soit  $X$  une courbe, non singulière et projective sur  $k$ . Si  $X$  est une courbe elliptique, on sait que  $X$  se plonge dans  $\mathbb{P}^2$  et que  $X$  est défini par une équation homogène de degré 3. Si  $X$  possède un point rationnel sur  $k$ , l'équation de  $X$  dans  $\mathbb{P}^2$  a ses coefficients dans  $k$ . En général,  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  est défini par plusieurs

équations. On veut trouver "les bonnes équations" de  $X$  relativement à  $k^\circ$ . La même question se pose pour des variétés algébriques sur  $k$  de dimension supérieure à 1.

(IV.2.1) DÉFINITION. - Pour une courbe elliptique  $X$  sur  $k$ , ou plus généralement pour une variété abélienne  $X$  sur  $k$ , on veut trouver un schéma  $Y$  sur  $k^\circ$ , séparé et de type fini, tel que :

- (1)  $Y \times_{k^\circ} k \simeq X$
- (2)  $Y$  est lisse sur  $k^\circ$
- (3) Si  $Z$  est lisse sur  $k^\circ$  et si un morphisme  $\varphi : Z \times_{k^\circ} k \rightarrow X$  est donné, alors il existe un morphisme unique  $\psi : Z \rightarrow Y$  avec  $\varphi = \psi \times_{k^\circ} \mathbb{1}_k$ .

Un tel  $Y$  est appelé le modèle de Néron de  $X$ . Expliquons rapidement la terminologie (pour plus de détails, on peut voir Hartshorne, Algebraic geometry [28]). Un schéma affine (de type fini) sur  $k^\circ$  est un schéma de la forme  $\text{Spec}(k^\circ[T_1, \dots, T_n]/I) = U$ .

Sur  $U$  on a une topologie de Zariski et un faisceau structural. Un schéma de type fini sur  $k^\circ$  est un espace annelé  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  qui possède un recouvrement fini et ouvert  $(U_i)$  tel que  $(U_i, \mathcal{O}_Y|_{U_i}) = \text{Spec}(A_i)$  où  $A_i$  est de la forme  $k^\circ[T_1, \dots, T_n]/I$ .

Dans la suite nous supposons toujours que  $Y$  est séparé. Cela veut dire que l'application diagonale  $\Delta_Y : Y \rightarrow Y \times_{k^\circ} Y$  est une immersion fermée. On dit que  $Y$  est lisse sur  $k^\circ$  si le recouvrement  $(U_i)$  de  $Y$  peut être choisi de façon que chaque  $A_i$  soit de la forme

$$k^\circ[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_m) \quad \text{avec } m \leq n \quad \text{et en plus}$$

$$(\Delta, f_1, \dots, f_m) = k^\circ[T_1, \dots, T_n] \quad \text{où } \Delta = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial T_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial T_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial T_m} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial T_m} \end{pmatrix}$$

(IV. 2. 2) DÉFINITION. - Soit  $Y$  un modèle quelconque de  $X$ , c'est-à-dire  $Y$  est un schéma de type fini sur  $k^\circ$  avec  $Y \times_k^\circ k \simeq X$ , alors  $Y \times_k^\circ \bar{k}$  s'appelle la fibre spéciale de  $Y$  et  $Y \times_k^\circ k$  est appelé la fibre générale de  $Y$ .

Si le corps résiduel  $\bar{k}$  de  $k$  est parfait, une courbe elliptique (et plus généralement une variété abélienne) sur  $k$  possède un modèle de Néron ([42]). L'existence d'un modèle de Néron dans le cas général est démontré par M. Raynaud [68] (Notons que la terminologie de Néron est assez différente de celle de M. Raynaud et que les traductions ne sont pas évidentes.). L'unicité du modèle de Néron  $Y$  est une conséquence de la définition. Pour les courbes  $X$  sur  $k$  de genre  $\neq 1$ , la partie (3) de la définition du modèle de Néron paraît être trop forte pour obtenir l'existence. (On peut s'en convaincre en montrant que  $\mathbb{P}_k^1$ , par exemple, ne possède pas de modèle de Néron.)

(IV. 2. 3) DÉFINITION. - Un modèle minimal  $Y$  d'une courbe  $X/k$  est un schéma (de type fini et séparé) sur  $k^\circ$  tel que

$$(1) \quad Y \times_k^\circ k \xrightarrow{\sim} X$$

$$(2) \quad Y \text{ est lisse sur } k^\circ$$

$$(3') \quad \text{Pour chaque schéma } Z \text{ de type fini séparé et lisse sur } k^\circ \text{ tel que } \beta : Z \times_k^\circ k \xrightarrow{\sim} X \text{ le morphisme unique } \varphi : Z \times_k^\circ k \xrightarrow{\sim} Y \times_k^\circ k \text{ avec } \alpha \varphi \beta^{-1} = \text{id}_X \text{ se prolonge en un morphisme } \psi : Z \longrightarrow Y.$$

Le modèle minimal est unique et pour une courbe elliptique ce modèle coïncide avec le modèle de Néron. Pour les courbes  $X$  de genre  $\neq 1$  un autre modèle semble plus intéressant, à savoir le modèle de  $X$  qui induit la réduction stable (IV. 3).



(IV. 2. 4) EXEMPLE. - Soit  $X$  la courbe elliptique de Tate,  $k^\circ / \langle q \rangle$ , où  $q \notin k^\circ$  engendre l'idéal maximal de  $k^\circ$ . L'équation de  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$  est le polynôme  $F = y^2 z + x y z - (x^3 + B X Z^2 + C Z^3)$ . Soit  $Y' \subset \mathbb{P}^2_{k^\circ}$  donné par la même équation. C'est-à-dire

$Y' = \text{Proj}(k^\circ[X, Y, Z]/(F)) =$  l'ensemble des idéaux premiers homogènes  $\mathfrak{p}$  de  $k^\circ[X, Y, Z]/(F)$  qui ne contiennent pas  $(x, y, z)$ .

Le seul point de  $Y'$  qui n'est pas lisse sur  $k^\circ$  est le point (fermé) correspondant à l'idéal  $(q, x, y)$ . Alors  $Y = Y' - \{(q, x, y)\}$  est le modèle de Néron de  $X$ .

PREUVE. - Les propriétés (1) et (2) du modèle de Néron sont évidentes. L'unicité d'un prolongement  $\psi : Z \rightarrow Y$  provient aisément du fait que  $\Delta_Y$  est fermé et que  $Z_{x \circ k}$  est dense dans  $Z$ . Il suffit de montrer l'existence de  $\psi$  dans le cas où  $Z = \text{Spec}(A)$  et  $A/k^\circ$  est lisse de type fini. La courbe  $X$  est réunion des deux ouverts affines

$$X_1 = \text{Spec}(k[\frac{Y}{x}, \frac{Z}{x}] /_{F(1, \frac{Y}{x}, \frac{Z}{x})}) \text{ et } X_2 = \text{Spec}(k[\frac{X}{y}, \frac{Z}{y}] /_{F(\frac{X}{y}, 1, \frac{Z}{y})}).$$

De même  $Y$  est réunion des deux ouverts  $Y_1 = \text{Spec}(k^\circ[\frac{Y}{x}, \frac{Z}{x}] /_{F(1, \frac{Y}{x}, \frac{Z}{x})})$  et  $Y_2 = \text{Spec}(k^\circ[\frac{X}{y}, \frac{Z}{y}] /_{F(\frac{X}{y}, 1, \frac{Z}{y})})$ . Il suffit de considérer un

$\varphi : Z_{x \circ k} \rightarrow X$  tel que  $\text{im } \varphi \subset X_1$  ou bien  $\text{im } \varphi \subset X_2$ .

Le cas (i)  $\text{im } \varphi \subset X_1$

L'application  $\varphi$  provient d'un homomorphisme de  $k$ -algèbres  $\varphi^* : k[\frac{Y}{x}, \frac{Z}{x}] /_{F(1, \frac{Y}{x}, \frac{Z}{x})} \rightarrow A \otimes_k k$ . Soient  $v$  et  $w \in A \otimes_k k$  les images de  $\frac{Y}{x}$  et  $\frac{Z}{x}$ . Il suffit de montrer que  $v, w \in A$  parce qu'on prolonge  $\varphi^*$  par  $\psi^* : k^\circ[\frac{Y}{x}, \frac{Z}{x}] /_{F(1, \frac{Y}{x}, \frac{Z}{x})} \rightarrow A \subset A \otimes_k k$  qui est encore donné par  $\psi^*(\frac{Y}{x}) = v$ ,  $\psi^*(\frac{Z}{x}) = w$ . Alors  $\psi : Z \rightarrow Y_1 \subset Y$  prolonge  $\varphi$ .

Comme  $A/k^\circ$  est lisse,  $A/qA$  est régulier et en particulier  $qA$  est un idéal premier de  $A$ . L'anneau, localisé en  $(qA)$ ,

$A_{(qA)}$  est un anneau de valuation discrète. Soit  $V$  cette valuation ; on a  $V(q) = 1$  et le corps résiduel est le corps des fractions de  $A/qA$ . Pour  $t \in A \otimes_k k$ ,  $t \neq 0$ , il existe un  $c \in \mathbb{Z}$  tel que  $q^c t \in A - qA$ . On a  $V(q^c t) = 0$  et  $V(t) = -c$ .

Pour montrer que  $v, w \in A$  il suffit donc de vérifier que  $V(v), V(w) \geq 0$ . On a l'équation  $v^2 w + v w = 1 + B w^2 + C w^3$  avec  $V(B) \geq 1, V(C) = 1$ .

Alors  $V(w) < 0$  implique  $V(v) < 0$  et que  $2V(v) = 2V(w) - 1$ . C'est une contradiction. Donc  $V(w) \geq 0$ . On en déduit qu'aussi  $V(v) \geq 0$ .

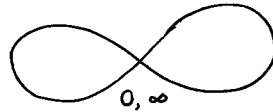
Le cas (ii),  $\text{im } \varphi \subset X_2$

L'application  $\varphi$  est induite par  $\varphi^* : k[\frac{x}{y}, \frac{z}{y}] / \mathbb{F}(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}) \longrightarrow A \otimes_k k$ . Les images  $u, w$  de  $\frac{x}{y}$  et  $\frac{z}{y}$  satisfont l'équation  $w + u w = u^3 + B u w + C w^3$ .

On prend la valuation  $V$  introduite dans le cas (i). Si on suppose que  $V(w) < V(u)$  et  $V(w) < 0$ , alors on trouve  $V(w) + V(1+u) = 1+3V(w)$ . Donc  $V(u) < 0$  et  $V(u) = 1+2V(w)$ . Cela contredit  $V(w) < V(u)$ . Si on suppose que  $V(w) \geq V(u)$  et que  $V(u) < 0$ , alors on trouve  $V(w) + V(u) = 3V(u)$ . Encore une contradiction. Donc  $V(u), V(w) \geq 0$  et  $u, w \in A$ .

La fibre spéciale de  $Y'$  est  $Y' \times \bar{k} = \text{Proj}(\frac{\bar{k}[x, y, z]}{(zy^2 + xyz - x^3)})$ ,

c'est une courbe rationnelle avec un point double ordinaire.



La fibre spéciale du modèle de Néron  $Y \times \bar{k}$  est la courbe rationnelle ci-dessus à laquelle on a enlevé le point double, ainsi  $Y \times \bar{k} \simeq \bar{k}^x$ . Plus précisément, on a  $Y \times \bar{k} \simeq \mathbb{G}_m(\bar{k})$  comme le montre la remarque ci-après.

(IV. 2. 5) REMARQUE. - Supposons que la variété projective non singulière  $X$  soit munie d'une structure de groupe algébrique (commutatif). Alors la définition du modèle de Néron  $Y$  de  $X$  montre la multiplication  $m : X \times X \rightarrow X$  induit un morphisme  $m' : Y \times Y \rightarrow Y$  qui fait de  $Y$  un schéma en groupe. Cette structure induit alors sur  $Y_{x, \bar{k}}$  une structure de groupe algébrique commutatif. Dans le cas (IV. 2. 4), on a  $Y_{x, \bar{k}} \simeq \mathbb{G}_m(\bar{k})$ .

(IV. 2. 6) EXEMPLE. - Soit  $X$  la courbe de Tate  $X = k^x / \langle q \rangle$  où  $qk^\circ = \pi^2 k^\circ$  et où  $\pi$  est une uniformisante de  $k$ . La courbe  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$  est définie par le polynôme homogène  $G = y^2 z + x y z - (\pi x^3 + \frac{B}{\pi} x z^2 + \frac{C}{\pi} z^3)$  (c'est le polynôme  $F$  modifié en changeant  $x, y$  en  $\pi x, \pi y$ ).

Soit  $Y' = \text{Proj}(k^\circ[x, y, z]/(G))$ , alors  $Y'$  a deux points non-lisses sur  $k^\circ$ ,  $(\pi, y, z)$  et  $(\pi, y+x, z)$ . Alors  
 $Y = Y' - \{(\pi, y, z), (\pi, y+x, z)\}$  est le modèle de Néron de  $X$ .

La fibre spéciale de  $Y'$  est  $Y'_{x, \bar{k}} \simeq \text{Proj}\left(\frac{\bar{k}[x, y, z]}{y^2 z(x y z - z^3)}\right)$ , elle est constituée de deux courbes rationnelles avec deux points d'intersection qui sont des points doubles ordinaires.



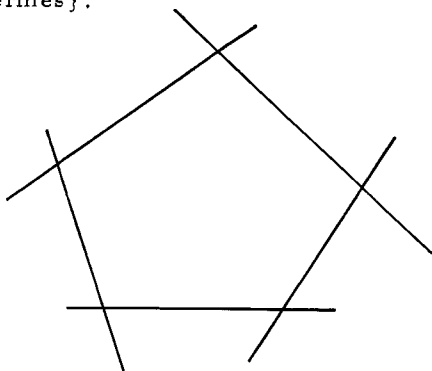
Ainsi la fibre spéciale du modèle de Néron  $Y_{x, \bar{k}}$  est isomorphe à deux copies de  $\bar{k}^x$ , c'est un groupe algébrique  $G$  de composante connexe  $G_0 \simeq \mathbb{G}_m(\bar{k})$  et  $G/G_0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

(IV. 2. 7) EXEMPLE. - Soit  $X$  la courbe de Tate  $X = k^x / \langle q \rangle$  avec  $qk^\circ = \pi^n k^\circ$  où  $\pi$  est une uniformisante de  $k$  et  $n \geq 3$ . Pour  $n > 3$  le modèle de Néron  $Y$  n'est plus donné par une équation dans  $\mathbb{P}_k^2$ .

Le schéma  $Y'$  est défini par

$Y' = \text{Proj}(k[x_0, x_1, \dots, x_s] / \text{idéal homogène})$  ou  $s \geq 2$ . Le modèle de Néron  $Y$  est  $Y' - \{n \text{ points fermés}\}$ .

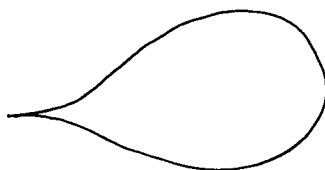
La fibre spéciale de  $Y'$  est constituée de  $n$  droites isomorphes à  $\mathbb{P}_k^1$ . Chacune coupant deux autres en des points doubles ordinaires. Les  $n$  points doubles de  $Y' \times \bar{k}$  étant les  $n$  points fermés que l'on enlève à  $Y'$  pour obtenir le modèle  $Y$ .



La fibre spéciale du modèle de Néron  $Y \times \bar{k}$  est un groupe algébrique  $G$  dont la composante neutre  $G_0$  est isomorphe à  $G_m(\bar{k})$  et tel que  $G/G_0 \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

(IV. 2. 8) EXEMPLE. - Soit la courbe  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^2$  définie par le polynôme  $F = zy^2 - (x^3 + \pi z^3)$  où  $\pi$  est une uniformisante de  $k$ . Soit  $Y' = \text{Proj}(k[x, y, z] / (F))$ , alors  $Y = Y' - \{(x, y, \pi)\}$  est le modèle de Néron de  $X$ .

La fibre spéciale de  $Y'$  est définie dans  $\mathbb{P}_k^2$  par le polynôme  $zy^2 - x^3$ . C'est une courbe rationnelle avec un point de rebroussement.



La fibre spéciale du modèle de Néron est isomorphe à  $\mathbb{G}_a(\bar{k})$ , le groupe additif.

Les possibilités de la fibre spéciale du modèle de Néron d'une courbe elliptique sur un corps complet pour une valuation discrète sont déterminées [42]. Si on part d'une équation de degré 3 pour la courbe elliptique, on peut calculer (avec l'aide d'un ordinateur, si on veut) la fibre spéciale et le groupe  $Y \times \bar{k}$ . Le théorème qui suit

donne une classification des courbes par la fibre spéciale du modèle de Néron.

(IV. 2. 9) THÉORÈME. - Soient  $k$  un corps complet pour une valuation discrète,  $X$  une courbe elliptique sur  $k$ . Alors il existe une extension finie  $k' \supset k$  telle que  $X_{X_k} k'$  satisfasse l'une des propriétés suivantes :

i) Le modèle de Néron  $Y$  de  $X_{X_k} k'$  est un schéma complet sur  $k'^{\circ}$  et la fibre spéciale  $Y_{X_k} \bar{k}'$  est une courbe elliptique non-singulière (on dit que  $X$  a potentiellement bonne réduction).

ii) La courbe  $X_{X_k} k'$  est la courbe de Tate  $k'^{\times} / \langle q \rangle$  avec  $q k'^{\circ} = \pi^n k'^{\circ}$  et  $\pi$  est une uniformisante de  $k'$ . La fibre spéciale du modèle de Néron de  $X_{X_k} k'$  est un groupe algébrique de composante neutre  $G_0 \simeq G_m(\bar{k})$  et  $G/G_0 \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

DÉMONSTRATION. - Pour simplifier, nous supposons que  $\bar{k}$  soit de caractéristique  $\neq 2$ . Soit  $k'$  une extension finie de  $k$ , convenablement choisie. L'équation affine de la courbe  $X_{X_k} k'$  peut s'écrire comme  $y^2 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$  où  $\lambda_i \neq \lambda_j$  pour  $i \neq j$ . Après une transformation de  $x$  et  $y$  on trouve

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \quad \text{où} \quad |\lambda| \leq 1, \quad |\lambda-1| = 1.$$

Cas (1) :  $|\lambda| = 1$ . - La réduction  $y^2 = x(x-1)(x-\bar{\lambda})$  est une courbe elliptique, non-singulière sur  $\bar{k}$ . Et  $Y = \text{Proj} \left( \frac{k^{\circ} [x, y, z]}{y^2 z - x(x-z)(x-\lambda z)} \right)$  est le modèle de Néron.

Cas (2) :  $0 < |\lambda| < 1$ . - La réduction  $y^2 = x^2(x-1)$  est une courbe rationnelle avec un point double ordinaire  $\{y=0, x=0\}$ . On transforme l'équation en  $y^2 + xy = x^3 + \frac{\lambda}{16(1+\lambda)^2} x$  et on a :

$$j = \frac{(1 - 48 \frac{\lambda}{16(1+\lambda)^2})^3}{(\frac{\lambda}{16(1+\lambda)^2})^2 (1 - 64 \frac{\lambda}{16(1+\lambda)^2})},$$

où  $j$  est le  $j$ -invariant de la courbe  $X_{\times} k'$ .

Il est aisé de voir que  $|j| > 1$ . La proposition (IV.19) montre qu'il existe une extension finie  $k'' \supset k'$  telle que  $X_{\times} k''$  soit une courbe de Tate. Et le reste suit de (IV.2.7).

(IV.2.10) EXERCICE. - Dans le cas de (IV.2.8), déterminer le plus petit corps  $k'$  pour lequel (IV.2.9) est satisfait.

(IV.2.11) Existence du modèle de Néron

Pour une courbe  $X$  (non-singulière, complète) sur  $k$ , on connaît deux démonstrations de l'existence d'un modèle minimal

- (a) Abhyankar ; résolution des singularités d'une surface [2]
- (b) Néron ;  $p$ -désingularisation [42].

Cas (a) .- La courbe  $X$  a un modèle projectif  $Z$  sur  $k^\circ$ . L'espace  $Z$  est de dimension 2 et c'est une surface qui peut avoir des singularités et à l'aide d'éclatements de points on peut modifier (comme S. Abhyankar l'a montré)  $Z$  en une surface  $Z'$  projective sur  $k^\circ$  (c'est-à-dire  $Z' = \text{Proj}(k^\circ[u_0 \dots u_m]/H)$ ) et sans singularités. Donc  $X$  possède un modèle non-singulier sur  $k^\circ$ . En plus il existe un modèle non-singulier minimal  $Z/k^\circ$  c'est-à-dire :

Si  $Z'/k^\circ$  est un modèle non-singulier, alors il existe un morphisme unique  $\varphi : Z' \rightarrow Z$  tel que  $\varphi$  induise l'identité  $X \rightarrow X$ .

Les points de  $Z$  qui ne sont pas lisse sur  $k^\circ$ , forment un sous-ensemble fermé  $Z^*$  et  $Y = Z - Z^*$  est le modèle minimal (qui vérifie (1), (2), (3')). La fibre spéciale est  $Z_{\times_k} \bar{k}$  et  $Z^*$  sont en fait les point singuliers de  $Z_{\times_k} \bar{k}$ .

Le modèle de Néron existe aussi pour les variétés abéliennes sur  $k$ . La méthode (a) n'est plus utilisable parce que

(i) La résolution des singularités en dimension supérieure à 3 et en caractéristique  $\neq 0$ , n'est pas encore démontrée.

(ii) En dimension supérieure à 2 il n'existe pas de variété minimale parmi les modèles non-singuliers.

Cas (b). - La  $p$ -désingularisation de Néron montre aussi pour les variétés abéliennes  $A$  l'existence d'un modèle de Néron. Le théorème qui suit apporte une description intéressante de la fibre spéciale.

(IV. 2. 11) THÉORÈME DE LA RÉDUCTION STABLE. - Soient  $k$  un corps complet pour une valuation discrète,  $A$  une variété abélienne sur  $k$ . Alors il existe une extension finie  $k' \supset k$  telle que  $A_{\times k'}$  possède la propriété suivante :

La fibre spéciale  $\mathcal{O}_{\times \bar{k}'}$  du modèle de Néron  $\mathcal{O}$  de  $A_{\times k'}$  est une extension d'une variété abélienne par un tore, c'est-à-dire on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\bar{k}'^{\times})^n \longrightarrow \mathcal{O}_{\times \bar{k}'} \longrightarrow Ab \longrightarrow 0$$

où  $Ab$  est une variété abélienne sur  $\bar{k}'$ .

#### IV. 3. - Réduction stable d'une courbe

Le but de ce paragraphe est de définir une autre réduction, la réduction stable. Celle-ci permet de caractériser les courbes qu'on peut paramétriser avec les groupes de Schottky (courbes de Mumford).

(IV. 3. 1) DÉFINITION. - Soit  $k$  un corps, une courbe algébrique projective sur  $k$  est dite stable si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- i) la courbe  $X$  est réduite,
- ii) les seules singularités de  $X$  sont les points doubles ordinaires,
- iii) chaque composante de  $X$  qui est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^1$  rencontre les autres composantes en au moins trois points.

Une courbe qui possède les propriétés i) et ii) est dite pré-stable

(IV. 3. 2) DÉFINITION. - Soit  $X$  une courbe projective connexe sur  $k$ , on appelle genre arithmétique de  $X$  la dimension sur  $k$  du groupe  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ .

(IV. 3. 3) PROPOSITION. - Soient  $X$  une courbe projective pré-stable, connexe sur  $k$ ,  $X'$  la normalisation de  $X$ ,  $X' = C_1 \cup C_2 \dots \cup C_s$  la décomposition de  $X'$  en composantes irréductibles,  $g_i$  le genre de  $C_i$  et  $n$  le nombre de points doubles de  $X$ . Alors le genre arithmétique  $g$  de  $X$  est donné par la formule

$$g = n+1 + \sum_{i=1}^s (g_i - 1) .$$

DÉMONSTRATION. - Soit  $\eta$  le morphisme canonique de  $X'$  dans  $X$ . On a la suite exacte de faisceaux sur  $X$  :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \eta_* \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow F \longrightarrow 0 .$$

Le faisceau  $F$  a la propriété suivante

$$F_P = \begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ est régulier} \\ \tilde{\mathcal{O}}_{X,P} / \mathcal{O}_{X,P} & \text{si } P \text{ est singulier} \end{cases}$$

où  $\tilde{\mathcal{O}}_{X,P}$  est la clôture intégrale de  $\mathcal{O}_{X,P}$ . Pour un point double ordinaire on a  $F_P = k$ .

On a donc la suite exacte de cohomologie

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) & \rightarrow & H^0(X, \eta_* \mathcal{O}_{X'}) & \rightarrow & H^0(X, F) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) & \rightarrow & H^1(X, \eta_* \mathcal{O}_{X'}) & \rightarrow & H^1(X, F) = 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 \rightarrow k & \rightarrow & k^s & \rightarrow & k^n & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) & \rightarrow & \bigoplus_{i=1}^s H^1(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) & \rightarrow & 0 . \end{array}$$

On en déduit la formule (IV. 3. 3).



(IV. 3. 4) PROPOSITION. - Soit  $X$  une courbe projective stable connexe de genre arithmétique  $\geq 2$ . Alors le groupe des automorphismes de  $X$  est fini.

DÉMONSTRATION. - Soient  $G$  le groupe des automorphismes de  $X$ ,  $G_0$  le sous-groupe qui laisse (globalement) invariant chaque composante irréductible de  $X$ . Comme les composantes sont en nombre fini, il suit que  $G_0$  est d'indice fini dans  $G$ . Il suffit donc de montrer que  $G_0$  est fini, c'est-à-dire que le nombre d'automorphismes de chaque composante irréductible est fini.

Soit  $Z$  une composante irréductible de genre  $\geq 2$ , on sait que le groupe des automorphismes de  $Z$  est fini.

Soit  $Z$  une composante irréductible de genre 1. Supposons que  $Z$  possède une singularité  $P$ . Alors le sous-groupe  $H$  de  $\text{Aut}(Z)$  qui laisse invariant les singularités est d'indice fini dans  $\text{Aut}(Z)$ . Soit  $\tilde{Z}'$  la courbe normalisée de  $Z$  et considérons  $P$  comme l'élément neutre de la courbe elliptique  $\tilde{Z}'$ . On sait que le groupe des automorphismes de  $\tilde{Z}'$  qui laisse  $P$  invariant est fini. Il suit donc que  $H$  est fini.

Supposons maintenant  $Z$  de genre 1 et non singulière. Cette courbe rencontre au moins une autre composante. A un sous-groupe d'indice fini près, on peut supposer ces points d'intersection invariants et l'argument précédent montre que le groupe des automorphismes est fini.

Soit  $Z$  une composante de genre 0. En reprenant les arguments précédents, on déduit que la normalisée  $Z' = \mathbb{P}^1(k)$  a au moins trois points invariants, ce qui montre que la restriction de  $G_0$  à  $Z$  est fini.

(IV. 3. 5) DÉFINITION. - Soient  $k$  un corps valué complet,  $X$  une courbe projective non singulière sur  $k$ . Un schéma projectif  $Y$  sur  $k^\circ$  est dit modèle de  $X$  sur  $k^\circ$  si  $Y \times_{k^\circ} k \simeq X$ . On dit qu'un modèle  $Y$  de  $X$  sur  $k^\circ$  donne une réduction stable (resp. pré-stable) si  $Y \times_{k^\circ} \bar{k}$  est une courbe stable (resp. pré-stable).

L' "existence" et l'unicité de la réduction stable ont été démontrés initialement par Deligne et Mumford [8], plus précisément le résultat s'énonce ainsi :

(IV. 3. 6) THÉORÈME [8]. - Soient  $k$  un corps complet pour une valuation discrète,  $X$  une courbe projective non-singulière sur  $k$  de genre  $\geq 1$ . Alors

1) Il existe une extension finie  $k' \supset k$  telle que  $X \times_k k'$  admette une réduction stable.

2) La réduction stable est unique.

(IV. 3. 7) REMARQUE. - Ce théorème est maintenant généralisé au cas où le corps  $k$  est seulement valué complet, c'est-à-dire qu'on n'impose plus la valuation discrète (van der Put [67]). Cette nouvelle démonstration est essentiellement différente de celle de Deligne et Mumford.

(IV. 3. 8) REMARQUE. - La fibre spéciale associée au modèle de Néron d'une courbe n'est pas nécessairement réduite et peut avoir d'autres singularités que des points doubles ordinaires. D'autre part, un modèle  $Y$  sur  $k^\circ$  qui donne une réduction stable n'est pas nécessairement régulier ou lisse ; donc  $Y$  n'est pas un modèle de Néron. Ainsi, modèle de Néron et réduction stable sont des notions différentes.

(IV. 3. 9) REMARQUE. - On peut montrer qu'une courbe et sa réduction (pré-stable) ont le même genre arithmétique (voir [21], p. 139).

Selon la démonstration de Deligne et Mumford, le théorème (IV.3.6) se déduit du suivant.

(IV.3.10) THÉORÈME. - Soient  $k$  un corps complet pour une valuation discrète,  $X$  une courbe projective non-singulière sur  $k$  de genre  $\geq 1$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) La courbe  $X$  (définie sur  $k$ ) admet une réduction stable sur  $k$

ii) La fibre spéciale du modèle de Néron de la jacobienne de  $X$  est extension d'une variété abélienne sur  $\bar{k}$  par un tore.

#### IV.3.11. - Exemples de réduction stable

Il existe un procédé pour passer d'une réduction pré-stable à une réduction stable. Soit  $Y_{X/k} \circ \bar{k}$  une réduction pré-stable de  $X$ . Si  $L \simeq \mathbb{P}_k^1$  est une composante irréductible de  $Y_{X/k}$  ayant moins que trois points en commun avec les autres composantes, on peut alors changer  $Y$  en  $Y'$  de façon que  $Y'_{X/k}$  se déduise de  $Y_{X/k}$  en contractant  $L$  en un point.

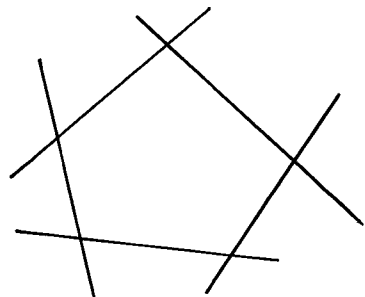
On peut donner la liste des réductions des courbes de genre 1 et 2.

GENRE 1. - Le théorème (IV.2.5) discerne deux cas. Dans l'un, la fibre spéciale du modèle de Néron (après extension finie) est une courbe elliptique non-singulière. Dans le deuxième cas, la courbe elliptique  $E$  est après extension finie  $k' \supset k$  la courbe de Tate  $k'^{\times}/\langle q \rangle$  avec  $q \in k'^{\circ} = \pi^n k'^{\circ}$

où  $\pi$  est une uniformisante.

Alors (IV.2.3) montre que le modèle  $Y$  a pour fibre  $n$  droites projectives qui se coupent deux à deux selon des points doubles ordinaires.

C'est donc une réduction pré-stable.



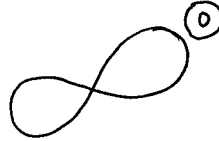
Après contraction de  $n-1$  droites, on obtient une courbe rationnelle avec un point double ordinaire.

Si  $X$  est une courbe projective irréductible non singulière de genre 1, les réductions stables sont les suivantes :

1) une courbe de genre 1 sans singularités



2) une courbe de genre 0 avec un point double ordinaire.

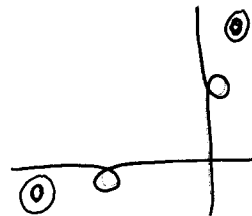
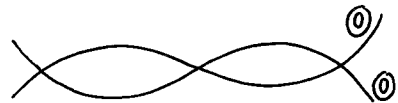
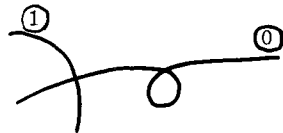
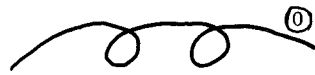
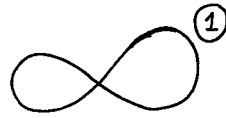
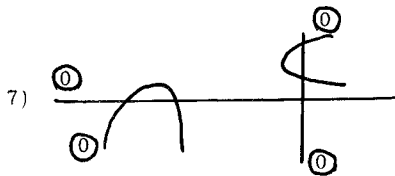
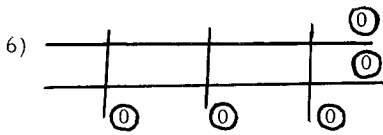
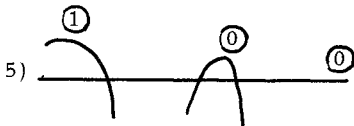
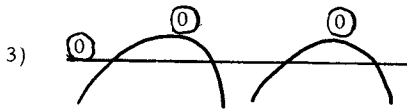


GENRE 2. - Le corps des fonctions rationnelles d'une courbe projective irréductible non-singulière de genre 2 est défini par l'équation  $y^2 = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_6)$  (car  $(k) \neq 2$  et  $k$  assez grand). La position des six points  $a_1, a_2, \dots, a_6$  de  $\mathbb{P}_k^1$  détermine la réduction stable. En fait on trouve d'abord une réduction pré-stable qui est transformée en réduction stable.

Voici la liste de toutes les possibilités (  $\textcircled{i}$  signifie genre  $i$  ) :

réduction pré-stable

réduction stable



On vérifie aisément, à l'aide de (IV. 3. 3) et (IV. 3. 9), que ce sont là toutes les possibilités pour la réduction stable d'une courbe de genre 2. La réduction stable des courbes hyperelliptiques est traitée en détail dans l'ouvrage de Gerritzen et van der Put [21], p. 163. Le langage utilisé est celui des réductions analytiques dont on verra en IV. 4. qu'il est équivalent à celui des réductions algébriques.

#### IV. 3. 12. - Applications de la réduction stable

La réduction stable est utilisée pour montrer l'irréductibilité de la variété modulaire  $M_g$  des courbes de genre  $g$  et pour caractériser les courbes de Mumford.

1) La variété modulaire  $M_g$ . - C'est la variété quasi-projective des courbes irréductibles complètes non-singulières de genre  $g$  sur un corps  $k$  (quelconque). Plus précisément les points de  $M_g$  sont les classes d'équivalence de ces courbes à isomorphisme près.

Soit  $\hat{M}_g$  la variété modulaire des classes d'équivalence à isomorphisme près des courbes stables de genre arithmétique  $g$ . Alors  $M_g$  est un ouvert dense de  $\hat{M}_g$  et de plus  $\hat{M}_g$  est une variété projective. Ainsi  $\hat{M}_g$  est un "compactifié" de  $M_g$ . C'est en utilisant  $\hat{M}_g$  et la réduction stable que Deligne et Mumford [8] ont montré que  $M_g$  est irréductible.

2) Courbes de Mumford. - Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{PGL}(2, K)$ ; un élément  $a \in \mathbb{P}^1(K)$  est appelé point limite s'il existe  $b \in \mathbb{P}^1(K)$  et une suite infinie  $(\gamma_n)_n$  de  $\Gamma$  (i. e.  $n \neq m$  implique  $\gamma_n \neq \gamma_m$ ) telle que  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(b)$ . On note  $\mathcal{L}$  l'ensemble des points limites de  $\mathbb{P}^1(K)$  (pour  $\Gamma$ ). Nous dirons que  $\Gamma$  est un groupe discontinu si  $\mathcal{L} \neq \mathbb{P}^1(K)$  et si  $(\overline{\Gamma \cdot a})$  (l'adhérence de l'orbite de  $a$ ) est compact pour tout  $a \in \mathbb{P}^1(K)$ . Si  $\Gamma$  est un groupe discontinu, alors  $\mathcal{L}$  est compact. Ainsi  $\Omega = \mathbb{P}^1(K) - \mathcal{L}$  est muni d'une structure d'espace analytique (I. 7. 3), de plus,  $\Gamma$  opère sur  $\Omega$  et  $\Omega/\Gamma$  est canoniquement muni d'une structure d'espace analytique. Un sous-groupe  $\Gamma$  de

$\text{PGL}(2, K)$  est appelé groupe de Schottky si  $\Gamma$  est discontinu, engendré par un nombre fini d'éléments et ne possède pas d'éléments d'ordre fini. On peut alors montrer que  $\Gamma$  est un groupe libre à  $g$  générateurs et que  $\Omega/\Gamma$  est une courbe non-singulière de genre  $g$ , appelée courbe de Mumford (pour plus de détails, consulter Gerritzen-van der Put, [21]). La caractérisation des courbes de Mumford par la réduction stable est donnée par le théorème suivant :

(IV.3.13) THÉORÈME. - Soient  $k$  un corps complet pour une valuation discrète et  $K \supset k$  algébriquement clos et complet. Soit  $X$  une courbe (non singulière, complète) sur  $k$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) il existe une extension finie  $k'$  de  $k$  telle que la réduction stable de  $X_{X_k} k'$  a toutes ses composantes de genre 0,
- ii) la courbe  $X_{X_k} K$  est une courbe de Mumford.

#### IV.4. - Réductions analytiques

Nous prenons maintenant un corps  $K$ , valué complet et algébriquement clos. A un espace analytique  $X$  sur  $K$ , nous voulons associer une réduction  $\bar{X}$  sur  $\bar{K}$ .

(IV.4.1). - Si  $X$  est affinoïde,  $X = \text{Sp}(A)$ , on définit  $\bar{X}_c =$  la réduction canonique de  $X$  par  $\bar{X}_c = \max(\bar{A})$  où  $\bar{A} = A^\circ/A^{\circ\circ}$  est une algèbre réduite de type fini sur  $\bar{K}$  (II.6.7). Donc  $\bar{X}_c$  est une variété algébrique sur  $\bar{K}$ .

En plus on a une application surjective  $R : X \rightarrow \bar{X}_c$  qui associe à chaque idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $A$  un idéal maximal  $R(\mathfrak{M})$  de  $\bar{A}$ ,  $R(\mathfrak{M}) =$  l'image de  $\mathfrak{M} \cap A^\circ$  dans  $\bar{A} = A^\circ/A^{\circ\circ}$ .

(IV.4.2). - Soit  $X$  un espace analytique sur  $K$ . Un recouvrement pur  $\mathcal{U} = (U_i)$  de  $X$  est un recouvrement admissible par des affinoïdes  $(U_i)$  qui possède les propriétés suivantes :

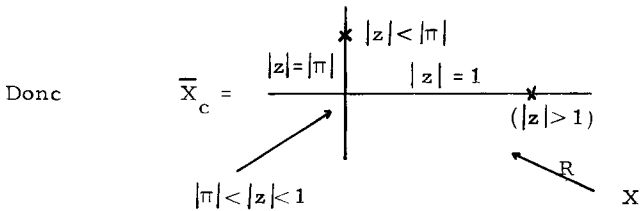
Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , il existe un ouvert affine de Zariski  $V_{ij} \subset (\overline{U_i})_c$  avec  $U_i \cap U_j = R_{ij}^{-1}(V_{ij})$  ( $R_i = U_i \rightarrow (\overline{U_i})_c$ ) et  $U_i \cap U_j$  est affinoïde avec la réduction canonique  $R_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow V_{ij}$ .

A l'espace analytique  $X$  et son recouvrement pur  $\mathcal{U}$ , on associe la réduction  $\overline{X}_{\mathcal{U}} = \cup (\overline{U_i})_c$ . Les ensembles affines  $(\overline{U_i})_c$  sont recollés sur les ouverts affines  $V_{ij}$ . La réduction  $\overline{X}_{\mathcal{U}}$  est une variété algébrique réduite sur  $k$ , localement de type fini.

(IV.4.3) EXEMPLES

1) Soit  $X =$  le polydisque  $\{(z_1, \dots, z_n) \in K^n \mid |z_i| \leq 1\}$ .  
 La réduction canonique est  $\overline{X}_c = \overline{K}^n$ . L'application  $R$  est donnée par  $((z_1, \dots, z_n) \mapsto (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n) \in \overline{K}^n$ .

2) Soit  $X = \{z \in k \mid |\pi| \leq |z| \leq 1\}$  où  $0 < |\pi| < 1$ .  
 Alors  $\mathcal{O}(X) = K\langle Z, S \rangle / (ZS - \pi)$  et  $\overline{\mathcal{O}(X)} = K[Z, S] / (ZS)$ .



3) La courbe de Tate  $\mathbb{T} = K^* / \langle q \rangle$

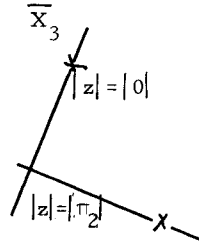
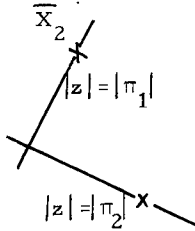
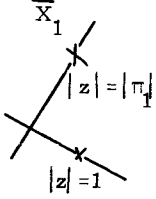
Il faut trouver un recouvrement pur de  $\mathbb{T}$ . Il y a beaucoup de possibilités :



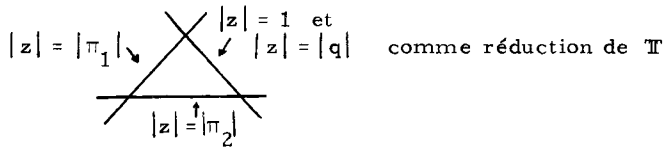
(a)  $X_1, X_2, X_3$  sont les images dans  $\mathbb{T}$  de :

$$|\pi_1| \leq |z| \leq 1 ; |\pi_2| \leq |z| \leq |\pi_1| ; |q| \leq |z| \leq |\pi_2|$$

où  $|q| < |\pi_2| < |\pi_1| < 1$ .

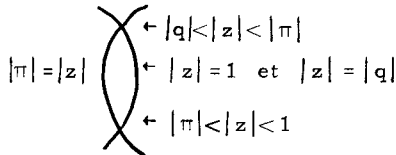
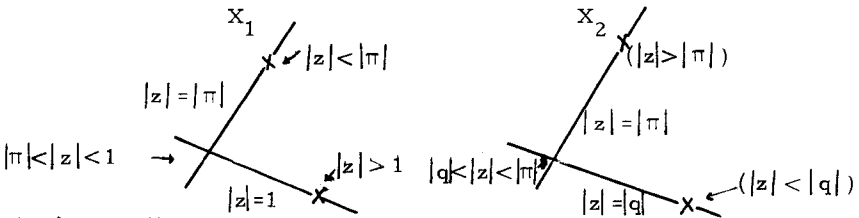


Après recollement, on trouve :



(b)  $X_1, X_2$  sont les images dans  $\mathbb{T}$  de

$$|\pi| \leq |z| \leq 1 \text{ et } |q| \leq |z| \leq |\pi| \text{ où } |q| < |\pi| < 1$$



(c)  $X_1$  et  $X_2$  sont les images dans  $\mathbb{T}$  de

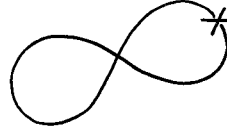
$$Y_1 = \{z \in \mathbb{K} \mid |q| \leq |z| \leq 1 ; |z-1| \geq 1 ; |z-q| \geq |q|\} \text{ et}$$

$$Y_2 = \{z \in \mathbb{K} \mid |z| = 1\}.$$

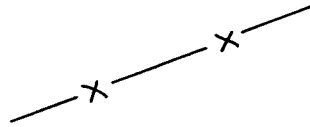
On peut montrer que l'algèbre  $\mathcal{O}(X_1)$  est affinoïde et que

$$\mathcal{O}(X_1) \simeq \{f \in \mathcal{O}(Y_1) \mid f(y) = f(qy) \text{ pour } |y|=1, |y-1|=1\}.$$

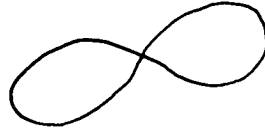
Un calcul direct (mais assez long) montre que  $\overline{X}_1$  est une courbe rationnelle, avec point double à laquelle il manque le point à l'infini.



Il est clair que  $X_2$  est affinoïde et que  $\overline{X}_2$  est  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  auquel on a enlevé 0 et l'infini.



Après recollement, on trouve la réduction suivante de  $\mathbb{T}$ .



Ces exemples permettent de deviner la relation entre les réductions algébriques et les réductions analytiques.

#### (IV.4.4) Réductions algébriques et réductions analytiques

Soit  $X$  une variété algébrique de type fini sur  $k$ , complet pour une valuation discrète. Un modèle  $Y/k^\circ$  de  $X$  est par définition un schéma de type fini sur  $k^\circ$  avec  $Y_{x_k^\circ} k^\circ \simeq X$ . La variété algébrique  $Y_{x_k^\circ} \overline{k}$  (de type fini sur  $\overline{k}$ ) sera appelée une réduction algébrique de  $X$ .

Si  $X$  est une variété projective sur  $k$ , nous considérons des modèles  $Y/k^\circ$  qui sont des schémas projectifs sur  $k^\circ$ . Alors  $Y_{x_k^\circ} \overline{k}$  est aussi une variété projective sur  $\overline{k}$ .

Nous pouvons formuler un résultat sur le lien entre les réductions algébriques et les réductions analytiques.

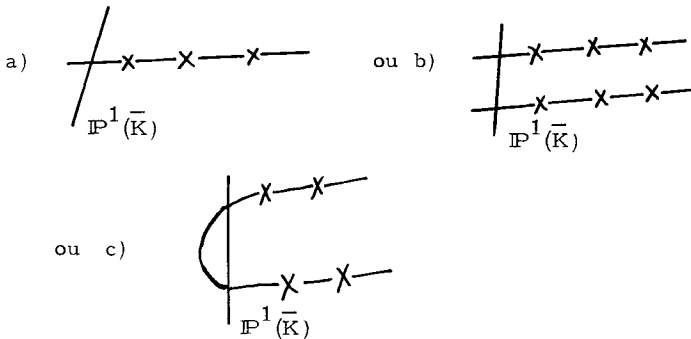
Soit  $X$  une variété projective et réduite sur  $k$ .

(1) Si  $Z$  est une réduction algébrique réduite de  $X$ , alors il existe un recouvrement pur  $\mathcal{U}$  de  $X$  et un isomorphisme canonique  $Z \simeq \overline{X}_{\mathcal{U}}$ .

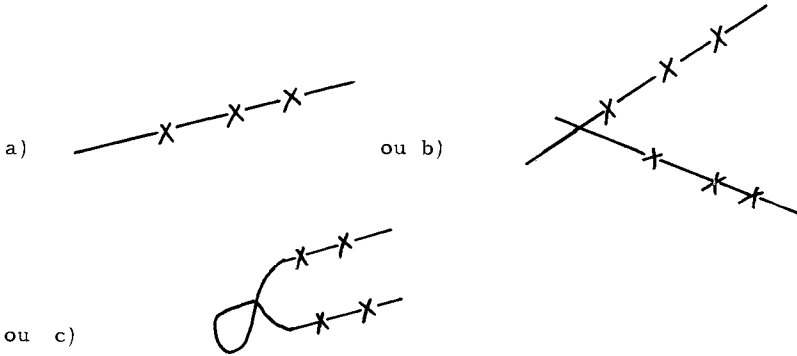
(2) Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement pur de  $X$ . Il existe (après une extension finie du corps de base) une réduction algébrique  $Z$  et un isomorphisme canonique  $Z \simeq \overline{X}_{\mathcal{U}}$ .

(IV.4.5). - Soient  $X$  une courbe algébrique,  $\mathcal{U}$  un recouvrement pur tel que  $\overline{X}_{\mathcal{U}}$  soit pré-stable, alors on peut changer le recouvrement  $\mathcal{U}$  en  $\mathcal{U}'$  de façon que  $\overline{X}_{\mathcal{U}'}$  soit stable (voir les figures IV.3.11).

Soient  $X$  un espace analytique de dimension 1 et connexe,  $\mathcal{U}$  un recouvrement pur tel que  $\overline{X}_{\mathcal{U}}$  ait une composante non complète. Alors  $X$  est affinofde et dans des cas spéciaux on peut voir que la réduction canonique  $\overline{X}_c$  est obtenue à partir de  $\overline{X}_{\mathcal{U}}$  en contractant les composantes complètes [21].

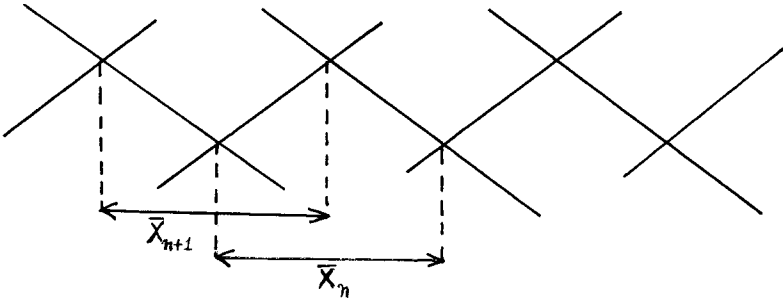


Alors  $X$  est affinoïde et a pour réduction canonique



#### IV.4.6.- Réduction de $K^x$

Soient  $\pi \in K$ ,  $0 < |\pi| < 1$  et  $X_n = \{z \in K \mid |\pi|^{n+1} \leq |z| \leq |\pi|^n\}$ .  
 Les ensembles  $X_n$  sont affinoïdes et  $\{X_n\}$  est un recouvrement pur de  $K^x$ . La réduction  $K^x$  par rapport à ce recouvrement est



Un modèle de  $K^x$  sur  $K^\circ$  donne une réduction banale, à savoir  $\overline{K^x}$ . Notre réduction analytique correspond au schéma formel sur  $K^\circ$  associé à  $K^x$  (IV.1.10) (remarquer que  $K^x$  n'est pas une variété projective).

CHAPITRE V : RÉDUCTION D'UN SOUS-ESPACE DE  $\mathbb{P}^1$

- V. 1. - Réduction d'un sous-espace de  $\mathbb{P}^1$
- V. 2. - Démonstration d'un résultat de Drinfeld sur les fonctions inversibles sur  $\Omega = \mathbb{P}^1(K) - \mathbb{P}^1(k)$
- V. 3. - Quelques mots sur la cohomologie étale des espaces k-analytiques.

On peut construire pour chaque sous-espace connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}^1$  un recouvrement pur  $\mathcal{U}$  et une réduction  $\overline{\Omega}_{\mathcal{U}}$ . Nous allons dans ce chapitre V étudier un cas particulier. Soient  $K$  un corps valué, complet, algébriquement clos,  $k$  un sous-corps localement compact et  $\Omega$  l'espace analytique  $\mathbb{P}^1(K) - \mathbb{P}^1(k)$ . Puisque  $\mathbb{P}^1(k)$  est compact la structure d'espace analytique sur  $\Omega$  est celle définie en I. 7. 3. Cet exemple est important parce qu'il constitue l'équivalent du demi-plan de Poincaré (§. IV. 3 et aussi Gerritzen, van der Put, Schottky groups and Mumford curves, [21]). Contrairement aux exemples précédents,  $\Omega$  admet une réduction qui n'est pas une variété algébrique (c'est une réunion infinie de droites). Le premier point est de définir un recouvrement pur. Ceci se fait en associant un arbre  $T$  à l'ensemble des sous-modules libres de rang 2 sur  $k^\circ$ , contenus dans  $k^2$ . Le recouvrement pur correspondant possède la propriété d'être invariant par l'action de  $\text{PGL}(2, k)$ . Nous avons alors une bonne description de la réduction de  $\Omega$  relativement à ce recouvrement. Ceci nous permet de démontrer (en V. 2) un résultat de Drinfeld sur le

faisceau des fonctions inversibles sur  $\Omega$ . Pour énoncer ce résultat sous sa forme initiale nous devons définir en V.3, brièvement, la cohomologie étale d'un espace analytique relativement à un faisceau.

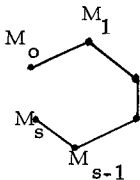
V.1. - Réduction d'un sous-espace de  $\mathbb{P}^2$

(V.1.1) L'arbre T associé aux sous- $k^\circ$ -modules de rang 2 de  $k^2$ .

On dit que deux sous- $k^\circ$ -modules libres de rang 2 de  $k^2$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont équivalents s'il existe  $\lambda \in k^\times$  tel que  $M_1 = \lambda M_2$  (on peut toujours prendre  $\lambda$  sous la forme  $\lambda = \pi^n$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\pi$  étant une uniformisante de  $k$ ). On note  $[M]$  la classe d'équivalence du  $k^\circ$ -module  $M$  de rang 2. Le graphe  $T$  est l'ensemble de toutes les classes d'équivalences des sous- $k^\circ$ -modules libres de rang 2 de  $k^2$ . Les arêtes du graphe  $T$  sont les couples  $\{[M_1], [M_2]\}$  avec  $M_1 \not\cong M_2 \not\cong \pi M_1$ . On dit qu'un graphe est un arbre s'il est connexe et sans cycles.

(V.1.2) LEMME. - Le graphe T est un arbre ; chaque sommet de T est lié à  $(q+1)$  autres sommets (où  $q = \text{card } k$ ) ;  $\text{PGL}(2, k)$  agit sur T comme un groupe d'automorphismes ; l'action est transitive sur les sommets et sur les arêtes.

DÉMONSTRATION. - Si  $\{[M_1], [M_2]\}$  est une arête, alors il existe  $M'_2 \sim M_2$  (équivalent), unique, tel que  $M_1 \not\cong M'_2 \not\cong \pi M_1$ . Donc les arêtes ayant  $[M_1]$  comme sommet correspondent aux droites dans  $M_1 / \pi M_1 \simeq \bar{k}^2$ . Leur nombre est  $\text{card}(\mathbb{P}^1(\bar{k})) = q+1$ .



Soit  $[M_0], [M_1], \dots, [M_s]$ , une suite de sommets différents de  $T$  telle que chaque  $\{[M_i], [M_{i+1}]\}$  soit une arête, pour  $0 \leq i \leq s-1$ . Alors on peut choisir  $M'_s$  dans  $[M_s]$  tel que  $M_0 / M'_s \simeq k^\circ / \pi^s k^\circ$  ; ça se démontre par récurrence. Il s'ensuit que  $\{[M_s], [M_0]\}$  ne peut

être une arête. Donc  $T$  n'a pas de cycle. On vérifie sans difficulté que  $T$  est connexe. Soit  $\{[M_1], [M_2]\}$  une arête, alors on peut trouver  $e_1, e_2$  tels que  $[M_1] = [k^\circ e_1 \oplus k^\circ e_2]$  et  $[M_2] = [k^\circ e_1 \oplus k^\circ \pi e_2]$ . Soit  $\sigma \in PGL(2, k)$  défini par  $\sigma((1, 0)) = e_1$ ,  $\sigma((0, 1)) = e_2$ . Alors  $\{[M_1], [M_2]\}$  est l'image par  $\sigma$  de  $\{[k^\circ \times k^\circ], [k^\circ \times \pi k^\circ]\}$ .

(V.1.2). - Le recouvrement pur associé à l'arbre  $T$

A chaque arête  $(a, b)$  de  $T$  nous allons associer un affinofde  $U(a, b)$  de  $\Omega = \mathbb{P}^1(K) - \mathbb{P}^1(k)$ . Définissons d'abord  $U(a_o, b_o)$  pour  $a_o = k^\circ \times k^\circ$  et  $b_o = k^\circ \times \pi k^\circ$ . Soit :

$$U(a_o, b_o) = \left\{ z \in K \left| \begin{array}{l} |z-d| = 1 \text{ où } d \text{ parcourt un système de re-} \\ \text{présentants de } \bar{k}^x \\ |z-\pi d| \geq |\pi| \text{ où } d' \text{ parcourt un système de} \\ \text{représentants de } \bar{k} \end{array} \right. \right\}$$

Soit

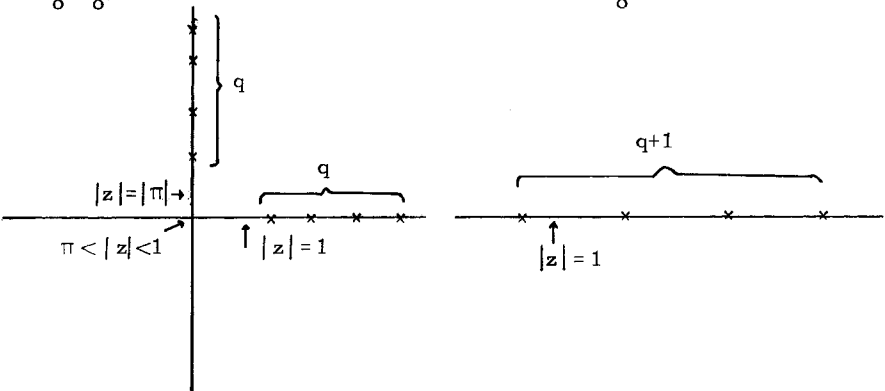
$$U(a_o) = \left\{ z \in K \mid |z-d| = 1 \text{ où } d \text{ parcourt un système de re-} \right. \\ \left. \text{présentants de } \bar{k} \right\}$$

Les ensembles  $U(a_o, b_o)$  et  $U(a_o)$  sont des affinofdes connexes de  $\Omega$  ayant pour réductions canoniques :

$$\overline{U(a_o, b_o)}$$

et

$$\overline{U(a_o)}$$



Soit  $(a, b)$  une arête quelconque, il existe  $\sigma \in \text{PGL}(2, k)$  tel que  $(a, b) = \sigma(a_o, b_o)$ . Par définition on pose alors  $U(a, b) = \sigma(U(a_o, b_o))$  (on vérifie que  $\sigma(a_o, b_o) = \sigma'(a_o, b_o)$  implique  $\sigma(U(a_o, b_o)) = \sigma'(U(a_o, b_o))$ ).

Le recouvrement  $\{U(a, b) \mid (a, b) \in \text{Arêtes de } T\}$  a les propriétés suivantes :

(V. 1. 4) il est admissible

(V. 1. 5)  $U(a, b) \cap U(c, d) = \emptyset$  si  $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$

(V. 1. 6)  $U(a, b) \cap U(c, d) = U(b)$  si  $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \{b\}$

(V. 1. 7) le recouvrement est pur et la réduction  $\bar{\Omega}$  par rapport à ce recouvrement satisfait :

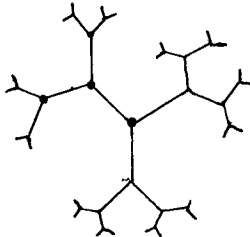
(V. 1. 8) chaque composante de  $\bar{\Omega}$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1(\bar{K})$

(V. 1. 9)  $\bar{\Omega}$  a seulement des points doubles ordinaires comme singularités.

(V. 1. 10) le graphe défini par  $\left\{ \begin{array}{l} \text{sommets} = \text{composantes de } \bar{\Omega} \\ \text{arêtes} = \text{points doubles de } \bar{\Omega} \end{array} \right\}$   
est isomorphe à  $T$

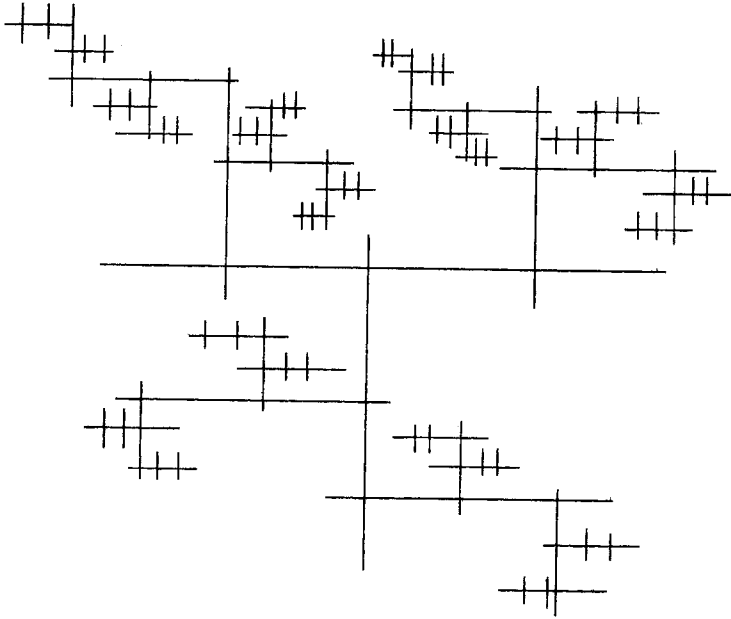
(V. 1. 11) le groupe  $\text{PGL}(2, k)$  agit sur le recouvrement et la réduction.

Pour  $q = 2$ , l'arbre  $T$  a la forme :





Pour  $q = 2$ ,  $\bar{\Omega}$  a la forme :



La vérification de (V.1.4) à (V.1.11) est laissée au lecteur. La réduction  $\bar{\Omega}$  et l'arbre  $T$  ont d'autres interprétations (J.-P. Serre, Arbres, Amalgames,  $Sl_2$  - Astérisque, [55]). Le stabilisateur d'un sommet  $[M]$  de  $T$  est le sous-groupe maximal compact  $PGL(M) = \{ \sigma \in PGL(2, k) \mid \sigma(M) = M \}$  de  $PGL(2, k)$ . Si  $[M] = \sigma(k^\circ \times k^\circ)$ , alors  $PGL(M) = \sigma PGL(k^\circ \times k^\circ) \sigma^{-1}$  et  $PGL(2, k^\circ) \simeq PGL(k^\circ \times k^\circ)$ . Cette correspondance entre les sommets de  $T$  et les sous-groupes maximallement compacts de  $PGL(2, k)$  est bijective. En fait  $T$  est l'immeuble de Tits pour le groupe  $PGL(2, k)$  ([7], Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie).

Une demi-droite dans  $T$  est par définition un sous-arbre de  $T$  de la forme :  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots$  . On identifie deux demi-droites qui diffèrent par un ensemble fini :



(V. 1. 12) Les demi-droites de  $T$  correspondent biunivoquement aux points de  $\mathbb{P}^1(k)$

DÉMONSTRATION. - Soit  $[M_0], [M_1], [M_2] \dots$  une demi-droite.

On peut choisir (les représentants),  $M_1, M_2, \dots$  tels que

$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \dots$  et  $M_i/M_{i+1} \cong \bar{k}$ . Nous savons que  $M_0/M_s \cong k^\circ/\pi^s k^\circ$ .

Pour une base convenable  $e_1^s, e_2^s$  de  $M_0$  on a :

$$M_0 = k^\circ e_1^s \oplus k^\circ e_2^s \quad \text{et} \quad M_s = k^\circ \pi^s e_1^s \oplus k^\circ e_2^s.$$

Il s'ensuit que  $e_2^{s+1} - e_2^s \in \pi^s M_0$ . La suite  $(e_2^s)_s$  est convergente, soit  $e_2$  sa limite. On a  $e_2 \in \bigcap_{i \geq 0} M_i = k^\circ e_2$ . On associe à la demi-droite  $[M_0], [M_1], \dots$  le point  $\{k e_2\}$  de  $\mathbb{P}^1(k)$ . Un petit calcul montre que cette application est bijective et commute avec l'action de  $\text{PGL}(2, k)$ . Soit  $\{k e\}$  un point de  $\mathbb{P}^1(k)$ , et  $M_0$  tel que  $e \in M_0 - \pi M_0$ , alors la demi-droite associée à  $\{k e\}$  est définie par la suite  $M_0 \supset \pi M_0 + k^\circ e \supset \pi^2 M_0 + k^\circ e \supset \dots$ .

(V. 1. 13) On associe à une arête orientée,  $\overset{a}{\bullet} \longrightarrow \overset{b}{\bullet}$ , l'ensemble  $V(a, b)$  de tous les points de  $\mathbb{P}^1(k)$  qui correspondent aux demi-droites issues de  $a$  (vers  $b$ ). Cet ensemble est un disque fermé de  $\mathbb{P}^1(k)$ . Pour  $a = k^\circ \times k^\circ$  et  $b = \pi k^\circ \times k^\circ$  par exemple, l'ensemble de  $\mathbb{P}^1(k)$  correspondant est  $\{ \lceil x_0, x_1 \rceil \mid |x_1| > |x_0| \}$ . En posant  $z = x_1/x_0$ , on peut l'écrire comme  $\{z \in k \mid |z| \geq |\pi|^{-1}\} \cup \{\infty\}$ . Les  $V(a, b)$  forment une base de la topologie de  $\mathbb{P}^1(k)$ .

V. 2. - Démonstration d'un résultat de Drinfeld sur les fonctions inversibles sur  $\Omega = \mathbb{P}^1(K) - \mathbb{P}^1(k)$

([10], V. G. Drinfeld, Elliptic modules, Math. USSR Sbornik, vol. 23 (1974), n° 4, prop. 10.1 et prop. 10.2).

Au chapitre I (proposition I. 8.9) nous avons montré l'existence de la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow K^\times \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega)^\times \longrightarrow M_0(\mathcal{L}) \longrightarrow 0$$

où  $\mathcal{L}$  est compact,  $\Omega = \mathbb{P}^1(K) - \mathcal{L}$ ,  $M_0(\mathcal{L})$  est le groupe des mesures  $\mu$  sur  $\mathcal{L}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  telles que  $\mu(\mathcal{L}) = 0$ .

Soit  $\ell \geq 1$  un entier. Notons  $\cdot \ell$  l'application de  $\mathcal{G}(\Omega)^{\times}$  dans  $\mathcal{G}(\Omega)^{\times}$  définie par  $f \mapsto f^{\ell}$ . Cette application induit sur  $M_0(\mathcal{L})$  la multiplication par  $\ell$  toujours notée  $\cdot \ell$ . Puisque  $K$  est algébriquement clos, l'application  $\cdot \ell$  de  $K^{\times}$  dans  $K^{\times}$  est surjective et son noyau est le sous-groupe  $\mu_{\ell} = \{\xi \in K^{\times} \mid \xi^{\ell} = 1\}$ .

Si  $p > 0$  est la caractéristique de  $K$  et si  $\ell = \ell_1 p^{\alpha}$  avec  $p \nmid \ell_1$  on a :  $\mu_{\ell} = \mu_{\ell_1} \simeq \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}$ .

(V. 2.1) PROPOSITION. - On a la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \mu_{\ell} \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega)^{\times} \xrightarrow{\cdot \ell} \mathcal{G}(\Omega)^{\times} \longrightarrow M_0(\mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Le produit tensoriel  $M_0(\mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$  peut s'interpréter comme le groupe des mesures  $\mu$  sur  $\mathcal{L}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$  telles que  $\mu(\mathcal{L}) = 0$ . Une autre interprétation de  $M_0(\mathcal{L}) \otimes \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$  utilise l'arbre  $T$  associé à  $\mathbb{P}^1(k)$ .

Un courant sur  $T$  ("harmonic 1-cocycle" chez Drinfeld) est une application  $c$  de {arêtes orientées de  $T$ } dans  $\mathbb{Z}$  (ou dans un groupe abélien quelconque) telle que pour chaque sommet  $a$  de  $T$  on a :

$$\sum_b c(a, b) = 0,$$

où la sommation est étendue à tous les  $b$  tels que  $(a, b)$  soit une arête.

En particulier on a  $c(a, b) = -c(b, a)$ . A une mesure  $\mu \in M_0(\mathbb{P}^1(k))$  on fait correspondre le courant  $c_{\mu}$  donné par  $c_{\mu}(a, b) = \mu(V(a, b))$ . Ainsi :

$$\sum_b c_{\mu}(a, b) = \sum_b \mu(V(a, b)) = \mu(\bigcup_b V(a, b)) = \mu(\mathbb{P}^1(k)) = 0.$$

ce qui prouve que  $c_{\mu}$  est un courant. L'application  $\mu \mapsto c_{\mu}$  est bijective et on peut reformuler (V. 2.1) en :

(V. 2. 3) COROLLAIRE. - Soit  $\mathfrak{X}$  le groupe des courants sur  $T$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} = \mu_\ell$ . Alors la suite

$$\{1\} \longrightarrow \mu_\ell \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega)^{\times} \xrightarrow{\cdot \ell} \mathcal{O}(\Omega)^{\times} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow 0$$

est exacte (prop. 10. 2 chez Drinfeld).

### V. 3. - Quelques mots sur la cohomologie étale des espaces $k$ -analytiques

(V. 3. 1) Un morphisme d'un espace analytique  $X$  dans un espace analytique  $Y$  est défini par les données suivantes :

- 1) une application continue  $f$  de  $X$  dans  $Y$
- 2) un recouvrement admissible  $(X_i)$  (resp.  $(Y_i)$ ) de  $X$  (resp.  $Y$ ) par des affinoides tel que  $f(X_i) \subset Y_i$
- 3) une famille  $(\varphi_i)$  d'homomorphismes de  $\mathcal{O}(Y_i)$  dans  $\mathcal{O}(X_i)$  telle que  $f|_{X_i} = \text{Sp}(\varphi_i)$ .

Le morphisme d'espaces analytiques sera noté  $f$ .

Soit  $X$  un espace analytique,  $x \in X$ , on appelle fibre en  $x$  de  $X$  l'algèbre notée  $\mathcal{O}_{X,x}$  définie par  $\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(U)$ .

Si  $X = k^n$  et  $x = (0, 0, \dots, 0)$ , on a  $\mathcal{O}_{X,x} = k\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  l'algèbre des séries convergentes en  $(0, 0, \dots, 0)$  (chaque série de  $\mathcal{O}_{X,x}$  admet un polydisque sur lequel elle converge). En général on a :

$$\mathcal{O}_{X,x} = \frac{k\{z_1, z_2, \dots, z_n\}}{\text{idéal}}.$$

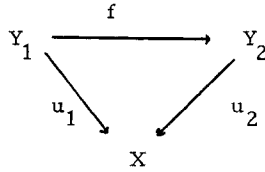
Soit  $f$  un morphisme de  $X$  dans  $Y$ , alors  $f$  induit un homomorphisme de  $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  noté  $f_x$ .

(V. 3. 2) Un morphisme  $f$  de  $X$  dans  $Y$  est dit étale si  $f_x$  est un isomorphisme pour tout  $x \in X$ .

Soit  $X$  un espace analytique, on définit la catégorie  $\mathcal{E}t_X$  de la façon suivante : les objets sont les couples  $(Y, u)$  où  $u$  est un morphisme étale de l'espace analytique  $Y$  dans l'espace analytique  $X$  ;

un morphisme  $f$  de  $(Y_1, u_1)$  dans  $(Y_2, u_2)$  est un morphisme  $f$  de  $Y_1$  dans  $Y_2$  tel que

$$u_2 \circ f = u_1 .$$



Le produit dans  $\mathcal{S}t_X$  est le produit fibré  $Y_1 \times_X Y_2$ . En particulier si  $X_1, Y_1, Y_2$  sont affinoïdes on a

$$Y_1 \times_X Y_2 \simeq \text{Sp}(\mathcal{O}(Y_1) \hat{\otimes} \mathcal{O}(Y_2)) \otimes \mathcal{O}(X) .$$

Soit  $(Y, u)$  un objet de  $\mathcal{S}t_X$ , un recouvrement de  $(Y, u)$  est une famille  $(Y_i \xrightarrow{f_i} Y)_i$  telle que  $u \circ f_i$  soit un morphisme étale (ou ce qui est équivalent  $f_i$  est étale),  $\{f_i(Y_i)\}_i$  est un recouvrement ordinaire de  $Y$  qui peut être raffiné par un recouvrement affinoïde admissible de  $Y$ . Nous noterons  $\text{Cov}(Y)$  une famille de recouvrement de  $(Y, u)$ .

(V. 3. 3) Un pré-faisceau (en groupe commutatif)  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{S}t_X$  est défini par les données et propriétés suivantes :

- i) un groupe abélien  $\mathcal{P}(Y)$  pour tout  $(Y, u)$  de  $\mathcal{S}t_X$  ;
- ii) un homomorphisme  $\mathcal{P}(f)$  de  $\mathcal{P}(Y_2)$  dans  $\mathcal{P}(Y_1)$  pour tout morphisme  $f$  de  $(Y_1, u_1)$  dans  $(Y_2, u_2)$ .
- iii) Soient  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) un morphisme de  $(Y_1, u_1)$  dans  $(Y_2, u_2)$  (resp.  $(Y_2, u_2)$  dans  $(Y_3, u_3)$ ), alors on voit que

$$\mathcal{P}(f_2 \circ f_1) = \mathcal{P}(f_1) \circ \mathcal{P}(f_2)$$

et de plus on impose

$$\mathcal{P}(\text{id}_Y) = \text{id}_{\mathcal{P}(Y)} .$$

On dit que  $\mathcal{P}$  est un faisceau si pour chaque  $\{Y_i \rightarrow Y\} \in \text{Cov}(Y)$  la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \xrightarrow{\alpha} \prod_i \mathcal{P}(Y_i) \xrightarrow{\beta} \prod_{i < j} \mathcal{P}(X_i \times_X Y_j)$$

est exacte. Ici  $\alpha$  désigne l'homomorphisme  $\prod_i (\mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Y_i))$  et  $\beta$  est ainsi défini de la façon suivante :

les deux applications  $Y_i \times_X Y_j \longrightarrow Y_i$  donnent deux applications

$$\begin{array}{ccc} \rho(Y_i) & \xrightarrow{\gamma_{ij}} & \rho(Y_i \times_X Y_j) \\ \rho(Y_j) & \xrightarrow{\delta_{ij}} & \rho(Y_i \times_X Y_j) \end{array} ,$$

on pose :  $\beta((a_i)) = (\gamma_{ij}(a_i) - \delta_{ij}(a_j))_{i,j}$  .

(V. 3. 4) Une suite exacte courte de faisceaux, notée

$$0 \longrightarrow \rho_1 \xrightarrow{\alpha} \rho_2 \xrightarrow{\beta} \rho_3 \longrightarrow 0$$

est défini par les données et propriétés suivantes :

1) pour chaque  $(Y, u) \in \text{ét}_X$  une suite exacte

$$0 \longrightarrow \rho_1(Y) \xrightarrow{\alpha_Y} \rho_2(Y) \xrightarrow{\beta_Y} \rho_3(Y) .$$

Pour chaque morphisme de  $(Y_1, u_1)$  dans  $(Y_2, u_2)$  on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \rho_1(Y_1) & \xrightarrow{\alpha_{Y_1}} & \rho_2(Y_1) & \xrightarrow{\beta_{Y_1}} & \rho_3(Y_1) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \rho_1(Y_2) & \xrightarrow{\alpha_{Y_2}} & \rho_2(Y_2) & \xrightarrow{\beta_{Y_2}} & \rho_3(Y_2) . \end{array}$$

2) Pour chaque  $\xi \in \rho_3(Y)$  il existe un recouvrement  $(Y_i \longrightarrow Y)_i \in \text{Cov}(Y)$  et des éléments  $\eta_i \in \rho_2(Y_i)$  avec

$$\beta_{Y_i}(\eta_i) = (\rho_3(Y) \longrightarrow \rho_3(Y_i))(\xi) = (" \xi |_{Y_i} ") .$$

On peut alors définir les groupes de cohomologie, [38], notés  $H_{\text{ét}}^i(X, -)$  :

- 1)  $H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$
- 2)  $H_{\text{ét}}^i(X, -)$  est le  $i$ -ième foncteur dérivé de  $H_{\text{ét}}^0(X, -)$

Pour chaque suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

on a une longue suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H_{\text{ét}}^0(\mathcal{F}_1) \longrightarrow H_{\text{ét}}^0(\mathcal{F}_2) \longrightarrow H_{\text{ét}}^0(\mathcal{F}_3) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathcal{F}_1) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathcal{F}_2) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathcal{F}_3) \longrightarrow H_{\text{ét}}^2(\mathcal{F}_1) \dots$$

(V. 3.5) Exemples de faisceaux sur  $\mathcal{G}^t_X$

1) Le faisceau  $\mathcal{O}$ ,  $Y \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$ .

2) Le faisceau  $\mathcal{O}^x$ ,  $Y \longrightarrow \mathcal{O}(Y)^x$ .

3) Soit  $A$  un groupe commutatif, le faisceau constant  $\tilde{A}$  est défini par  $\tilde{A}(Y) = A^n$  où  $n$  est le nombre de composantes connexes de  $Y$ .

4) Soit  $\ell \geq 1$  un entier, on définit le faisceau  $\mu_\ell$  par

$$\mu_\ell(Y) = \{ \xi \in \mathcal{O}^x(Y) \mid \xi^\ell = 1 \}.$$

(V. 3.6) PROPOSITION. - Soit  $K$  un corps complet, algébriquement clos et  $\ell$  un entier qui ne divise pas la caractéristique de  $K$ . Alors on a la suite exacte de faisceaux sur  $\mathcal{G}^t_X$  :

$$0 \longrightarrow \mu_\ell \longrightarrow \mathcal{O}^x \xrightarrow{\cdot \ell} \mathcal{O}^x \longrightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. - Pour chaque  $Y$ , la suite

$$0 \longrightarrow \mu_\ell(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(Y)^x \xrightarrow{\cdot \ell} \mathcal{O}(Y)^x$$

est exacte. Soit  $\xi \in \mathcal{O}(Y)^x$ . Il faut trouver un recouvrement étale  $(Y_i \longrightarrow Y)$  de  $Y$  tel que l'image de  $\xi$  dans chaque  $\mathcal{O}(Y_i)^x$  a une racine  $\ell$ -ième. D'abord on prend un recouvrement affinoïde

admissible  $\{Z_i\}$  de  $Y$ . On définit  $Y_i = \text{Sp}(\mathcal{O}(Z_i)[T]/(T^\ell - \xi))$  (nous écrivons  $\xi$  pour l'image de  $\xi$  dans  $\mathcal{O}(Z_i)$ ). Il reste donc à montrer que  $Y_i \rightarrow Z_i \subset Y$  est étale. Soit  $z$  un point de  $Z_i$ ;  $f^{-1}(z)$  est constitué de  $\ell$  points de  $Y_i$ , notés  $a_1, a_2, \dots, a_\ell$ . L'élément  $\xi$  dans  $\mathcal{O}_{Z_i, z}$  a une racine  $\ell$ -ième parce que  $\xi = \lambda(1+b)$  où  $\lambda \in k^\times$  et où  $b$  appartient à l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{Z_i, z}$ . Soit  $\eta \in \mathcal{O}_{Z_i, z}$  une racine  $\ell$ -ième de  $\xi$ . On vérifie que :

$$\mathcal{O}_{Z_i, z}[T]/(T^\ell - \xi) = \overline{\prod}_w \mathcal{O}_{Z_i, z}[T]/(T - w\eta) \simeq \overline{\prod} \mathcal{O}_{Z_i, z}$$

où  $w \in \mu_\ell$  le groupe d'ordre  $\ell$  des racines  $\ell$ -ièmes de l'unité de  $K$ . Cela montre que

$$\mathcal{O}_{Y, a_j} \simeq \mathcal{O}_{Z_i, z} \quad \text{pour chaque } a_j.$$

(V. 3.7) COROLLAIRE. - Soient  $\ell$  un entier qui ne divise pas la caractéristique de  $K$ ,  $X = \{z \in K \mid |z| = 1\}$ . Alors on a :

$$H_{\text{ét}}^1(X, \mu_\ell) = \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}.$$

DÉMONSTRATION. - La suite exacte de V. 3.6 donne la longue suite exacte de cohomologie :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}^\times(X) \xrightarrow{\cdot \ell} \mathcal{O}^\times(X) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mu_\ell) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{O}^\times) \rightarrow \dots$$

On peut vérifier que  $H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{O}^\times) = H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{O}^\times)$  ; ainsi I. 6.2 montre que  $H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{O}^\times) = 0$ . Il est d'autre part facile de vérifier que  $\mathcal{O}^\times(X)/\mathcal{O}^\times(X) \cdot \ell \simeq \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$ . Le corollaire est donc conséquence de la suite (\*).

(V. 3.8) COROLLAIRE ([10]). - Soient  $\ell$  un entier qui ne divise pas la caractéristique de  $K$ ,  $\Omega = \mathbb{P}(K) - \mathbb{P}(k)$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1(\Omega, \mu_\ell) &\simeq \{ \text{courants sur } T \text{ à valeurs dans } \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z} \} \simeq M_0(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z} \\ &\simeq \mathcal{O}^\times(\Omega) / \mathcal{O}^\times(\Omega) \cdot \ell. \end{aligned}$$



DÉMONSTRATION. - La suite V. 3. 6 donne la longue suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}^{\times}(\Omega) \xrightarrow{\cdot \ell} \mathcal{O}^{\times}(\Omega) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\Omega, \mu_{\ell}) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\Omega, \mathcal{O}^{\times}) \rightarrow \dots$$

On peut aussi vérifier que  $\check{H}^1(\Omega, \mathcal{O}^{\times}) = H_{\text{ét}}^1(\Omega, \mathcal{O}^{\times})$  et (I. 8. 2) dit que  $H^1(\Omega, \mathcal{O}^{\times}) = 0$ . Ce qui avec (V. 2. 3) montre le corollaire.

REMARQUES. - On sait (I. 6. 1) que  $\check{H}^1(X, \mu_{\ell}) = 0$  si  $X = \{z \in K \mid |z| = 1\}$ , or  $H_{\text{ét}}^1(X, \mu_{\ell}) = \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$ .

On doit avoir ([38])  $H^1(X, \mu_{\ell}) \hookrightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mu_{\ell})$

$$H_{\text{ét}}^1(X, -) = \check{H}_{\text{ét}}^1(X, -) \quad (\text{pour } X \text{ espace analytique)}$$

$$H_{\text{ét}}^1(X_{\text{an}}, \mu_{\ell}) = H_{\text{ét}}^1(X_{\text{alg}}, \mu_{\ell}) \quad \text{si } X \text{ est une}$$

courbe complète non singulière.

CHAPITRE VI : TORES ANALYTIQUES  
 ET VARIÉTÉS ABÉLIENNES

---

- VI. 1. - Le cas complexe
- VI. 2. - Le cas non archimédien
- VI. 3. - L'espace analytique  $G = (k^x)^g$
- VI. 4. - Le tore analytique  $\mathbb{T} = G/\Lambda$
- VI. 5. - Les fonctions méromorphes sur  $\mathbb{T} = G/\Lambda$
- VI. 6. - Tores analytiques et variétés abéliennes

Nous rappelons la relation entre tore analytique sur  $\mathbb{C}$  et variété abélienne sur  $\mathbb{C}$  (VI.1), nous présentons ensuite le problème analogue pour le cas non archimédien (VI.2). Ceci nécessite d'abord de définir l'espace analytique  $G = k^x{}^g$  et en particulier d'étudier les faisceaux  $\mathcal{G}^x$  des inversibles et  $\mathcal{M}$  des fonctions méromorphes (VI.3). Ceci nous permet alors de construire le tore analytique  $\mathbb{T}$  (VI.4). Le faisceau  $\mathcal{M}$  des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{T}$  introduit naturellement les fonctions thêta (VI.5) qui sont fondamentales pour caractériser les tores analytiques qui sont des variétés abéliennes (VI.6).

VI. 1. - Le cas complexe

DÉFINITION. - Un tore analytique (de dimension  $g$ ) est le quotient du groupe analytique  $\mathbb{C}^g$  par un réseau  $\Lambda$  (donc  $\simeq \mathbb{Z}^{2g}$ ).

On a le résultat classique suivant :

(VI.1.1) PROPOSITION. - Soit  $G$  un groupe analytique sur  $\mathbb{C}$  (i. e. un groupe de Lie complexe), connexe et compact. Alors  $G$  est un tore analytique.

DÉMONSTRATION ([41], D. Mumford, Abelian varieties, p.1,2). - Soient  $X$  une variété analytique de dimension  $n$  et  $x \in X$ . L'espace tangent  $T_{X,x}$  de  $X$  au point  $x$  est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des applications  $\mathbb{C}$ -linéaires  $D : \{ \text{fonctions holomorphes au voisinage de } x \} \rightarrow \mathbb{C}$  et qui satisfont  $D(fg) = f(x) D(g) + g(x) D(f)$  pour tout  $f$  et  $g$  holomorphes au voisinage de  $x$ . Les éléments  $D$  sont appelés les dérivations au point  $x$  et  $T_{X,x}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés analytiques,  $\varphi$  une application analytique de  $X$  dans  $Y$  et  $y = \varphi(x)$ . Alors  $\varphi$  induit une application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $d\varphi$  de  $T_{X,x}$  dans  $T_{Y,y}$  définie par  $d\varphi(D)(f) = D(f \circ \varphi)$ .

Un théorème élémentaire de la théorie des groupes de Lie dit que pour chaque  $v \in V = T_{G,e}$ ,  $v \neq 0$ , il existe un homomorphisme  $\Phi_v$  unique de  $\mathbb{C}$  dans  $G$  tel que  $(d\Phi_v)(1) = v$ ; ici homomorphisme signifie application analytique qui est un homomorphisme de groupe, de plus, on identifie  $T_{\mathbb{C},0}$  à  $\mathbb{C}$  par  $\frac{d}{dz} \rightarrow 1 \in \mathbb{C}$ . On sait en outre que l'application  $\Phi_v(z) : \mathbb{C} \times V \rightarrow G$  est analytique et que l'application  $\exp : V \rightarrow G$  définie par  $\exp(v) = \Phi_v(1)$  est localement un homéomorphisme.

Montrons d'abord que  $G$  est un groupe commutatif. Soient  $x \in G$  et  $c_x$  l'automorphisme intérieur de  $G$  défini par  $y \mapsto xyx^{-1}$ . L'application  $dc_x$  de  $V$  dans  $V$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire et dépend analytiquement de  $x$ . On définit ainsi une application analytique de  $G$  dans  $Gl(V)$ . Les composantes  $(dc_x)_{i,j}$  de la "matrice" de  $dc_x$  sont holomorphes sur  $G$ , comme  $G$  est compact, le principe du maximum montre que les fonctions  $(dc_x)_{i,j}$  sont des constantes. Ainsi donc  $dc_x = \mathbb{1}_V$  pour chaque  $x \in G$ .

L'application  $\Phi'_V = c_x \circ \Phi_V$  est un homomorphisme tel que  $d\Phi'_V(1) = v$ . L'unicité d'un tel homomorphisme implique que  $\Phi'_V = \Phi'_V$  et donc que  $x\Phi'_V(z) = \Phi'_V(z)x$  pour tout  $x \in G$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Ainsi  $\exp(V)$  est contenue dans le centre de  $G$  et comme  $G$  est connexe,  $\exp(V)$  engendre  $G$ . Ainsi  $G$  est commutatif.

Enfin soient  $v_1, v_2 \in V - \{0\}$ , l'application  $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow G$  définie par  $\Phi(\lambda) = \Phi_{v_1}(\lambda)\Phi_{v_2}(\lambda)$  est un homomorphisme tel que  $d\Phi(1) = v_1 + v_2$ , donc  $\Phi = \Phi_{v_1+v_2}$ ; il s'ensuit que l'application  $\exp : V \rightarrow G$  est un homomorphisme surjectif de groupe analytique. Le groupe  $G$  étant compact, le noyau de  $\exp$  est donc un réseau  $\Lambda$  de  $V$  et ainsi  $G$  est isomorphe à  $V/\Lambda$ .

(VI.1.2) DÉFINITION. - Soit  $k$  un corps, une variété abélienne  $A$  sur  $k$  est une variété projective connexe qui est un groupe algébrique.

Ce qui veut dire qu'il existe  $\mu : A \times A \rightarrow A$  (multiplication),  $i : A \rightarrow A$  (inverse),  $e : A \rightarrow A$  (élément neutre) qui sont des morphismes de variété algébrique avec les compatibilités usuelles correspondant à l'associativité et aux propriétés de l'élément inverse et neutre. On peut alors démontrer que la multiplication est commutative ([28], [56]).

Si  $k = \mathbb{C}$ , la variété abélienne  $A$  est canoniquement munie d'une structure de groupe analytique, compact et connexe: Ainsi donc (VI.1.1) montre que  $A$  est isomorphe (comme groupe analytique) au tore analytique  $\mathbb{C}^g/\Lambda$  où  $g = \dim A$  et  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbb{C}^g$ . La proposition qui suit donne une condition nécessaire et suffisante sur le réseau  $\Lambda$  pour que le tore analytique  $\mathbb{C}^g/\Lambda$  soit une variété abélienne.

(VI.1.3) PROPOSITION. - Le tore analytique  $\mathbb{C}^g/\Lambda$  est une variété abélienne si et seulement si il existe une base  $\{e_1, \dots, e_g\}$  de  $\mathbb{C}^g$  et une base  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$  de  $\Lambda$  telle que la matrice  $M$  des  $\{\lambda_i\}$  dans la base  $\{e_i\}$  soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{où } Z \text{ est une matrice sy-} \\ \text{métrique et où } \text{im}(Z) \text{ est} \\ \text{définie positive.} \end{matrix}$$

Pour la démonstration, on peut consulter Griffiths et Harris, Principles of algebraic geometry, [26], Swinnerton-Dyer, Analytic theory of abelian varieties, [58].

## VI.2. - Le cas non-archimédien

Si  $k$  est un corps valué complet ultramétrique, le groupe (additif)  $k^g$  n'a pas (en général) de sous-groupes discrets. On prend donc, comme définition de tore analytique, le quotient  $(k^x)^g/\Lambda$  où  $\Lambda$  est un sous-groupe discret de rang  $g$ . L'analogue dans le cas complexe est donné par l'isomorphisme  $\mathbb{C}^g/\Lambda \xrightarrow{\tilde{e}} \mathbb{C}^x{}^g/\Lambda'$  où  $\Lambda$  contient la base canonique de  $\mathbb{C}^g$ ,  $e(z_1, z_2, \dots, z_g) = (e^{2\pi iz_1}, \dots, e^{2\pi iz_g})$ ,  $\Lambda' = e(\Lambda)$  et  $\tilde{e}$  est induit par  $e$ .

Le problème qui se pose est le suivant : soit  $\mathcal{Q}$  un groupe analytique sur  $k$  (par exemple  $\mathcal{Q} = A$  une variété abélienne sur  $k$ ) ;  $\mathcal{Q}$  est-il un tore analytique ? Il y a (au moins) deux obstructions.

1) La multiplication  $\mu : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  définit un homomorphisme  $\mu^* : \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Q}, e} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Q}, e} \otimes_k \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Q}, e}$  où  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Q}, e}$  est le complété de l'anneau des fonctions holomorphes au voisinage de  $e$  (élément neutre de  $\mathcal{Q}$ ) pour la topologie  $\mathfrak{M}$ -adique ( $\mathfrak{M}$  est l'idéal maximal des fonctions holomorphes nulles en  $e$ ). L'anneau  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Q}, e}$  est isomorphe à l'anneau des séries formelles  $k[[X_1, \dots, X_n]]$  où  $n = \dim \mathcal{Q}$ . L'application  $\mu^* : k[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow k[[X_1, \dots, X_n]] \otimes_k k[[Y_1, \dots, Y_n]] \simeq k[[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]]$  est déterminée par  $F_1(X, Y) = \mu^*(X_i) \in k[[X, Y]]$ . Posons

$F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ , l'associativité et la commutativité de  $\mu$  impliquent que  $F$  est un groupe formel commutatif de dimension  $n$ . Si  $\mathcal{G} \simeq (k^x)^n / \Lambda$  le groupe formel associé est  $\widehat{\mathbb{G}}_m^n$  où  $\widehat{\mathbb{G}}_m$  est le groupe formel multiplicatif. Or en caractéristique positive, une variété abélienne peut avoir un groupe formel non-isomorphe à  $\widehat{\mathbb{G}}_m^n$  [62], [29].

2) Dans le cas où  $n = 1$ , nous connaissons déjà une autre obstruction (§ IV.1). En effet,  $A$  (= courbe elliptique = variété abélienne de dimension 1) est un tore analytique si et seulement si la réduction de  $A$  (stable sur un corps  $k$  assez grand) est une courbe rationnelle ayant un point double ordinaire. Ce même phénomène existe pour  $n > 1$ .

### VI. 3. - L'espace analytique $G = (k^x)^g$

Pour simplifier, supposons désormais  $k$  algébriquement clos.

#### (VI. 3.1). - Définition de l'espace analytique $G = (k^x)^g$

La variété algébrique affine définie par l'algèbre  $k[T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_n] / (T_1 S_1 - 1, \dots, T_n S_n - 1)$  a une structure canonique d'espace analytique (III. 4.5). Cet espace sera simplement noté  $G$  ou  $(k^x)^g$ . L'ensemble

$$G_n = \{ z = (z_1, \dots, z_g) \in k^{x^g} \mid |\pi|^n \leq |z_i| \leq |\pi|^{-n} \text{ pour } 1 \leq i \leq g \}$$

est un ouvert affinoïde admissible de  $G$  (on a toujours  $0 < |\pi| < 1$ )

et on a  $G = \bigcup_{n \geq 1} G_n$ . L'algèbre  $\mathcal{O}(G_n)$  s'identifie à l'algèbre

$$\left\{ \sum_{v \in \mathbb{Z}^g} a_v z^v \mid \lim_v |a_v| |\pi|^{-\sum |v_i|} = 0 \right\}.$$

Ainsi  $\mathcal{O}(G) = \varprojlim \mathcal{O}(G_n)$  s'identifie à l'algèbre

$$\left\{ \sum_{v \in \mathbb{Z}^g} a_v z^v \mid \lim_R |a_v| R^{-\sum |v_i|} = 0 \text{ pour tout } R > 0 \right\}.$$

Il suit de (III. 8.4) que l'anneau  $\mathcal{O}(G_n)$  est factoriel.

Le faisceau  $\mathcal{O}^x$  sur  $G$

(VI.3.2) PROPOSITION. - Tout élément inversible de  $\mathcal{O}(G_n)$  s'écrit sous la forme  $\lambda z^\alpha (1+h)$  où  $\lambda \in k^x$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g) \in \mathbb{Z}^g$ ,  $h$  est une série sans terme constant telle que  $\|h\| < 1$ .

DEMONSTRATION. - Pour  $g=1$  cette proposition est (I.8.5).  
Pour  $g > 1$ , on utilise le lemme suivant :

(VI.3.3) LEMME. - Soient  $X$  un affinoïde connexe,  $\rho \in |k^x|$ ,  $\rho \leq 1$ ,  $Y = X_x \{z \in k^x \mid \rho \leq |z| \leq \rho^{-1}\}$ . Alors tout élément inversible  $f$  de  $\mathcal{O}(Y)$  s'écrit sous la forme  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes z^n$  avec  $f_n \in \mathcal{O}(X)$ ,  
 $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \|f_n\|_X \rho^{-|n|} = 0$  et de plus il existe un entier  $n_0$  tel que  
 $|f_{n_0}(x)| |z^{n_0}| > |f_n(z)| |z^n|$  pour tout  $n \neq n_0$ ,  $(x, z) \in Y$  et  $f_{n_0} \in \mathcal{O}^x(X)$ .

DÉMONSTRATION. - Puisque

$$\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(X) \hat{\otimes}_k \left\{ \sum_n a_n z^n \mid \lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_n| \rho^{-|n|} = 0 \right\}$$

il suit que tout  $f \in \mathcal{O}(Y)$  se décompose de façon unique sous la forme

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes z^n \quad \text{avec} \quad f_n \in \mathcal{O}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} \|f_n\|_X \rho^{-|n|} = 0.$$

Si  $f$  est inversible (II.4.5) il existe  $a > 0$  tel que

$$(*) \quad |f(x, z)| \geq a \quad \text{pour tout} \quad (x, z) \in Y.$$

Il existe un entier  $N_0$  tel que pour tout  $|n| > N_0$  on ait

$$(**) \quad |f_n(x)| |z^n| < a \quad \text{pour tout} \quad (x, z) \in Y.$$

Soit  $m \in \mathbb{Z}$  et

$$X_m = \{x \in X \mid |f_m(x)| |z^m| \geq |f_n(x)| |z^n| \text{ pour tout } n \text{ et } z\}.$$

Il est donc clair que  $X_m = \emptyset$  pour  $|m| > N_0$ . De plus (\*) et (\*\*) montrent que pour  $|m| \leq N_0$  on a :

$$X_m = \{x \in X \mid |f_m(x)| |z^m| \geq |f_n(x)| |z^n| \text{ pour } |n| \leq N_0 \text{ et pour tout } z\}.$$

En effet, les inégalités  $|f_m(x)| |z^m| \geq |f_n(x)| |z^n|$  impliquent que  $|f_m(x)| |z^m| \geq a$  pour tout  $z$  ; sinon on aurait  $|f_n(x)| |z^n| < a$  pour tout  $n$  et un certain  $(x_0, z_0)$  ce qui contredit (\*). Ainsi  $X_m$  est un sous-ensemble rationnel.

Soit  $x_0 \in X$ . La proposition (VI. 3. 2) pour  $g = 1$ , montre que pour la série inversible  $\sum_n f_n(x_0) \otimes z^n$  il existe un entier  $n_{x_0}$  tel que :

$$|f_{n_{x_0}}(x_0)| |z^{n_{x_0}}| > |f_n(x_0)| |z^n| \quad \text{pour } n \neq n_{x_0} ;$$

ce qui montre que  $x_0 \in X_{n_{x_0}}$ . Si  $x_1 \in X_m$ , la même remarque montre que :

$$|f_m(x_1)| |z^m| > |f_n(x_1)| |z^n| \quad \text{pour tout } n \neq m .$$

Ainsi  $X_m \cap X_{m'} = \emptyset$  si  $m \neq m'$ . La famille  $\{X_m\}$  pour  $|m| \leq N_0$  est donc une partition de  $X$  en sous-ensembles rationnels, comme  $X$  est connexe, cette partition est réduite à un élément, ce qui montre le lemme.

Ce lemme nous permet de terminer la démonstration de (VI. 3. 2). Un élément  $f$  de  $\mathcal{O}(G_n)^x$  ( $g \geq 2$ ) s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i z_1^i$$

où  $f_i(z_2, \dots, z_g) = \sum a_{\nu}^i z^{\nu}$  converge pour  $|\pi|^n \leq |z_1| \leq |\pi|^{-n}$ ,  $2 \leq i \leq g$ . D'après le lemme (VI. 3. 3) il existe  $i_0$  tel que  $f_{i_0}$  soit inversible et :

$$|f_{i_0}(z_2, \dots, z_g) z_1^{i_0}| > |f_i(z_2, \dots, z_g) z_1^i| \quad \text{pour } i \neq i_0 .$$

Par récurrence sur  $g$ , il existe  $\nu^0$  tel que

$$|a_{\nu^0}^{i_0} z^{\nu^0}| > |a_{\nu}^{i_0} z^{\nu}| \quad \text{pour } \nu \neq \nu^0 \quad \text{et pour tout } z_2, \dots, z_g .$$

On montre facilement, à partir de (I. 3. 1), que :

$$\max |f_i(z_2, \dots, z_g)| = \max |a_{\nu}^{i_0} z^{\nu}| .$$



On déduit alors facilement que

$$\left| \begin{matrix} i & i & v \\ a & z & z \\ o & 1 & o \end{matrix} \right| > \left| \begin{matrix} i & i & v \\ a & z & z \\ v & 1 & o \end{matrix} \right| \quad \text{pour } (i, v) \neq (i_o, v_o)$$

et pour tout  $z_1, z_2, \dots, z_g$  tels que  $|\pi|^n \leq |z_i| \leq |\pi|^{-n}$ . Ce qui démontre la proposition (VI. 3. 2).

(VI. 3. 4) PROPOSITION. - L'homomorphisme

$$d : \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(G_n)^{\times} \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(G_n)^{\times}$$

défini par

$$d(f_1, f_2, f_3, \dots) = (f_1 f_2^{-1}, f_2 f_3^{-1}, \dots)$$

est surjectif.

DÉMONSTRATION. - Soit  $u = (u_1, u_2, u_3, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(G_n)^{\times}$ . D'après (VI. 3. 2),  $u_n$  se décompose sous la forme  $u_n = \lambda_n z_n^{\alpha_n} (1+h_n)$  avec  $\lambda_n \in k^{\times}$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{Z}^g$  et  $\|h_n\|_{G_n} < 1$ . On a :

$$u = v \cdot w \quad \text{ou} \quad v = (\lambda_1 z_1^{\alpha_1}, \lambda_2 z_2^{\alpha_2}, \dots) \quad \text{et} \quad w = (1+h_1, 1+h_2, \dots).$$

On a :

$$v = d\left(1, \frac{1}{\lambda_1 z_1^{\alpha_1}}, \frac{\lambda_1 z_1^{\alpha_1}}{\lambda_2 z_2^{\alpha_2}}, \dots\right).$$

Posons :

$$f_1 = (1+h_1)(1+h_2)(1+h_3)(\dots) \dots$$

$$f_2 = (1+h_2)(1+h_3) \dots$$

$$f_3 = (1+h_3)(1+h_4) \dots$$

.....

On a  $\|h_n\|_{G_1} \leq |\pi|^{n-1} \times \|h_n\|_{G_n} < |\pi|^{n-1}$ , donc le produit infini  $f_1$  converge sur  $G_1$ , de même  $f_n$  converge sur  $G_n$ . Il est alors clair que  $w = d(f_1, f_2, f_3, \dots)$ .

(VI. 3. 5) THÉORÈME. - Soit  $G = \bigcup_{n \geq 1} G_n = (k^x)^{\mathbb{Z}}$ .

1) Alors  $\mathcal{O}(G)^x = \{\lambda z^\alpha \mid \lambda \in k^x \text{ et } \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}\}$ .

2) On a  $H^1(G, \mathcal{O}^x) = \{1\}$ .

3) Soit  $\mathcal{M}$  le faisceau des fonctions méromorphes sur  $G$ . Alors  $\mathcal{M}(G)$  est le corps des fractions de  $\mathcal{O}(G)$ . De plus tout élément de  $\mathcal{M}(G)$  s'écrit sous la forme  $\theta_0/\theta_1$  où p. g. c. d.  $(\theta_0|_{G_n}, \theta_1|_{G_n}) = 1$  pour tout  $n \geq 1$ ; cette décomposition est unique aux éléments de  $\mathcal{O}(G)^x$  près.

DÉMONSTRATION. - 1) On a  $\mathcal{O}(G)^x = \varprojlim \mathcal{O}(G_n)^x$  et on déduit de (VI. 3. 2) que  $\mathcal{O}(G)^x = \{\lambda z^\alpha \mid \lambda \in k^x, \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}\}$ . Soit  $f \in \mathcal{O}(G)^x$ , on a  $f|_{G_n} = \lambda_n z^{\alpha_n}(1+h_n)$ , on montre facilement que  $\lambda_n = \lambda_{n+1}$  et  $\alpha_n = \alpha_{n+1}$  et  $h_{n+1}|_{G_n} = h_n$ . Comme  $\|h_{n+1}\|_{G_n} \leq |\pi| \|h_{n+1}\|_{G_{n+1}}$ , on déduit que  $h = 0$ .

2) Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $G$ , il suffit (III. 8. 2) de montrer que  $\mathcal{L}$  est trivial. On a  $\mathcal{L}|_{G_n} \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{O}(G_n)^\sim$  puisque  $\mathcal{O}(G_n)$  est factoriel. L'application  $\varphi_n \circ \varphi_{n+1}^{-1}|_{G_n}$  définit un isomorphisme de  $\mathcal{O}(G_n)^\sim$ , donc cette application est définie par  $f \mapsto fu_n$  où  $u_n \in \mathcal{O}(G_n)^x$ . D'après la proposition (VI. 3. 4) il existe  $v = (v_1, v_2, \dots)$ , avec  $v_n \in \mathcal{O}(G_n)^x$  tel que  $v = d(u_1, u_2, \dots)$ . Soit  $\psi_n$  l'isomorphisme  $\mathcal{L}|_{G_n} \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{O}(G_n)^\sim \xrightarrow{\cdot v_n} \mathcal{O}(G_n)^\sim$ , on a  $\psi_{n+1}|_{G_n} = \psi_n$ . Ainsi donc on a un isomorphisme  $\psi$  de  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{O}$ , ce qui prouve que  $\mathcal{L}$  est trivial.

3) On a  $\mathcal{M}(G) = \varprojlim \mathcal{M}(G_n)$ , où  $\mathcal{M}(G_n)$  est le corps des fractions de l'anneau factoriel  $\mathcal{O}(G_n)$ . Soit  $f \in \mathcal{M}(G)$  alors  $f|_{G_n}$  s'écrit  $a_n/b_n$  avec  $a_n, b_n \in \mathcal{O}(G_n)$  et p. g. c. d.  $(a_n, b_n) = 1$ .

Puisque  $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}$  sur  $G_n$ , il existe  $u_n \in \mathcal{O}(G_n)^x$  tel que  $a_{n+1} = u_n a_n$  et  $b_{n+1} = u_n b_n$  (car  $\mathcal{O}(G_n)$  est factoriel). D'après (VI. 3. 4) il existe  $v = (v_1, v_2, \dots) \in \prod_n \mathcal{O}(G_n)^x$  tel que  $(u_1, u_2, \dots) = d(v)$ .

Si on pose  $a'_n = v_n a_n$  et  $b'_n = v_n b_n$  on a  $a'_{n+1}|_{G_n} = a'_n$  et  $b'_{n+1}|_{G_n} = b'_n$ . Il existe donc  $a', b' \in \mathcal{O}(G)$  tels que  $a'|_{G_n} = a'_n$  et  $b'|_{G_n} = b'_n$ . Ce qui prouve que  $f = \frac{a'}{b'}$  avec p. g. c. d.  $(a'|_{G_n}, b'|_{G_n}) = 1$ .

#### VI. 4. - Le tore analytique $\mathbb{T} = G/\Lambda$

##### VI. 4. 1. - Définition du tore analytique $\mathbb{T} = G/\Lambda$

Un sous-groupe  $\Lambda$  de  $G = (k^x)^g$  est discret (par définition) si pour tout  $U$  affinofde et admissible de  $G$ ,  $U \cap \Lambda$  est fini. Soit  $\iota : G \rightarrow \mathbb{R}^g$  l'homomorphisme défini par :

$$\iota(z_1, z_2, \dots, z_g) = (-\log |z_1|, -\log |z_2|, \dots, -\log |z_g|).$$

Alors  $\Lambda$  est discret si et seulement si  $\iota(\Lambda)$  est discret dans  $\mathbb{R}^g$  et si  $\ker \Lambda$  est fini. On considère désormais le cas où  $\text{rg}(\Lambda) = g$  et  $\ker \iota = \{1\}$  ( $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^g$ ).

Définissons maintenant la structure analytique sur  $\mathbb{T} = G/\Lambda$ . Soit  $p$  la surjection canonique de  $G$  sur  $\mathbb{T}$ . Un ouvert  $Y$  de  $\mathbb{T}$  est admissible si  $Y = \mathbb{T}$  ou si il existe un admissible  $U$  de  $G$  tel que  $p|_U$  soit une bijection de  $U$  sur  $Y$ . D'autre part, les recouvrements admissibles sont les recouvrements finis. Enfin le faisceau structural  $\mathcal{O}$  est défini par  $\mathcal{O}(\mathbb{T}) = k$  et  $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(U)$  si  $Y \neq \mathbb{T}$  et si  $p|_U$  est une bijection de  $U$  sur  $Y$  (il est facile de vérifier que  $\mathcal{O}(U)$  est indépendant de  $U$ ).

(VI. 4. 2) DÉFINITION. - Un espace analytique  $X$  est séparé s'il possède un recouvrement  $(X_i)_i$  par des affinofdes admissibles tels que : si  $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ , alors  $X_i \cap X_j$  est affinofde et l'homomorphisme canonique  $\mathcal{O}(X_i) \otimes_k \mathcal{O}(X_j) \longrightarrow \mathcal{O}(X_i \cap X_j)$  est surjectif.

(VI.4.3) DÉFINITION. - Un sous-ensemble rationnel (réduit)  $Y_1$  d'un affinofde  $Y_2$  (réduit) est dit intérieur à  $Y_2$  et on le note  $Y_1 \subset Y_2$  s'il existe une représentation de  $Y_2$  de la forme  $Y_2 = \{z \in k^n \mid |z_i| \leq 1 \text{ et } f_j(z) = 0\}$  et  $0 < \rho < 1$  tel que  $Y_1 \subset \{z \in Y_2 \mid |z_i| \leq \rho \text{ pour tout } i\}$  (l'algèbre réduite  $\mathcal{O}(Y_2)$  étant isomorphe à  $k \langle T_1, \dots, T_n \rangle / (f_j(T))$ ).

(VI.4.4) DÉFINITION. - Un espace analytique  $X$  est dit complet si  $X$  admet deux recouvrements finis par des affinofdes,  $\{X_i\}_{i=1}^n$ ,  $\{X'_i\}_{i=1}^n$  tels que  $X'_i \subset X_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

La notion d'espace analytique complet correspond à la notion d'espace analytique compact sur  $\mathbb{C}$ . On peut vérifier aisément qu'une variété projective sur  $k$  est un espace analytique complet.

(VI.4.5) PROPOSITION. - Le tore analytique  $\mathbb{T} = G/\Lambda$  est un espace analytique séparé et complet.

DÉMONSTRATION. - Soit  $\pi \in k$ ,  $0 < |\pi| < 1$ , tel que :

$$\Lambda \cap \{z \in k^g \mid |\pi|^2 \leq |z_i| \leq |\pi|^{-2} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq g\} = \{1\}.$$

Soient  $Y$  l'image de  $\{z \in k^g \mid |\pi|^2 \leq |z_i| \leq |\pi|^{-2}, 1 \leq i \leq g\}$  dans  $\mathbb{T}$  et  $Y'$  l'image de  $\{z \in k^g \mid |\pi| \leq |z_i| \leq |\pi|, 1 \leq i \leq g\}$  dans  $\mathbb{T}$ . L'espace  $\mathbb{T}$  est recouvert par  $a_1 Y', a_2 Y', \dots, a_g Y'$  pour  $a_1, \dots, a_g \in \mathbb{T}$  convenables. Clairement  $\{a_1 Y, a_2 Y, \dots, a_g Y\}$  est aussi un recouvrement de  $\mathbb{T}$  et on a  $a_i Y' \subset a_i Y$  pour  $1 \leq i \leq g$ . Ce qui prouve que  $\mathbb{T}$  est complet. Il est facile, en considérant le recouvrement  $\{a_i Y\}_i$  de montrer que  $\mathbb{T}$  est séparé.

VI. 5. - Les fonctions méromorphes sur  $\mathbb{T} = G/\Lambda$ 

(VI. 5. 1) PROPOSITION. - Soit  $\mathfrak{M}$  le faisceau des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{T}$ . Alors :

$$\mathfrak{M}(\mathbb{T}) = \mathfrak{M}(G)^\Lambda = \{f \in \mathfrak{M}(G) \mid f(\lambda z) = f(z) \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda \text{ et } z \in G\}.$$

Tout  $f \in \mathfrak{M}(G)^\Lambda$ ,  $f \neq 0$  s'écrit  $f = \theta_0 / \theta_1$  avec  $\theta_i \in \mathcal{O}(G)$  et  $\theta_i(\gamma z) = Z_\gamma(z) \theta_i(z)$  pour tout  $\gamma \in \Lambda$  et  $z \in G$ . De plus  $Z_\gamma(z) \in \mathcal{O}(G)^\times$ . Les fonctions  $\theta_i$  s'appellent des fonctions thêta pour le facteur d'automorphie  $Z_\gamma$ .

DÉMONSTRATION. - La surjection  $G \xrightarrow{P} \mathbb{T}$  induit une injection de  $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$  dans  $\mathfrak{M}(G)$  dont l'image est  $\mathfrak{M}(G)^\Lambda$ . Soit  $f \in \mathfrak{M}(G)$ , le théorème (VI. 3.5) dit que  $f = \theta_0 / \theta_1$ . Or si  $f \in \mathfrak{M}(G)^\Lambda$ , on a  $f(z) = f(\gamma z) = \frac{\theta_0(\gamma z)}{\theta_1(\gamma z)}$ , l'unicité à inversible près du théorème (VI. 3.5) montre qu'il existe  $Z_\gamma \in \mathcal{O}(G)^\times$  tel que  $\theta_i(\gamma z) = Z_\gamma(z) \theta_i(z)$  pour tout  $z \in G$ .

(VI. 5. 2) LEMME. - Le facteur d'automorphie  $Z_\gamma$  a les propriétés suivantes :

i)  $\gamma \mapsto Z_\gamma$  est un 1-cocycle de  $H^1(\Lambda, \mathcal{O}(G)^\times)$ , c'est-à-dire  
 $Z_{\gamma\gamma'}(z) = Z_\gamma(\gamma'z) Z_{\gamma'}(z)$  pour tout  $\gamma, \gamma' \in \Lambda$  et  $z \in G$ .

ii) Chaque 1-cocycle  $\gamma \mapsto Z_\gamma$  de  $H^1(\Lambda, \mathcal{O}(G)^\times)$  est de la forme  $Z_\gamma(z) = d(\gamma) \sigma(\gamma)(z)$  où  $\sigma : \Lambda \rightarrow H = \{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_g^{\alpha_g} \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}^g\}$  est un homomorphisme de groupe ;  $d(\gamma) \in k^\times$  et satisfait

$$d(\gamma\gamma') d(\gamma)^{-1} d(\gamma')^{-1} = \sigma(\gamma')(\gamma).$$

iii) Soit  $q : \Lambda \times H \rightarrow k^\times$  défini par  $q(\gamma, h) = h(\gamma)$ . Alors  $\sigma(\gamma')(\gamma) = q(\gamma, \sigma(\gamma'))$  et l'application de  $\Lambda \times \Lambda$  dans  $k^\times$  définie par  $(\gamma, \gamma') \mapsto q(\gamma, \sigma(\gamma'))$  est symétrique et bilinéaire.

iv) Il existe une application bilinéaire symétrique

$p : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow k^x$  et un homomorphisme de groupe  $c : \Lambda \longrightarrow k^x$  tels que

$$Z_\gamma = c(\gamma) p(\gamma, \gamma) \sigma(\gamma) \text{ et } p(\gamma, \gamma')^2 = q(\gamma, \sigma(\gamma')) .$$

DÉMONSTRATION. - i), ii), iii) sont clairs. Pour iv), soit  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$  une base de  $\Lambda$  et soient  $p(\gamma_i, \gamma_j) \in k^x$  tels que  $p(\gamma_i, \gamma_j) = p(\gamma_j, \gamma_i)$  et  $p(\gamma_i, \gamma_j)^2 = q(\gamma_i, \sigma(\gamma_j))$ . Alors  $p$  se prolonge en une application bilinéaire de  $\Lambda \times \Lambda$  dans  $k^x$ . En plus on a  $Z_\gamma = c(\gamma) p(\gamma, \gamma) \sigma(\gamma)$  pour  $c(\gamma) \in k^x$ . Enfin ii) montre que  $c$  est un homomorphisme de  $\Lambda$  dans  $k^x$ .

(VI.5.3) DÉFINITIONS. - Soit  $Z \in H^1(\Lambda, \mathcal{O}(G)^x)$ , un 1-cocycle.

On note  $L(Z)$  l'espace vectoriel des fonctions thêta ayant  $Z$  pour facteur d'automorphie, c'est-à-dire :

$$L(Z) = \{ f \in \mathcal{O}(G) \mid f(z) = Z_\gamma(z) f(\gamma z) \text{ pour tout } \gamma \in \Lambda, z \in G \} .$$

On note toujours  $H$  le groupe

$$H = \{ z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_g^{\alpha_g} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_g) \in \mathbb{Z}^g \} \subset \mathcal{O}(G)^x .$$

On note  $F$  l'espace vectoriel des séries formelles  $\sum_{h \in H} a_h h$ .

Le groupe  $\Lambda$  agit sur  $F$  par

$$\left( \sum_h a_h h \right)^\gamma = \sum_h a_h h(\gamma) h .$$

Enfin on note  $L^\circ(Z)$  le sous-espace vectoriel de  $F$  ainsi défini

$$L^\circ(Z) = \{ f \in F \mid f = Z_\gamma f^\gamma \} .$$

On a :

$$\mathcal{O}(G) \hookrightarrow F \text{ et } L(Z) \hookrightarrow L^\circ(Z) .$$

Les relations entre  $L(Z)$  et  $L^\circ(Z)$  sont données par le lemme suivant :

(VI. 5. 4) LEMME

i)  $L^\circ(Z) \neq (0)$  si et seulement si il existe  $h \in H$  avec  
 $Z_\gamma = q(\gamma, h)$  pour tout  $\gamma \in \ker \sigma$ .

ii) Si  $L^\circ(Z) \neq (0)$ , alors  $\dim L^\circ(Z) \leq \text{card}(\text{torsion}(H/\gamma(\Lambda)))$  ;  
on a une égalité si  $\sigma$  est injectif.

iii)  $L(Z) \neq (0)$  si et seulement si  $L^\circ(Z) \neq (0)$  et  
 $|q(\gamma, \sigma(\gamma))| < 1$  pour tout  $\gamma \in \Lambda$  tel que  $\sigma(\gamma) \neq 1$ .

iv) Si  $L(Z) \neq (0)$ , alors  $L(Z) = L^\circ(Z)$ .

DÉMONSTRATION. - Soient  $H'$ ,  $H''$  des sous-groupes de  $H$ ,  $\Lambda'$  un sous-groupe de  $\Lambda$  tels que  $H' \oplus H'' = H$ ,  $\sigma(\Lambda) \subset H'$ ,  $H'/\sigma(\Lambda)$  soit un groupe fini et  $\Lambda' \oplus \ker \sigma = \Lambda$  ( $\Lambda'$  existe parce que  $\Lambda/\ker \sigma$  est sans torsion). Soient  $w_1, w_2, \dots, w_t$  un système de représentants de  $H'$  modulo  $\sigma(\Lambda)$ .

Chaque  $f \in F$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = \sum_{i=1, \dots, t; \nu \in \Lambda'; h'' \in H''} a_{i, \nu, h''} Z_\nu w_i h'' \quad (\text{avec } a_{i, \nu, h''} \in k).$$

Comme  $Z_\gamma(z) f(\gamma z) = \sum a_{i, \nu, h''} q(\gamma, w_i h'') Z_{\nu\gamma} w_i h''$ , la condition  $f \in L^\circ(Z)$  équivaut à

$$\begin{cases} a_{i, \nu, h''} \cdot q(\gamma, w_i h'') = a_{i, \nu\gamma, h''} \text{ pour tout } \gamma \in \Lambda' \\ a_{i, \nu, h''} q(\gamma, w_i h'') Z_\gamma = a_{i, \nu, h''} \text{ pour tout } \gamma \in \ker \sigma. \end{cases}$$

Soit donc en posant  $a_{i, h''} = a_{i, 1, h''}$

$$\begin{cases} a_{i, \gamma, h''} = q(\gamma, w_i h'') a_{i, h''} \\ a_{i, h''} \neq 0 \Leftrightarrow Z_\gamma = q(\gamma, (w_i h'')^{-1}) \text{ pour chaque } \gamma \in \ker \sigma. \end{cases}$$

La partie i) en est bien une conséquence.

Soit  $H_0 = \{h \in H \mid q(\gamma, h) = 1 \text{ pour tout } \gamma \in \ker \sigma\}$ . Alors  $H_0 \supset \sigma(\Lambda)$  et  $H_0 \subset \{h \in H \mid |q(\gamma, h)| = 1 \text{ pour tout } \gamma \in \ker \sigma\} = H_1$ . Comme la forme  $|q|$  est non-dégénérée, on a :

$$\text{rang}(H_1) = n - \text{rang}(\ker \sigma) = \text{rang}(\sigma(\Lambda)).$$

Il s'ensuit que  $H_0 \subset H_1 \subset H'$ . Donc, pour chaque  $i \in \{1, \dots, t\}$ , il existe au plus un  $h'' \in H''$  avec  $a_{i, h''} \neq 0$ . Alors  $\dim L^\circ(Z) \leq t = \text{card}(H'/\sigma(\Lambda))$  et (ii) est démontré.

Estimons les valeurs absolues des coefficients d'un  $f \in L^\circ(Z)$ .

On a :

$$a_{i, \nu, h''} Z_\nu w_i h'' = a_{i, h''} q(\nu, w_i h'') c(\nu) p(\nu, \nu) \sigma(\nu) w_i h''.$$

Supposons  $a_{i, h''} \neq 0$  et  $\nu \neq 0$ ,  $\nu \in \Lambda'$ . La convergence sur  $G$  de  $f$  implique que la série

$$\sum_{n \geq 1} a_{i, h''} q(n\nu, w_i h'') c(n\nu) p(n\nu, n\nu) \sigma(n\nu) w_i h''$$

est aussi convergente sur  $G$  et donc  $|p(\nu, \nu)| < 1$ .

D'autre part,  $|p(\nu, \nu)| < 1$  pour tout  $\nu \in \Lambda'$ ,  $\nu \neq 0$ , implique que la forme  $\langle \nu, \nu' \rangle = -\log |q(\nu, \sigma(\nu'))|$  sur  $\Lambda' \times \Lambda'$  est symétrique et définie positive.

Donc  $\langle \nu, \nu \rangle \geq c \sum v_i^2$  où  $c > 0$  et où  $\nu$  a pour coordonnées  $v_i$  pour une base de  $\Lambda'$ . On déduit facilement que  $f \in L(Z)$ . Cela démontre (iii) et (iv).

## VI. 6. - Tores analytiques et variétés abéliennes

Le théorème qui suit caractérise les tores analytiques qui sont des variétés abéliennes.



(VI. 6.1) THÉOREME. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Le tore analytique  $G/\Lambda$  est une variété algébrique.
- 2) Le tore analytique  $G/\Lambda$  est une variété abélienne.
- 3) Il existe un homomorphisme  $\sigma : \Lambda \rightarrow H$  tel que

a)  $\sigma(\gamma)(\gamma') = \sigma(\gamma')(\gamma)$  pour tout  $\gamma, \gamma' \in \Lambda$  ;

b) la forme bilinéaire symétrique  $(\gamma, \gamma') \mapsto -\log |\sigma(\gamma')(\gamma)|$  est définie positive.

DÉMONSTRATION. - L'implication 2)  $\Rightarrow$  1) est triviale. Montrons

1)  $\Rightarrow$  3). Les fonctions rationnelles sur la variété algébrique  $G/\Lambda$  sont des éléments de  $\mathcal{M}(G/\Lambda)$  et comme  $\dim G/\Lambda = g$  on trouve que le degré de transcendance de  $\mathcal{M}(G/\Lambda)$  est supérieur ou égal à  $g$ .

Soient  $f_1, f_2, \dots, f_g \in \mathcal{M}(G/\Lambda)$  et algébriquement indépendants. Les  $f_i$  s'écrivent de façon unique (à inversible près) sous la forme  $f_i = \theta_i / \theta_0$  où  $\theta_i \in \Theta(G)$  et sont des fonctions thêta relatives à un même facteur d'automorphie  $Z$  (VI. 5.1).

L'indépendance algébrique de  $f_1, \dots, f_g$  implique que les éléments  $\{ \theta_0^{r_0} \theta_1^{r_1} \dots \theta_g^{r_g} \mid \sum r_i = \ell \}$  constituent une famille libre de  $L(Z^\ell)$ .

Ainsi  $\dim L(Z^\ell) \geq \binom{\ell+g}{g}$ .

D'après (VI. 5.4) on a :

$$\dim L(Z^\ell) \leq \text{card}(H/\sigma(\Lambda)^\ell)_{\text{torsion}} \leq \text{constante } \ell^{\text{rang}(\Lambda)}.$$

Donc  $\text{rang}(\Lambda) = g$  et ainsi  $\sigma$  satisfait a) et b) d'après (VI. 5.4, iii)).

L'implication 3)  $\Rightarrow$  2) est la partie la plus délicate de la démonstration.

Le lemme qui suit permet de plonger  $G/\Lambda$  dans un espace projectif.

(VI. 6. 2) LEMME. - Soit  $Z$  un 1-cocycle associé à l'homomorphisme  $\sigma$  satisfaisant a) et b) de 3) (VI. 6. 1).

i) Soit  $z \in G$ , alors il existe  $\theta \in L(Z^3)$  avec  $\theta(z) \neq 0$ .

ii) Soient  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d$  une base de  $L(Z^3)$  et  $z_1, z_2 \in G$ . Si les vecteurs  $(\theta_0(z_1), \theta_1(z_1), \dots, \theta_d(z_1))$  et  $(\theta_0(z_2), \theta_1(z_2), \dots, \theta_d(z_2))$  sont liés, alors  $z_1 z_2^{-1} \in \Lambda$ . De plus pour tout  $z \in G$  il existe  $0 \leq i \leq d$  tel que  $\theta_i(z) \neq 0$ .

iii) Soit  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{P}^d$  l'application définie par  $\varphi(z) = \begin{pmatrix} \theta_0(z) \\ \vdots \\ \theta_d(z) \end{pmatrix}$ . Soit  $z^0 \in G$ , alors la dérivée  $(d\varphi)_{z^0}$  est injective.

DÉMONSTRATION. - i) Soient  $\theta \in L(Z)$ ,  $\theta \neq 0$ ;  $a, b \in G$  et  $\theta'(z) = \theta(z a^{-1}) \theta(z b^{-1}) \theta(z a b)$ . Il est facile de vérifier que  $\theta' \in L(Z^3)$ . L'ensemble analytique  $X = \{z \in G \mid \theta(z) = 0\}$  est de codimension 1 dans  $G$ . Ainsi, pour  $z$  donné, il existe  $a, b \in G$  tels que  $z a^{-1}, z b^{-1}, z a b \notin X$ . Pour ce choix on a donc  $\theta'(z) \neq 0$ .

ii) Supposons que  $(\theta_0(z_1), \dots, \theta_d(z_1)) = c(\theta_0(z_2), \dots, \theta_d(z_2))$ . Soit  $\eta \in L(Z)$ ,  $\eta \neq 0$ . Alors  $\eta'(z) = \eta(z a^{-1}) \eta(z b^{-1}) \eta(z a b) \in L(Z^3)$  et donc  $\eta'(z_1) = c \eta'(z_2)$ . Ce qui s'écrit

$$\eta(z_1 a^{-1}) \eta(z_1 b^{-1}) \eta(z_1 a b) = c \eta(z_2 a^{-1}) \eta(z_2 b^{-1}) \eta(z_2 a b).$$

Cette égalité étant satisfaite pour tout  $b \in G$ , l'argument utilisé en i) montre que la fonction  $a \mapsto \eta(z_1 a^{-1}) / \eta(z_2 a^{-1})$  n'a ni zéros ni pôles. D'après (VI. 3. 5) il existe  $\lambda \in k^x$ ,  $h \in H$  (qui peuvent dépendre de  $\eta$ ) tels que

$$(*) \quad \eta(\tau z) = \lambda h(z) \eta(z) \quad \text{avec} \quad \tau = z_1 z_2^{-1}.$$

D'après (VI. 5. 4) les éléments  $\eta_i = \sum_{\gamma \in \Lambda} q(\gamma, w_i) Z_\gamma w_i$  ( $i=1, \dots, t$ ), où  $\{w_1, \dots, w_t\}$  est toujours un système de représentants de  $H$  modulo  $\sigma(\Lambda)$ , forment une base de  $L(Z)$ . D'après (\*) on a

$$\eta_i(\tau z) = \lambda_i h_i(z) \eta_i(z) \quad \text{avec } \lambda_i \in k^* \text{ et } h_i \in H.$$

On en déduit que  $h_i \in \sigma(\Lambda)$ . On écrit  $h_i = \sigma(\gamma_i^{-1})$  et on trouve que  $q(\tau \gamma_i^{-1}, \sigma(\gamma))$  est indépendant de  $\gamma$  et donc que  $q(\tau \gamma_i^{-1}, \sigma(\gamma)) = 1$  pour tout  $\gamma \in \Lambda$  et  $(\tau \gamma_i^{-1})^t = 1$  pour  $1 \leq i \leq t$ . Alors  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n$ , écrivons  $\gamma_0$  pour  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n$  et  $h_0 = \sigma(\gamma_0^{-1})$ .

De  $\eta(\tau z) = \lambda h(z) \eta(z)$  on conclut que  $\eta(\tau^t z) = \text{constante } h^t(z) \eta(z)$ . Comme  $\tau^t = \gamma_0^t$  on trouve  $h = h_0$  et  $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_t$ . Si on écrit  $Z_\gamma(z) = c(\gamma) p(\gamma, \gamma) \sigma(\gamma)(z)$ , l'équation  $\eta_i(\tau z) = \lambda h_0 \eta_i(z)$  implique  $q(\tau \gamma_0^{-1}, \sigma(\gamma) w_i) = \lambda c(\gamma_0) p(\gamma_0, \gamma_0)$ . La valeur de  $q(\tau \gamma_0^{-1}, h)$  ne dépend pas de  $h \in H$ , par conséquent  $\tau \gamma_0^{-1} = 1$  et  $\tau \in \Lambda$ .

iii) Soit  $E$  une dérivation au point  $z^\circ$  de  $G$ . Il existe  $b_1, \dots, b_g \in k$  tels que :

$$E f = \left( \left( \sum_{i=1}^g b_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right) f \right) (z^\circ).$$

Posons :

$$D = \sum_{i=1}^g b_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

La condition  $(d\varphi)_{z^\circ}(E) = 0$  équivaut à l'existence de  $c \in k^*$  tel que

$$(D \theta_0(z^\circ), \dots, D \theta_d(z^\circ)) = c(\theta_0(z^\circ), \dots, \theta_d(z^\circ)).$$

Autrement dit  $D \theta(z^\circ) = c \theta(z^\circ)$  pour tout  $\theta \in L(Z^3)$ . En particulier, pour  $\theta(z) = \eta(a^{-1}z) \eta(b^{-1}z) \eta(abz)$  avec  $\eta \in L(Z)$  on a

$$(**) \quad \frac{D\eta(a^{-1}z^\circ)}{\eta(a^{-1}z^\circ)} + \frac{D\eta(b^{-1}z^\circ)}{\eta(b^{-1}z^\circ)} + \frac{D\eta(abz^\circ)}{\eta(abz^\circ)} = c.$$

L'argument utilisé en i) montre que  $a \mapsto \frac{D\eta(a^{-1}z^\circ)}{\eta(a^{-1}z^\circ)}$  n'a pas de

pôle. Posons  $f(t) = \frac{D\eta(tz^\circ)}{\eta(tz^\circ)}$ . On a donc  $f = \sum_{h \in H} a_h h$ .

La relation  $f(a^{-1}) + f(b^{-1}) + f(ab) = c$  pour tout  $a, b \in G$  implique que  $f$  est une constante  $\tilde{c}$ . Il existe une forme linéaire  $\ell : H \rightarrow k$  telle que  $D(h) = \ell(h)h$  pour tout  $h \in H$ .

Soit  $\eta = \sum_{i, \gamma} q(\gamma, w_i) Z_\gamma w_i$ . L'égalité  $D\eta = \tilde{c}\eta$  implique  $\ell(h) = \tilde{c}$  pour chaque  $h \in H$  parce que chaque  $h \in H$  a un coefficient non nul dans  $\eta$ . Donc  $\ell = 0$  et  $D = 0$ .

(VI. 6. 3). - Fin de la démonstration

L'application  $\varphi : G/\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^d$ , donnée par (VI. 6. 2, iii) est propre. D'après un résultat de R. Kiehl [32], l'image  $X$  de  $\varphi$  est un sous-espace analytique de  $\mathbb{P}^d$ . Le théorème GAGA [53] (c'est-à-dire la version en géométrie analytique rigide) dit que  $X$  est en plus algébrique dans  $\mathbb{P}^d$ . De (VI. 5. 5) on tire que  $\varphi : G/\Lambda \longrightarrow X$  est bijective et localement (pour la topologie induite par  $k$ ) biholomorphe. Nous avons besoin d'un résultat de H. Grauert - L. Gerritzen [19] :

Soient  $A$  et  $B$  deux algèbres affines réduites,  $f$  un homomorphisme de  $A$  dans  $B$ ,  $Y = \text{Sp}(A)$  et  $X = \text{Sp}(B)$  et  $\varphi = \text{Sp}(f)$ . On suppose que  $\varphi$  est un homéomorphisme et que  $\varphi$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{Y, \varphi(x)}$  sur  $\mathcal{O}_{X, x}$  pour tout  $x \in X$ . Alors  $f$  est un isomorphisme.

Cela montre que l'inverse de  $\varphi : G/\Lambda \longrightarrow X$  est une application holomorphe sur  $X$ .

Finalement, la structure de groupe sur  $G/\Lambda$  est transplantée sur  $X$ . La multiplication  $\mu : X \times X \longrightarrow X$  (par exemple) est un morphisme analytique entre des variétés projectives. Utilisant GAGA [53] on trouve que  $\mu$  est un morphisme algébrique. Donc  $X$  est une variété abélienne, isomorphe à  $G/\Lambda$  (pour les structures analytiques).

(VI. 6. 4) REMARQUE. - On aimerait avoir une caractérisation des variétés abéliennes qui sont des tores analytiques par leur réduction. Disons que le théorème suivant est annoncé [47], [63], [64]

Soit A une variété abélienne de dimension g sur un corps valué discret k . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une extension finie  $\ell$  de k telle que le modèle de Néron  $\mathcal{C}$  de  $A_{X_k, \ell}$  satisfasse  $\mathcal{C}_{X_k, \ell} \simeq (\bar{\ell}^X)^g$ .

ii) Soit K le complété de la clôture algébrique k . Alors  $A_{X_k, K}$  est un tore analytique (c'est-à-dire  $\simeq (K^X)^g / \Lambda$ ).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABHYANKAR S., Local analytic geometry, Academic Press, New York and London, 1964.
- [2] ABHYANKAR S., Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Academic Press, 1966.
- [3] AMICE Yvette, Les nombres p-adiques, Sup. Puf, 1975.
- [4] BARTENWERFER W., Die Lösung des nichtarchimedischen Corona-Problems für beliebige Dimension, J.f.d. r. u.a. math. Bd 319 (1980), p. 133-141.
- [5] BERGER R., KIEHL R., KUNZ E., NASTOLD H.J., Differentialrechnung in der analytischen geometrie, Lecture Notes in math. 38, Springer Verlag, 1967.
- [6] BOURBAKI N., Algèbre commutative, Hermann, Paris.
- [7] BOURBAKI N., Groupes et algèbres de Lie, Hermann, Paris.
- [8] DELIGNE P., MUMFORD D, The irreducibility of the space of curves of given genus; Publ. math. I.H.E.S. n° 36, 1969.
- [9] DIEUDONNE J., Cours de géométrie algébrique, Coll. Sup. Puf, 1974.
- [10] DRINFELD V. G., Elliptic modules, Math. USSR Sbornik, vol. 23, n° 4, p. 561-592.
- [11] ESCASSUT A., Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, Astérisque n° 10 (1973).
- [12] ESCASSUT A., Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Proc. Koninkl. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam, A. 77, n° 4 (1974), p. 339-351.
- [13] ESCASSUT A., Algèbres de Krasner intègres et noethériennes I, II. Proc. Kon. Wed. Akad. A. 79, n° 2, p. 109-130.

- [14] ESCASSUT A., T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Annales de l'Inst. Fourier, t. 25, fasc. 2 (1975), p. 45-80.
- [15] ESCASSUT A., Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe, Annali di Mathematica pura e applicata (1976) (IV), vo. 110, p. 335-352.
- [16] FRESNEL J., de MATHAN B., Algèbres  $L^1$  p-adiques, Bul. Soc. Math. France 106 (1978), p. 225-260.
- [17] GERRITZEN L., Erweiterungsendliche Ringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inv. math. 2 (1967), p. 178-190.
- [18] GERRITZEN L., Die Norm der gleichmässigen Konvergenz auf reduzierten k-affinoiden Algebren, Journal f. d. r. u. a. math. Bd 231 (1968), p. 114-120.
- [19] GERRITZEN L., GRAUERT H., Die Azyklizität der affinoiden Überdeckungen, Global Analysis Papers in honor of Kodaira Univ. of Tokyo Press, 1969. Edited by D. C. Spencer and S. Iyanaga.
- [20] GERRITZEN L., On non-archimedean representations of abelian varieties, Math. Ann. 169 (1972), p. 323-346.
- [21] GERRITZEN L., van der PUT M., Schottky groups and Mumford curves, Lecture notes in math. 817, Springer Verlag, 1980.
- [22] GODEMENT R., Théorie des faisceaux, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1964.
- [23] GRAUERT H., REMMERT R., Nichtarchimedische Funktionentheorie Weierstrass Festschrift, Wiss. Abh. Bd 33 (1966), p. 393-476, Opladen Westdeutscher Verlag.
- [24] GRAUERT H., REMMERT R., Analytische Stellenalgebren, Grundle Math. Wiss. 176, Springer Verlag, 1971.
- [25] GRAUERT H., REMMERT R., Theory of Stein spaces, Grundle Math. Wiss. 236, Springer Verlag, 1979.
- [26] GRIFFITHS R HARRIS J., Principles of algebraic geometry, John Wiley and sons, 1978.
- [27] GRUSON L., Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique, Ann. Scient. de l'E.N.S., 4e série, t.1 (1968), p. 45-89.
- [28] HARTSHORNE R., Algebraic geometry, Springer Verlag, 1977.

- [29] HAZEWINKEL, Formal groups and applications, Academic Press, 1978.
- [30] HOUZEL C., Espaces analytiques rigides (d'après R. Kiehl) Séminaire Bourbaki, 1966/67, n° 327.
- [31] KIEHL R., Theorem A und B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inv. Math. 2 (1967), p. 256-273.
- [32] KIEHL R., Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inv. Math. 2 (1967), p. 191-214.
- [33] KRASNER M., Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, Edition du C. N. R. S. (1966), p. 97-141.
- [34] LANG S., Introduction to algebraic and abelian functions, Addison-Wesley, 1972.
- [35] LAZARD M., Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet, Publ. Math. I. H. E. S., n° 41.
- [36] LUTZ E., Sur l'équation  $Y^2 = 4X^3 - AX - B$  dans les corps p-adiques, Journal f. d. r. u. a. math. Bd 177 (1937), p. 238-247.
- [37] MATSUMURA H., Commutative algebra, Benjamin, 1980.
- [38] MILNE J.S., Etale cohomology, Princeton Mathematical series, Princeton University Press, 1980.
- [39] MORIKAWA H., On theta functions and abelian varieties over valuation fields of rank one, Nagoya Math. Journal 20, p. 1-27, 21, p. 231-250.
- [40] MUMFORD D., Analytic construction of degenerating curves over complete local fields, Compositio math. 24 (1972), p. 129-174.
- [41] MUMFORD D., Abelian varieties, Oxford University Press, 1974.
- [42] NERON, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, Publ. Math. I. H. E. S., 21.
- [43] van der PUT M., La conjecture de la couronne en analyse complexe et p-adique, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1979/80.



- [44] van der PUT M., The class group of a one-dimensional affinoid space, Annales de l'Institut Fourier, t. 30, fasc. 4 (1980), p. 155-164.
- [45] van der PUT M., Essential singularities and discontinuous groups, à paraître Proc. kon. neder.
- [46] van der PUT M., Cohomology of affinoid spaces, à paraître Compositio Mathematica)
- [47] RAYNAUD M., Variétés abéliennes et géométrie rigide, Proc. int. Congrès Nice I (1970), p. 473-477.
- [48] REMMERT R., Algebraische Aspekte in der nichtarchimedischen Analysis, p. 86-117. Proceedings of a Conference on Local fields, Ed. by T.A. Springer-Springer Verlag, 1967.
- [49] ROBBA Ph., Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Astérisque n° 10 (1973).
- [50] ROQUETTE P., Analytic theory of elliptic functions over local field, 1970. Hamburger Mathematische Einzelschriften Neue Folge, Heft 1, Vandenhoeck Ruprecht in Göttingen.
- [51] SALMON P., Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici, Annali di Math. Pura ed Appl. serie (IV), 65 (1964), p. 113-126.
- [52] SERRE J.-P., Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. 61 (1955), p. 197-278.
- [53] SERRE J.-P., Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), p. 1-42.
- [54] SERRE J.-P., Corps locaux, Hermann, Paris, 1968.
- [55] SERRE J.-P., Arbres, amalgames,  $Sl_2$ , Astérisque n° 46 (1977).
- [56] SHAFAREVICH I.R., Basic algebraic geometry, Springer Verlag, 1977.
- [57] SIEGEL C. L., Topics in complex function theory, Interscience Wiley, 1970-71.
- [58] SWINNERTON-DYER, Analytic theory of abelian varieties, London Math. Soc. Lecture note, ser. 14 (1974), Cambridge.
- [59] TATE J., Rigid analytic spaces, Inv. Math. 12 (1971), p. 257-289.

- [60] TATE J., The arithmetic of elliptic curves, Inv. Math. 23 (1974), p. 179-206.
- [61] WEIL A., Variétés kahlériennes, Hermann, 1958.
- [62] MANIN Y.I., The theory of formal groups over fields of finite characteristic, Russ. Math. Surveys 18 (1963), n° 6, p. 1-84.
- [63] BOSCH S., Multiplikative Untergruppen in abeloiden Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 2399 (1979), p. 165-183.
- [64] MUMFORD D., An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, Comp. Math., vol. 24, fasc.3 (1972), p. 239-272.
- [65] BASS H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.
- [66] MOTZKIN E., La décomposition d'un élément analytique en facteurs singuliers, Annales Inst. Fourier, t. 27-1 (1977), p. 67-82.
- [67] van der PUT M., Stable reduction of algebraic curves (en préparation).
- [68] RAYNAUD M., Modèles de Néron, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 413-416 (févr. 1966).

TABLE DES NOTATIONS

$ a $	valeur absolue de $a$	XII
$ k^x $	groupe des valeurs de $k^x$	XII
$k^\circ$	anneau de valuation de $k$	XII
$k^{\circ\circ}$	idéal de valuation de $k$	XII
$\bar{k}$	corps résiduel de $k$	XII
$\mathbb{P}^1(K)$ ou $\mathbb{P}(K)$ ou $\mathbb{P}$	la droite projective	2
$Gl_2(K)$	groupe matrices $2 \times 2$ inversibles à coefficients dans $K$	2
$PGL_2(K)$	groupe projectif linéaire	2
$\  \cdot \ _F$	norme de la convergence uniforme sur $F$	5
$\mathcal{O}(F)$	fonctions holomorphes sur $F$	5
$\mathcal{O}^\circ(F) = \{f \in \mathcal{O}(F) \mid \ f\ _F \leq 1\}$		6
$\mathcal{O}^{\circ\circ}(F) = \{f \in \mathcal{O}(F) \mid \ f\ _F < 1\}$		6
$\overline{\mathcal{O}(F)} = \mathcal{O}^\circ(F) / \mathcal{O}^{\circ\circ}(F)$		6
$ord_t(f)$	ordre de $f$ par rapport au paramètre $t$	19
$ord_F(f)$	ordre de $f$ sur $F$	20
$Res_t(w)$	résidu de la forme différentielle $w$ par rapport à $t$	20
$\partial B$	circonférence du disque ouvert $B$	22
$Cov(U)$	famille de recouvrements de $U$	24
$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathfrak{S})$	$n$ -ième groupe de cohomologie de Čech du recouvrement $\mathcal{U}$	26

$\tilde{A}$	faisceau constant associé au groupe $A$	30
$\tilde{M}$	faisceau cohérent associé au module $M$	93
$\mathcal{O}^*$	faisceau des fonctions holomorphes inversibles	31
$\mathcal{M}$	faisceau des fonctions méromorphes	31, 117
$\mathcal{O}^\circ$	faisceau des fonctions holomorphes de norme majorée par 1	31
$H^n(X, \mathcal{G})$	$n$ -ième groupe de cohomologie de Čech de $X$	31
$\Omega(\mathcal{G})$	sous-espace analytique associé à la famille $\mathcal{G}$	33
$\mathcal{P}$	faisceau des parties principales	41
$\text{Div}$	faisceau des diviseurs à support discret	45, 138
$T_n = T_n(k) = k\langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle$		54
$A\langle X_1, X_2, \dots, X_s \rangle$		60
$\  \cdot \ _{\text{sp}}$	norme spectrale	62
$\text{Sp}(A)$	spectre maximal de $A$	62
$A^\circ, A^{\circ\circ}, \bar{A}$		63
$\text{Sp}(u)$		63
$\Omega_{A/k}^f$	le module des différentielles de $A$ sur $k$ de type fini	80
$\text{Qt}(A)$	corps des fractions (ou anneau total) de $A$	81
$k\langle X, Y, Y^{-1} \rangle$		82
$\text{Cl}(B)$	classes modulo l'isomorphie de $B$ -modules projectifs de rang 1	89
$\mathcal{O}_X(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(\mathbb{R})$		91
$\mathfrak{X}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ à $f_1, \dots, f_n$	le recouvrement standard associé	94
$(X, \mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$	l'espace analytique	99
$\mathbb{P}^n$	l'espace projectif de dimension $n$	103

$\Omega_X$	le faisceau des différentielles sur $X$	106
$\mathcal{L}_n(X)$	classes de faisceaux sur $X$ localement libre de rang $n$	124
$\mathcal{L}_1(X)$	classes de faisceaux inversibles sur $X$	124
$\mathcal{P}_n(A)$	classes de $A$ -modules projectifs de rang $n$	124
$\mathbb{T}$	le tore analytique	132, 192
$D = \sum n_i [x_i]$	le diviseur sur $\mathbb{T}$	134
$\text{deg}(D)$	degré de $D$	134
$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$	"fonctions" de Weierstrass	141
$j(E)$	le $j$ -invariant	144
$G_a(k)$	la variété algébrique, groupe additif de $k$	153
$G_m(k)$	la variété algébrique, groupe multiplicatif de $k$	153, 154
$M_g$	la variété modulaire des courbes irréductibles de genre $g$	163
$\overline{X}_c$	la réduction canonique de l'espace analytique affine de $X$	164
$\overline{X}_\mathcal{U}$	la réduction de l'espace analytique $X$ relativement au recouvrement pour $\mathcal{U}$	165
$U(a), U(a, b)$		172
$\mathcal{O}_{X, x}$	la fibre en $x$ de $\mathcal{O}_X$	177
$\hat{\mathcal{O}}_{X, x}$	le complété de $\mathcal{O}_{X, x}$	126
$\text{Et}_X$		177
$T_{X, x}$	l'espace tangent de $X$ en $x$	184
$Y_1 \subset\subset Y_2$	$Y_1$ intérieur à $Y_2$	193

INDEX

Acyclique (faisceau localement)	38
(recouvrement)	94
Admissible (ensemble)	25
(recouvrement)	25
Affinofde (algèbre)	54
(ensemble)	3
(espace)	62
(espace analytique)	99
Affinofde connexe (ensemble)	3
(composante)	3
Arbre	171
Arête	171
Automorphisme de $\mathbb{P}^1$	2
Cartan (lemme de)	110, 128
Cohomologie de Čech	26
d'un sous-espace de $\mathbb{P}^n$	31
étale	177
Complet (espace)	193
Connexe	34
Connexe (composante)	35
Corps valué	XII
Corps résiduel	XII
Courant sur un arbre	176

Degré d'un diviseur	134
Demi-droite d'un arbre	174
Disque ouvert	2
fermé	3
Diviseur à support discret	45
Diviseur sur $\mathbb{T}$	134
Diviseur positif	134
Drinfeld	175, 177, 181
Droite projective	2
Espace affinoïde	62
Espace analytique affinoïde	99
Espace analytique rigide	99
Facteur d'automorphie	194
Faisceau	25
Faisceau structural $\mathcal{O}_X$	93
constant	30
analytique cohérent	108
analytique localement libre de rang $n$	108, 124
inversible	108, 124
des différentielles	106
des diviseurs	45
des parties principales	41
des fonctions méromorphes	117
Faisceaux (suite exacte de)	38
Fibre spéciale	149
générale	149
d'un faisceau	177
Forme différentielle holomorphe	20
méromorphe	20

Genre arithmétique	157
Grothendieck (topologie de)	24, 93
Groupe discontinu	163
formel	187
maximalement compact	174
de Schottky	164
Holomorphes (fonctions)	5
Immeuble de Tits	174
Intérieur	193
j-invariant	144
Lieu singulier d'une algèbre affine	82
Lisse (schéma)	148
Méromorphe (fonction)	20
Mittag-Leffler (décomposition de)	7
Modèle minimal	149
Modèle de Néron	148
Module de Banach	120
Module projectif de rang 1	126
Mumford (courbe de)	164
Ordre d'une fonction	19
Orientée (circonférence)	20
Paramètre	19
Plat	116, 123
Point limite	163
Plongement d'une fonction méromorphe	50



Rationnel (ensemble)	90
Recollement d'espaces analytiques	100
de faisceaux	106
Recouvrement admissible	25
pur	164
pur associé à $T$	172
standard	94
Réduction analytique	165
canonique	164
stable	159
d'un sous-espace de $\mathbb{P}^n$	171
Réduction stable (théorème de la)	156
Schéma formel	145
Semi-norme spectrale	62
Semi-norme tensorielle	120
Séparé (espace analytique)	192
Sommet	171
Sous-espace analytique de $\mathbb{P}^n$	33
Stable (courbe)	156
pré-Stable (courbe)	157
Tate (algèbre de)	54
(courbe de)	130, 145
Thêta (fonction)	194
Tore analytique complexe	183
rigide	192
Valeur absolue ultramétrique	XII
Valuation (anneau de)	XII
(idéal de)	XII
Valué (corps)	XII

Variété algébrique affine	102
séparée	103
projective	103
Variété modulaire $M_g$	163
Variété abélienne	185
Weierstrass (théorème de préparation et de division)	54
(modèle de)	141