LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Mathématiques

Analyse MP

Cours

Méthodes

Exercices résolus

D. GUININ • B. JOPPIN

Nouveau programme

Bréal

L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Analyse
MP

Daniel GUININ
Professeur en classes préparatoires scientifiques - 2e année

Bernard JOPPIN
Professeur en classes préparatoires scientifiques - 1re année

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

Bréal éditions

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Titres disponibles dans la filière MP

Mathématiques 2e année

- Analyse MP
- Algèbre et géométrie MP

Physique 2e année

- Mécanique MP - PC
- Électromagnétisme MP
- Électronique MP - PT
- Optique MP - PC - PSI - PT
- Thermodynamique MP

Chimie 2e année

- Chimie MP - PT

Exercices 2e année

- Mathématiques MP
- Physique MP

Maquette : Insolencre & 16 iS.
Couverture : Sophie Martinet.
Réalisation : 16 iS.

ISBN 978 2 7495 0387 5

ref : 208 0329 - e-sbn : 978 2 7495 2273 9

Avant-propos

Cet ouvrage est conforme aux **nouveaux programmes** mis en place à compter de la rentrée 2004.

Les Nouveaux Précis Bréal sont le reflet d'une évolution des habitudes de travail des étudiants en prépas scientifiques MP et MP*.

Rigueur, méthode et clarté sont sans doute les leitmotivs de cette évolution. La mise en page et l'apport de couleur accompagnent, en la soulignant, la structure du contenu divisé en trois parties complémentaires :

- Le **Cours** est composé des définitions, théorèmes et propriétés nécessaires et suffisants. L'objectif est clair : tout le programme, rien que le programme. Tous les théorèmes, ainsi que les principales propriétés, sont démontrés en détail. Parfois, une démonstration simple à établir pourra faire l'objet d'un premier exercice d'application stimulant.

- Les **Méthodes** constituent la principale innovation des Nouveaux Précis. Étudiants et professeurs savent combien le plus délicat, lorsque l'on aborde un problème, est souvent la phase de démarrage : *par quel bout le prendre ?* Deux temps composent cette nouvelle rubrique.

  L'essentiel explicite, en une fiche de synthèse, les démarches les plus courantes. Des mises en œuvre illustrent ces démarches par des exercices classiques, voire «incontournables».

  De (rares) chapitres sont essentiellement composés de méthodes et ne comportent alors pas cette rubrique.

- Les **Exercices**, beaucoup plus nombreux que dans les éditions précédentes, sont classés selon leur degré de difficulté : du niveau 1, qui correspond à des exercices souvent proches du cours, au niveau 3, moins «transparents». Le niveau 2 propose des sujets de colles raisonnables. Dans tous les cas, ces exercices sont calibrés en fonction de ce que l'on peut véritablement attendre d'un étudiant en vue de la préparation immédiate des concours. Les indications apportent, comme c'est souvent le cas en colle, un coup de pouce qui peut être bienvenu lorsque l'on travaillle seul.

  Tous les exercices ont une solution, détaillée ou plus succincte.

Il nous a paru indispensable d'accorder à ces deux dernières parties, les Méthodes et les Exercices, une place importante, équivalente à celle du Cours, au fil des onze chapitres que comporte ce tome consacré à l'analyse. Cet équilibre permettra aux étudiants de MP et MP* de disposer d'un outil de travail complet, adapté au rythme progressif et soutenu de la préparation aux concours.

Les programmes de MP et MP* sont maintenant identiques. Cependant, en fonction des objectifs poursuivis, certains approfondissements peuvent s'avérer utiles. Ceux-ci sont signalés par la référence $\boxed{\text{MP*}}$.

Les auteurs

Sommaire

Sommaire

CHAPITRE 1

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes.

A. Normes et distances

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Normes et distances

Définition 1

On appelle **norme** sur E une application N : ✎[1] $E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tous vecteurs x, y de E et tout scalaire λ de $\mathbb{K}$:

(1) $N(x) = 0 \iff x = 0_E$,

(2) $N(\lambda x) = |\lambda|\ N(x)$,

(3) $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Le couple (E, N) est appelé un **espace vectoriel normé.** ✎[2]

Une norme est souvent notée : $\|\bullet\| \ :\ x \mapsto \|x\|$.

✎[1] Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la norme usuelle est la valeur absolue.

✎[2] L'abréviation **e-v-n** est courante.

Remarques

1) D'après **(1)** une norme vérifie : **(4)** $\forall x \in E,\ \ x \neq 0_E \ \Rightarrow\ N(x) > 0$.

Réciproquement, si une application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifie les axiomes **(2)** et **(4)**, en donnant dans **(2)** la valeur 0 à λ, on obtient $N(0) = 0$ donc N vérifie **(1)**.

En conséquence, une norme peut aussi être définie comme une application $N \ :\ E \to \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes **(2)**, **(3)** et **(4)**.

2) **Exemple important** ✎[3]

Si E est un espace préhilbertien réel ou complexe, en notant $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$ le produit scalaire, euclidien ou hermitien, qui définit cette structure, on obtient une **norme** sur E en posant pour tout x de E, $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ et celle-ci est dite **euclidienne** ou **hermitienne** selon le cas.

Ainsi tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé.

✎[3] Ces notions sont développées en Algèbre – Géométrie MP, chapitre 6.

Définition 2

Distance associée à une norme

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, l'application d définie par :

$$d \ :\ E^2 \to \mathbb{R}_+ ,\quad (x, y) \mapsto d(x, y) = N(x - y)$$

est appelée **distance** associée à la norme N.

Définition 3

Norme et distance induites

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

La restriction N_F de N à F est une norme, appelée **norme** sur F **induite** par N.

La restriction à F^2 de la distance associée à N est la distance d_F associée à N_F. ✎[4]

✎[4] Usuellement, N_F et d_F sont encore notées N et d.

On considère désormais un espace vectoriel normé (E, N).

✎ (5) Les boule ou sphère de centre 0_E et de rayon 1 sont appelées boule unité, sphère unité.

Définition 4

Boules et sphères ✎ (5)

a) La **boule ouverte** de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ est :

$$\mathcal{B}_o(a, r) = \{x \in E / N(a - x) < r\}.$$

b) La **boule fermée** de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ est :

$$\mathcal{B}_f(a, r) = \{x \in E / N(a - x) \leqslant r\}.$$

c) La **sphère** de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ est :

$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E / N(a - x) = r\}.$$

✎ (6) Il est clair que **(2)** $\Rightarrow$ **(1)** ($a = 0_E$ et $r = R$) et l'inégalité triangulaire montre que **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** ($R = N(a)+r$).

Définition 5

Une partie A de E est dite **bornée** lorsqu'elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(1) il existe $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$ tels que $A \subset \mathcal{B}_f(a, r)$;

(2) il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tels que $A \subset \mathcal{B}_f\left(0_E, R\right)$. ✎ (6)

Définition 6

Soit A une partie non vide et bornée de E. On appelle **diamètre** de A le réel :

$$\delta(A) = \sup\left\{N(x - y) / (x, y) \in A^2\right\}.$$

Définition 7

On appelle **distance d'un point** x de E **à une partie** non vide A de E, le réel :

$$d(x, A) = \inf\left\{N(x - y) / y \in A\right\}.$$

Définition 8

On appelle **distance de deux parties** non vides A et B, le réel :

$$d(A, B) = \inf\left\{N(x - y) / x \in A, y \in B\right\}.$$

Définition 9

Soit A un ensemble non vide, une **application** $f : A \to E$ est dite **bornée** si son image $f(A)$ est une partie bornée de E, donc s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in A, \quad N\big(f(x)\big) \leqslant M. \text{ ✎ (7)}$$

✎ (7) **Remarque**. L'ensemble $\mathcal{B}(A,E)$ des fonctions bornées de A dans E est un sous-espace vectoriel de E^A ; il est normé par

$\| f \|_\infty = \sup_{x \in A} N\big(f(x)\big)$.

Si $A = \mathbb{N}$, il s'agit de l'espace des suites bornées de E.

Définition 10

Normes équivalentes

On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si les fonctions $\dfrac{N_1}{N_2}$ et $\dfrac{N_2}{N_1}$ définies sur $E \setminus \{0_E\}$ sont majorées.

Remarques

1) Cette définition peut se traduire par l'existence de deux réels α et β strictement positifs tels que : $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.

2) On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de l'espace E. En effet, on vérifie que c'est une relation :

- réflexive : pour toute norme N, $1 \cdot N \leqslant N \leqslant 1 \cdot N$;
- symétrique : $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$ donne $\dfrac{1}{\beta} N_2 \leqslant N_1 \leqslant \dfrac{1}{\alpha} N_2$;
- transitive : $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$ et $\alpha' N_2 \leqslant N_3 \leqslant \beta' N_2$ donnent :

$$\alpha\,\alpha'\, N_1 \leqslant N_3 \leqslant \beta\,\beta'\, N_1 .$$

Exemple 1 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

On note $x = \left(x_1, \dots, x_n\right) \in \mathbb{K}^n$.

a) Montrer que l'on définit trois normes sur $\mathbb{K}^n$ par les expressions suivantes :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \quad N_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad N_\infty(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

b) Dans le cas $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, représenter les boules unités fermées $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_\infty$ associées à ces normes.

c) Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont deux à deux équivalentes.

a) N_2 est la norme préhilbertienne canonique de $\mathbb{K}^n$ attachée au produit scalaire :

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i. \text{ ✎}^{(8)}$$

✎(8) Voir Algèbre – Géométrie, chapitre 6.

Vérifions que N_1 et N_∞ satisfont les axiomes de définition **(2)**, **(3)** et **(4)** des normes.

Ce sont clairement des applications à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Pour tout x de $\mathbb{K}^n$, on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leqslant N_1(x)$ et $|x_i| \leqslant N_\infty(x)$ donc si x est non nul, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i| > 0$ et on a $N_1(x) > 0$ et $N_\infty(x) > 0$: l'axiome **(4)** est vérifié.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x = \left(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\right)$ d'où :

$$N_1(\lambda x) = |\lambda|\, N_1(x) \; , \; N_\infty(\lambda x) = |\lambda|\, N_\infty(x)$$: **(2)** est vérifié.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on a $x + y = \left(x_1 + y_1\,, x_2 + y_2\,, \dots, x_n + y_n\right)$ donc :

$$N_1(x+y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = N_1(x) + N_1(y)$$

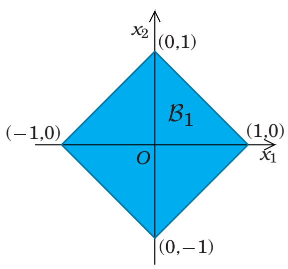
et N_1 vérifie **(3)** ;

pour N_∞, remarquons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant N_\infty(x) + N_\infty(y)$$

il en résulte $N_\infty(x+y) \leqslant N_\infty(x) + N_\infty(y)$ et N_∞ vérifie **(3)**.

b) $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.



- $\mathcal{B}_1 = \left\{\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |x_1| + |x_2| \leqslant 1\right\}$.

On distingue quatre cas :

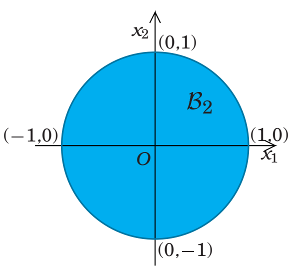
si $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$: $\left(x_1, x_2\right) \in \mathcal{B}_1 \iff x_1 + x_2 \leqslant 1$;

si $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$: $\left(x_1, x_2\right) \in \mathcal{B}_1 \iff x_1 - x_2 \leqslant 1$;

si $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$: $\left(x_1, x_2\right) \in \mathcal{B}_1 \iff -x_1 + x_2 \leqslant 1$;

si $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$: $\left(x_1, x_2\right) \in \mathcal{B}_1 \iff -x_1 - x_2 \leqslant 1$.

Tous les cas peuvent se ramener au premier par des symétries.

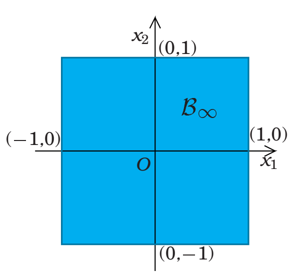


- $\mathcal{B}_2 = \left\{\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\}$.

C'est le disque usuel de $\mathbb{R}^2$ de centre O et de rayon 1.

- $\mathcal{B}_\infty = \left\{\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |x_1| \leqslant 1 \;\; |x_2| \leqslant 1\right\}$.

Il s'agit du pavé : $\left[-1, 1\right] \times \left[-1, 1\right]$.



c) Pour tout $x \in \mathbb{K}^n, x = \left(x_1, \dots, x_n\right)$, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\; |x_i| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \;\text{ et }\; |x_i| \leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

d'où $\quad N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \quad$ et $\quad N_1(x) \leqslant n\, N_\infty(x)$;

les normes N_1 et N_∞ sont donc équivalentes.

On a aussi de manière évidente :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leqslant n\, N_\infty(x)^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geqslant N_\infty(x)^2$$

donc $\quad N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{n} N_\infty(x)$;

les normes N_2 et N_∞ sont donc équivalentes.

Par transitivité, on en déduit l'équivalence de N_1 et N_2 avec de plus $\dfrac{1}{n} N_1 \leqslant N_2$, et comme l'inégalité $N_2^2 \leqslant N_1^2$ est évidente, il vient :

$$\frac{1}{n} N_1 \leqslant N_2 \leqslant N_1 \,.$$

Exemple 2 Normes usuelles sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes

a) Montrer que l'on définit trois normes sur $\mathbb{K}[X]$ en posant pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \quad , \quad N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad N_\infty(P) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|.$$

b) Ces normes sont-elles équivalentes ?

Remarque
En associant à un polynôme P sa fonction polynôme, on définit de nouvelles normes sur $\mathbb{K}[X]$ par les expressions suivantes :
$\sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$
$\sup_{|z|=1} |P(z)|$
$\int_0^1 |P(t)| \mathrm{d}t.$

a) Les vérifications sont identiques à celles de l'exemple précédent.

N_2 est la norme préhilbertienne canonique de $\mathbb{K}[X]$.

b) Comme dans l'exemple 2 précédent, on montre que ces normes sont comparables en un sens : $N_\infty \leqslant N_2 \leqslant N_1$.

Elles ne le sont pas dans l'autre sens : on montre que les fonctions $\dfrac{N_2}{N_\infty}$ et $\dfrac{N_1}{N_2}$ ne sont pas majorées en considérant la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$$

$$N_1(P_n) = n + 1 \quad , \quad N_2(P_n) = \sqrt{n+1} \quad , \quad N_\infty(P_n) = 1$$

$$\frac{N_2}{N_\infty}(P_n) = \frac{N_1}{N_2}(P_n) = \sqrt{n+1} \quad , \quad \frac{N_1}{N_\infty}(P_n) = n + 1.$$

Deux quelconques des normes N_1, N_2, N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exemple 3 Normes classiques sur l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{K}$

a) Montrer que l'on définit sur cet espace trois normes par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t \quad , \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

b) Ces normes sont-elles équivalentes ?

a) $\| \bullet \|_2$ est la norme préhilbertienne, attachée au produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$:

$$(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_0^1 \overline{f}(t)\, g(t) \mathrm{d}t. \text{ ✎[9]}$$

✎[9] cf. Algèbre – Géométrie, chapitre 6.

Vérifions que $\| \bullet \|_1$ et $\| \bullet \|_\infty$ satisfont les axiomes de définition **(2)**, **(3)** et **(4)** des normes.
Ce sont clairement des applications à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Une propriété usuelle de l'intégrale est que si f est continue sur $[a, b]$, $(a < b)$, positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f > 0$; donc $\| \bullet \|_1$ vérifie l'axiome **(4)**. ✎[10]

✎[10] cf. chapitre 4, propriété 28.

Si f est non nulle, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $|f(x_0)| > 0$ alors $\|f\|_\infty \geqslant |f(x_0)|$ donne :

$\|f\|_\infty > 0$: $\| \bullet \|_\infty$ vérifie l'axiome **(4)**.

Les autres vérifications sont simples :

$$\| \lambda f \|_1 = \int_0^1 |\lambda f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda|\,\| f \|_1$$

$$\| \lambda f \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = |\lambda|\,\| f \|_\infty \quad ✎^{(11)}$$

$$\| f+g \|_1 = \int_0^1 |f(t)+g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \big(|f(t)|+|g(t)|\big)\,\mathrm{d}t = \| f \|_1 + \| g \|_1 .$$

Pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)|+|g(t)| \leqslant \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$ d'où :

$$\| f+g \|_\infty \leqslant \| f \|_\infty + \| g \|_\infty .$$

b) Ces normes sont comparables dans un sens :

$$\| f \|_1 \leqslant \| f \|_2 \leqslant \| f \|_\infty \quad \text{(égalité pour les fonctions constantes).}$$

$\| f \|_1 \leqslant \| f \|_2$ résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ✎[12]

$\| f \|_2 \leqslant \| f \|_\infty$ est conséquence évidente de $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant \| f \|_\infty$.

Elles ne le sont pas dans l'autre sens : on montre que les fonctions

$$f \mapsto \frac{\| f \|_2}{\| f \|_1} \quad \text{et} \quad \frac{\| f \|_\infty}{\| f \|_2}$$

ne sont pas majorées en considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = t^n$.

Le calcul donne $\| f_n \|_1 = \dfrac{1}{n+1}$, $\| f_n \|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\| f_n \|_\infty = 1$

et les suites :

$$n \mapsto \frac{\| f_n \|_2}{\| f_n \|_1} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \ , \quad n \mapsto \frac{\| f_n \|_\infty}{\| f_n \|_2} = \sqrt{2n+1} \quad \text{et} \quad n \mapsto \frac{\| f_n \|_\infty}{\| f_n \|_1} = n+1$$

ne sont pas majorées.

✎[11] La propriété est évidente pour $\lambda = 0$.
On suppose $\lambda \neq 0$, alors $\forall t \in [0,1], |\lambda f(t)| \leqslant |\lambda|\,\| f \|_\infty$ donc $\| \lambda f \|_\infty \leqslant |\lambda|\,\| f \|_\infty$.
Ce même résultat appliqué avec $f = \frac{1}{\lambda}\lambda f$ donne $\| f \|_\infty \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\| \lambda f \|_\infty$ soit $|\lambda|\,\| f \|_\infty \leqslant \| \lambda f \|_\infty$, d'où la conclusion.

✎[12] cf. Algèbre – Géométrie, chapitre 6.

Définition 11

Avec les notations de l'exemple précédent,

$\| \bullet \|_1$ est appelée **norme de la convergence en moyenne**,

$\| \bullet \|_2$ est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**,

$\| \bullet \|_\infty$ est appelée **norme de la convergence uniforme**.

Propriété 1

Seconde inégalité triangulaire

Soit (E, N) un e-v-n. Pour tout x et y de E :

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y).$$

☞ $x = x - y + y$ donne $N(x) \leqslant N(x-y) + N(y)$ donc $N(x) - N(y) \leqslant N(x-y)$.
Symétriquement, en échangeant x et y : $N(y) - N(x) \leqslant N(x-y) = N(x-y)$.

Propriété 2

Produit d'espaces vectoriels normés

Soit (E, N) et (E', N') deux e-v-n.

On définit trois normes classiques sur l'espace produit $E \times E'$:

$$\| (x,x') \|_1 = N(x) + N'(x') \quad , \quad \| (x,x') \|_2 = \left(N^2(x) + N'^2(x')\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| (x,x') \|_\infty = \sup\big(N(x), N'(x')\big).\ ✎^{(13)}$$

Ces trois normes sont deux à deux équivalentes.

☞ Aucune difficulté hormis l'inégalité triangulaire de la norme $\| \bullet \|_2$.

✎[13] **Remarques.**
- On définit de façon analogue (par récurrence) des normes équivalentes sur un produit de plusieurs espaces vectoriels normés, en particulier sur E^n.
- Par défaut, tout produit d'espaces vectoriels normés sera supposé muni de l'une de ces normes.

✎(14) $\sqrt{(a+b)^2+\left(a'+b'\right)^2} \leqslant \sqrt{a^2+a'^2}+\sqrt{b^2+b'^2}$.

En utilisant les inégalités triangulaires de N et de N' :

$$N(x+y) \leqslant N(x)+N(y) \quad \text{et} \quad N'\left(x'+y'\right) \leqslant N'\left(x'\right)+N'\left(y'\right)$$

et l'inégalité triangulaire de $\left(\mathbb{R}^2, N_2\right)$ on obtient : ✎(14)

$$\sqrt{N^2(x+y)+N'^2\left(x'+y'\right)} \leqslant \sqrt{N^2(x)+N'^2\left(x'\right)}+\sqrt{N^2(y)+N'^2\left(y'\right)}.$$

L'équivalence de ces normes tient aux inégalités suivantes :

$$\|\left(x,x'\right)\|_\infty \leqslant \|\left(x,x'\right)\|_2 \leqslant \|\left(x,x'\right)\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|\left(x,x'\right)\|_2 \leqslant 2\|\left(x,x'\right)\|_\infty.$$

Propriété 3

Parties bornées d'un espace vectoriel normé

Soit A et B deux parties non vides d'un e-v-n (E,N).

a) Si $A \subset B$ et si B est bornée, alors A est bornée et $\delta(A) \leqslant \delta(B)$.

b) Si A et B sont bornées, alors $A \cup B$ et $A+B$ sont bornées.

☞ a) Si x et $y \in A$ alors $N(x-y) \leqslant \delta(B)$. On a donc $A \subset \mathcal{B}_f\left(x, \delta(B)\right)$: A est bornée et :

$$\delta(A) \leqslant \delta(B).$$

b) Soit $(a,x) \in A^2$ et $(b,y) \in B^2$. L'inégalité triangulaire donne :

$$N(x-y) \leqslant N(x-a)+N(a-b)+N(b-y) \leqslant \delta(A)+N(a-b)+\delta(B),$$
$$N(x+y-a-b) \leqslant N(x-a)+N(y-b) \leqslant \delta(A)+\delta(B).$$

On en déduit que $A \cup B$ et $A+B$ sont bornées et que :

$$\begin{cases} \delta(A \cup B) \leqslant \delta(A)+d(A,B)+\delta(B) \\ \delta(A+B) \leqslant \delta(A)+\delta(B) \end{cases}$$

2. Topologie d'un e-v-n E

2.1 – Voisinages – Voisinages relatifs

Définition 12

On appelle **voisinage d'un point** a de E toute partie X de E contenant une boule ouverte de centre a. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$.

$$X \in \mathcal{V}(a) \iff \exists r>0, \quad \mathcal{B}_o(a,r) \subset X. \text{ ✎(15)}$$

✎(15) Pour tout réel $r>0$, la boule $\mathcal{B}_o(a,r)$ est un voisinage de a. Si X est voisinage de a, toute partie Y contenant X est encore un voisinage de a.

Définition 13

Si A est une partie de E et a un point de A, un **voisinage de** a **dans** A (ou voisinage de a **relatif** à A) est l'intersection avec A d'un voisinage X de a. L'ensemble des voisinages de a dans A est noté $\mathcal{V}_A(a)$.

$$\mathcal{V}_A(a) = \left\{X \cap A / X \in \mathcal{V}(a)\right\}. \text{ ✎(16)}$$

✎(16) **Conséquence** : $Y \in \mathcal{V}_A(a) \iff \exists r>0, \ A \cap \mathcal{B}_o(a,r) \subset Y$.

Propriété 4

a) La réunion d'une famille quelconque de voisinages d'un même point x de E est un voisinage de x.

b) L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x. ✎(17)

✎(17) Les voisinages relatifs vérifient les mêmes propriétés.

☞ a) D'après la définition, toute partie qui contient un voisinage d'un point x de E est aussi un voisinage de x. D'où la conclusion.

b) Prenons deux voisinages U et V d'un même point x de E. Il existe alors des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\mathcal{B}_o(x, \alpha) \subset U \text{ et } \mathcal{B}_o(x, \beta) \subset V.$$

Supposons que $\alpha \leqslant \beta$, alors $\mathcal{B}_o(x, \alpha) \subset \mathcal{B}_o(x, \beta)$ et $\mathcal{B}_o(x, \alpha) \subset U \cap V$, ce qui fait de $U \cap V$ un voisinage de x. ✎ (18)

✎ (18) Si $\beta \leqslant \alpha$, on conclut de même avec $\mathcal{B}_o(x,\beta) \subset U \cap V$.

2.2 – Ouverts – Fermés

Définition 14

a) On appelle **ouvert de** E ✎ (19) toute partie X de E qui est voisinage de chacun de ses points

$$X \text{ ouvert de } E \iff \forall x \in X, \quad X \in \mathcal{V}(x).$$

b) On appelle **fermé de** E ✎ (20) toute partie de E dont le complémentaire dans E est un ouvert de E

$$X \text{ fermé de } E \iff E \backslash X \text{ ouvert de } E.$$

✎ (19) On dit aussi que A est une **partie ouverte** de E.

✎ (20) On dit aussi que A est une **partie fermée** de E.

Définition 15

a) Si A est une partie de E, on appelle **ouvert de** A (ou aussi ouvert **relatif** à A) toute partie X de A, voisinage de chacun de ses points dans A.

$$X \text{ ouvert de } A \iff \forall x \in X, \quad X \in \mathcal{V}_A(x).$$

b) On appelle **fermé de** A (ou fermé **relatif** à A) toute partie Y de A, dont le complémentaire dans A est un ouvert de A.

Propriété 5

Caractérisations des ouverts de E

Soit A une partie de E. A est un ouvert de E si et seulement si :

$$\forall x \in A, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}_0(x, r) \subset A.$$

Propriété 6

Caractérisations des ouverts et fermés relatifs

A est une partie non vide de E.

a) Soit $X \subset A$, X est un ouvert de A si et seulement si il existe X_1 ouvert de E tel que :

$$X = A \cap X_1.$$

b) Soit $Y \subset A$, Y est un fermé de A si et seulement si il existe Y_1 fermé de E tel que :

$$Y = A \cap Y_1.$$

Propriété 7

a) E et $\varnothing$ sont, à la fois, ouverts et fermés de E. ✎ (21)

b) ▪ La réunion d'une famille quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.
▪ L'intersection d'une famille quelconque de fermés de E est un fermé de E.

c) ▪ L'intersection de deux parties ouvertes de E est un ouvert de E.
▪ La réunion de deux parties fermées de E est un fermé de E. ✎ (22)

✎ (21) A étant une partie non vide de E, $\varnothing$ et A sont à la fois ouverts et fermés relatifs de A.

✎ (22) Les proriétés b) et c) restent vraies pour les ouverts et fermés relatifs à une partie A.

Remarque

La propriété c) s'étend par récurrence aux familles **finies** mais elle est fausse pour les familles quelconques.

Exemples dans $\mathbb{R}$:

- $U_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'ouverts,

et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n = \{0\}$ n'est pas un ouvert.

- $V_n = \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de fermés,

et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} V_n =]0,1[$ n'est pas un fermé.

2.3 – Intérieur – Adhérence – Frontière

Définition 16

Étant donné une partie non vide A de E, un point $a \in E$ est dit **intérieur** à A s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a,r) \subset A$ donc si et seulement si A est un voisinage de a.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **l'intérieur** de A et noté $\mathring{A}$.

Définition 17

Étant donné une partie non vide A de E, un point $a \in E$ est dit **adhérent** à A si, pour tout $r > 0$, la boule $\mathcal{B}_o(a,r)$ a une intersection non vide avec A.
L'ensemble des points adhérents à A est appelé **l'adhérence** de A et noté $\overline{A}$.

Exemple

- Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure M.
  $M = \sup A$ est l'unique majorant de A adhérent à A.
  En effet, si M est un majorant de A, on a $M = \sup A$ si et seulement si :
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \ ]M-\varepsilon, M] \cap A \neq \varnothing$$
  donc si et seulement si $M \in \overline{A}$.
- De même, pour une partie A et $\mathbb{R}$, non vide et minorée, $m = \inf A$ est l'unique minorant de A adhérent à A.

Définition 18

Étant donné une partie A non vide de E, un point $a \in E$ est dit point **frontière** de A s'il est adhérent mais n'est pas intérieur à A.

Définition 19

On dit qu'une partie A de E est **dense** dans E si l'adhérence de A est E : $\overline{A} = E$.
On dit qu'une partie B de A est dense dans A si $A \subset \overline{B}$.

Définition 20

Point d'accumulation ✎ (23)
On appelle point d'accumulation d'une partie A de E tout point x de E adhérent à $A\backslash\{x\}$.

✎ (23) Définition donnée à titre de complément : la notion est hors programme.

Un tel point est caractérisé par le fait que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\mathcal{B}_0(x,r) \cap A \setminus \{x\}$ n'est pas vide ou encore que $\mathcal{B}_o(x,r) \cap A$ est infini.

Définition 21

Point isolé
On appelle point isolé d'une partie A de E tout point a de A pour lequel il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A \cap \mathcal{B}_o(a,r)$ soit réduit à $\{a\}$:
$$a \text{ point isolé de } A \iff \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ \ A \cap \mathcal{B}_o(a,r) = \{a\}.$$

Propriété 8

Étant donnée A partie non vide de E et distincte de E, on pose $B = E \setminus A$. Alors :

$$\overset{\circ}{A} = E \setminus \overline{B} \qquad \overline{A} = E \setminus \overset{\circ}{B}$$ ✎[24]

✎[24] **Conséquence** : Pour $A=\varnothing$, on pose $\overset{\circ}{A} = \varnothing = A$ et $\overline{A} = \varnothing = A$. Avec cette convention ces formules sont vraies sans aucune restriction.

☞ Par définition de l'adhérence :

$$x \in E \setminus \overline{B} \iff x \notin \overline{B} \iff \exists r>0,\ \mathcal{B}_o(x,r)\cap B = \varnothing \iff \exists r>0,\ \mathcal{B}_o(x,r)\subset A \iff x \in \overset{\circ}{A}.$$

Pour $A \neq E$, la formule précédente donne $\overset{\circ}{B} = E \setminus \overline{A}$ d'où, en passant au complémentaire :

$$E \setminus \overset{\circ}{B} = \overline{A}.$$

Propriété 9

Soit A une partie non vide de E.

a) A est un ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$. ✎[25]

b) A est un fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

✎[25] A est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points c'est-à-dire si et seulement si chacun de ses points lui est intérieur, ou encore si et seulement si $A \subset \overset{\circ}{A}$. Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$ est vrai pour toute partie A, on a la première équivalence. La seconde s'en déduit par passage au complémentaire.

Propriété 10

a) L'intérieur d'une partie A de E est la réunion de la famille $\mathbb{O}(A)$ des ouverts de E inclus dans A. C'est le plus grand élément de cette famille.

b) L'adhérence d'une partie A de E est l'intersection de la famille $\mathcal{F}(A)$ des fermés de E contenant A. C'est le plus petit élément de cette famille.

☞ a) Soit $U \in \mathbb{O}(A)$, U est voisinage de chacun de ses points, donc pour tout $x \in U$, $A \in \mathcal{V}(x)$ c'est-à-dire que $U \subset \overset{\circ}{A}$. En conséquence en posant $\Omega = \bigcup_{U \in \mathbb{O}(A)} U$, on a $\Omega \subset \overset{\circ}{A}$.

Pour tout $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe $r>0$ tel que $\mathcal{B}_o(x,r)\subset A$, donc $\mathcal{B}_o(x,r) \in \mathbb{O}(A)$ et $x \in \Omega$.

Il en résulte $\overset{\circ}{A} \subset \Omega$, et finalement $\overset{\circ}{A} = \Omega$.

Étant réunion de la famille $\mathbb{O}(A)$, $\overset{\circ}{A}$ en est bien le plus grand élément pour la relation d'ordre $\subset$.

b) Il suffit d'appliquer le résultat du a) avec la propriété 8.

Propriété 11

Pour toute partie non vide A de E, on a : $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E\setminus A}$. ✎[26]

✎[26] C'est une conséquence de $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$. Avec la convention concernant l'adhérence de la partie vide, pour $A = \varnothing$, on obtient $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Propriété 12

Si A est une partie non vide de E, pour tout $a \in E$ on a :

$$a \in \overline{A} \iff d(a,A) = 0.$$

☞ En effet $d(a,A) = \inf\left\{N(a-x)\ /\ x \in A\right\}$ donc :

$$d(a,A) = 0 \iff \forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists x \in A,\ N(a-x) < r \iff \forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{B}_o(a,r)\cap A \neq \varnothing.$$

Propriété 13

Si A est une partie bornée de E, alors $\overline{A}$ est bornée et $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

☞ Soit x et y deux points de $\overline{A}$.
Alors, pour tout $r>0$, il existe $a \in A\cap\mathcal{B}_o(x,r)$ et $b \in A \cap \mathcal{B}_o(y,r)$.
L'inégalité triangulaire donne :

$$N(x-y) \leqslant N(x-a) + N(a-b) + N(b-y) \leqslant r + \delta(A) + r$$

ce qui montre que $\overline{A}$ est bornée avec $\delta(\overline{A}) \leqslant \delta(A) + 2r$. Ceci étant vrai pour tout $r>0$, on en déduit $\delta(\overline{A}) \leqslant \delta(A)$.
D'autre part, l'inclusion $A \subset \overline{A}$ donne $\delta(A) \leqslant \delta(\overline{A})$ d'où finalement $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

Exemple 4 Relation entre normes et ouverts

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 telles que $N_1 \leqslant \alpha N_2,\ \alpha > 0$.
Notons $\mathcal{B}_i(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r définie par la norme N_i pour $i \in \{1, 2\}$.
Ces boules vérifient $\mathcal{B}_2(a, r) \subset \mathcal{B}_1(a, \alpha r)$, $\left(N_1(a, x) \leqslant \alpha N_2(a, x) < \alpha r\right)$.
Donc si U est un ouvert de $\left(E, N_1\right)$, alors U est aussi un ouvert de $\left(E, N_2\right)$.
En effet, x étant un point de U, il existe un réel $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_1(x, r) \subset U$ et l'inclusion $\mathcal{B}_2\left(x, \frac{r}{\alpha}\right) \subset \mathcal{B}_1(x, r)$ donne $\mathcal{B}_2\left(x, \frac{r}{\alpha}\right) \subset U$.
En conséquence, si ces deux normes sont équivalentes, les espaces vectoriels normés $\left(E, N_1\right)$ et $\left(E, N_2\right)$ ont les mêmes ouverts.

Exemple 5 Adhérence d'une boule

Montrer que $\overline{\mathcal{B}_o(a, r)} = \mathcal{B}_f(a, r)$.

Il suffit de vérifier que tout point x de la sphère $S(a, r)$ est adhérent à la boule ouverte $\mathcal{B}_o(a, r)$.
Notons $y = a + \mu(x - a)$ l'image de x par l'homothétie de centre a et de rapport $\mu \in \left]0, 1\right[$.
Calculons les deux normes :

$$\| y - a \| = \mu \| x - a \| = \mu r \quad \text{et} \quad \| y - x \| = \| (1 - \mu)(a - x) \| = (1 - \mu) r.$$

Pour tout $\alpha \in \left]0, r\right[$ avec $1 - \frac{\alpha}{r} < \mu < 1$, on a $\mu r < r$ et $(1 - \mu) r < \alpha$, donc :

$$y \in \mathcal{B}_o(a, r) \cap \mathcal{B}_o(x, \alpha) \ \text{ et } \ \mathcal{B}_o(a, r) \cap \mathcal{B}_o(x, \alpha) \neq \varnothing.$$

Exemple 6 Adhérence d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace de E, espace vectoriel normé.

a) Montrer que son adhérence $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) En déduire qu'un hyperplan est soit fermé soit dense dans E.

a) Il s'agit de vérifier que, si x et y sont dans $\overline{F}$ et λ dans $\mathbb{K}$, alors $x + y \in \overline{F}$ et $\lambda x \in \overline{F}$.
La définition des points adhérents à F indique, pour tout $r > 0$, l'existence de points a et b de F tels que : $\| x - a \| < r$ et $\| y - b \| < r$.
Alors les majorations :

$$\| (x + y) - (a + b) \| \leqslant \| x - a \| + \| y - b \| < 2r$$

$$\| \lambda x - \lambda a \| = |\lambda| \ \| x - a \| \leqslant |\lambda| r$$

suffisent à prouver que $x + y$ et λx sont adhérents à F. ✎[27]

b) Supposons maintenant que F soit un hyperplan non fermé de E.
Alors il existe c dans $\overline{F} \setminus F$ et la droite $\mathbb{K}c$ est un supplémentaire de F. ✎[28]
Puisqu'il contient F et $\mathbb{K}c$, le sous-espace vectoriel $\overline{F}$ contient aussi $\mathbb{K}c \oplus F$, c'est-à-dire que $E \subset \overline{F}$. Ainsi $\overline{F} = E$: F est dense dans E.

✎[27] Car $a+b$ et λa appartiennent à F.

✎[28] Voir en Algèbre–Géométrie, la caractérisation des hyperplans.

Exemple 7 Distance à une partie

Soit A une partie non vide de E, espace vectoriel normé. Montrer que :

$$\forall x, y \in E, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant \| x - y \|.$$

Fixons deux points x et y de E. Alors pour tout point z de A, l'inégalité triangulaire donne :

$$\| x - z \| \leqslant \| x - y \| + \| y - z \|.$$

Donc avec $d(x, A) \leqslant \| x - z \|$, il vient $d(x, A) \leqslant \| x - y \| + \| y - z \|$, soit aussi :

$$d(x, A) - \| x - y \| \leqslant \| y - z \|.$$

Ainsi $d(x, A) - \| x - y \|$ est l'un des minorants de $\left\{ \| y - z \| \ / \ z \in A \right\}$, il est donc inférieur à $d(y, A)$ qui est le plus grand de ces minorants et on obtient :

$$d(x, A) - \| x - y \| \leqslant d(y, A) \ \text{ c'est-à-dire } \ d(x, A) - d(y, A) \leqslant \| x - y \|.$$

En échangeant les rôles de x et y, il vient alors :

$$d(y, A) - d(x, A) \leqslant \| y - x \| = \| x - y \|$$

d'où finalement : $$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant \| x - y \|.$$

Exemple 8 Intérieur et adhérence d'un convexe

Soit A une partie non vide et convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ sont convexes.

a) Prenons deux points x et y de $\overset{\circ}{A}$ et vérifions que, pour tout réel $t \in [0, 1]$, le point $z = (1 - t)x + ty$ est intérieur à A. D'après la propriété 5, il existe $r > 0$ tel que, pour tout vecteur u vérifiant $\| u \| < r$, les points $x + u$ et $y + u$ sont dans A.

Comme A est convexe, $(1 - t)(x + u) + t(y + u) = z + u$ est aussi dans A, donc $\mathcal{B}_o(z, r) \subset A$.

Ainsi z est intérieur à A ; $\overset{\circ}{A}$ est convexe.

b) Reprenons les notations précédentes avec, cette fois-ci, x et y dans $\overline{A}$, montrons que $z = (1 - t)x + ty$ est adhérent à A.

Pour tout $r > 0$, il existe deux points $a \in A \cap \mathcal{B}_o(x, r)$ et $b \in A \cap \mathcal{B}_o(y, r)$.

Notons $c = (1 - t)a + tb$. Par convexité de A on a $c \in A$ et vérifions que $\| z - c \| < r$:

$$\| z - c \| = \| (1 - t)(x - a) + t(y - b) \| \leqslant (1 - t)\| x - a \| + t\| y - b \| < r.$$

Ainsi $A \cap \mathcal{B}_o(z, r)$ contient c ; donc $z \in \overline{A}$. Il en résulte que $\overline{A}$ est convexe.

3. Suites d'un e-v-n E

La notion de suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ a été étudiée en Analyse – MPSI.

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on définit de manière analogue :

- les suites de E, comme applications de $\mathbb{N}$ dans E, notations : $u, (u_n), (u_n)_{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites de E est noté $E^{\mathbb{N}}$,
- les suites de E définies à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, comme applications de $[\![n_0, +\infty [\![$ dans E, notation : $(u_n)_{n \geqslant n_0}$,
- les opérations sur $E^{\mathbb{N}}$: addition et produit par un scalaire. $E^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
- les suites extraites d'une suite donnée $(u_n)_{\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Définition 22

Suites bornées

Une suite $\left(u_n\right)_{\mathbb{N}}$ de E est bornée si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \| u_n \| \leqslant A. \quad ✎^{(29)}$$

L'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des suites bornées de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

✎(29) Remarquer qu'il s'agit là de la définition 9 transposée au cas d'une application de $\mathbb{N}$ dans E.

Définition 23

Suites convergentes

Soit u une suite de E et a un point de E.

On dit que la suite u a pour limite a, ou converge vers a, si la suite réelle $n \mapsto \| u_n - a \|$ a pour limite 0.

On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \iff \lim\limits_{n \to +\infty} \| u_n - a \| = 0.$ ✎(30)

✎(30) La notion de suite convergente dans E est ainsi ramenée à celle de suite convergente dans $\mathbb{R}$.

Remarques

1) Une suite convergente a une seule limite.

2) Une suite convergente est bornée.

3) L'ensemble $\mathcal{C}(E)$ des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(E)$.

L'application $L \ : \ \mathcal{C}(E) \to E, x \mapsto \lim x_n$ est linéaire.

4) Si la suite u converge vers a alors on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $r_n = \sup\limits_{p \geqslant n} \| u_p - a \|$.

On constate que la suite réelle $n \mapsto r_n$ est positive, décroissante et converge vers 0.

Définition 24

Suites de Cauchy

Soit u une suite bornée de E, notons $\delta_n = \sup\{\| u_p - u_q \| / p \geqslant n, q \geqslant n\}$.

On dit que u est une suite de Cauchy si la suite réelle $(\delta_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarques

1) La suite $(\delta_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante.

2) La définition s'écrit traditionnellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n \in \mathbb{N}, \ \forall p \geqslant n, \ \forall q \geqslant n, \quad \| u_p - u_q \| < \varepsilon.$$

3) Il est commode aussi d'introduire : $\varepsilon_n = \sup\limits_{p \geqslant n} \| u_{n+p} - u_n \|$.

u est une suite de Cauchy si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Définition 25

Valeur d'adhérence

On dit qu'un point a de E est valeur d'adhérence de la suite u de E s'il existe une suite extraite de u qui converge vers a.

Définition 26

Un espace vectoriel normé est dit **complet** si, dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente. On dit alors que c'est un **espace de Banach**. ✎(31)

✎(31) Un espace préhilbertien complet est appelé un **espace de Hilbert**.

Définition 27

Une **partie** A de E est dite **complète** si toute suite de Cauchy formée de points de A est convergente dans A.

Propriété 14

L'espace vectoriel normé $\ell^\infty(E)$

Soit $\mathcal{B}(E)$ l'espace vectoriel des suites bornées de E.

L'application $\| \bullet \|_\infty : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}, \ (u_n)_{\mathbb{N}} \mapsto \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \| u_n \|$ est une norme sur $\mathcal{B}(E)$.

L'espace vectoriel normé $\left(\mathcal{B}(E), \| \bullet \|_\infty\right)$ est noté $\ell^\infty(E)$.

Théorème 1

Normes équivalentes et suites convergentes

Soit N_1 et N_2 deux normes de E.

a) Pour que toute suite convergeant vers 0 dans (E, N_1) soit convergente vers 0 dans (E, N_2), il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $N_2 \leqslant \beta N_1$.

b) Pour que, pour toute suite u de E, u converge vers 0 dans (E, N_1) soit équivalent à u converge vers 0 dans (E, N_2), il faut et suffit qu'il existe des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1.$$ ✎(32)

✎(32) En remplaçant au besoin u par $u - \ell$, $\ell \in E$, il en résulte que les notions de convergence et de limite d'une suite sont identiques dans (E, N_1) et (E, N_2) si et seulement si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

☞ a) Si $N_2 \leqslant \beta N_1$, soit $(u_n)_{\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 dans (E, N_1).

On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} N_1(u_n) = 0$ et $N_2(u_n) \leqslant \beta N_1(u_n)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} N_2(u_n) = 0$.

Supposons maintenant que toute suite convergeant vers 0 dans (E, N_1) soit aussi convergente vers 0 dans (E, N_2).

S'il n'existait pas de réel $\beta > 0$ tel que $N_2 \leqslant \beta N_1$, le rapport $\dfrac{N_2}{N_1}$ serait non majoré sur $E \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourrait donc trouver $u_n \in E \setminus \{0\}$ tel que $\dfrac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)} \geqslant n$ ce qui s'écrit $N_2\left(\dfrac{u_n}{n\,N_1(u_n)}\right) \geqslant 1$.

La suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n\,N_1(u_n)}$ ne converge pas vers 0 dans (E, N_2) car $N_2(v_n) \geqslant 1$, et elle converge vers 0 dans (E, N_1) car $N_1(v_n) = \dfrac{1}{n}$. C'est contraire à l'hypothèse de départ, l'existence de β en résulte.

b) On applique deux fois le a).

Propriété 15

Relations entre suite extraite, suite convergente et suite de Cauchy

a) Une suite convergente est une suite de Cauchy.

b) Une suite extraite d'une suite convergente u est convergente et a la même limite.

c) Une suite extraite d'une suite de Cauchy est encore une suite de Cauchy.

d) Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence a et, dans ce cas, elle converge vers a.

a) et b) : soit (u_n) convergente vers ℓ dans $(E, \|\bullet\|)$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N},\ \ p \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \| u_p - \ell \| < \varepsilon$.
Alors, a) est conséquence de l'inégalité triangulaire :

$$\| u_p - u_q \| \leqslant \| u_p - \ell \| + \| \ell - u_q \|.$$

Pour b), si (v_n) est extraite de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ v_n = u_{\varphi(n)}$.
On a alors pour tout $p \in \mathbb{N},\ \ \varphi(p) \geqslant p$ donc $p \geqslant n_0$ donne $\varphi(p) \geqslant n_0$ et la conclusion en résulte.
c) et d) : soit (u_n) une suite de Cauchy de $(E, \|\bullet\|)$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ \ p \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \| u_{p+q} - u_p \| < \varepsilon$.
Pour c), si $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ est extraite de $(u_n)_{\mathbb{N}}$, la conclusion résulte encore de $\varphi(p) \geqslant p$.
Pour d), si a est valeur d'adhérence de la suite de Cauchy (u_n), il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de limite a. La conclusion résulte alors de :

$$\begin{aligned} \| u_n - a \| &\leqslant \| u_n - u_{\varphi(n)} \| + \| u_{\varphi(n)} - a \| \\ &\leqslant \sup_{\substack{p \geqslant n \\ q \geqslant n}} \| u_p - u_q \| + \| u_{\varphi(n)} - a \|. \end{aligned}$$

Propriété 16

(33) C'est-à-dire caractérisation au moyen des suites.

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés (33)

Soit A une partie non vide de E.

a) Si une suite de points de A converge dans E, alors sa limite est un point adhérent de A.

b) Si un point de E est adhérent à A, il existe une suite de A qui converge vers ce point.

c) A est un fermé de E si et seulement si A contient la limite de toute suite formée de points de A et convergente dans E.

a) Avec $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a :

$$0 \leqslant d(\ell, A) \leqslant \| \ell - u_n \| \ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \| \ell - u_n \| = 0$$

donc $d(\ell, A) = 0$ ce qui signifie $\ell \in \overline{A}$ (cf. propriété 12).

b) Supposons $\ell \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un point a_n de A tel que :

$$\| \ell - a_n \| < \frac{1}{n} \quad \text{car} \quad A \cap \mathcal{B}_o\left(\ell, \frac{1}{n}\right) \quad \text{n'est pas vide.}$$

La suite $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

c) On sait que A est un fermé si et seulement si il contient tous ses points adhérents (cf. propriété 9). La conclusion résulte alors des propositions a) et b).

B. Étude locale des applications Continuité

Soit $\left(E, \| \bullet \|\right)$ et $\left(F, | \bullet |\right)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Étant donné D partie non vide de E, $\mathcal{F}(D, F)$ désigne l'ensemble des applications de D dans F c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de E dans F, dont l'ensemble de définition est D.

$\mathcal{F}(D, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles : somme de deux fonctions et produit d'une fonction par un scalaire.

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(D, F)^2 \quad f + g \;:\; x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{F}(D, F) \quad \lambda f \;:\; x \mapsto \lambda f(x)$$

Dans le cas particulier où $F = \mathbb{K}$, on dispose de l'opération produit de deux fonctions,

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^2 \quad fg \;:\; x \mapsto f(x)g(x),$$

et $\mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

1. Limite – Continuité

Définition 28

Limite en un point

Soit $f \in \mathcal{F}(D, F)$, $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$.

On dit que f admet une **limite en a suivant A** s'il existe un point b de F tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \alpha > 0,\ \ \forall x \in A,\ \ \| x - a \| < \alpha \ \ \Rightarrow\ \ |f(x) - b| < \varepsilon. \qquad \textbf{(1)}$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = b.$

Remarques

✎(34) C'est ce qui justifie la notation $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = b$.

1) S'il existe b et b' dans F vérifiant **(1)** alors $b = b'$. ✎(34)

☞ On a en effet : $\forall x \in A,\ \ \left|b - b'\right| \leqslant |f(x) - b| + \left|f(x) - b'\right|$ donc en appliquant **(1)**, on obtient : $\ \forall \varepsilon > 0,\ \ \left|b - b'\right| < \varepsilon$, ce qui exige $b = b'$.

✎(35) $f|_\Delta$ désigne la restriction de f à Δ.

2) Soit Δ telle que $A \subset \Delta \subset D$, si $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f|_\Delta(x) = b$. ✎(35)

3) Extension dans le cas où $E = \mathbb{R}$, $\ a = +\infty$, $\ A \supset [\alpha, +\infty[$, $\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \beta \in A,\ \ \forall x \in A,\ \ x > \beta \ \ \Rightarrow\ \ |f(x) - b| < \ \varepsilon. \text{ ✎(36)}$$

✎(36) Écrire l'extension analogue correspondant au cas $a = -\infty$.

4) Extension dans le cas où $F = \mathbb{R}$, $\ b = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = +\infty$ se traduit par :

$$\forall B > 0,\ \ \exists \alpha > 0,\ \ \forall x \in A,\ \ \| x - a \| < \alpha \ \ \Rightarrow\ \ f(x) > B. \text{ ✎(37)}$$

✎(37) Écrire l'extension analogue correspondant au cas $b = -\infty$.

5) Ces notions (existence d'une limite et valeur de la limite) sont invariantes lorsque l'on remplace la norme de E (ou de F) par une norme équivalente.

Propriété 17

Interprétation en termes de voisinages

Soit $f \in \mathcal{F}(D,F)$, $A \subset D$, $a \in \overline{A}$, et $b \in F$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$.

(2) $\forall V \in \mathcal{V}(b)$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$, $f(U \cap A) \subset V$.

(3) $\forall V \in \mathcal{V}(b)$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$, $U \cap A \subset f^{-1}(V)$. ✎(38)

✎(38) $f^{-1}(V)$ est l'image réciproque de V par f.

Ces équivalences restent vraies dans le cadre des extensions précédentes en convenant qu'un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle $[A,+\infty[$ (resp. $]-\infty,A]$).

Si $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$, tout voisinage V de b contient une boule $\mathcal{B}_o(b,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ et, d'après la définition 28, à ε on peut associer $r > 0$ tel que $f\big(A \cap \mathcal{B}_o(a,r)\big) \subset \mathcal{B}_o(b,\varepsilon) \subset V$.

Ainsi, $U = \mathcal{B}_o(a,r)$ est un voisinage de a vérifiant **(2)**.

Si **(2)** est vérifiée, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B}_o(b,\varepsilon)$ étant un voisinage de b, il existe U voisinage de a tel que $f(A \cap U) \subset \mathcal{B}_o(b,\varepsilon)$. Or U contient une boule $\mathcal{B}_o(a,r)$, $r > 0$, et on a donc $f(A \cap \mathcal{B}_o(a,r)) \subset \mathcal{B}_o(b,\varepsilon)$. On ainsi retrouvé **(1)**.

L'équivalence entre **(2)** et **(3)** tient à la définition d'une image réciproque.

Définition 29

Continuité en un point

$f \in \mathcal{F}(D,F)$ est continue en un point a de D si f admet une limite en a suivant D. ✎(39)

✎(39) Étant donnés $a \in D$ et $r > 0$, il ressort de cette définition que f est continue en a si et seulement si sa restriction à $D \cap \mathcal{B}_o(a,r)$ est continue en a : la continuité est une propriété **locale**.

Remarque

La limite de f en a suivant D ne peut être que $f(a)$.

En effet, pour $x = a$ la condition $\|x - a\| < \alpha$ est réalisée quel que soit $\alpha > 0$, donc avec $b = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x)$, **(1)** donne $\forall \varepsilon > 0$, $|f(a) - b| < \varepsilon$, ce qui exige $b = f(a)$.

Ainsi f est continue en $a \in D$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = f(a)$, soit si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ f\big(D \cap \mathcal{B}_o(a,r)\big) \subset \mathcal{B}_o\big(f(a),\varepsilon\big).$$

Définition 30

Continuité sur une partie

$f \in \mathcal{F}(D,F)$ est continue sur D si f est continue en tout point de D.

Étant donné $A \subset D$, on dit que f est continue sur A lorsque la restriction $f_{|A}$ est continue en tout point de A.

Définition 31

Continuité uniforme

$f \in \mathcal{F}(D,F)$ est uniformément continue sur $A \subset D$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in A^2,\ \|x - y\| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque

Si $f : A \to F$ est une fonction bornée, on peut définir la fonction :

$$\delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\quad h \mapsto \delta(h) = \sup\{|f(x) - f(y)| \,/ (x,y) \in A^2, \|x - y\| \leqslant h\}.$$

Cette fonction h est positive croissante.

L'uniforme continuité de f sur A est caractérisée par $\lim\limits_{h \to 0} \delta(h) = 0$.

Définition 32

Fonction lipschitzienne

$f \in \mathcal{F}(D, F)$ est dite lipschitzienne sur $A \subset D$ si l'ensemble :

$$R = \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\| x - y \|} / (x, y) \in A^2, x \neq y \right\} \quad \text{est majoré.}$$

Si le réel k est un majorant de R, par exemple si $k = \sup R$, on dit que f est lipschitzienne de rapport k ou k-lipschitzienne sur A. ✎(40)

✎(40) Dans ces conditions : $\forall (x,y) \in A^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k \| x - y \|$.

Exemples

- L'application $\| \bullet \|$ (norme) est 1-lipschitzienne de $(E, \| \bullet \|)$ dans $\mathbb{R}$.
  En effet, la deuxième inégalité triangulaire donne :
  $$\forall (x, y) \in E^2, \left| \| x \| - \| y \| \right| \leqslant \| x - y \|.$$
- A étant une partie fixée non vide de E, l'application «distance à A», $d_A : x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne (voir exemple 7).

Définition 33

Homéomorphisme

Soit A une partie de E, B une partie de F, et f une bijection de A sur B.

On dit que f est un homéomorphisme si f est continue sur A et f^{-1} continue sur B.

✎(41) On vérifie facilement que toutes les notions introduites précédemment : limite, continuité, continuité uniforme, fonctions lipschitziennes, homéomorphismes, sont invariantes par un changement de normes équivalentes dans E ou F. Mais ce n'est évidemment pas le cas pour les isométries.

Définition 34

Isométrie ✎(41)

Soit A une partie de E, et f une application de A dans F.

On dit que f est une isométrie si, pour tout couple $(x, y) \in A^2$:

$$|f(y) - f(x)| = \| y - x \|.$$

Théorème 2

Soit $f \in \mathcal{F}(D, F)$ et $A \subset D$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue sur A.

(2) pour tout ouvert V de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de A.

(3) pour tout fermé W de F, $f^{-1}(W)$ est un fermé de A.

☞ **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**

Soit V un ouvert de F. Pour tout $a \in f^{-1}(V)$, $b = f(a)$ est dans V donc, puisque V est ouvert c'est un voisinage de b. D'après la propriété 17, il existe U voisinage de a tel que $f^{-1}(V) \supset U \cap A$ ce qui prouve que $f^{-1}(V)$ est voisinage de a relatif à A.

(2) $\Rightarrow$ **(1)**

Soit $a \in A$ et $b = f(a)$. Tout voisinage V de b contient un ouvert V_0 tel que $\{b\} \subset V_0 \subset V$, alors $f^{-1}(V_0)$ est un ouvert relatif de A contenant a : c'est un voisinage de a relatif à A.

Donc $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(V_0)$ est également un voisinage de a relatif à A et, d'après la propriété 17, on a $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a)$: f est continue en a.

(2) $\Longleftrightarrow$ **(3)** s'obtient par passage au complémentaire.

Propriété 18

Comparaison des divers modes de continuité

Soit $f \in \mathcal{F}(D, F)$, $A \subset D$ et les propriétés suivantes :

(1) f est lipschitzienne sur A de rapport k,

(2) f est uniformément continue sur A,

(3) f est continue sur A.

Alors **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** $\Rightarrow$ **(3).**

Propriété 19

Caractérisation séquentielle des limites

Soit $f \in \mathcal{F}(D, F)$, $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f admet une limite en a suivant A,

(2) pour toute suite $\left(a_n\right)$ de A qui converge vers a, la suite $\left(f\left(a_n\right)\right)$ de F est convergente.

☞ ▪ **(1) $\Rightarrow$ (2)**

Notons $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$ et considérons une suite $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ de A qui converge vers a.

L'hypothèse $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A,\ \| x - a \| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon$ donne l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p \ \Rightarrow\ \| a_n - a \| < \alpha \ \Rightarrow\ \left|f\left(a_n\right) - b\right| < \varepsilon$, c'est-à-dire que la suite $\left(f\left(a_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ converge vers b.

▪ **(2) $\Rightarrow$ (1)**

Si $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ et $\left(a'_n\right)_{\mathbb{N}}$ sont deux suites de A qui convergent vers a, alors les suites $\left(f\left(a_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ et $\left(f\left(a'_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ convergent dans F ; vérifions que leurs limites b et b' sont égales.

Pour cela, il suffit de mixer les suites $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ et $\left(a'_n\right)_{\mathbb{N}}$ en notant :

$$\begin{cases} c_{2n} = a_n \\ c_{2n+1} = a'_n \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(c_{2n}) = b = \lim\limits_{n \to +\infty} f(c_{2n+1}) = b'$.

Il s'ensuit que b est la seule limite possible de f en a.

Par l'absurde, si f n'admet pas b pour limite en a :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x_\alpha \in A \cap \mathcal{B}_0(a, \alpha) \quad \text{tel que} \quad |f(x_\alpha) - b| \geqslant \varepsilon$$

d'où en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A$ tel que $\| a_n - a \| < \dfrac{1}{n}$ et $\left|f\left(a_n\right) - b\right| \geqslant \varepsilon$.

On a ainsi formé une suite $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ qui converge vers a sans que la suite $\left(f\left(a_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ converge vers b, ce qui est contradictoire.

Remarque

Avec $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $b = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$, on a $b \in \overline{f(A)}$, (d'après la caractérisation de l'adhérence par les suites).

Propriété 20

Égalité de deux applications continues

Soit f et g deux applications continues de A dans F, et B une partie de A dense dans A.

Si f et g coïncident sur B alors elles sont égales.

☞ Il s'agit de prouver que $f_{|B} = g_{|B} \ \Rightarrow\ f = g$.

Tout point x de A est limite d'une suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ de points de B, ✎[42] et la continuité de f et g en x donne : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_n\right)$, $g(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} g\left(x_n\right)$. Puisque $f_{|B} = g_{|B}$ les suites $\left(f\left(x_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ et $\left(g\left(x_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ sont égales et on en déduit $f(x) = g(x)$.

✎[42] D'après la caractérisation séquentielle des points adhérents.

Propriété 21

Composition de fonctions continues

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, A une partie de E, B une partie de G, f une application de A dans F et g une application de B dans G.

Si, de plus, $f(A) \subset B$, on dispose de l'application composée $g \circ f$ de A dans G.

a) **Limite**

Si f admet une limite b en $a \in \overline{A}$ et si g admet une limite c en b alors $g \circ f$ admet c pour limite en a : $c = \lim\limits_{x \to a, x \in A} g \circ f(x)$.

b) **Continuité**

Si f est continue sur A et g continue sur B, alors $g \circ f$ est continue sur A.

a) Utilisons deux fois la propriété 19.

Soit $(x_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de A qui converge vers a, alors la suite $(f(x_n))_{\mathbb{N}}$ de B converge vers b, ✎(43) et la suite $(g(f(x_n)))_{\mathbb{N}}$ converge vers c.

b) Corollaire immédiat du a).

✎(43) Ce qui prouve, d'après la caractérisation séquentielle des points adhérents, que $b \in \overline{B}$.

Propriété 22

Propriétés des isométries

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, et $f : A \to F$ une isométrie.

a) f est lipschitzienne de rapport 1, donc f est uniformément continue sur A.

b) f est injective donc elle induit une bijection de A sur $B = f(A)$, dont la bijection réciproque $f^{-1} : B \to A$ est une isométrie ; f est alors un homéomorphisme de A sur B.

c) La composée de deux isométries est une isométrie.

Propriété 23

Opérations sur les limites

Soit $f : A \to F$, $g : A \to F$ et $a \in \overline{A}$ ainsi que $\varphi : A \to \mathbb{K}$.

a) L'existence de :

$$u = \lim_{x \to a, x \in A} f(x) \quad , \quad v = \lim_{x \to a, x \in A} g(x) \quad , \quad \mu = \lim_{x \to a, x \in A} \varphi(x)$$

fournit les nouvelles limites :

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) + g(x) = u + v$$

$$\text{et} \qquad \lim_{x \to a, x \in A} \varphi(x) f(x) = \mu u.$$

b) Si $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est un produit d'espaces vectoriels normés et si $f : A \to F$ est donnée par ses applications composantes :

$$x \mapsto f(x) = \left(f_1(x), \cdots, f_p(x)\right),$$

alors f admet une limite b en a suivant A si et seulement si chaque f_i, $i \in [\![1, p]\!]$, admet une limite b_i en a suivant A. Dans ce cas :

$$b = \left(b_1, b_2, \cdots, b_p\right).$$

a) Pour la deuxième formule noter le découpage suivant :

$$\varphi(x) f(x) - \mu u = \left[\varphi(x) - \mu\right] f(x) + \mu \left[f(x) - u\right]$$

qui permet de majorer $|\varphi(x) f(x) - \mu u|$ par l'inégalité triangulaire.

b) Pour montrer que l'existence de $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$ implique celle de $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f_i(x)$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, utiliser la norme sur F définie par :

$$\left\| \left(x_1, x_2, \cdots, x_p\right) \right\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} \| x_i \|_{F_i}$$

où $\| \bullet \|_{F_i}$ est la norme sur F_i.

Pour la réciproque, utiliser la norme sur F définie par :

$$\left\| \left(x_1, x_2, \cdots, x_p\right) \right\|_1 = \sum_{i=1}^{p} \| x_i \|_{F_i}.$$

Propriété 24

Opérations sur les fonctions continues

a) $\mathcal{C}(A, F)$ ensemble des fonctions continues de A dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.

b) $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

c) Si $f : A \to F$ et $\varphi : A \to \mathbb{K}$ sont continues sur A alors $\varphi f : A \to F$ est continue sur A.

d) Si $f : A \to F$ est continue alors $|f| : A \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f(x)|$ est continue. ✎[44]

✎[44] La norme sur F est notée $|\bullet|$.

e) Si $\varphi : A \to \mathbb{K}$ est continue sur A et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{\varphi} : A \to \mathbb{K}$ est définie et continue sur A.

f) Si $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est un produit d'espaces vectoriels normés et si $f : A \to F$ est donnée par ses applications composantes $x \mapsto f(x) = \big(f_1(x), \cdots, f_p(x)\big)$,
alors f est continue sur A si et seulement si chaque $f_i : A \to F_i$ est continue sur A $(1 \leqslant i \leqslant p)$.

☞ Ce sont des conséquence des opérations sur les limites.

E et F sont deux espaces vectoriels normés.

Exemple 9 Soit $f : E \to F$ continue sur E et $A \subset E$.
Montrer que, si A est dense dans E, alors $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

D'après la caractérisation séquentielle des points adhérents, A est dense dans E si et seulement si tout point de E est limite d'une suite de points de A.

Soit donc $y \in f(E)$: il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Puisque A est dense dans E, il existe une suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ de points de A telle que $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Alors la continuité de f en x donne : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_n\right)$.

Ainsi $y \in f(E)$ est limite de la suite $\left(f\left(x_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ formée de points de $f(A)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in f(E)$, on a $f(E) \subset \overline{f(A)}$.

Exemple 10 Soit f et g deux applications continues de E dans F. Montrer que :

$$A = \big\{x \in E \,/\, f(x) = g(x)\big\} \text{ est fermé} \quad , \quad B = \big\{x \in E \,/\, f(x) < g(x)\big\} \text{ est ouvert.}$$

On observe que A et B sont les images réciproques respectives par $g - f$ du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ et de l'ouvert $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

Comme $g - f$ est continue, A est un fermé de E et B est un ouvert.

2. Relations de comparaison au voisinage d'un point

Ces relations ont été introduites en Analyse – MPSI, chapitre 8, dans le cadre des fonctions réelles d'une variable réelle.

E, F, G sont des espaces vectoriels normés de normes notées $\|\bullet\|$, $|\bullet|_F$, $|\bullet|_G$, A est une partie de E et a un point de E adhérent à A. On pose alors $\mathcal{V}_A(a) = \big\{A \cap \mathcal{B}_o(a, r) \,/\, r \in \mathbb{R}_+^*\big\}$.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, a est un point de $\overline{\mathbb{R}}$, donc éventuellement $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, et on pose alors : $\mathcal{V}_A(+\infty) = \big\{A \cap]r, +\infty[\,/\, r \in \mathbb{R}\big\}$, $\mathcal{V}_A(-\infty) = \big\{A \cap]-\infty, r[\,/\, r \in \mathbb{R}\big\}$. ✎[45]

✎[45] On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vraie «au voisinage de a» si et seulement si il existe $V \in \mathcal{V}_A(a)$ tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie pour tout $x \in V$.

2.1 – Domination – Prépondérance

f et g sont des fonctions définies sur A à valeurs dans F et G : $f : A \to F$, $g : A \to G$.

Définition 35

f est **dominée** par g au voisinage de a suivant A, et on note $f = \mathcal{O}_a(g)$ ou $f = \mathcal{O}(g)$, lorsque :

$$\exists V \in \mathcal{V}_A(a),\ \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in V,\quad |f(x)|_F \leqslant \lambda\, |g(x)|_G .$$

Définition 36

f est **négligeable** devant g (ou g **prépondérante** devant f), et on note $f = o_a(g)$ ou $f = o(g)$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists V \in \mathcal{V}_A(a),\ \ \forall x \in V,\quad |f(x)|_F \leqslant \varepsilon\, |g(x)|_G\,.$$

Remarques

1) Le cas $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $a = +\infty$ donne les relations de comparaison entre suites à valeurs dans un espace vectoriel normé.

2) Les fonctions f et g considérées ont un ensemble de définition commun (ici A) mais ne prennent pas nécessairement leurs valeurs dans le même espace vectoriel (ici F et G). En fait, seules les fonctions normes interviennent :

$$|f|_F\ : A \to \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)|_F \quad \text{et} \quad |g|_G\ : A \to \mathbb{R}, x \mapsto |g(x)|_G\,.$$

Donc $f = o_a(g)$ s'interprète en $|f|_F = o_a\left(|g|_G\right)$.

En particulier, $f = o_a(1)$ signifie $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = 0$.

Il est d'usage courant de comparer, par exemple, une suite complexe ou vectorielle à une suite réelle. $\left(\dfrac{1}{n+i} = o(1)\right.$ signifie $\left.\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+i} = 0.\right)$

Dans la mesure où les opérations sont légitimes dans les espaces vectoriels considérés, toutes les propriétés des relations de de domination et de prépondérance exposées en Analyse – MPSI restent valables.

2.2 – Équivalence

f et g sont des fonctions définies sur A à valeurs dans le même espace vectoriel normé F.

Définition 37

f est **équivalente** à g au voisinage de a suivant A, et on note $f \underset{a}{\sim} g$, lorsque $f - g = o_a(g)$.

Remarques

1) Pour l'équivalence de fonctions ou de suites, il est impératif que l'espace d'arrivée soit commun. ✎ (46)

✎ (46) Pour assurer l'existence de $f(x) - g(x)$, ou de $u_n - v_n$.

2) $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a.

C. Complets – Compacts Connexes par arcs

1. Propriétés des espaces complets

Remarques :
Les définitions d'espace vectoriel normé complet et de partie complète sont données en 26 et 27.

Le passage d'une norme à une norme équivalente ne modifie pas les suites de Cauchy, ni la nature «complète» de l'espace.

Propriété 25

Parties fermées – Parties complètes

a) Toute partie fermée A d'un espace vectoriel normé complet E est complète.

b) Toute partie complète A d'un espace vectoriel normé E est fermée.

☞ a) Une suite $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ de Cauchy formée de points de A est une suite de Cauchy de E.

E étant complet, cette suite est convergente, or A est un fermé de E, donc la limite de la suite $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ est dans A.

b) Soit $(x_n)_{\mathbb{N}}$ une suite convergente de E formée de points de A.

Alors $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, donc aussi de A.

A étant une partie complète de E, la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge dans A.

La caractérisation séquentielle des fermés prouve que A est un fermé de E (propriété 16, c)).

Théorème 3

L'espace $(\mathbb{R}, |\bullet|)$ est complet.

☞ Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, elle est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir Analyse – MPSI, chapitre 4), elle admet au moins une valeur d'adhérence ℓ, mais dans ce cas, on sait (voir propriété 15, d)), que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème 4

Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, munis de l'une des trois normes usuelles $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$, $\|\bullet\|_\infty$, sont complets. ✎(47)

✎(47) On verra dans l'étude des e-v-n de dimension finie que ce résultat est vrai quelle que soit la norme utilisée.

☞ ▪ Montrons que $\mathbb{R}^n$ est complet.

Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\bullet\|_1 \ : \ x \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x_k|$. ✎(48)

✎(48) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$, avec pour tout $p\in\mathbb{N}$, $x_p = (x_{p,1}, x_{p,2}, \cdots, x_{p,n})$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leqslant \| x_p - x_q \|_1$ donc $(x_{p,k})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$.

Puisque $\mathbb{R}$ est complet, chacune des suites $(x_{p,k})_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Posons alors $y_k = \lim\limits_{p\to+\infty} x_{p,k}$, il vient pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{p\to+\infty} |y_k - x_{p,k}| = 0$ et donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \| y - x_p \|_1 = 0$ où on a posé $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Ainsi la suite $(x_p)_{\mathbb{N}}$ est convergente et $(\mathbb{R}^n, \|\bullet\|_1)$ est complet. ✎(49)

✎(49) L'équivalence des normes montre alors que $(\mathbb{R}^n, \|\bullet\|_2)$ et $(\mathbb{R}^n, \|\bullet\|_\infty)$ sont complets.

▪ Ce premier résultat montre que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ est complet pour la norme usuelle (module) qui n'est autre que la norme $\|\bullet\|_2$ du produit $\mathbb{R}^2$.

▪ Enfin, le même raisonnement montre que $(\mathbb{C}, |\bullet|)$ étant complet, il en est de même pour $\mathbb{C}^n$ muni de l'une des trois normes produits usuelles.

Propriété 26

Limite d'une fonction à valeurs dans un espace complet

Soit E et F deux e-v-n, $D \subset E$, $f \in \mathcal{F}(D, F)$, $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$.

$(F, |\bullet|)$ étant complet, pour que f admette une limite en a suivant A, il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, (x, y) \in \left(A \cap \mathcal{B}_o(a, \alpha)\right)^2 \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

C'est le **Critère de Cauchy** pour l'existence d'une limite.

☞ a) L'hypothèse $b = \lim\limits_{t\to a, t\in A} f(t)$ donne : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in A \cap \mathcal{B}_o(a, \alpha), |f(t) - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

d'où par inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in \left(A \cap \mathcal{B}_o(a, \alpha)\right)^2, |f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - b| + |f(y) - b| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve que f satisfait au critère de Cauchy.

✎(50) $\alpha>0$ est le réel associé à ε par le critère de Cauchy.

b) Pour la réciproque, prenons une suite quelconque $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de A qui converge vers a et vérifions de $(f(x_n))_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy :

$$\forall\varepsilon>0, \exists r\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant r, |x_n-a|<\alpha \text{ ✎(50)}$$

et donc $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $p\geqslant r$ et $q\geqslant r$, donne $\left|f(x_p)-f(x_q)\right|<\varepsilon$.

Comme F est complet, la suite de Cauchy $(f(x_n))_{\mathbb{N}}$ est convergente.

On conclut avec la caractérisation séquentielle des limites (propriété 19).

MP*

✎(51) $\overline{f}$ prolonge f signifie que $\overline{f}_{|A}=f$.

Propriété 27

Prolongement d'une application à valeurs dans un espace complet

Soit E et F deux e-v-n, $A\subset E$, et $f : A\to F$ uniformément continue sur A.

$(F,|\bullet|)$ étant complet, il existe une unique application $\overline{f} : \overline{A}\to F$, continue, qui prolonge f ; $\overline{f}$ est uniformément continue sur $\overline{A}$. ✎(51)

☞ Montrons que f vérifie le critère de Cauchy en tout point a de $\overline{A}$.

Par uniforme continuité de f sur A, à tout $\varepsilon>0$, on peut associer $\alpha>0$ tel que :

$$\forall(x,y)\in A^2, \|x-y\|\leqslant\alpha \quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

En remarquant que pour tout x, y dans $\mathcal{B}_o\left(a,\frac{\alpha}{2}\right)$, on a $\|x-y\|\leqslant\|x-a\|+\|a-y\|<\alpha$, il vient donc :

$$\forall(x,y)\in A^2, (x,y)\in\mathcal{B}_o\left(a,\frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$$

et le critère de Cauchy pour les fonctions prouve l'existence de $\overline{f}(A)=\lim\limits_{x\to a, x\in A}f(x)$.

Pour tout $(x,y)\in\overline{A}^2$ tel que $\|x-y\|\leqslant\frac{\alpha}{2}<\alpha$, il existe $(x_n)_{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{\mathbb{N}}$ suites de points de A telles que $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$, $y=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|x_n-y_n\|\leqslant\alpha$. On obtient donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|f(x_n)-f(y_n)\right|\leqslant\varepsilon$ et à la limite $\left|\overline{f}(x)-\overline{f}(y)\right|\leqslant\varepsilon$.

On a ainsi prouvé :

$$\forall\varepsilon>0, \exists\beta>0\left(\beta=\frac{\alpha}{2}\right), \forall(x,y)\in\overline{A}^2, \|x-y\|\leqslant\beta \quad\Rightarrow\quad \left|\overline{f}(x)-\overline{f}(y)\right|\leqslant\varepsilon$$

c'est-à-dire que $\overline{f}$ est uniformément continue sur $\overline{A}$.

Propriété 28

Propriété des fermés emboîtés

Soit A une partie complète d'un espace vectoriel normé E.

Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de A dont le diamètre tend vers 0, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$ est réduit à un point.

✎(52) Le fait que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit décroissante signifie que $\forall n\in\mathbb{N}$, $F_{n+1}\subset F_n$.

☞ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, F_n, non vide, contient au moins un point x_n, ce qui définit une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de points de A.

Pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, on a $x_n\in F_n$ et $x_{n+p}\in F_{n+p}\subset F_n$ ✎(52) donc :

$$\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\delta(F_n) \quad\text{puis}\quad \sup_{p\in\mathbb{N}}\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\delta(F_n).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(F_n)=0$, il en résulte que $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de A et elle converge donc dans A (qui est complet).

Posons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a $\forall n\geqslant p$, $x_n\in F_n\subset F_p$ donc $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\in\overline{F_p}$.

Or, puisqu'elle est complète, la partie A est fermé, donc F_p fermé de A est aussi un fermé de E et $\overline{F_p}=F_p$, et finalement $\ell\in F_p$.

Ceci étant vrai quel que soit $p \in \mathbb{N}$, il en résulte que $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Soit maintenant $\ell' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \left\|\ell - \ell'\right\| \leqslant \delta\left(F_n\right)$, donc, puisque $\lim_{n\to+\infty} \delta\left(F_n\right) = 0$, il vient $\left\|\ell - \ell'\right\| = 0$ et finalement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{\ell\}$.

Théorème 5

MP*

Théorème du point fixe

Soit A une partie complète d'un espace vectoriel normé $(E, \|\bullet\|)$ et f une application de A dans A telle que :

il existe un réel k de $[0, 1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de A^2 :

$$\| f(y) - f(x) \| \leqslant k \| y - x \|$$ ✎(53)

Alors f admet un point fixe $a \in A$, et un seul, qui est la limite de toute suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ de A définie par :

$$x_0 \in A \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad x_{n+1} = f\left(x_n\right)$$

✎(53) On dit que f est **contractante**.

☞ La méthode consiste à vérifier que :

a) la suite récurrente $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy,

b) sa limite est un point fixe de f,

c) ce point fixe est unique.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\| x_{n+1} - x_n \| = \| f\left(x_n\right) - f(x_{n-1}) \| \leqslant k \| x_n - x_{n-1} \|$

d'où par récurrence $\quad \| x_{n+1} - x_n \| \leqslant k^n \| x_1 - x_0 \|$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\quad x_{n+p} - x_n = \sum_{i=0}^{p-1} x_{n+i+1} - x_{n+i}$ d'où :

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \| x_{n+i+1} - x_{n+i} \|$$

$$\text{et} \quad \| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i} \| x_1 - x_0 \| \leqslant \frac{k^n}{1-k} \| x_1 - x_0 \|.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$, la suite $n \mapsto \sup_{p\in\mathbb{N}^*} \| x_{n+p} - x_n \|$ converge vers 0 ce qui prouve que $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de A.

A étant une partie complète de E, la suite de Cauchy $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ de A converge vers $a \in A$.

b) L'application f est lipschitzienne donc continue sur A, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x_n\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad a = f(a).$$

Ainsi a est un point fixe de f.

c) Envisageons deux points fixes a et b de f :

$$\| b - a \| = \| f(b) - f(a) \| \leqslant k \| b - a \| \quad \text{donne} \quad 0 \leqslant (1-k) \| b - a \| \leqslant 0$$

donc $b = a$; f admet a pour unique point fixe.

2. Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Définition 38

Partie compacte ✎(54)

Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite compacte si elle est vide ou si toute suite de points de A admet une suite extraite qui converge dans A, c'est-à-dire admet une valeur d'adhérence dans A (cf. définition 25).

✎(54) **Remarques.**

- Le passage d'une norme à une norme équivalente conserve la nature compacte ou non compacte d'une partie.
- Une partie finie est compacte (théorème des tiroirs).

Propriété 29

Dans un espace vectoriel normé, une partie compacte est :

a) bornée,

b) fermée.

Soit A une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E.

a) Supposons A non bornée et construisons une suite $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ de points de A réalisant :

$$\| a_j - a_i \| \geqslant 1 \quad \text{pour tout } i \neq j \text{ entiers.}$$

La construction est récurrente :

- il existe a_0 et a_1 dans A tels que $\| a_0 - a_1 \| \geqslant 1$ car A est non bornée,
- soit $a_0, \ldots, a_{n-1}$ n points de A tels que $\| a_j - a_i \| \geqslant 1$, pour $0 \leqslant i < j \leqslant n-1$.

Comme A n'est pas bornée, elle n'est pas incluse dans B, réunion des boules $\mathcal{B}_o(a_i, 1)$, ✎[55] donc il existe $a_n \in A \setminus B$ et la famille $\left(a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n\right)$ vérifie $\| a_j - a_i \| \geqslant 1$ pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$.

✎[55] Toute réunion finie de bornés est un borné.

Toute suite $\left(a'_n\right)_{\mathbb{N}}$ extraite de A vérifie aussi $\| a'_j - a'_i \| \geqslant 1$ pour $i \neq j$, elle n'est donc pas convergente, ce qui prouve que A n'est pas une partie compacte de E.

b) Montrons que $\overline{A} \subset A$.

Soit x un point adhérent à A, donc limite d'une suite $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ formée de points de A. ✎[56]

✎[56] Voir la caractérisation séquentielle des points adhérents.

A étant compacte, $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ admet une suite extraite $\left(a'_n\right)_{\mathbb{N}}$ convergente dans A ; mais toutes les suites extraites de $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ ont la même limite x, donc $x \in A$.

Propriété 30

Fermé dans un compact

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé E.

Si B est une partie fermée de A alors B est aussi une partie compacte de E.

A est compacte donc fermée dans E. La partie $B \subset A$ étant un fermé de A, il existe F fermé de E tel que $B = A \cap F$ et B est donc un fermé de E en tant qu'intersection de deux fermés de E.

Comme $B \subset A$, une suite $(b_n)_{\mathbb{N}}$ formée de points de B est une suite de A.

Or, A est une partie compacte de E donc il existe une suite $(b'_n)_{\mathbb{N}}$ extraite de $(b_n)_{\mathbb{N}}$ qui converge dans A ; sa limite est dans B car B est fermée dans E.

Propriété 31

Produit de compacts

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie compacte de E, B une partie compacte de F. Alors $A \times B$ est une partie compacte de $E \times F$.

En conséquence, tout produit fini de compacts est compact.

Soit $\left(a_n, b_n\right)$ une suite de $A \times B$. A étant une partie compacte de E, il existe une suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$ extraite de $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ qui converge vers un point x de A.

La suite $\left(b_{\varphi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$ extraite de $(b_n)_{\mathbb{N}}$ est à valeurs dans B, partie compacte de F, et admet donc aussi une suite extraite $\left(b_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$ convergente vers un point y de B.

Alors la suite $\left(a_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$ est extraite de la suite convergente $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$ et converge donc encore vers x. Finalement $\left(a_{\varphi\circ\psi(n)}, b_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $\left(a_n, b_n\right)_{\mathbb{N}}$ qui converge vers $(x, y) \in A \times B$.

Ainsi $A \times B$ est une partie compacte de $E \times F$.

Théorème 6

Compacts de $\mathbb{R}$

Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées bornées.

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie bornée, toute suite (a_n) de points de A admet au moins une valeur d'adhérence a d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. ✎[57]

Si de plus A est fermée, on a $a \in A$ et A est donc compacte.

- Réciproquement, on a vu que toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est fermée bornée.

✎[57] voir Analyse – MPSI, chapitre 4.

Théorème 7

Compacts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est supposé muni de l'une ou l'autre des trois normes usuelles d'un espace produit, par exemple, la norme $\| \bullet \|_\infty$. ✎[58]

Une partie de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée-bornée.

✎[58] Nous verrons lors de l'étude des e-v-n de dimension finie que sur un tel espace toutes les normes sont équivalentes. Ce théorème reste donc vrai quelle que soit la norme utilisée.

a) Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^n$, il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset \left[-R, R\right]^n$.

D'après le théorème 6, le segment $\left[-R, R\right]$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc $\left[-R, R\right]^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ en tant que produit fini de compacts.

Si de plus, A est fermée dans $\mathbb{R}^n$, avec la propriété 30, il vient que :

$$A = A \cap \left[-R, R\right]^n \text{ est compacte.}$$

Réciproquement, on sait que les parties compactes sont fermées et bornées.

Le théorème est donc démontré dans le cas de $\mathbb{R}^n$.

b) $\mathbb{C}$ muni de sa norme usuelle (module) est identifiable à $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne canonique.

Donc d'après le a), les parties compactes de $\mathbb{C}$ sont les parties fermées bornées.

On achève comme en a) en remarquant que si A est une partie bornée de $\mathbb{C}^n$, il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset D(R)^n$ où $D(R)$ est le disque compact de $\mathbb{C}$ défini par :

$$D(R) = \left\{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| \leqslant 1\right\}.$$

Corollaire 1

Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{K}^n$

De toute suite bornée dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on peut extraire une suite convergente.

Dans les trois théorèmes qui suivent, E et F sont des espaces vectoriels normés.

Théorème 8

Théorème de Heine

Soit A une partie compacte de E et $f : A \to F$ une application continue.

Alors f est uniformément continue sur A.

Raisonnons par l'absurde : dire que f n'est pas uniformément continue sur A c'est dire que :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x_n, y_n) \in A^2,\ \| y_n - x_n \| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left|f(y_n) - f\left(x_n\right)\right| \geqslant \varepsilon.$$

A étant une partie compacte de E, A^2 est compacte dans E^2, donc il existe $\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$ extraite de $\left(x_n, y_n\right)_{\mathbb{N}}$ convergente vers $(a, b) \in A^2$.

- f étant continue, on a $|f(b) - f(a)| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|f\left(y_{\varphi(n)}\right) - f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right|$ donc :

$$|f(b) - f(a)| \geqslant \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

- D'autre part, $\left\|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)}$ donne $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right\| = 0$ donc :

$$b = a \quad \text{et} \quad f(b) = f(a) \qquad \textbf{(2)}$$

Les résultats **(1)** et **(2)** sont contradictoires.

Théorème 9

Image continue d'un compact

Soit A une partie compacte de E et $f : A \to F$ une application continue.

Alors $f(A)$ est une partie compacte de F.

☞ À toute suite $\left(y_n\right)_{\mathbb{N}}$ de $f(A)$, on peut associer une suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ de A par $f\left(x_n\right) = y_n$.

A étant une partie compacte de E, il existe une suite $(x'_n)_{\mathbb{N}}$ extraite de $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ qui converge vers un point a de A puis, f étant continue sur A, donc en a, la suite $\left(y'_n\right)_{\mathbb{N}} = \left(f(x'_n)\right)_{\mathbb{N}}$, extraite de $\left(y_n\right)_{\mathbb{N}}$, converge vers $f(a) \in f(A)$.

Théorème 10

Fonction continue sur un compact

Soit A une partie compacte de E et $f : A \to F$ une application continue.

a) Alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $a \in A$ et $b \in A$ tels que :

$$\|f(a)\| = \sup_{x\in A} \|f(x)\| \quad , \quad \|f(b)\| = \inf_{x\in A} \|f(x)\|.$$

b) Cas d'une fonction réelle $f : A \to \mathbb{R}$ continue sur A compact.

Alors f est majorée et minorée, et il existe a et b dans A tels que :

$$f(x) = \inf_{x\in A} f(x) \quad \text{et} \quad f(b) = \sup_{y\in A} f(y).$$

☞ a) Le théorème 9 indique que $f(A)$ est une partie compacte de F, donc un fermé-borné de F, ce qui montre que f est bornée.

Considérons alors l'application $|f| : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$. En tant que composée des applications continues $f : A \to F$ et $|\bullet| : F \to \mathbb{R}$, ✎(59) $|f|$ est continue sur A.

✎(59) $|\bullet|$ désigne l'application valeur absolue.

A étant une partie compacte de E, le théorème 9 indique encore que :

$$|f|(A) = \left\{ |f(x)|, x \in A\right\}$$

est un compact donc un fermé-borné de $\mathbb{R}$.

Sachant qu'une telle partie admet un plus grand et un plus petit élément, on obtient l'existence de $a \in A$ et $b \in A$ tels que :

$$f(a) = \sup_{x\in A} |f(x)| \quad \text{et} \quad f(b) = \inf_{x\in A} |f(x)|.$$

b) Ici $f(A)$ est une partie bornée et fermée de $\mathbb{R}$, elle admet un plus petit et un plus grand élément ; c'est le résultat annoncé.

Exemple 11 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; montrer l'équivalence entre les propositions **(1)** et **(2)** suivantes :

(1) l'image réciproque par f de toute partie compacte de $\mathbb{R}$ est une partie compacte.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$.

Commençons par traduire la proposition **(2)**.

$\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ équivaut à :

$$\forall A > 0, \ \exists B > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x > B \ \Rightarrow \ |f(x)| > A$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$ équivaut à :

$$\forall A > 0, \ \exists B > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x < -B \ \Rightarrow \ |f(x)| > A$$

donc **(2)** équivaut à :

$$\forall A > 0, \ \exists B > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, x \notin \left[-B, B\right] \ \Rightarrow \ f(x) \notin \left[-A, A\right]$$

soit aussi, par contraposition de la dernière implication :

$$\forall A > 0, \ \exists B > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \left[-A, A\right] \ \Rightarrow \ x \in \left[-B, B\right]$$

ce qui peut s'écrire :

$$\textbf{(3)} \quad \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ f^{-1}\big([-A, A]\big) \subset [-B, B].$$

- Montrons que **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**

Soit $A > 0$; $[-A, A]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$ et d'après **(1)**, $f^{-1}\big([-A, A]\big)$ est également compacte donc bornée.

Ainsi il existe $B > 0$ tel que $f^{-1}\big([-A, A]\big) \subset [-B, B]$ ce qui prouve **(3)** donc **(2)**.

- Montrons **(2)** $\Rightarrow$ **(1)**

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$.

f étant continue et K fermée, on sait que $f^{-1}(K)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ (cf. théorème **2**).

K est bornée, donc il existe $A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$; alors d'après **(3)**, il existe $B > 0$ tel que :
$$f^{-1}(K) \subset f^{-1}\big([-A, A]\big) \subset [-B, B].$$

Ceci prouve que $f^{-1}(K)$ est bornée et finalement c'est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Exemple 12

Soit $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de E. On pose $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Montrer que $A = \{a\} \cup \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est un compact de E.

Posons $x_0 = a$, on a ainsi $A = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de A est définie par une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = x_{\varphi(n)}.$$

Si φ est bornée, on peut extraire de $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante, donc convergente.

Si φ est non bornée, il existe une suite d'entiers $(\psi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\varphi(\psi(n)))_{\mathbb{N}}$ soit strictement croissante de limite $+\infty$. Alors $(u_{\psi(n)})_{\mathbb{N}}$ est extraite de $(x_n)_{\mathbb{N}}$ et converge vers a.

Ainsi toute suite de A admet au moins une valeur d'adhérence.

Exemple 13

Complets et compacts

Une partie compacte A de E est complète.

Considérons une suite de Cauchy de E formée de points de A.

Comme A est compacte, cette suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ admet une suite extraite $(x'_n)_{\mathbb{N}}$ qui converge dans A. Or, une suite de Cauchy ayant une suite extraite convergente est elle-même convergente.

Ainsi A est une partie complète de E.

Exemple 14

Propriétés des compacts emboîtés

Soit $(X_n)_{\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties non vides et compactes de E.

Montrer que l'intersection $X = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est un compact non vide de E.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons x_n un point de X_n (non vide).

Les X_n étant «emboîtés», $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite du compact X_0, elle admet donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ convergente ; notons c sa limite.

Comme X_p est aussi un fermé de E, nous avons l'équivalence :
$$c \in X_p \iff d(c, X_p) = 0.\ ✎^{(60)}$$

✎(60) Voir la propriété 12.

Or, pour tout $n \geqslant p$: $\varphi(n) \geqslant p,\ \ d\big(c, X_p\big) \leqslant \| c - x_{\varphi(n)} \|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \| c - x_{\varphi(n)} \| = 0.$

Ainsi, $c \in X_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc $X = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ n'est pas vide.

Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E, donc X est un fermé de E inclus dans le compact X_0, et X est un compact de E.

3. Parties connexes par arcs

E, F sont des espaces vectoriels normés.

Définition 39

Connexité par arcs

Une partie A de E est dite connexe par arcs si, pour tout couple (x, y) de points de A, il existe une application f continue du segment $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans A telle que :

$$f(0) = x \quad \text{et} \quad f(1) = y.$$ ✎(61)

✎(61) **Remarques** :
- On peut retenir que A est connexe par arcs si deux points quelconques de A peuvent être reliés par un chemin continu inclus dans A.
- Lorsque ce chemin est un segment, A est convexe : une partie convexe est connexe par arcs. En particulier, un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

Définition 40

Partie étoilée

Une partie A de E est dite étoilée s'il existe un point a de A tel que, pour tout x de A, le segment $[a, x]$ est inclus dans A. ✎(62)

✎(62) **Remarques**
- Dans cette définition, un tel point a est appelé **centre de** A.
- Une partie étoilée est connexe par arcs car deux points x et y de A sont les extrémités d'une ligne brisée $[x,a,y]$, où a est un centre de A.

Propriété 32

Image continue d'une partie connexe par arcs

Soit A une partie connexe par arcs de E et $f : A \to F$ une application continue.

Alors $f(A)$ est une partie connexe par arcs de F.

☞ Pour tout couple (y_1, y_2) de points de $f(A)$, on a $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ avec $(x_1, x_2) \in A^2$.

A étant connexe par arcs, il existe g application continue de $[0, 1]$ dans A telle que :

$$g(0) = x_1 \text{ et } g(1) = x_2.$$

Alors $f \circ g$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $f(A)$ telle que :

$$f \circ g(0) = y_1 \text{ et } f \circ g(1) = y_2.$$

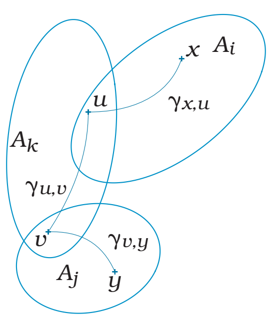
Propriété 33

Réunion de parties connexes par arcs

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties connexes par arcs de E.

S'il existe une partie A_k qui rencontre toute autre partie A_i de la famille, alors la réunion $R = \bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs. ✎(63)

✎(63) **Remarque** :
C'est, en particulier, le cas si l'intersection des A_i, $i \in I$, n'est pas vide.
Par contre, on ne peut rien dire quant à l'intersection de deux parties connexes par arcs (penser par exemple à un cercle et une droite sécante dans le plan).



☞ Soit (x, y) un couple de points de R, il existe $(i, j) \in I^2$ tel que $x \in A_i$, $y \in A_j$.

On sait que $A_i \cap A_k$ est non vide donc il existe $u \in A_i \cap A_k$. De même il existe $v \in A_j \cap A_k$.

On dispose donc de trois chemins continus reliant x et u, u et v, v et y :

$$\begin{array}{lllllll} \gamma_{x,u} & : & f : [0, 1] \to A_i & , & f(0) = x & , & f(1) = u \\ \gamma_{u,v} & : & g : [0, 1] \to A_k & , & g(0) = u & , & g(1) = v \\ \gamma_{v,y} & : & h : [0, 1] \to A_j & , & h(0) = v & , & h(1) = y \end{array}$$

Alors en raccordant ces trois chemins, on obtient un chemin continu γ reliant x à y et inclus dans R, défini par :

$$\varphi : [0, 1] \to A_i \cup A_k \cup A_j, \ t \mapsto \begin{cases} f(3t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \\ g(3t - 1) & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3} \\ h(3t - 2) & \text{si} \quad \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Propriété 34

Composante connexe par arcs

Soit $A \subset E$ une partie non vide et a un point de A.

Alors la réunion des parties connexes par arcs de E qui contiennent $\{a\}$ et qui sont incluses dans A est une partie connexe par arcs de E, c'est la plus grande partie connexe par arcs de E contenant $\{a\}$ et incluse dans A.

On l'appelle composante connexe par arcs du point a dans A.

☞ C'est un corollaire de la propriété précédente.

Propriété 35

Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs si et seulement si c'est un intervalle.

☞ Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs car si $(a, b) \in I^2$, I contient le segment :

$$\left[a, b\right] = \left\{ta + (1-t)b \,/\, t \in \left[0, 1\right]\right\}.$$

Réciproquement, soit A une partie de $\mathbb{R}$ connexe par arcs, montrons que pour tout $(a, b) \in A^2$, A contient le segment $\left[a, b\right]$.

Par définition, il existe une application continue $f : [0, 1] \to A$ telle que :

$$f(0) = a \text{ et } f(1) = b.$$

À un élément $c \in \left]a, b\right[$, associons $B = \left\{t \in \left[0, 1\right] \,/\, f(t) < c\right\}$; B étant non vide majorée, il existe $\gamma = \sup B$. Le point γ est adhérent à B, c'est donc la limite d'une suite (t_n) de points de B. Par continuité de f on a alors $f(\gamma) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(t_n)$ et puisque $f(t_n) < c$, il vient à la limite : $f(\gamma) \leqslant c$.

De même, γ est adhérent à $\left[0, 1\right] \setminus B$, c'est donc la limite d'une suite $\left(t'_n\right)$ de points de $\left[0, 1\right] \setminus B$ et avec $f\left(t'_n\right) \geqslant c$, on obtient à la limite $f(\gamma) \geqslant c$.

Finalement $f(\gamma) = c$.

On a ainsi prouvé que tout c de $\left]a, b\right[$ appartient à $f\left(\left[0, 1\right]\right) \subset A$ donc $\left[a, b\right] \subset A$. Ceci étant vrai pour tout $(a, b) \in A^2$, A est un intervalle.

Propriété 36

Propriété des valeurs intermédiaires

Soit A une partie de E et $f : A \to \mathbb{R}$.

On dit que f possède la propriété des valeurs intermédiaires si son image $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si A est connexe par arcs et f continue, alors f possède la propriété des valeurs intermédiaires. ✎ (64)

✎ (64) **Remarque** : On retrouve ainsi le résultat énoncé en MPSI : toute application continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possède la propriété des valeurs intermédiaires.

☞ Corollaire des propriétés 32 et 35.

MP*

Propriété 37

Soit $A \subset E$ une partie connexe par arcs et $f : A \to \{0, 1\}$ une application continue sur A. Alors f est constante sur A.

☞ Soit x et y dans A et $g : [0, 1] \to A$ une application continue telle que :

$$g(0) = x \quad , \quad g(1) = y$$

Alors $f \circ g$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ donc $f \circ g([0, 1])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $\{0, 1\}$, ce qui donne $f \circ g([0, 1]) = \{0\}$ ou $f \circ g([0, 1]) = \{1\}$, et donc :

$$f(x) = f(y).$$

MP*

Propriété 38

Si $A \subset E$ est une partie connexe par arcs, toute partie non vide P de A, à la fois ouverte et fermée dans A, est égale à A.

✎(65) Pour le vérifier, il suffit d'écrire :
$\emptyset = \emptyset \cap D$
$\{0\} =]-1,1[\cap D$
$\{1\} =]0,2[\cap D$
$D = \mathbb{R} \cap D$.

☞ $D = \{0,1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ possèdant en tant que telle quatre ouverts relatifs : $\emptyset, \{0\}, \{1\}$ et $\{0,1\}$ c'est-à-dire que toute partie de D est un ouvert de D. ✎(65)

Soit $f : A \to \{0,1\}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in P$, $f(x) = 0$ si $x \in A \setminus P$.

On a alors :

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \ , \ f^{-1}(D) = A \ , \ f^{-1}(\{1\}) = P \text{ et } f^{-1}(\{0\}) = A \setminus P,$$

et ces quatre images réciproques sont des ouverts de A ($A \setminus P$ est un ouvert car P est fermé). Donc d'après le théorème 2, f est continue sur A puis d'après la propriété 37, f est constante.

P étant non vide, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = 1$; ainsi f est constante égale à 1, elle ne prend donc pas la valeur 0 ce qui donne $A \setminus P = \emptyset$ ou encore $A = P$.

MP*

Propriété 39

Soit $A \subset E$ une partie connexe par arcs.

Toute application $f : A \to F$, localement constante est constante.

☞ $f : A \to F$ est localement constante si et seulement si pour tout $x \in A$ il existe V voisinage de x dans A tel que f soit constante sur V.

Il est clair qu'une application localement constante sur A est continue sur A.

Soit $a \in A$ et $P = \left\{x \in A \,/\, f(x) = f(a)\right\}$.

P est non vide et fermé en tant qu'image réciproque par l'application continue f de $\left\{f(a)\right\}$ fermé de F.

f étant localement constante, si $x \in P$ il existe V voisinage de x dans A tel que $V \subset P$, ainsi P est un ouvert de A et d'après la propriété 38 on a $P = A$.

Exemple 15 Calculer $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y$ en fonction de (x, y).

Posons $\theta = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y$. Pour $xy \neq 1$, on obtient $\tan\theta = \dfrac{x+y}{1-xy}$ d'où :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} = k\pi$$

l'application $f : (x,y) \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy}$ continue sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \,/\, xy = 1\right\}$ est donc localement constante. Posons :

$$D_1 = \left\{(x,y) \in D \,/\, xy > 1, x > 0\right\}$$
$$D_2 = \left\{(x,y) \in D \,/\, xy > 1, x < 0\right\}$$
$$D_3 = \left\{(x,y) \in D \,/\, xy < 1\right\}$$

D_1 , D_2 , D_3 sont connexes par arcs (D_1 et D_2 sont convexes et D_3 est étoilé par rapport à $(0,0)$).

D'après la propriété 39, f est constante sur D_1, sur D_2 et sur D_3 :

$$\begin{array}{lcccc}
\text{sur } D_1 : f(x,y) & = & \lim\limits_{x\to+\infty} f(x,x) & = & \pi \\
\text{sur } D_2 : f(x,y) & = & \lim\limits_{x\to-\infty} f(x,x) & = & -\pi \\
\text{sur } D_3 : f(x,y) & = & f(0,0) & = & 0
\end{array}$$

Exemple 16

a) Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

b) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas homéomorphes.

c) Montrer que $[0,1]$ et $\mathbb{U}$ ne sont pas homéomorphes.

a) Prenons deux points de $\mathbb{C}^*$ sous la forme $A = ae^{i\alpha}$ et $B = be^{i\beta}$ où a et $b \in \mathbb{R}_+^*$, α et $\beta \in \mathbb{R}$.
Contournons l'origne par le chemin suivant :

$$f\ : [0,1] \to \mathbb{C}^*, \quad t \mapsto f(t) = [(1-t)a + tb]e^{(1-t)i\alpha + ti\beta}$$

application continue vérifiant $f(0) = A, f(1) = B$ et $|f(t)| \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$ n'est cependant pas étoilé.

b) Imaginons une bijection f de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
L'image de la partie connexe par arcs $\mathbb{C}^*$ est $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$, partie non connexe par arcs puisque ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, donc, d'après la propriété 32, f n'est pas continue.

c) L'application $\varphi\ : [0,1] \to \mathbb{U}, \quad t \mapsto \varphi(t) = e^{2i\pi t}$ est continue, surjective, donc $\mathbb{U}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{C}$.
L'image de l'intervalle $]0,1[$ par φ est $\mathbb{U} \setminus \{1\}$, également partie connexe par arcs de $\mathbb{C}$.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un homéomorphisme g de $\mathbb{U}$ sur $[0,1]$.
Notons :

$$a = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad h\ : \mathbb{U} \to [0,1], \quad z \mapsto h(z) = g(az)$$

$z \mapsto az$ induit un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$, donc h est un homéomorphisme (par composition).

Or, $h(1) = g(a) = \dfrac{1}{2}$ donc l'image par h de la partie connexe par arcs $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ est :

$$[0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right]$$

partie non connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est une contradiction.

D. Continuité des applications linéaires

E, F, G désignent des espaces vectoriels normés. Les normes sont toutes notées $\|\bullet\|$.

Théorème 11

Caractérisation des applications linéaires continues

Pour une application linéaire f de E dans F les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue sur E.

(2) f est continue au point 0_E.

(3) f est bornée sur la boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0_E, 1)$.

(4) il existe $k \geqslant 0$ tel que pour tout x de E : $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$.

(5) f est lipschitzienne.

☞ Il est facile de faire une démonstration circulaire.

(1) $\Rightarrow$ **(2)** $\Rightarrow$ **(3)** $\Rightarrow$ **(4)** $\Rightarrow$ **(5)** $\Rightarrow$ **(1)**

- **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**

En utilisant la continuité en 0_E, il existe $\alpha > 0$, tel que $\|x\| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \|f(x)\| \leqslant 1$.

Tout vecteur y de la boule unité fermée vérifie $\|\ \alpha\, y\| = \alpha\|y\| \leqslant \alpha$ donc $f(y) = \dfrac{1}{\alpha}f(\alpha y)$

donne $\|f(y)\| = \dfrac{1}{\alpha}\|f(\alpha y)\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$. Ainsi f est bornée sur la boule unité fermée.

- **(3) $\Rightarrow$ (4)**

Exprimons que f est bornée sur la boule unité fermée :

$$\exists k \geqslant 0, \forall x \in E, \| x \| \leqslant 1 \Rightarrow \| f(x) \| \leqslant k.$$

Pour tout vecteur non nul y, on a $\dfrac{y}{\| y \|} \in \mathcal{B}_f(0_E, 1)$ donc :

$$\left\| f\left(\frac{y}{\| y \|}\right) \right\| \leqslant k \text{ et } \| f(y) \| \leqslant k \| y \|.$$

Sachant que $f(0) = 0$, l'inégalité $\| f(y) \| \leqslant k \| y \|$ est valable pour tout y de E.

- Les autres implications sont sans difficulté.

Remarques

1) La continuité de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ reste acquise par le changement d'une norme en une norme équivalente, dans E comme dans F. Par contre, f peut être continue sur $\left(E, \| \bullet \|_1\right)$ et non continue sur $\left(E, \| \bullet \|_2\right)$ quand $\| \bullet \|_1$ et $\| \bullet \|_2$ ne sont pas équivalentes.
2) Dans les propositions du théorème 11, on peut remplacer :
   en **(2)** le point 0_E par tout autre point de E,
   en **(3)** la boule unité fermée par toute autre boule de rayon non nul, même ouverte, ou par une sphère de rayon non nul.
3) Souvent la mise en défaut de la continuité d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ se fait en exhibant une suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ de la boule unité de E telle que la suite $\left(f\left(x_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ soit non bornée, ($\lim\limits_{n \to +\infty} \| f\left(x_n\right) \| = +\infty$ par exemple).

Théorème 12

Espace des applications linéaires continues

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace de $\mathcal{L}(E, F)$ que l'on notera $\mathcal{L}_c(E, F)$.

☞ $\mathcal{L}_c(E, F)$ est non vide et stable par l'addition des fonctions et la multiplication d'une fonction par un scalaire.

Exemple 17 Application linéaire non continue

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels normé par :

$$P = \sum_{i=0}^{q} a_i X^i \mapsto \| P \|_\infty = \sup_{0 \leqslant i \leqslant q} |a_i|$$

et φ la forme linéaire sur E définie par $\varphi(P) = P(1)$ pour tout P de E.

Montrer que φ n'est pas continue.

Il s'agit bien d'une application linéaire définie sur des espaces vectoriels normés :

$$\varphi : E \to \mathbb{R}, \quad P \mapsto P(1).$$

E normé par $\| \bullet \|_\infty$ et $\mathbb{R}$ par la valeur absolue.

Essayons d'appliquer la remarque 3) précédente.

Notons $P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$, on a alors $\| P_n \|_\infty = 1$ et $\varphi(P_n) = P_n(1) = n + 1$.

On a ainsi exhibé une suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$ de la sphère unité dont la suite des images $\left(\varphi(P_n)\right)_{\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. L'application linéaire φ n'est pas continue sur $(E, \| \bullet \|_\infty)$.

Exemple 18 Effet d'un changement de norme

Reprenons les notations de l'exemple 17 et considérons sur $E = \mathbb{R}[X]$ deux autres normes

$$\| P \|_1 = \sum_{i=0}^{q} |a_i| \quad \text{et} \quad \| P \|_2 = \left(\sum_{i=0}^{q} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(1)$ est-elle continue sur $\left(E, \| \bullet \|_1\right)$, sur $\left(E, \| \bullet \|_2\right)$? ✎[66]

✎[66] Ces questions se justifient par le fait que les normes $\| \bullet \|_1$, $\| \bullet \|_2$ et $\| \bullet \|_\infty$ ne sont pas équivalentes (voir l'exemple 2).

- $\| P \|_1$ et $\varphi(P)$ sont liées par :

$$|\varphi(P)| = |P(1)| = \left| \sum_{i=0}^{q} a_i \right| \leqslant \sum_{i=0}^{q} |a_i| = \| P \|_1$$

donc φ est bornée sur la boule unité de $\left(E, \| \bullet \|_1\right)$ $\left(|\varphi(P)| \leqslant 1 \text{ si } \| P \|_1 \leqslant 1 \right)$.

L'application linéaire φ est continue sur $\left(E, \| \bullet \|_1\right)$.

- Reprenons la suite $n \mapsto P_n(X) = 1 + X + \cdots + X^n$ de l'exemple 17 et calculons :

$$\| P_n \|_2 = \sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad P_n(1) = n+1.$$

Alors $Q_n = \dfrac{P_n}{\sqrt{n+1}}$ appartient à la boule unité fermée de $\left(E, \| \bullet \|_2\right)$ tandis que $\left(\varphi(Q_n)\right)_{\mathbb{N}} = \left(\sqrt{n+1}\right)_{\mathbb{N}}$ est une suite réelle non bornée.

Ainsi, l'application linéaire φ est non continue sur $\left(E, \| \bullet \|_2\right)$.

Théorème 13

Norme d'une application linéaire continue

E et F désignant des espaces vectoriels normés, l'application :

$$\mathcal{L}_c(E, F) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto |\!|\!| f |\!|\!| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| f(x) \|$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Remarque

L'existence du réel $|\!|\!| f |\!|\!|$ pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est justifiée par la proposition **(3)** du théorème 11.

Notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de E : $\mathcal{B}_f(0_E, 1)$.

Vérifions les trois critères de définition d'une norme.

- Si $|\!|\!| f |\!|\!| = 0$, alors pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\| f(x) \| = 0$ et $f(x) = 0$.

Or, quel que soit $y \in E$, $x = \dfrac{y}{1 + \| y \|} \in \mathcal{B}$ donc $f(y) = (1 + \| y \|) f(x) = 0$.

Conclusion : $\quad |\!|\!| f |\!|\!| = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$

- Pour $\lambda = 0$, il est clair que $|\!|\!| \lambda f |\!|\!| = |\lambda| \, |\!|\!| f |\!|\!| = 0$.

Soit maintenant $\lambda \neq 0$. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, on a :

$$\| \lambda f(x) \| = |\lambda| \, \| f(x) \| \leqslant |\lambda| \, |\!|\!| f |\!|\!| \text{ donc } |\!|\!| \lambda f |\!|\!| \leqslant |\lambda| \, |\!|\!| f |\!|\!| \quad (i)$$ (67)

Alors avec $f = \dfrac{1}{\lambda}(\lambda f)$, cette inégalité (i) donne :

$$|\!|\!| f |\!|\!| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} |\!|\!| \lambda f |\!|\!| \text{ c'est-à-dire } |\!|\!| \lambda f |\!|\!| \geqslant |\lambda| \, |\!|\!| f |\!|\!| \quad (ii)$$

Enfin (i) et (ii) donnent $|\!|\!| \lambda f |\!|\!| = |\lambda| \, |\!|\!| f |\!|\!|$.

- Soit f et g dans $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Pour tout x de $\mathcal{B}$, on a $\| f(x) + g(x) \| \leqslant \| f(x) \| + \| g(x) \| \leqslant |\!|\!| f |\!|\!| + |\!|\!| g |\!|\!|$, (68)

donc $\sup_{x \in \mathcal{B}} \| f(x) + g(x) \| \leqslant |\!|\!| f |\!|\!| + |\!|\!| g |\!|\!|$ c'est-à-dire $|\!|\!| f + g |\!|\!| \leqslant |\!|\!| f |\!|\!| + |\!|\!| g |\!|\!|$.

(67) $|\lambda| \, |\!|\!| f |\!|\!|$ est un majorant de $\{ \| \lambda f(x) \| \; / \; x \in \mathcal{B} \}$ et $|\!|\!| \lambda f |\!|\!|$ est le plus petit majorant de cet ensemble.

(68) $|\!|\!| f |\!|\!| + |\!|\!| g |\!|\!|$ est un majorant de $\{ \| f(x) + g(x) \| \; / \; x \in \mathcal{B} \}$ et $|\!|\!| f + g |\!|\!|$ est le plus petit majorant de cet ensemble.

Convention

Dès que E et F sont des espaces vectoriels sur lesquels des normes sur E et F ont été fixées, l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ est muni de la norme $|\!|\!| \bullet |\!|\!|$ précédente.

Cette norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ dépend des normes N_E et N_F choisies sur E et F, on dit qu'elle est **subordonnée** à N_E et N_F.

Théorème 14

Expressions de la norme d'une application linéaire continue

Pour tout $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$, on a :

a) $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup\limits_{x \in E \setminus \{0_E\}} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$.

b) $\|f\| = \min\{k \in \mathbb{R}_+ / \forall\, x \in E, \|f(x)\| \leqslant k\|x\|\}$.

☞ a) Si $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$, l'existence de $a = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\|$, de $b = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ et de $c = \sup\limits_{x \in E \setminus \{0_E\}} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ résulte du théorème 11, propositions **(3)** et **(4)**.

$\mathcal{B}$ désigne toujours la boule unité fermée de E et soit $\mathcal{S}$ la sphère unité.

On a $\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \left\| f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|$ et $\left\{\dfrac{x}{\|x\|} \Big/ x \in E \setminus \{0_E\}\right\} = \mathcal{S}$ donc $b = c$

$\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ donne $b \leqslant a$.

Pour tout x de $\mathcal{B} \setminus \{0_E\}$, on a $\|f(x)\| \leqslant \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ d'où $\|f(x)\| \leqslant c$, inégalité encore vérifiée pour $x = 0_E$ d'où $a \leqslant c$ soit aussi $a \leqslant b$. Finalement $a = b = c$.

b) $\sup\limits_{x \in E \setminus \{0_E\}} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ est le plus petit majorant de l'ensemble $\left\{\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} / x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$

donc c'est le plus petit des réels positifs k tels que : $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leqslant k$.

Ainsi on obtient : $c = \min\left\{k \in \mathbb{R}_+ / \forall\, x \in E \setminus \{0_E\}, \|f(x)\| \leqslant k\|x\|\right\}$ donc aussi, puisque $f(0_E) = 0_F$, $c = \min\left\{k \in \mathbb{R}_+ / \forall\, x \in E, \|f(x)\| \leqslant k\|x\|\right\}$.

Corollaire 1

Pour $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$, on a $\quad \forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leqslant \|f\|\,\|x\|$.

Corollaire 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

S'il existe un réel k tel que, pour tout x de E, $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$, alors f est continue et :

$$\|f\| \leqslant k.$$

Ceci fournit une méthode pratique pour étudier la continuité d'une application linéaire.

Théorème 15

Composition d'applications linéaires continues

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}_c(F, G)$. Alors :

$$g \circ f \in \mathscr{L}_c(E, G) \quad \text{et} \quad \|g \circ f\| \leqslant \|g\|\,\|f\|.$$

☞ D'après le corollaire 1 précédent :

$$\|g(y)\| \leqslant \|g\|\,\|y\| \quad \text{et} \quad \|f(x)\| \leqslant \|f\|\,\|x\|$$

d'où avec $y = f(x)$, on obtient, pour tout x de E $\quad \|g \circ f(x)\| \leqslant \|g\|\,\|f\|\,\|x\|$.

Le corollaire 2 donne alors la continuité de $g \circ f$ avec $\quad \|g \circ f\| \leqslant \|g\|\,\|f\|$.

Définition 41

On appelle **algèbre normée** toute $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{A}$ munie d'une norme vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{A}^2, \quad N(x \bullet y) \leqslant N(x)\,N(y) \ \text{ et } \ N(e) = 1. \ ✎^{(69)}$$

✎[69] On a noté e l'élément unité de $\mathcal{A}$: $e = \mathbb{1}_{\mathscr{A}}$

On dit aussi que N est une **norme d'algèbre**.

Si l'espace vectoriel normé A est complet on dit que $\mathscr{A}$ est une **algèbre de Banach**.

Exemples

1) (E,N) étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $\mathscr{L}_c(E)$ muni de la norme subordonnée à N est une $\mathbb{K}$-algèbre normée. Dans ce cas, $e = \mathrm{Id}_E$.
2) A étant un ensemble quelconque, l'ensemble $\mathscr{B}(A,\mathbb{C})$ des applications bornées de A dans $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|\bullet\|_\infty$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée. Dans ce cas, $e = 1$ (application constante).

Propriété 40

Continuité des opérations dans un espace vectoriel normé

a) Dans un e-v-n E les opérations

$$a \ : \ E^2 \to E,\ (x,y) \mapsto x+y \ \text{ et } \ p \ : \ \mathbb{K}\times E \to E,\ (\lambda,x) \mapsto \lambda x$$

sont continues.

b) Dans une algèbre normée $\mathscr{A}$, la multiplication interne $m \ : \ \mathscr{A}^2 \to \mathscr{A},\ (x,y) \mapsto x \bullet y$ est continue.

☞ a) On munit les espaces produits E^2 et $\mathbb{K}\times E$ des normes produit définies par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \ \|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$$

$$\text{et} \quad \forall\,(\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E, \ \ \|(\lambda,x)\|_\infty = \max\left\{\,|\lambda|\,,\|x\|\right\}$$

▪ a est linéaire et $\forall (x,y) \in E^2$, $\|a(x,y)\| \leqslant \|x\| + \|y\| = \|(x,y)\|_1$ donc a est uniformément continue sur E^2 d'après le théorème 11.

▪ Pour $\left(\lambda,x\right) \in \mathbb{K}\times E$ et $\left(\lambda',x'\right) \in \mathbb{K}\times E$, formons :

$$p\left(\lambda',x'\right) - p(\lambda,x) = \lambda'\left(x'-x\right) + \left(\lambda'-\lambda\right)x, \ ✎^{(70)}$$

✎[70] p n'est pas linéaire mais bilinéaire.

on en déduit :

$$\left\|p\left(\lambda',x'\right) - p(\lambda,x)\right\| \leqslant \left|\lambda'\right|\,\|x'-x\| + \left|\lambda'-\lambda\right|\,\|x\|.$$

En imposant $\left|\lambda'-\lambda\right| \leqslant 1$ et $\|x'-x\| \leqslant 1$, avec $M = 1 + \|(\lambda,x)\|_\infty$, il vient :

$$\left\|p\left(\lambda',x'\right) - p(\lambda,x)\right\| \leqslant 2M\left\|\left(\lambda',x'\right) - \left(\lambda,x\right)\right\|_\infty \ ✎^{(71)}$$

✎[71] Remarquer que M dépend de (λ,x). Cette inégalité ne donne donc pas un caractère lipschitzien de p et on n'obtient **pas** d'uniforme continuité.

ce qui prouve la continuité de p en (λ,x).

Donc p est continue sur $\mathbb{K}\times E$.

b) On munit $\mathscr{A}^2$ de la norme définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{A}^2, \|(x,y)\|_\infty = \max\left\{\|x\|,\|y\|\right\}.$$

Comme dans le cas précédent, pour tous $\left(x,y\right)$ et $\left(x',y'\right)$ de $\mathscr{A}^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|m\left(x',y'\right) - m\left(x,y\right)\right\| &= \left\|x' \bullet \left(y'-y\right) + \left(x'-x\right)\bullet y\right\| \\ &\leqslant \|x'\|\,\|y'-y\| + \|y\|\,\|x'-x\|\end{aligned}$$

Donc en imposant $\left\|\left(x'-y'\right) - \left(x,y\right)\right\|_\infty \leqslant 1$, avec $M = 1 + \|(x,y)\|_\infty$, il vient :

$$\left\|m\left(x',y'\right) - m\left(x,y\right)\right\| \leqslant 2M\left\|\left(x',y'\right) - (x,y)\right\|_\infty .$$

La conclusion est identique.

Théorème 16

Si F est un espace Banach, alors $\mathscr{L}_c(E,F)$ est aussi un espace de Banach.

MP*

☞ Il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(E,F)$ est convergente dans cet espace, c'est-à-dire que pour une telle suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$, il existe $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $\lim\limits_{+\infty} \| f - f_n \| = 0$.

Que $(f_n)_{\mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy se traduit par :

$$\delta_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} \| f_{n+p} - f_n \| \quad \text{vérifie} \quad \lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Alors, pour tout vecteur x de E : $\| f_{n+p}(x) - f_n(x) \| \leqslant \| f_{n+p} - f_n \| \, \| x \| \leqslant \delta_n \| x \|$ **(2)**

prouve que $(f_n(x))_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F, or F est complet, donc elle converge ; ce qui permet de définir $g : E \to E, \quad x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. ✎[72]

✎[72] Nous verrons dans le chapitre 3 que g est limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$.

Les opérations sur les limites donnent la linéarité de g : $g \in \mathcal{L}(E,F)$.

Par continuité de la norme sur F, l'inégalité **(2)** donne, en faisant tendre p vers $+\infty$:

$$\forall x \in E, \quad \| g(x) - f_n(x) \| \leqslant \delta_n \| x \| \qquad \textbf{(3)}$$

puis l'inégalité triangulaire donne : $\forall x \in E, \quad \| g(x) \| \leqslant \left(\| f_n \| + \delta_n \right) \| x \|$, ce qui assure la continuité de g : $g \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

L'inégalité **(3)** fournit alors $\| g - f_n \| \leqslant \delta_n$ et, compte tenu de **(1)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \| g - f_n \| = 0$.

Ainsi, la suite de Cauchy $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge dans $\left(\mathcal{L}_c(E,F), \| \bullet \|\right)$, donc $\mathcal{L}_c(E,F)$ est complet.

E. Espaces vectoriels normés de dimension finie

1. Équivalence des normes

Théorème 17

Sur $\mathbb{K}^n$ deux normes quelconques sont équivalentes.

☞ L'équivalence des normes est une relation transitive, il suffit donc de comparer une norme quelconque N de $\mathbb{K}^n$ à la norme $\| \bullet \|_\infty$ de $\mathbb{K}^n$ pour conclure.

Notons $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} N(e_i) > 0$.

Tout vecteur x de $\mathbb{K}^n$ s'écrivant $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, N(e_i) \leqslant \| x \|_\infty \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i) \right)$$

ce qui donne l'inégalité $N(x) \leqslant \beta \| x \|_\infty$ pour tout x de $\mathbb{K}^n$.

Cela prouve aussi que l'application $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ est continue sur $(K^n, \| \bullet \|_\infty)$, car elle est lipschitzienne : $|N(y) - N(x)| \leqslant N(y-x) \leqslant \beta \| y - x \|_\infty$.

Comme la sphère unité $\mathcal{S}$ de $(\mathbb{K}^n, \| \bullet \|_\infty)$ est compacte car elle est fermée et bornée (voir théorème 7), il existe $a \in \mathcal{S}$ tel que $\alpha = \inf\limits_{x\in\mathcal{S}} N(x) = N(a)$ (théorème 10).

Étant élément de $\mathcal{S}$, a n'est pas nul donc $N(a) = \alpha > 0$, et pour tout $x \in \mathcal{S}$: $\alpha \leqslant N(x)$.

Par homothétie, on en déduit : $\alpha \| x \|_\infty \leqslant N(x)$ pour tout x de $\mathbb{K}^n$

Théorème 18

Équivalence des normes en dimension finie

Deux normes quelconques d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

☞ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, il existe φ isomorphisme algébrique de $\mathbb{K}^n$ sur E. Alors, $\|\bullet\|$ étant une norme sur E, $\|\bullet\|' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \|\varphi(x)\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Soit $\|\bullet\|_1$ et $\|\bullet\|_2$ deux normes sur E, les normes $\|\bullet\|_1'$ et $\|\bullet\|_2'$ de $\mathbb{K}^n$ qui leurs sont associées par φ sont équivalentes, ✎(73) donc, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \alpha\|\varphi(x)\|_1 \leqslant \|\varphi(x)\|_2 \leqslant \beta\|\varphi(x)\|_1$$

ce qui donne $\quad \forall y \in E, \quad \alpha\|y\|_1 \leqslant \|y\|_2 \leqslant \beta\|y\|_1.$ ✎(74)

✎(73) D'après le théorème 17.

✎(74) Car $y = \varphi(x)$

2. Limites et continuité en dimension finie

Théorème 19

Étant donné E, F deux espaces vectoriels normés, avec F de dimension finie, rapporté à une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, on considère une application f de D, partie non vide de E, dans F, définie par ses composantes f_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sur la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$:

$$\forall x \in D, f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)e_i$$

et enfin soit A une partie non vide de D. Alors :

a) pour tout $a \in \overline{A}$, f admet une limite en a suivant A si et seulement si chaque f_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, admet une limite en a suivant A.

Lorsqu'il en est ainsi, on a :

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = \sum_{i=1}^{p}\left(\lim_{x\to a, x\in A} f_i(x)\right) e_i$$ ✎(75)

b) f est continue sur A si et seulement si chaque f_i est continue sur A.

✎(75) Les composantes de la limite sont les limites des composantes.

☞ a) Les normes sur F sont toutes équivalentes, on peut donc en choisir une arbitrairement. Par exemple, normons F par :

$$y \mapsto \|y\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant p} |y_i| \quad \text{où} \quad y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i\,.$$

On retrouve alors la situation de la propriété 23, b), d'où la conclusion.

b) On applique le a) en tout point de A et on retrouve comme ci-dessus la propriété 24, f).

Remarque

Le théorème 19, a), reste vrai avec $E = \mathbb{R}$ et $a \in \{-\infty, +\infty\}$.

En l'appliquant au cas $A = \mathbb{N}$, $a = +\infty$, on obtient le résultat analogue concernant les suites vectorielles à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

3. Parties complètes – Parties compactes en dimension finie

Soit $(E, \|\bullet\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie n, φ un isomorphisme algébrique de $\mathbb{K}^n$ sur E et $\|\bullet\|'$ la norme sur $\mathbb{K}^n$ associée à $\|\bullet\|$ par φ.

Alors φ est une isométrie de $(E, \|\bullet\|)$ sur $(\mathbb{K}^n, \|\bullet\|')$, c'est donc en particulier un homéomorphisme. ✎(76)

✎(76) Voir propriété 22

Propriété 41

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

☞ Un produit fini d'espaces complets est complet et sur $\mathbb{K}^n$ toutes les normes sont équivalentes donc $\left(\mathbb{K}^n, \|\bullet\|'\right)$ est complet.

Si $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\left(E, \|\bullet\|\right)$, il en est de même pour $\left(\varphi^{-1}\left(x_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ dans $\left(\mathbb{K}^n, \|\bullet\|'\right)$ ✎[77] donc $\left(\varphi^{-1}\left(x_n\right)\right)_{\mathbb{N}}$ converge.

✎[77] Car φ^{-1} est une isométrie.

Soit $y = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{-1}\left(x_n\right)$, en posant $x = \varphi(y)$, on a $\| x - x_n \| = \| y - \varphi^{-1}\left(x_n\right) \|'$ donc $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge avec $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Propriété 42

Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace de dimension finie est complet donc fermé.

Propriété 43

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. ✎[78]

En particulier, toute boule fermée, toute sphère est compacte.

✎[78] Dans un e-v-n E quelconque, une partie compacte est fermée bornée, mais la réciproque n'est vraie qu'en dimension finie.
Voir l'exemple 20 ci-après.

☞ La propriété est connue dans $\mathbb{K}^n$ muni de l'une ou l'autre des trois normes usuelles d'un espace produit ✎[79] et, puisque sur cet espace toutes les normes sont équivalentes, elle reste vraie sur $\mathbb{K}^n$ muni d'une norme quelconque.

✎[79] C'est le théorème 7.

On conclut en utilisant que :

- φ étant une isométrie, une partie A de $\left(E, \|\bullet\|\right)$ est bornée si et seulement si $\varphi^{-1}(A)$ est bornée dans $\left(\mathbb{K}^n, \|\bullet\|'\right)$.
- φ étant un homéomorphisme, A est fermée dans $\left(E, \|\bullet\|\right)$ si et seulement si $\varphi^{-1}(A)$ est fermée dans $\left(\mathbb{K}^n, \|\bullet\|'\right)$. ✎[80]

✎[80] Avec le théorème 2, A fermée donne $\varphi^{-1}(A)$ fermée et en écrivant $A=(\varphi^{-1})^{-1}(\varphi^{-1}(A))$, $\varphi^{-1}(A)$ fermée donne A fermée.

Propriété 44

De toute suite bornée d'un espace vectoriel de dimension finie on peut extraire une suite convergente.

☞ Une telle suite est à valeurs dans une boule fermée donc compacte.

Exemple 19 Montrer dans un e-v-n E de dimension finie, toute suite bornée admettant une seule valeur d'adhérence est convergente.

Si $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ est une telle suite, il existe $R > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_n \in \mathcal{B}_f(0, R)$ ✎[81]

✎[81] $\mathcal{B}_f(0,R)$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon R.

Supposons que $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas vers son unique valeur d'adhérence a. Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $p \geqslant n$ pour lequel $x_p \notin \mathcal{B}_o(a, r)$ donc $x_p \in \mathcal{B}_f(0, R) \setminus \mathcal{B}_o(a, r)$. Ainsi il est possible de construire une suite $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ et, à valeurs dans $K = \mathcal{B}_f(0, R) \setminus \mathcal{B}_o(a, r)$.

K est un fermé de E comme intersection des fermés $\mathcal{B}_f(0, R)$ et $E \setminus \mathcal{B}_o(a, r)$, et il est borné puisqu'inclus dans $\mathcal{B}_f(0, R)$, c'est donc un compact de l'e-v-n E de dimension finie et la suite $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence $b \in K$.

On a ainsi trouvé un point $b \neq a$ qui est aussi valeur d'adhérence de la suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$. C'est contraire à l'hypothèse et la conclusion en résulte.

Exemple 20 Dans un e-v-n E, pour tout x de E et tout sous-espace F de dimension finie, il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = \| x - y \|$.

Posons $\delta = d(x, F)$ et $R = \delta + 1$.

Pour tout $y \in F \setminus \mathcal{B}_f(x, R)$, on a $\| x - y \| > \delta + 1$ donc $\inf\limits_{y \in F \setminus \mathcal{B}_f(x,R)} \| x - y \| \geqslant \delta + 1$

et, sachant que $\delta = \inf\limits_{y \in F} \| x - y \| = \min \left(\inf\limits_{y \in F \cap \mathcal{B}_f(x,R)} \| x - y \|, \inf\limits_{y \in F \setminus \mathcal{B}_f(x,r)} \| x - y \| \right)$,

il vient :

$$\delta = \inf_{y \in F \cap \mathcal{B}_f(x,R)} \| x - y \|.$$

On remarque alors que $F \cap \mathcal{B}_f(x, R)$ est compacte puisque c'est une partie fermée-bornée de l'espace F de dimension finie. Donc la fonction $y \mapsto \| x - y \|$ qui est continue car 1-lipschitzienne. $\left(\forall (y, z) \in E^2, \left| \| x - y \| - \| x - z \| \right| \leqslant \| y - z \| \right)$ atteint sa borne inférieure sur $F \cap \mathcal{B}_f(x, R)$.

Exemple 21 **Théorème de Riesz**

Dans un espace vectoriel normé, la sphère unité est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie.

■ Dans un espace de dimension finie, la sphère unité est fermée et bornée, elle est donc compacte (propriété 42).

■ Envisageons un espace vectoriel normé E qui ne soit pas de dimension finie et montrons que la sphère unité S de E n'est pas compacte en construisant, point par point, une suite $\left(u_n\right)_{\mathbb{N}}$ de S telle que :

$$\text{pour } i \neq j, \quad \| u_j - u_i \| \geqslant 1.$$

Une telle suite ne pouvant avoir une suite extraite convergente, la sphère unité S ne sera pas compacte.

Supposons déjà connue une famille $\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right)$ de S^n telle que :

$$\text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad \| u_j - u_i \| \geqslant 1.$$

Notons $F = \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)$ le sous-espace engendré par cette famille, F est de dimension finie, or E ne l'est pas, donc S n'est pas incluse dans F.

Prenons alors un vecteur x de $S \setminus F$, la distance $\delta = d(x, F)$ n'est pas nulle (F est fermé et $x \notin F$). F étant de dimension finie, il existe alors un vecteur y de F réalisant :

$$\| x - y \| = \delta. \text{ ✎}^{(82)}$$

✎(82) Voir l'exercice précédent.

Choisissons comme point suivant : $u_{n+1} = \dfrac{x - y}{\| x - y \|} \in S$.

Pour $k \in \left\{1, \ldots, n\right\}$, la différence $u_{n+1} - u_k = \dfrac{x - y}{\delta} - u_k$ s'écrit $u_{n+1} - u_k = \dfrac{1}{\delta}(x - z)$ avec $z = y + \delta u_k \in F$. On a donc $\| x - z \| \geqslant \delta$ et $\| u_{n+1} - u_k \| \geqslant 1$, ce qui établit la construction récurrente de la suite $\left(u_n\right)_{\mathbb{N}}$.

4. Continuité des applications linéaires et multilinéaires

Théorème 20

Continuité des applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, E étant de dimension finie, toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

☞ E étant de dimension finie, les normes sur E sont équivalentes.

Choisissons la norme définie à partir d'une base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E par :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

Avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ on a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(u_i)$ d'où $\|f(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ \|f(u_i)\|$ puis :

$$\|f(x)\| \leqslant k\|x\| \quad \text{en notant} \quad k = \sum_{i=1}^{n} \|f(u_i)\|,$$

cette inégalité garantit la continuité de f.

[83] On trouvera des démonstrations de ce résultat et de son corollaire en Algère – Géométrie, MP, chapitre 7.

Théorème 21

Endomorphismes d'un espace euclidien [83]

Soit E un espace euclidien de boule unité $\mathcal{B} = \{x \in E \,/\, \|x\| \leqslant 1\}$.

a) Tout endomorphisme f de E est continu et :

$$\|f\| = \sup_{(x,y)\in\mathcal{B}^2} \left|\langle f(x) \mid y\rangle\right|.$$

b) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique (ou autoadjoint) positif, on a :

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathcal{B}} \langle f(x) \mid x\rangle = \rho(f)$$

où $\rho(f)$ est la plus grande valeur propre de f.

Corollaire

Dans un espace euclidien E, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

a) $\|f^*\| = \|f\|$.

b) $\|f\|^2 = \|f^* \circ f\| = \rho(f^* \circ f)$.

Théorème 22

Continuité des applications multilinéaires

Soit $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normés de dimension finie, F un espace vectoriel normé et $M : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire.

Alors M est continue.

☞ Pour alléger les notations, limitons-nous au cas $n = 2$ et $E_1 = E_2 = E$; M est alors une application bilinéaire sur E à valeurs dans F.

Choisissons :

– une base $(u_1, \ldots, u_p)$ de E,

– une norme sur E : $\left\|\sum_{i=1}^{p} x_i u_i\right\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant p} |x_i|$,

– une norme sur E^2 : $\|(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|)$.

Montrons, dans un premier temps, que M est bornée sur la boule unité fermée de E^2, puis, dans un second temps, que cette propriété entraîne la continuité de M.

■ M est bornée sur la boule unité de E^2.

Pour $(x, y) \in E^2$ et $x = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i$, $y = \sum_{j=1}^{p} y_j u_j$, la bilinéarité de M donne :

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j M(u_i, u_j)$$

et l'inégalité triangulaire :

$$\| M(x,y) \| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |x_i| \, \left|y_j\right| \, \| M\left(u_i, u_j\right) \|.$$

En notant $k = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \| M(u_i, u_j) \|$, il vient :

$$\| M(x,y) \| \leqslant k \| x \| \, \| y \|.$$

Sur la boule unité de E^2, on a donc :

$$\| M(x,y) \| \leqslant k.$$

- M est continue en tout point (a,b) de E^2.

La bilinéarité de M donne, pour tout (x,y) de E^2 :

$$\Delta = M(x,y) - M(a,b) = M(x-a,y) + M(a,y-b).$$

À présent, majorons Δ :

$$\| \ \Delta \ \| \leqslant \| M(x-a,y) \| + \| M(a,y-b) \| \leqslant k \| x-a \| \, \| y \| + k \| a \| \, \| y-b \|$$

En notant $h = \| (x,y) - (a,b) \| = \sup \left(\| (x-a) \|, \| y-b \| \right)$, on obtient :

$$\| y \| \leqslant \| b \| + h \quad , \quad \| \ \Delta \ \| \leqslant kh(\| a \| + \| b \| + h) \quad \text{et enfin} \quad \lim_{h \to 0} \Delta = 0.$$

L'essentiel

E, F ... sont des e-v-n.

I. Normes

✔ **Si l'on veut** montrer que deux normes N_1 et N_2 sur E ne sont pas équivalentes,

▪ **on peut** rechercher $(x_n)_{\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty$ ou 0.

$\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

II. Ouverts – Fermés

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une partie A de E est ouverte,

▪ **on peut**
- en revenant à la définition, prouver que pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$,
- interpréter A comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

$\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une partie B de E est fermée,

▪ **on peut**
- vérifier que son complémentaire : $E \setminus B$ est un ouvert,
- interpréter B comme image réciproque d'un fermé par une application continue,
- utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

$\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

III. Continuité

✔ **Si l'on veut** montrer que deux applications $f : A \to F$ et $g : A \to F$, continues sur $A \subset E$, coïncident,

▪ **on peut** vérifier que leurs restrictions à une partie B dense dans A sont égales.

$\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

IV. Espaces complets

✔ **Si l'on veut** montrer qu'un espace fonctionnel (ou une partie d'un tel espace) est complet,

▪ **on peut** considérer une suite de Cauchy $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de cet espace (resp. de cette partie) puis :
- examiner si pour tout $x \in A$ (ensemble de définition des f_n) la suite $\left(f_n(x)\right)$ est convergente,
- si c'est le cas, définir une fonction f par $\forall x \in A, f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Celle-ci est alors limite simple sur A de la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ (cf. chapitre 3),
- montrer que f_n tend vers f au sens de la norme de l'espace considéré.

$\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

On remarquera que le cas des espaces de suites rentre dans ce cadre, une suite étant un application de $\mathbb{N}$ dans un espace vectoriel normé F.

Méthodes

Méthodes

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une équation $f(x) = 0$, $x \in E$, a une solution,

▪ **on peut** penser à écrire cette équation sous la forme :

$$g(x) = x, \quad x \in E$$

et essayer d'appliquer le théorème du point fixe.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 6

V. Compacité

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une application $f\ : A \to F$ est bornée et atteint ses bornes sur $A \subset E$,

▪ **on peut** penser à examiner si A est compact et f continue sur A ou, si ce n'est pas le cas, se ramener à un problème analogue en considérant la restriction de f à un compact $B \subset A$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7

✔ **Si l'on veut** nier la compacité d'une partie A de E,

▪ **on peut** exhiber une suite de points de A n'admettant pas de valeur d'adhérence.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 8

VI. Applications linéaires continues

✔ **Si l'on veut** calculer la norme d'une application linéaire continue f,

▪ **on peut** rechercher $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E,\ \ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$, ce qui donne $|||f||| \leqslant k$, puis exhiber $x \in E$ vérifiant $\|f(x)\| = k\|x\|$ ou a défaut une suite (x_n) de la sphère unité telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f(x_n)\| = k$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 9, 10 et 11

Mise en œuvre

I. Normes

Ex. 1

Soit E l'espace des suites complexes $u = (u_n)_{\mathbb{N}}$ bornées et telles que $u_0 = 0$.
On définit N_∞ et N par $\forall u \in E, \quad N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \quad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1) Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E.

2) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N \leqslant kN_\infty$. Quel est le plus petit k possible ?

3) Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

Indications

2) Pour qu'un réel k vérifiant $N \leqslant kN_\infty$ soit le plus petit possible, il suffit qu'il existe $v \in E$ tel que $N(v) = kN_\infty(v)$.

3) Considérer une suite $u(q)$ dépendant d'un paramètre q telle que $N_\infty\big(u(q)\big)$ puisse être rendu aussi grand que l'on veut (en jouant sur q) tandis que $N\big(u(q)\big)$ reste borné.

Solution

1) Il est immédiat que N_∞ et N vérifient les axiomes **(2)** et **(3)** des normes.
Pour tout $u \in E$ on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant N_\infty(u)$ donc, $N_\infty(u) = 0$ donne :
$$u = 0.$$
De même $N(u) = 0$ donne $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$, u est alors constante et, puisque $u_0 = 0$, il vient $u = 0$.
Ainsi N_∞ et N sont des normes sur E.

2) Pour tout u de E, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ donne :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_{n+1}| + |u_n| \quad \text{d'où} \quad N(u) \leqslant 2N_\infty(u).$$
Considérons la suite $v \in E$ telle que $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = (-1)^n$.
Elle vérifie : $N_\infty(v) = 1$ et $N(v) = 2$ donc, si $k \in \mathbb{R}_+^*$ est tel que $\forall u \in E, \quad N(u) \leqslant kN_\infty(u)$, on a $k \geqslant 2$.
Puisque le nombre 2 vérifie cette propriété, c'est le plus petit.

3) Étant donné $q \in]0,1[$, considérons la suite u telle que :
$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = q^n.$$
On a alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \big(u_{k+1} - u_k\big)$ donc :
$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$
On vérifie ainsi que u est bien élément de E avec :
$$N(u) = 1 \text{ et } N_\infty(u) = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-q}.$$
En conséquence, on a $\dfrac{N_\infty(u)}{N(u)} = \dfrac{1}{1-q}$ et, ce rapport n'étant pas majoré quand q décrit $]0,1[$, les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

Commentaires

On vérifie aisément que E est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Noter que l'existence de $N_\infty(u)$ et $N(u)$ tient au caractère borné de u.

En fait il s'agit ici de calculer la borne supérieure sur $E \setminus \{0\}$ de $\frac{N}{N_\infty}$, et il se trouve que cette borne est atteinte : c'est un plus grand élément.

Nous nous trouvons déjà en présence du lien entre la suite (u_n) et la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, ce qui sera abondamment utilisé à partir du chapitre 2.

La suite u est positive croissante, sa borne supérieure est sa limite.

II. Ouverts – Fermés

Ex. 2

Soit A et B deux parties d'un e-v-n E, non vides, fermées et disjointes.

1) Trouver une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|A} = 0, f_{|B} = 1$.

2) En déduire l'existence de deux ouverts disjoints U et V de E tels que : $A \subset U, B \subset V$.

Indications

3) Utiliser les fonctions $x \mapsto d(x, A), x \mapsto d(x, B)$.

4) Utiliser des images réciproques d'ouverts de $\mathbb{R}$.

Solution

1) Notons α et β les fonctions de E dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\alpha(x) = d(x, A) \quad \text{et} \quad \beta(x) = d(x, B).$$

Ainsi, les fonctions α et β sont continues sur E et la fonction $\alpha + \beta$ ne s'annule pas sur E.

Ceci justifie l'existence et la continuité de la fonction :

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Il est facile de vérifier que f est à valeurs dans $[0, 1]$ et que :

$$f_{|A} = 0 \quad , \quad f_{|B} = 1.$$

2) Notons $U = f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right)$ et $V = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$.

Ce sont des ouverts disjoints de E, et $A \subset U, \quad B \subset V$ car :

$$A = f^{-1}(\{0\}) \quad \text{et} \quad B = f^{-1}(\{1\}).$$

Commentaires

On a vu dans l'exemple 7 du cours que :
$|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant \| x - y \|$.

A étant fermée, on a
$d(x,A) = 0 \iff x \in A$.
et de même pour B.
Ainsi puisque A et B sont fermées disjointes, on a pour tout x, $\alpha(x) > 0$ ou $\beta(x) > 0$ donc $(\alpha+\beta)(x) > 0$.

En tant qu'images réciproques d'ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ par une fonction continue.

Ex. 3

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que l'ensemble des matrices semblables à A est fermé dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Indications

Caractériser un fermé à l'aide de suites. Utiliser des polynômes annulateurs de A.

Solution

D'après la caractérisation séquentielle des fermés, il suffit pour faire la preuve, de montrer que, pour toute suite $(M_n)_{\mathbb{N}}$ de matrices semblables à A qui converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, la limite B est semblable à A.

Rappelons que M est semblable à A s'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$M = P^{-1}AP.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $M^k = P^{-1}A^kP$ et, pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$:

$$Q(M) = P^{-1}Q(A)P.$$

L'hypothèse A diagonalisable se traduit par l'existence d'un polynôme Q scindé dans $\mathbb{C}[X]$ ayant ses racines simples et tel que $Q(A) = 0$.

Alors M_n, semblable à A, vérifie $Q(M_n) = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} M_n = B$ donne $Q(B) = 0$, ce qui prouve que B est diagonalisable.

Commentaires

L'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ doit être muni d'une norme, par exemple :

$$\| A \| = \sup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} |A_{ij}|.$$

Cf. Algèbre – Géométrie, chapitre 5

Continuité de $M \mapsto Q(M)$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

En prenant considérant le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det\left(A - XI_p\right),$$

on a aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ \chi_A = \det\left(M_n - XI_p\right)$

et le passage à la limite donne $\chi_B = \lim\limits_{n\to+\infty} \det(M_n - XI_p) = \chi_A$.

Les matrices A et B ont le même polynôme caractéristique et elles sont diagonalisables, elles sont donc semblables à la même matrice diagonale et par transitivité elles sont semblables.
Ainsi l'ensemble des matrices semblables à A est fermé dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

L'application $M\mapsto\det(M-XI_p)$ est en effet continue car ses composantes sur la base canonique de $\mathbb{K}_p[X]$ sont des fonctions polynômes des coordonnées de M.

III. Continuité

Ex. 4

On suppose que E et F sont des $\mathbb{R}$-e-v-n.

Soit $f : E \to F$ qui vérifie : $\forall(x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Montrer que si f est continue en 0_E alors f est linéaire.

Indications

Établir $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ puis $\mathbb{R}$.

Solution

L'égalité $\|f(x + y) - f(x)\| = \|y\|$ montre que la continuité en 0_E entraîne la continuité sur E.

Fixons un vecteur x de E et notons g la fonction de $\mathbb{R}$ dans F définie par :

$$g(t) = f(tx).$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g(u + v) = g(u) + g(v)$ pour tout couple (u, v) de réels.
Le problème revient à montrer que g coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $h : t \mapsto tf(x)$.
Montrons d'abord que pour tout $t \in \mathbb{Q},\ f(tx) = tf(x)$: $(\mathcal{P})$

- la propriété $(\mathcal{P})$ est vraie pour $t = 0$ et $t = 1$,
- si elle est vraie pour n, elle l'est pour $n+1$ car $f\left((n+1)x\right) = f(nx)+f(x)$,
- par récurrence, elle est donc vraie pour tout $t \in \mathbb{N}$,
- de $f(-tx) = -f(tx)$, on déduit alors qu'elle est vraie pour tout $t \in \mathbb{Z}$, et ceci quel que soit $x \in E$,
- enfin tout $t \in \mathbb{Q}$ s'écrit $t = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*$ et, avec $px = qtx$,

puisque $(\mathcal{P})$ est vraie sur $\mathbb{Z}$, il vient $pf(x) = qf(tx)$ et donc $f(tx) = \dfrac{p}{q}f(x)$,

c'est-à-dire $f(tx) = tf(x)$ ou encore $g(t) = h(t)$.

En conséquence les fonctions g et h sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$, puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ elles sont donc égales ce qui prouve que f est linéaire.

Commentaires

Car $f(x+h)-f(x) = f(h)-f(0_E)$.

C'est une composée de fonctions continues : $t\mapsto tx$ et f.

$f(0_E) = 0_E$ est une conséquence de $f(y) = f(y+0_E) = f(y) + f(0_E)$, c'est une propriété des morphismes de groupes additifs.

$f(-y) = -f(y)$ est aussi une propriété des morphismes de groupes additifs : $0_F = f(y-y) = f(y) + f(-y)$.

IV. Espaces complets

Ex. 5

Soit B l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

1) Pour $x = \big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in B$, on pose $\|\, x \,\| = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x(n)|}{2^n}$. Montrer que $x \mapsto \|\, x \,\|$ est une norme sur B.

2) Soit $I = [0,1]$ et $A = I^{\mathbb{N}} \subset B$. Montrer que A est complet.

Indications

Pour $x \in B$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x(n)| \leqslant M$, alors la suite $p \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{|x(n)|}{2^n}$ est majorée par $2M$ et, étant évidemment croissante, elle est convergente. On pose par définition $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x(n)|}{2^n} = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{|x(n)|}{2^n}$.

Solution

1) La vérification des axiomes de définition des normes est sans difficulté.

2) Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de A, c'est-à-dire une suite telle que pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe $\delta_p = \sup\limits_{q\in\mathbb{N}} \|x_p - x_{p+q}\|$ vérifiant $\lim\limits_{p\to+\infty} \delta_p = 0$.

En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, |x_p(n) - x_{p+q}(n)| \leqslant 2^n \|x_p - x_{p+q}\| \leqslant 2^n \delta_p,$$

on voit que $\big(x_p(n)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $[0,1]$, elle est donc convergente dans $[0,1]$.

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}, x(n) = \lim\limits_{p\to+\infty} x_p(n)$. Il est clair que la suite x ainsi définie appartient à A.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\|x_p - x\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_p(n) - x(n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |x_p(n) - x(n)| + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{N-1}} + \sum_{n=0}^{N-1} |x_p(n) - x(n)|$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, fixons N tel que $\dfrac{1}{2^{N+1}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, alors puisque :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} |x_p(n) - x(n)| = 0,$$

il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant P \;\Rightarrow\; \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |x_p(n) - x(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement : $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N}, p \geqslant P \;\Rightarrow\; \|x_p - x\| < \varepsilon$, ce qui prouve que $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans A au sens de la norme $\|\,\bullet\,\|$.

Commentaires

Ne pas oublier de justifier l'existence de $\|\, x \,\|$ pour tout x de B. C'est-à-dire en fait la convergence de la série de terme général $\frac{|x(n)|}{2^n}$. Dès que l'on aura étudié le chapitre 2, cette convergence sera prouvée par la majoration $\frac{|x(n)|}{2^n} \leqslant \frac{M}{2^n}$.
La justification donnée en indication n'est que «temporaire».

Car $[0,1]$ est une partie fermée donc complète de $\mathbb{R}$.

En termes de suites de fonctions (cf. chapitre 3), $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{N}$ vers x.

car $\forall n\in\mathbb{N}, |x_p(n) - x(n)| \leqslant 1$.

C'est une somme finie de termes tendant vers 0.

Ex. 6

Soit E un espace de Banach, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \left]0,1\right[$.
$L_{r,\lambda}$ désigne l'ensemble des applications u de la boule ouverte $\mathcal{B}(0,r)$ dans E telles que :

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in \mathcal{B}(0,r)^2, \| u(x) - u(y) \| \leqslant \lambda \| x - y \|.$$

On pose $r' = (1-\lambda)r$ et $\lambda' = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$. Pour tout $u \in L_{r,\lambda}$, montrer qu'il existe v unique dans $L_{r',\lambda'}$ telle que : $\forall x \in \mathcal{B}\left(0,r'\right),\ v(x) = u\left(x + v(x)\right)$.

Indications

Si v est solution du problème, pour tout $x \in \mathcal{B}\left(0,r'\right)$, $v(x)$ est point fixe de l'application $f_x\ : y \mapsto u(x+y)$.

Solution

Notons $\overline{\mathcal{B}}\left(0,r-r'\right)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $r-r'$ et, pour tout x fixé dans $\mathcal{B}\left(0,r'\right)$ soit :

$$f_x\ : \overline{\mathcal{B}}\left(0,r-r'\right) \to E, y \mapsto u(x+y).$$

Pour $y \in \overline{\mathcal{B}}\left(0,r-r'\right)$, on a :

$$\| x + y \| < r \quad \text{donc} \quad \| f_x(y) \| = \| u(x+y) \| < \lambda r = r - r'.$$

Ainsi la boule $\overline{\mathcal{B}}\left(0,r-r'\right)$ est stable par f_x.
Avec plus précisément : $f\left(\overline{\mathcal{B}}\left(0,r-r'\right)\right) \subset \mathcal{B}\left(0,r-r'\right)$.

Puisque u est contractante, il en est de même pour f_x et comme $\overline{\mathcal{B}}\left(0,r-r'\right)$ est complet, le théorème du point fixe donne l'existence d'un unique point $v(x)$ de $\overline{\mathcal{B}}\left(0,r-r'\right)$ vérifiant $v(x) = f_x\left(v(x)\right)$.

On a ainsi défini une application $v\ : \mathcal{B}\left(0,r'\right) \to \mathcal{B}\left(0,r-r'\right)$ telle que :

$$\forall x \in \mathcal{B}\left(0,r'\right),\ v(x) = u\left(x + v(x)\right).$$

Pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}\left(0,r'\right)^2$, on a alors :

$$\| v(x) - v(y) \| \leqslant \lambda \| [x + v(x)] - [y + v(y)] \| \leqslant \lambda \left(\| x - y \| + \| v(x) - v(y) \|\right)$$

donc $\| v(x) - v(y) \| \leqslant \dfrac{\lambda}{1-\lambda} \| x - y \|$ soit $\| v(x) - v(y) \| \leqslant \lambda' \| x - y \|$.

D'autre part, comme $f_x(0) = 0$, on a aussi $v(0) = 0$ ce qui achève de prouver que $v \in L_{r',\lambda'}$.

Commentaires

$r' = (1-\lambda)r$ donne $r' < r$.

$y \in \overline{\mathcal{B}}(0,r-r')$ donne $\| x+y \| \leqslant \| x \| + r - r' < r' + r - r'$

donc $\| x+y \| < r$

donc f_x est bien définie sur $\overline{\mathcal{B}}(0,r-r')$.

$\overline{\mathcal{B}}(0,r-r')$ est un fermé de E qui est complet par hypothèse.

v est à valeurs dans $\mathcal{B}(0,r-r')$ car $f\left(\overline{\mathcal{B}}(0,r-r')\right) \subset \mathcal{B}(0,r-r')$.

L'unicité vient de ce que si v est solution, quel que soit soit $x \in \mathcal{B}(0,r')$, $v(x)$ est point fixe de f_x et que celui-ci est unique.

V. Compacité

Ex. 7

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1,0)$, $B(2,0)$ et $C(0,3)$. Montrer qu'il existe au moins une droite D telle que $d(A,D)^2 + d(B,D)^2 + d(C,D)^2$ soit minimal.

Indications

Définir D par une équation normale.

Solution

D étant définie par l'équation normale :

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0,\ \ (\theta, p) \in [0, 2\pi] \times [0, +\infty[,$$

on obtient

$$d(A, D)^2 + d(B, D)^2 + d(C, D)^2 = 5 + 4\sin^2\theta + 3p^2 - 6p(\cos\theta + \sin\theta).$$

On est ainsi ramené à montrer que la fonction

$$f\ :[0, 2\pi] \times [0, +\infty[,\ \ (\theta, p) \mapsto 5 + 4\sin^2\theta + 3p^2 - 6p(\cos\theta + \sin\theta),$$

atteint sa borne inférieure.

On dispose de la minoration $f(\theta, p) \geqslant 5 + 3p^2 - 12p$, d'où :

$$\text{pour } p \geqslant 5,\quad f(\theta, p) \geqslant 5 + 3p(p-4) \geqslant 5 + 3p \geqslant 20.$$

Ainsi puisque $f(0, 0) = 5$, on a $\inf\limits_{[0,2\pi]\times[0,+\infty[} f(\theta, p) = \inf\limits_{[0,2\pi]\times[0,5]} f(\theta, p)$ et, la fonction f étant évidemment continue, elle atteint sa borne inférieure sur le compact $[0, 2\pi] \times [0, 5]$.

Commentaires

Pour tout point $M(x_0, y_0)$, on a $d(M,D)^2 = (x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p)^2$.

f est bornée inférieurement puisqu'elle est à valeurs positives.

Ex. 8

L'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ étant normé par $\|\bullet\|_\infty$: $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$, montrer que la sphère unité de E n'est pas compacte.

Indications

Pour qu'une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ d'un e-v-n E n'admette aucune suite extraite convergente, il suffit que, quel que soit le couple (p, q) d'entiers distincts, on ait $\|x_p - x_q\| \geqslant 1$.

Solution

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_n : E \to \mathbb{C},\quad t \mapsto f_n(t) = e^{2in\pi t}$$

Comme $\left|e^{i\alpha}\right| = 1$ pour α réel, chaque f_n est unitaire, c'est-à-dire que $f_n \in S$ où S est la sphère unité de E.

La formule $\left|e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right| = 2\left|\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right|$ donne :

$$|f_q(t) - f_p(t)| = 2\,|\sin(q-p)\,\pi\, t| \leqslant 2$$

et, l'égalité étant réalisée pour $t = \dfrac{1}{2\,|q-p|} \in [0, 1]$, il en résulte :

$$\|f_q - f_p\|_\infty = 2.$$

Aucune suite extraite de $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ne peut être convergente puisqu'elle n'est pas de Cauchy. En conséquence la sphère S est non compacte.

Commentaires

Les éléments de E sont des fonctions continues sur le compact $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, elles sont donc bornées et la norme $\|\bullet\|_\infty$ est définie. C'est la norme de la convergence uniforme sur E (cf. définition 11).

On voit sur cet exemple que dans un espace de dimension infinie l'ensemble des compacts n'est pas identique à l'ensemble des fermés-bornés (cf. exemple 21 du cours).

VI. Applications linéaires continues

Ex. 9

Dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ on considère les normes : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$, et on note :

$$E_\infty = \big(E, \|\bullet\|_\infty\big) \text{ et } E_1 = \big(E, \|\bullet\|_1\big).$$

Soit φ l'endomorphisme de E défini par : $\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\mathrm{d}t$, vérifier la continuité et calculer la norme des applications linéaires :

$$\varphi_a\ :\ E_\infty \to E_\infty,\ f \mapsto \varphi(f)\quad,\quad \varphi_b\ :\ E_\infty \to E_1,\ f \mapsto \varphi(f)\quad,\quad \varphi_c\ :\ E_1 \to E_\infty,\ f \mapsto \varphi(f).$$

Indications

Pour φ_a et φ_b, il existe des fonctions f et g de S_∞, sphère unité de E_∞, telles que :

$$\|\ \varphi_a\,(f)\,\|_\infty = \|\ \varphi_a\ \| \quad \text{et} \quad \|\ \varphi_b\,(g)\,\|_1 = \|\ \varphi_b\ \|.$$

Pour φ_c, trouver une suite $\left(f_n\right)$ de S_1, sphère unité de E_1, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\ \varphi_c\,\left(f_n\right)\,\|_\infty = \|\ \varphi_c\ \|$.

Solution

La linéarité de l'intégrale fait de φ un endomorphisme de E.

■ Étude de $\varphi_a \in \mathcal{L}(E_\infty)$.

Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a la majoration :

$$|\varphi_a(f)(x)| \leqslant \int_0^x t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|\,f\,\|_\infty \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|\,f\,\|_\infty$$

d'où $\|\ \varphi_a\,(f)\,\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2}\|\,f\,\|_\infty$. Donc φ_a est continue et $\|\,\varphi_a\,\| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Pour $f = 1$, on a $\|\,f\,\|_\infty = 1$ et $\varphi_a(f)(x) = \displaystyle\int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$

donc $\|\ \varphi_a\,(f)\,\|_\infty = \dfrac{1}{2}$ et, en conclusion : $\|\varphi_a\,\| = \dfrac{1}{2}$.

■ Étude de $\varphi_b \in \mathcal{L}(E_\infty, E_1)$.

Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|\varphi_b(f)(x)| \leqslant \int_0^x t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|\,f\,\|_\infty \int_0^x t\mathrm{d}t = \|\,f\,\|_\infty \frac{x^2}{2}$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 |\varphi_b(f)(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \|\,f\,\|_\infty \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\|\,f\,\|_\infty.$

Donc φ_b est continue et $\|\,\varphi_b\,\| \leqslant \dfrac{1}{6}$.

Comme $f = 1$ donne l'égalité $\|\ \varphi_b\,(f)\,\|_1 = \dfrac{1}{6}$, on en déduit $\|\varphi_b\| = \dfrac{1}{6}$.

■ Étude de $\varphi_c \in \mathcal{L}(E_1, E_\infty)$.

Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|\varphi_c(f)(x)| \leqslant \int_0^1 t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|\,f\,\|_1$$

Donc $\|\ \varphi_c\,(f)\,\|_\infty \leqslant \|\,f\,\|_1$, et φ_c est continue avec $\|\,\varphi_c\,\| \leqslant 1$.

L'égalité n'aura pas lieu à cause de la majoration $\leqslant$, car la différence $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ n'est nulle que si f est nulle.

Il convient de choisir une suite de fonctions adéquate, par exemple,

$$f_n(t) = n\,t^{n-1}.$$

Alors $\varphi_c\left(f_n\right)(x) = \displaystyle\int_0^x nt^n\mathrm{d}t = \frac{nx^{n+1}}{n+1}$, $\|\,f_n\,\|_1 = 1$ et

$$\|\ \varphi_c\,\left(f_n\right)\,\|_\infty = \frac{n}{n+1}.$$

Comme $\|\,f_n\,\|_1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\ \varphi_c\,\left(f_n\right)\,\|_\infty = 1$,

on a $\sup\limits_{\|\,f\,\|_1 \leqslant 1} \|\ \varphi_c\,(f)\,\|_\infty \geqslant 1$, et on peut conclure que $\|\,\varphi_c\,\| = 1$.

Commentaires

L'objectif est d'obtenir une majoration de $\|\ \varphi_a(f)\,\|_\infty$ de la forme $k_1\|\,f\,\|_\infty$.

$\frac{1}{2}$ est le plus grand élément de l'ensemble décrit par $\dfrac{\|\ \varphi_a(f)\,\|_\infty}{\|\,f\,\|_\infty}$.

L'objectif est ici d'obtenir une majoration de $\|\ \varphi_b(f)\,\|_1$ de la forme $k_2\|\,f\,\|_\infty$.

On recherche une majoration de $\|\ \varphi_c\,(f)\,\|_\infty$ par $k_3\|\,f\,\|_1$.

Dans ce troisième cas, la borne supérieure n'est pas atteinte.

Ex. 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ donnée dans des bases $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ par la matrice :

$$A = \left[A_{ij}\right] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

E et E' étant normés par :

$$\| x \|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \text{et} \quad \| x' \|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^{p} x'_i e'_i \right\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} |x'_i|$$

exprimer la norme de f à l'aide des coefficients de la matrice A.

Solution

Par définition de A, on a $\quad \forall j \in [\![1, n]\!], \ f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} A_{ij} e'_i$

et $\quad f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right) e'_i.$

Notons $\quad f(x) = \sum_{i=1}^{p} x'_i e'_i \quad$ avec $\quad x'_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$.

Posons $\quad M = \sup\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |A_{ij}|$, il vient :

$$\text{pour tout } i \in [\![1, p]\!], \quad |x'_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \ |x_j| \leqslant M \| x \|_1,$$

donc $\quad \| f(x) \|_\infty \leqslant M \| x \|_1$.

On en déduit $\quad \|\!| f \leqslant M |\!\|$.

Il existe au moins un couple (k, h) d'entiers tel que $|A_{kh}| = M$. Alors :

$$\| f(e_h) \|_\infty = M \| e_h \|_1.$$

Conclusion : $\quad \|\!| f |\!\| = M = \sup\limits_{i,j} |A_{ij}|$.

Commentaires

L'espace E est de dimension finie, donc f est continue.

On recherche une majoration de $\| f(x) \|_\infty$ de la forme $M \| x \|_1$.

Ex. 11

Montrer que, quelle que soit la norme $\| \bullet \|$ choisie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, il existe un réel μ tel que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2, \quad \| AB \| \leqslant \mu \| A \| \| B \|.$$

Solution

Dans la mesure où A représente un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$, par définition :

$$\| A \| = \sup_{X \in \mathbb{K}^p \setminus \{0\}} \frac{\| AX \|}{\| X \|}$$

et pour tout couple (A, B), on a : $\quad \| AB \| \leqslant \| A \| \| B \|$

Prenons une autre norme $\| \bullet \|'$ de $\mathbb{K}^p$, elle est équivalente à la précédente : il existe α et $\beta > 0$ tels que $\quad \alpha \| \bullet \| \leqslant \| \bullet \|' \leqslant \beta \| \bullet \| \quad$ ce qui permet de faire les majorations successives :

$$\| AB \|' \leqslant \beta \| AB \| \leqslant \beta \| A \| \| B \| \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2} \| A \|' \| B \|'.$$

Avec $\quad \mu = \dfrac{\beta}{\alpha^2} \quad$ c'est l'inégalité souhaitée $\quad \| AB \|' \leqslant \mu \| A \|' \| B \|'$.

Commentaires

On note encore A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice A.

D'après le théorème 15 (composition d'applications linéaires continues).

La norme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ainsi associée à la norme $\| \bullet \|_\infty$ de $\mathbb{K}^p$ est

$$\| A \| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} \sum_{j=1}^{p} |A_{ij}|.$$

CHAPITRE

2

Séries numériques ou vectorielles

A. Généralités

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1. Espace vectoriel des séries à valeurs dans E

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.

On appelle **série de terme général** u_n le couple de suites : $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

La suite $(U_n)_{\mathbb{N}}$ de terme général $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est dite suite des **sommes partielles** de la série de terme général u_n.

Une série à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$) sera dite réelle (resp. complexe).

Notation 1

La série de terme général u_n sera notée $\sum u_n$.

Propriété 1

Définition d'une série par la suite des sommes partielles

Toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n avec : $u_0 = U_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = U_n - U_{n-1}$. ✎(1)

✎(1) Bien qu'immédiat, ce résultat est important : il montre que toute étude de suite peut être ramenée à une étude de série.

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans E, définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

La série $\sum u'_n$ où $(u'_n)_{\mathbb{N}}$ est définie par $u'_0 = u'_1 = \cdots = u'_{n_0-1} = 0$, et $u'_n = u_n$ pour $n \geqslant n_0$, est encore appelée série de terme général u_n et notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. ✎(2)

Pour la suite $(U'_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles, on a alors : $\forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geqslant n_0 \Rightarrow U'_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

✎(2) L'intérêt de cette définition réside en ce qu'elle uniformise la notion de série : dans les développements ultérieurs, on n'aura pas à considérer le cas particulier des séries définies à partir d'un certain rang.

Définition 3

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans E, la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ (qui est du type défini en définition 2) est dite déduite de $\sum u_n$ par **troncature** au rang n_0.

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U'_n)_{n\geqslant n_0}$ sont les suites des sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ respectivement, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow U'_n = U_n - U_{n_0-1}$. ✎(3)

✎(3) Remarquons tout de suite que les suites $(U_n)_{n\geqslant 0}$ et $(U'_n)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature c'est-à-dire que l'une converge si et seulement si l'autre converge.

Théorème 1

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des séries à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

☞ On vérifie que c'est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}$.

2. Séries convergentes

Définition 4

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans E est dite **convergente** si et seulement si la suite $(U_n)_{\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente.
Une série non convergente est dite **divergente**.

Définition 5

On appelle **somme d'une série convergente** $\sum u_n$, et on note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ l'élément de } E \text{ défini par } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \,.$$ ✎(4)

✎(4) Dans le cas d'une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ convergente, la somme est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et on a : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Théorème 2

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est convergente si et seulement si la série de terme général $v_n - v_{n-1}$, $n \geqslant 1$, est convergente. ✎(5)

✎(5) Toute étude de suite peut donc se ramener une étude de série.

☞ Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = v_n - v_{n-1}$, il vient : $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k - v_{k-1} = v_n - v_0$,

donc les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de même nature.

Propriété 2

Séries composantes
Supposons E de dimension finie et rapporté à une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $(u_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, $(i \in [\![1,p]\!])$ ses suites composantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{i=1}^{p} u_n^i e_i.$$

La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si les p séries composantes $\sum u_n^i$, $(i\in [\![1,p]\!])$ sont convergentes.

Alors : $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^i \right) e_i \,.$$

☞ En posant $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $U_n^i = \sum_{k=0}^{n} u_k^i$, on a $U_n = \sum_{i=1}^{p} U_n^i e_i$.

Cas particulier

Une série $\sum u_n$ à termes complexes est convergente si et seulement si la série des parties réelles $\sum a_n$ et la série des parties imaginaires $\sum b_n$ sont convergentes.

Alors, avec $u_n = a_n + ib_n, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Propriété 3

Deux séries sont dites de même nature lorsqu'elles sont simultanément convergentes ou divergentes.

a) Une série $\sum u_n \in \mathcal{S}(E)$ et une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ s'en déduisant par troncature sont de même nature.

b) Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ ne différent que par un nombre fini de termes, elles sont de même nature. ✎(6)

✎(6) Dans les deux cas, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = u'_n$. Donc les suites $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(U'_n)_{n\geqslant n_0}$ différent d'une constante.

Conséquence

La nature d'une série $\sum u_n$ ne dépend donc que du comportement de u_n **pour** n **les grandes valeurs de** n, on dit que c'est une **notion asymptotique**.

2.1 – Reste d'une série convergente

Définition 6

Étant donnée une série convergente $\sum u_n \in \mathcal{S}(E)$ et p un entier naturel. On appelle **reste d'ordre** p de cette série et on note R_p la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant p+1} u_n$: $R_p = \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n$.

On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = U_p + R_p \quad \left(U_p = \sum\limits_{n=0}^{p} u_n\right)$. ✎(7)

✎(7) Dans le cas d'une série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ définie à partir du rang n_0, cette relation devient : $\forall p \geqslant n_0$, $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = U_p + R_p$ avec $U_p = \sum\limits_{n=n_0}^{p} u_n$.

Remarque : on pourra aussi rencontrer les notations $U_p = \sum\limits_{n=n_0}^{p-1} u_n$ $R_p = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} u_n$.

Propriété 4

Soit $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n d'une série convergente $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

a) Pour tout $n \geqslant n_0$, $\quad u_n = R_{n-1} - R_n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

2.2 – Condition nécessaire de convergence

Propriété 5

Pour qu'une série $\sum u_n \in \mathcal{S}(E)$ soit convergente, il est nécessaire que :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant N \;\Rightarrow\; \left\|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right\| < \varepsilon.$$

☞ La suite $(U_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers $\ell \in E$:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N},\; n > N \;\Rightarrow\; \|U_n - \ell\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant que $\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k = U_{n+p} - U_{n-1} = U_{n+p} - \ell - \left(U_{n-1} - \ell\right)$, on voit que :

$$n > N \;\Rightarrow\; \left\|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right\| < \varepsilon.$$

Application

La série harmonique $\left(u_n = \dfrac{1}{n}, n \geqslant 1\right)$ diverge. En effet :

$$U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{donc} \quad U_{2n} - U_n \geqslant n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Théorème 3

Pour qu'une série $\sum u_n$ à valeurs dans E soit convergente, il est **nécessaire** (mais non suffisant) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ✎(8)

✎(8) L'exemple de la série harmonique montre qu'il ne s'agit pas là d'une condition suffisante de convergence.

☞ Il suffit de remarquer que $u_n = U_n - U_{n-1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n-1}$. ✎(9)

✎(9) On peut aussi appliquer la propriété **5** avec $p=0$.

Application pratique

On utilise ce théorème pour mettre en évidence des divergences, par exemple :

$u_n = a^n, a \in \mathbb{C}$, pour $|a| \geqslant 1$, u_n ne tend pas vers zéro, donc $\sum u_n$ diverge.

Définition 7

Une série dont le terme général ne tend pas vers zéro sera dite **grossièrement divergente**.

2.3 – Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème 4

Soit E un espace de Banach, par exemple un espace vectoriel normé de dimension finie, et $\sum u_n$ une série à valeurs dans E.

Pour que $\sum u_n$ converge, il faut et il suffit qu'elle vérifie le **critère de Cauchy**, qui se traduit par l'une ou l'autre des formulations équivalentes suivantes :

(1) $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant N \;\Rightarrow\; \left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\| < \varepsilon,$

(2) $\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\| = 0$ ou (ou $\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geqslant n} \left\| \sum_{k=n}^{p} u_k \right\| = 0$.)

☞ E étant complet, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est de Cauchy, c'est-à-dire $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant N \;\Rightarrow\; \|U_{n+p} - U_{n-1}\| < \varepsilon.$

On obtient ainsi la formulation **(1)**.

L'équivalence entre **(1)** et **(2)** est claire dès que l'on note que $\left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\| < \varepsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$,

donne l'existence (dans $\mathbb{R}$) de $S_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\|$ avec $0 \leqslant S_n \leqslant \varepsilon$.

<u>Conséquence pratique</u>

Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ converge par application du critère de Cauchy, on s'efforcera de majorer $\left\| \sum_{k=n}^{p} u_k \right\|$ <u>indépendamment de p</u> ($p \geqslant n$) par une suite de limite nulle.

2.4 – Séries absolument convergentes

Définition 8

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans E est dite **absolument convergente** si et seulement si la série $\sum \| u_n \| \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est convergente.

Théorème 5

Soit E un espace de Banach et $\sum u_n$ une série à valeurs dans E.

Pour que $\sum u_n$ soit convergente, il est **suffisant** mais **non nécessaire** que $\sum u_n$ soit absolument convergente.

☞ Si $\sum u_n$ est absolument convergente, $\sum \| u_n \|$ vérifie le critère de Cauchy, or, on a :

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \| u_k \|,$$

donc $\sum u_n$ vérifie aussi le critère de Cauchy et E étant complet, $\sum u_n$ est convergente (d'après le théorème 4).

La condition n'est pas nécessaire car il existe des séries réelles qui sont convergentes et non absolument convergentes. Un exemple est celui de la **série harmonique alternée** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, en effet on sait que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge et on verra plus loin que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (exemple 2).

2.5 – Séries semi-convergentes

Définition 9

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans E est dite **semi-convergente** si et seulement si elle est convergente mais non absolument convergente.

3. Suites et séries

On peut, dans certains cas, conclure à la nature d'une série $\sum u_n$ en étudiant directement la suite (U_n) de ses sommes partielles. Pratiquement, ceci sera possible lorsque l'on pourra donner de $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ une expression simple en fonction de n.

Exemple 1 La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} a^n$, $a \in \mathbb{C}$, (par convention $\forall a \in \mathbb{C}, a^0 = 1$).

- Si $a \neq 1$ $\quad U_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.
- Pour $|a| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{1}{1-a}$.

La série géométrique est alors convergente avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

- Pour $|a| \geqslant 1$, a^n ne tend pas vers zéro, donc $\sum a^n$ est grossièrement divergente.

Formulaire 1

La série géométrique $\sum a^n \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Exemple 2 La série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Sachant que $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t$, $(k \in \mathbb{N}^*)$, il vient : ✎(10)

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ell n\, 2$ et $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. D'où $|U_n - \ell n\, 2| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Ce qui montre que la série harmonique alternée est convergente, de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{n\to+\infty} U_n = \ell n\, 2.$$

✎(10) Ce qui paraît être ici une «astuce» est en fait une méthode liée aux séries entières (voir le chapitre **5**).

Exemple 3 Série $\sum u_n$ dont le terme général s'écrit $u_n = h_{n+1} - h_n$.

D'après le théorème 2, la suite (h_n) et la série $\sum u_n$ sont de même nature et, dans le cas de la convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (h_{n+1} - h_n) = -h_0 + \lim_{n\to+\infty} h_n \text{ ✎(11)}$$

✎(11) Il suffit de remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = h_{n+1} - h_0$.

…/

/...
On dit parfois que la simplification de la somme est due à un **téléscopage** ou encore que la série est **télescopique**.

- Application. Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1}$.

On a ici $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan} n$

donc, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(n+1) = \frac{\pi}{2}$, la série proposée converge avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Opérations sur les séries

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à valeurs dans E et λ un scalaire ($\lambda \in \mathbb{K}$).

- Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \lambda u_n$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum \left(u_n + v_n\right)$ converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_n + v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge. ✎(12)

✎(12) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire a priori de $\sum (u_n + v_n)$.

5. Groupement de termes

Définition 10

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans E, et φ une application **strictement croissante** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\varphi(0) = 0$.

La série de terme général $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k \quad$ est dite déduite de $\sum u_n$ par **groupement des termes** ou par **sommation par tranches** (définies au moyen de la fonction φ). ✎(13)

✎(13) **Exemple**
$\varphi : n \mapsto 2n, v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.
$\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas nécessairement de même nature : par exemple, pour $u_n = (-1)^n$ et $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$, $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge (série nulle).

On conserve les notations de la définition 10.

Théorème 6

a) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

b) Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge.

☞ a) Cette proposition résulte de ce que $\left(V_n\right)$, suite des sommes partielles de $\sum v_n$, est extraite de $\left(U_n\right)$, suite des sommes partielles de $\sum u_n$. ✎(14)

b) C'est la contraposée de la proposition a).

✎(14)
$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{\varphi(n+1)-1} u_k = U_{\varphi(n+1)-1}$$

Théorème 7

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et s'il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) - \varphi(n) \leqslant M$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

a) D'après le théorème 6, on a déjà : $\left(\sum u_n \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\sum v_n \text{ converge}\right)$.

b) ▪ Montrons maintenant : $\left(\sum v_n \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\sum u_n \text{ converge}\right)$.

Lemme :

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathbb{N}$, unique, tel que $\varphi(p_n) \leqslant n < \varphi(p_n + 1)$.

De plus, on a $\lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty$.

▪ Si p_n existe, on a $p_n = \max\left\{p \in \mathbb{N}, \varphi(p) \leqslant n\right\}$, d'où l'unicité.

▪ Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(k) \geqslant k$, il en résulte que le sous-ensemble de $\mathbb{N}$, $\left\{p \in \mathbb{N}, \varphi(p) \leqslant n\right\}$ est majoré par n, comme il est non vide (il contient 0), il admet un plus grand élément, ce qui assure l'existence de p_n.

▪ En écrivant $\varphi(p) = \varphi(p) - \varphi(0) = \sum_{k=1}^{p} \left[\varphi(k) - \varphi(k-1)\right] \leqslant pM$, on obtient :

$$n < \varphi(p_n + 1) \leqslant (p_n + 1)M \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty.$$

Démonstration de b)

Formons $\| V_{p_n} - U_n \| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\varphi(p_n+1)-1} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\varphi(p_n+1)-1} \| u_k \|$.

On a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n = \sup_{p \geqslant n} \| u_p \|$ et $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

En remarquant que $\varphi(p_n + 1) - 1 - n \leqslant M$, on obtient :

$$\| V_{p_n} - U_n \| \leqslant M a_n \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \to +\infty} U_n - V_{p_n} = 0.$$

Par ailleurs, en posant $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, on a $\lim_{n \to +\infty} V_n = V$, donc, puisque (d'après le lemme) $\lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty$, il vient $\lim_{n \to +\infty} V_{p_n} = V$, et, finalement $\lim_{n \to +\infty} U_n = V$.

Exemple 4 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, $n \geqslant 2$. ✎(15)

✎(15) Dans chacun de ces deux exemples, $\sum v_n$ pourra être étudiée au moyen de la règle des équivalents car v_n est de signe constant (cf. section **B**).

$\sum_{n \geqslant 2} u_n$ est de même nature que $\sum_{n \geqslant 1} v_n$, avec :

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{-1}{2n(2n+1)}.$$

Exemple 5 $u_n = \dfrac{\cos\left(2n\dfrac{\pi}{3}\right)}{n}$, $n \geqslant 1$.

$\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est de même nature que $\sum_{n \geqslant 0} v_n$, avec :

$$\begin{aligned} v_n = u_{3n+1} + u_{3n+2} + u_{3n+3} &= \frac{-1}{2(3n+1)} - \frac{1}{2(3n+2)} + \frac{1}{3n+3} \\ &= \frac{-9n-5}{2(3n+1)(3n+2)(3n+3)}. \end{aligned}$$

6. Modification de l'ordre des termes

Définition 11

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans E et σ une permutation de $\mathbb{N}$.
La série $\sum v_n$ de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ est dite déduite de $\sum u_n$ par **modification de l'ordre des termes** ou par **réarrangement** (associé à la permutation de σ).

Remarques

1) **Un réarrangement peut modifier la nature d'une série.**

Considérons, par exemple, la série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. ✎[16]

✎[16] On a vu à l'occasion de l'exemple 2 qu'il s'agit d'une série convergente.

On peut réarranger $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en une suite $(u'_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\sum u'_n$ puisse, par un regroupement de termes, donner une série $\sum v_n$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > \frac{1}{n+1}$.

Il suffit en effet de définir (u'_n) de façon à pouvoir poser :

$$v_0 = 1$$

$$v_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{15} > \frac{1}{2}$$

$$v_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{51} > \frac{1}{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2p_n+1} + \cdots + \frac{1}{2p_{n+1}-1} > \frac{1}{n+1}$$

etc.

(L'existence de p_{n+1} est assurée par le fait que la série $\sum_{k\geqslant p_n} \frac{1}{2k+1}$ est divergente.)

Par construction $\sum v_n$ est divergente car $\sum_{k=0}^{n-1} v_k \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, ✎[17] donc, d'après le théorème 6, $\sum u'_n$ est également divergente.

✎[17] et on sait que $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=+\infty$.

Par modification de l'ordre des termes, on a ainsi transformé une série convergente en une série divergente.

2) **Un réarrangement peut, sans changer la nature, modifier la somme d'une série.**

Considérons toujours la série harmonique alternée $\sum u_n$ transformée par la modification de l'ordre des termes en :

$$\sum_{n\geqslant 1} u'_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n+1} - \cdots$$

D'après le théorème 7, $\sum_{n\geqslant 1} u'_n$ est de même nature et a éventuellement même somme que :

$$\sum_{n\geqslant 1} v_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{4n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) + \cdots$$

Or, on constate que $\sum_{n\geqslant 1} v_n = \frac{1}{2} \sum_{n\geqslant 1} u_n$.

En conséquence, $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et, donc, $\sum_{n\geqslant 1} u'_n$ sont convergentes, de somme $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Le réarrangement «a divisé la somme par 2» !

Définition 12

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans E est dite **commutativement convergente** lorsqu'elle est convergente et que toute série $\sum v_n$ qui s'en déduit par modification de l'ordre des termes est convergente, de même somme. ✎[18]

✎[18] Des exemples nous seront fournis par les séries à termes réels positifs et les séries absolument convergentes.

B. Séries à termes réels positifs

Certains résultats de cette section font appel à la notion de fonction intégrable sur un intervalle quelconque qui sera développée dans le chapitre 6. Leur étude pourra être réservée à une seconde lecture.

Remarques préliminaires

- On a vu que l'on ne change pas la **nature** d'une série lorsque l'on modifie un nombre fini de termes. Les résultats qui suivent concernant la nature des séries à termes positifs sont donc valables pour les **séries à termes positifs réels à partir d'un certain rang**.
- Si $\sum u_n$ est à termes réels négatifs, à partir d'un certain rang, $\sum -u_n$ est de même nature et à termes réels positifs à partir d'un certain rang. Le présent paragraphe permet donc d'étudier les **séries réelles de signe constant à partir d'un certain rang**.

1. Théorème fondamental – Conséquences

Théorème 8

Pour qu'une série $\sum u_n$ à termes réels positifs soit convergente, il faut et il suffit que la suite $\left(U_n\right)_{\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles soit majorée.

Dans ces conditions, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. ✎[19]

✎[19] Dans le cas de la divergence $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$.

☞ Il suffit de remarquer que $\left(U_n\right)_{\mathbb{N}}$ est, dans ce cas, une suite croissante.

Remarque

On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leqslant U$ avec $U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Corollaire 1

Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs et une série $\sum v_n$ s'en déduisant par sommation par tranches sont de même nature.

☞ Soit $\left(U_n\right)_{\mathbb{N}}$ et $\left(V_n\right)_{\mathbb{N}}$ les suites de sommes partielles.
Si $\sum u_n$ converge, on sait que $\sum v_n$ converge et les sommes sont égales (cf. théorème 6).
Si $\sum u_n$ diverge, on a $\lim\limits_{+\infty} U_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} V_n = +\infty$, car $\left(V_n\right)_{\mathbb{N}}$ est extraite de $\left(U_n\right)_{\mathbb{N}}$.

Corollaire 2

Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs et toute série $\sum u_{\sigma(n)}$, qui s'en déduit par réarrangement, sont de même nature. Si elles convergent, elles ont même somme. ✎[20]

✎[20] Toute série convergente à termes réels positifs est donc commutativement convergente.

☞ Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\sigma(n)}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n} v_k .$$

(i) Supposons $\sum u_n$ convergente.
En remarquant que la positivité des u_k donne :

$$V_n \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k \quad \text{où on a posé } N = \max\left\{ \sigma(k) \,/\, 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$$

le théorème 8 donne que $\sum v_n$ est convergente.

De plus, avec $U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $V = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, on obtient alors $V \leqslant U$.

(ii) En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{\sigma^{-1}(n)}$, la proposition (i) ci-dessus montre que, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum v_{\sigma^{-1}(n)} = \sum u_n$ est convergente avec $U \leqslant V$.
Les propositons (i) et (ii) prouvent que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge et que, dans le cas de la convergence, elles ont même somme.

Théorème 9

Comparaison d'une série et d'une intégrale

Soit f une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, $(a \in \mathbb{R}_+)$, continue par morceaux, **positive et décroissante**.

a) La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \quad (n \geqslant a+1)$ est convergente.

b) La série de terme général $u_n = f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\left[a, +\infty\right[$. ✎[21]

✎[21] Dans la pratique, ce résultat permettra de ramener l'étude de la nature d'une série à celle d'une intégrabilité.

☞ a) w_n n'a de sens que pour $n \geqslant n_0 + 1$, où n_0 est le plus petit entier naturel tel que $n_0 \geqslant a$.
Puisque f est positive décroissante, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on a :

$$0 \leqslant w_n \leqslant f(n-1) - f(n) \text{ donc } W_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} w_k \leqslant f\left(n_0\right) - f(n) \leqslant f\left(n_0\right).$$

La série $\sum w_n$ à termes réels positifs est donc convergente d'après le théorème 8.

b) Posons $U_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$, $\left(n \geqslant n_0\right)$; avec la relation de Chasles on obtient :

$$W_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) = \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t - U_n + f\left(n_0\right)$$

donc, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n$ existe (d'après a)), les suites $\left(U_n\right)$ et $\left(I_n\right)$ avec $I_n = \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. La fonction f étant positive, on sait qu'elle est intégrable sur $\left[n_0, +\infty\right[$ si et seulement si la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente ✎[22] donc si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente.

✎[22] Voir le chapitre 6.

Application

- **Série de Riemann :** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

  Si $\alpha \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.

  Si $\alpha > 0$, par application du théorème 9, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ est intégrable sur $\left[1, +\infty\right[$, donc si et seulement si $\alpha > 1$. ✎[23]

✎[23] Voir le chapitre 6.

Formulaire 2

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ **converge si et seulement si** $\alpha > 1$.

- **La constante d'Euler**

  Il existe un réel γ appelé constante d'Euler tel que lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ell n\, n + \gamma + o(1) \text{ ✎[24]}$$

✎[24] **Remarque**
Ce nombre a été étudié en Analyse MPSI, chapitre 9.
Euler en a fourni les 16 premières décimales en 1781.
À 5.10^{-5} près, on a :
$\gamma \approx 0{,}5772$
et plus précisément :
$0{,}57\,721 < \gamma < 0{,}57\,722$.

☞ Il suffit d'appliquer le théorème 9 avec $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 2)$ est convergente d'où l'existence d'un réel ℓ tel que : $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} w_k = \lim_{n\to+\infty} \left(\ell n\, n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right)$.

On obtient le résultat annoncé avec $\gamma = 1 - \ell$.

- **Série de Bertrand :** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ell n\, n)^{\beta}}$ **$(\beta \in \mathbb{R})$.**

Soit $a = \sup\left(2, e^{-\beta}\right)$, $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ell n\, x)^{\beta}}$ est positive, décroissante sur $\left[a, +\infty\right[$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(\ell n\, n)^{\beta}}$ est convergente si et seulement si $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ell n\, x)^{\beta}}$ est intégrable sur $\left[a, +\infty\right[$ donc aussi si et seulement si $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\beta}}$ est intégrable sur $\left[\ell n\, a, +\infty\right[$. ✎(25)

✎(25) Utiliser le changement de variable défini par $t = \ell n\, x$ (cf. chapitre 6).

Formulaire 3

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ell n\, n)^{\beta}}$ **converge si et seulement si** $\beta > 1$.

2. Premier théorème de comparaison

Théorème 10

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :

a) pour que $\sum u_n$ converge, il suffit que $\sum v_n$ converge, et, dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k .$$

b) pour que $\sum v_n$ diverge, il suffit que $\sum u_n$ diverge.

☞ Notons $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leqslant U_n \leqslant V_n$.

a) La proposition a) est alors conséquence immédiate du théorème 8, et par passage à la limite, l'inégalité $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{p} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{p} v_k$ donne $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

b) D'autre part, si $\sum u_n$ diverge, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, donc, de $U_n \leqslant V_n$, on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ et $\sum v_n$ diverge : c'est la proposition b).

__Applications__

Critère de domination

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs au voisinage de $+\infty$ telles que $u_n = o\left(v_n\right)$ (resp. $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$) quand $n \to +\infty$. Alors :

- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge ;
- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum v_n$ diverge.

☞ Dans les deux cas, il existe $a > 0$ et un rang n_0 tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant a v_n$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 10 aux séries tronquées $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$.

✎(26) **Remarque**. Les conditions $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ se traduisent respectivement par $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$ et $(n^\alpha u_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée d'où le nom de la règle.

Critère de Riemann ou règle $n^\alpha u_n$ ✎(26)

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

a) Pour que $\sum u_n$ converge, **il suffit** qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \textbf{(resp. } u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\textbf{)} \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

b) Pour que $\sum u_n$ diverge, **il suffit** qu'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que :

$$\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n) \quad \textbf{(resp. } \frac{1}{n^\alpha} = \mathcal{O}(u_n)\textbf{)} \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

☞ On applique le critère de domination sachant que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$ et diverge lorsque $\alpha \leqslant 1$.

Exemple. Les séries de Bertrand : $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ell n\, n)^\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$**.**

- Le cas $\alpha = 1$ a été étudié précédemment.

Noter, que pour $\beta \leqslant 0$, l'inégalité $\frac{1}{n(\ell n\, n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$ peut être utilisée.

- Cas $\alpha > 1$: considérons γ réel tel que $1 < \gamma < \alpha$.

On a $n^\gamma u_n = n^{\gamma - \alpha} (\ell n\, n)^{-\beta}$, et, puisque $\gamma - \alpha < 0$, il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} n^\gamma u_n = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$ ✎(27)

✎(27) Noter que ceci est vrai quel que soit β.

D'après la règle de Riemann, $\sum u_n$ est convergente.

- Cas $\alpha < 1$: on a ici $n u_n = n^{1-\alpha} (\ell n\, n)^{-\beta}$, et, puisque $1 - \alpha > 0$, il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} n u_n = +\infty \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{n} = o(u_n)$$ ✎(28)

✎(28) De nouveau quel que soit β.

D'après la règle de Riemann, $\sum u_n$ est divergente.

Formulaire 4

$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ell n\, n)^\beta}$ converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Règle des équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles telles que, au voisinage de $+\infty$, $v_n \geqslant 0$ **et** $u_n \sim v_n$.
Alors, on a également $u_n \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$ et les deux séries sont de même nature.

☞ On a, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n - v_n = o(v_n)$ et $v_n \geqslant 0$.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2} v_n$, donc $u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n$ et $v_n \leqslant 2u_n$. ✎(29) On conclut avec le théorème 10.

✎(29) Remarquer que $v_n \leqslant 2u_n$ donne $u_n \geqslant 0$.

Remarque

Cette règle s'applique aux séries de signe constant à partir d'un certain rang, mais elle est en défaut si les séries comparées ne sont pas de signe constant au voisinage de $+\infty$, (voir *Mise en œuvre*, Exercice 8).

Application. Étude pratique d'une série $\sum u_n$.

On s'intéresse à des séries de signe constant à partir d'un certain rang.

Dans de nombreux cas, on pourra :

1) déterminer une série $\sum v_n$ telle que $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$, donc de même nature que $\sum u_n$;

2) puis conclure à la nature de $\sum v_n$ soit directement soit avec la règle de Riemann. ✎(30)

✎(30) Il est clair qu'il faudra s'efforcer de trouver v_n la plus simple possible.

Exemple 6 Étude de la série de terme général $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$, $(a \in \mathbb{R})$.

En développant u_n on obtient : $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a}{3} - \dfrac{3}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Si $a \neq \dfrac{9}{2}$, $u_n \sim \left(\dfrac{a}{3} - \dfrac{3}{2}\right)\dfrac{1}{n}$ et $\sum u_n$ diverge d'après la règle des équivalents.

Si $a = \dfrac{9}{2}$, $u_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $\sum u_n$ converge d'après la règle $n^\alpha u_n$.

Exemple 7 Étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\left[(n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right]$.

$$(n+1)^{1+\frac{1}{n}} = n^{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} = n\, e^{\frac{\ell n\, n}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

$$\text{Or } \left(1+\frac{1}{n}\right)\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right). \text{ ✎(31)}$$

✎(31) Le terme prépondérant en exposant est donc $\dfrac{\ell n\, n}{n}$.

$$\text{Donc } (n+1)^{1+\frac{1}{n}} = n\, e^{\frac{\ell n\, n}{n} + o\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right)} = n\left(1 + \frac{\ell n\, n}{n} + o\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right)\right) = n + \ell n\, n + o(\ell n\, n).$$

$$\text{De même } (n-1)^{1-\frac{1}{n}} = n\, e^{-\frac{\ell n\, n}{n} + o\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right)} = n - \ell n\, n + o(\ell n\, n).$$

Finalement $(n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}} = 2\,\ell n\, n + o(\ell n\, n)$ et $u_n \sim 2\dfrac{\ell n\, n}{n^\alpha}$.

D'après l'étude des séries de Bertrand, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. ✎(32)

✎(32) Les séries de Bertrand ne font pas partie des séries de référence admises par le programme. Il faudra donc, dans une telle situation, être en mesure de conclure avec la règle de Riemann.

3. Sommation des relations de comparaison

3.1 – Cas des séries convergentes

Théorème 11

Sommation des prépondérances

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels telles que :

- $\sum v_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang,
- $\sum v_n$ converge,
- $u_n = o(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Alors les restes d'ordre n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad\text{et}\quad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

vérifient $R_n = o\big(T_n\big)$ quand n tend vers $+\infty$.

☞ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \varepsilon v_n$.

La série $\sum u_n$ est absolument convergente d'après le premier théorème de comparaison.

Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ c'est-à-dire $|R_n| \leqslant \varepsilon T_n$.

Théorème 12

Sommation des équivalences

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs à partir d'un certain rang telles que :

- $\sum u_n$ converge,
- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Alors, $\sum v_n$ converge également et les restes R_n et T_n vérifient $R_n \underset{+\infty}{\sim} T_n$.

☞ On a ici $u_n - v_n = o(v_n)$. Le théorème 11 s'applique et donne :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_n - v_n) = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad R_n - T_n = o(T_n).$$

Exemple 8 Trouver un équivalent simple de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers $+\infty$:

a) en considérant la série de terme général $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

b) en considérant la série de terme général $w_n = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

a) $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$. D'après le théorème 12, on a alors $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

Or $\sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

b) De $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ on déduit $w_n \sim \frac{1}{n^2}$.

D'où, d'après le théorème 12, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

Écrivons alors $\sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=n}^{p-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

Avec la relation de Chasles, il vient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{p \to +\infty} \int_n^p \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n}, \quad ✎(33)$$

d'où, finalement, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

✎ (33) Après l'étude du chapitre 6, on écrira directement $\sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{n}$.

Exemple 9 Trouver un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$:

a) de $A_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $\alpha > 1$, b) de $B_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ell n\, k)^\alpha}$ $\alpha > 1$.

a) De $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ on déduit $\frac{1}{n^\alpha} \sim \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ et le théorème 12 donne :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=n}^{p-1}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ et avec la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{p\to+\infty}\int_n^p\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{p\to+\infty}\frac{n^{1-\alpha}-p^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$ ✎(34)

d'où, finalement, $A_n \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

b) On a de même $\dfrac{1}{n(\ell n\, n)^\alpha} \sim \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ell n\, x)^\alpha}$ d'où on déduit d'après le théorème 12 :

$$B_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ell n\, x)^\alpha} \quad \text{c'est-à-dire} \quad B_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)(\ell n\, n)^{\alpha-1}}.$$ ✎(35)

✎(34) Après l'étude du chapitre 6 on écrira directement $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

✎(35) On peut procéder comme ci-dessus ou, avec le chapitre 6, écrire directement $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ell n\, x)^\alpha} = \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ell n\, x)^\alpha}$.

3.2 – Cas des séries divergentes

Théorème 13

Sommation des prépondérances

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels telles que :

- $\sum v_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang,
- $\sum v_n$ diverge,
- $u_n = o\left(v_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Alors, les sommes partielles :

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

vérifient $U_n = o\left(V_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

☞ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}v_n$.

En écrivant, pour $n \geqslant n_0$, $U_n = U_{n_0} + \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^n u_k$, on obtient :

$$|U_n| \leqslant |U_{n_0}| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n_0+1}^n v_k \text{ soit aussi } |U_n| \leqslant |U_{n_0}| - \frac{\varepsilon}{2}V_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}V_n .$$

Par ailleurs, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{|U_{n_0}| - \frac{\varepsilon}{2}V_{n_0}}{V_n} = 0$ et il existe :

$$n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_1 \quad |U_{n_0}| - \frac{\varepsilon}{2}V_{n_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}V_n.$$

Finalement, $n \geqslant \max(n_0, n_1) \Rightarrow |U_n| \leqslant \varepsilon V_n$, d'où la conclusion.

Théorème 14

Sommation des équivalences

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs à partir d'un certain rang et telles que :

- $\sum v_n$ diverge,
- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Alors, $\sum u_n$ diverge également et les sommes partielles U_n et V_n vérifient $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$.

☞ On a ici $u_n - v_n = o\left(v_n\right)$. Le théorème 13 s'applique et donne :

$$\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad U_n - V_n = o\left(V_n\right).$$

Exemple 10 Vérifier que, lorsque n tend vers $+\infty$ $\dfrac{1}{n\,\ell n\,n} \sim \Big(\ell n\big(\ell n(n+1)\big) - \ell n\,\ell n\,n\Big)$.

En déduire un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ell n\,k}$.

Un calcul de développements asymptotiques donne $\ell n\big(\ell n(n+1)\big) - \ell n(\ell n\,n) \sim \dfrac{1}{n\,\ell n\,n}$.

D'après l'étude des séries de Bertrand, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,\ell n\,n}$ est divergente à termes réels positifs, donc le théorème 14 donne $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ell n\,k} \sim \sum_{k=2}^{n} \big(\ell n\,\ell n(k+1) - \ell n\,\ell n\,k\big)$ soit :

$$\sum_{n=2}^{n} \frac{1}{k\,\ell n\,k} \sim \left[\ell n\left(\ell n(n+1)\right) - \ell n\,\ell n\,2\right] \sim \ell n(\ell n\,n).$$

Exemple 11 Trouver un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ell n\,k)^{\alpha}}$ $\alpha < 1$.

La série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{k(\ell n\,n)^{\alpha}}$ avec $\alpha < 1$ est divergente.

$x \mapsto \dfrac{1}{x(\ell n\,x)^{\alpha}}$ est décroissante au voisinage de $+\infty$, ✎(36) il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ $\displaystyle\frac{1}{(n+1)(\ell n(n+1))^{\alpha}} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ell n\,x)^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{n(\ell n\,n)^{\alpha}}$ et on en déduit :

$$\frac{1}{n(\ell n\,n)^{\alpha}} \sim \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ell n\,x)^{\alpha}}.$$ ✎(37)

✎(36) Pour $\alpha \geqslant 0$ c'est vrai sur $]1,+\infty[$.

✎(37) puisque $(n+1)(\ell n(n+1))^{\alpha} \sim n(\ell n\,n)^{\alpha}$.

Le théorème 14 donne alors $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ell n\,k)^{\alpha}} \sim \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ell n\,x)^{\alpha}}$.

Soit $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ell n\,k)^{\alpha}} \sim \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ell n\,x)^{\alpha}}$.

D'où encore $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ell n\,k)^{\alpha}} \sim \frac{(\ell n(n+1))^{1-\alpha} - (\ell n\,2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sim \frac{(\ell n\,n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Application : développement asymptotique d'une suite

- Cas d'une suite $(u_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$(u_n)_{\mathbb{N}}$ est, à une constante additive près, la suite des sommes partielles de la série de terme général positif $v_n = u_n - u_{n-1}$: $V_n = \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} v_k = u_n - u_{n_0}$.

On a alors $u_n \sim V_n$ et pour la série V_n on peut essayer d'appliquer le théorème 14.

- Cas d'une suite $(u_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$.

On introduit encore la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$ et dans ce cas :

$$\ell - u_n = \lim_{N\to+\infty} u_N - u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

On est ramené à chercher un équivalent de R_n reste d'ordre n de la série $\sum v_n$ dont le terme général est de signe constant : on peut essayer d'appliquer le théorème 12.

Exemple 12 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_n = e^n n^{-n} n!$
et $(v_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ell n\, u_n$.

a) Montrer qu'il existe λ et μ réels tels que $v_n = \lambda\, \ell n\, n + \mu + o(1)$.

b) En déduire qu'il existe K réel tel que, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n \sim K\sqrt{n}$. On ne demande pas de calculer K.

a) Soit $w_n = v_{n+1} - v_n = \ell n\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, après simplification :

$$w_n = 1 - n\,\ell n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{d'où} \quad w_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le théorème 14 donne alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k \sim \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ell n\, n$, on en déduit $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\ell n\, n$.

Formons donc maintenant $x_n = v_{n+1} - \dfrac{1}{2}\ell n(n+1) - \left(v_n - \dfrac{1}{2}\ell n\, n\right)$, on obtient :

$$x_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ell n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

Donc $x_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et la série de terme général x_n est absolument convergente.

Sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k = v_n - \frac{1}{2}\ell n\, n - v_1$, de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} x_k = A$ on déduit :

$$v_n = \frac{1}{2}\ell n\, n + A + v_1 + o(1).$$

b) Avec le a), on obtient $u_n = e^{v_n} = \sqrt{n}e^{\mu + o(1)}$ donc $u_n \sim K\sqrt{n}$ où on a posé $K = e^{\mu}$.

Exemple 13 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{th} k - n$.

a) Montrer que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente.

b) On pose $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$, trouver un équivalent simple de $\ell - u_n$.

a) La suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est de même nature que la série $\sum v_n$ avec $v_n = u_n - u_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

On a ici $v_n = \operatorname{th} n - 1 = \dfrac{-2e^{-2n}}{1 + e^{-2n}}$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -2e^{-2n}$ et $\sum v_n$ est de même nature que la série géométrique $\sum e^{-2n}$, c'est-à-dire convergente.

b) En écrivant $\ell - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - u_{k-1})$, avec le théorème 12, on obtient :

$$\ell - u_n \sim -2\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-2k} \quad \text{donc} \quad \ell - u_n \sim \frac{2e^{-2n}}{1 - e^2}.$$

Théorème 15

La formule de Stirling

Lorsque n tend vers $+\infty$: $\quad n! \sim n^n\, e^{-n}\sqrt{2\,\pi\, n}.$

✎[38] La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.

☞ ✎[38] D'après l'exemple 12, il existe un réel K tel que :

$$n! \sim K\, n^n\, e^{-n}\sqrt{n} \qquad \textbf{(1)}$$

Il reste à évaluer K, ce que l'on peut faire avec les intégrales de Wallis étudiées en Analyse – MPSI, chapitre 9, exemple 12 :

en posant $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et au voisinage de $+\infty$, $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ **(2).**

Avec **(1)**, on obtient après simplication $W_{2n} \sim \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$ et d'après **(2)**, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_{2n}\sqrt{\frac{4n}{\pi}} = 1$ d'où $K = \sqrt{2\pi}$. La formule en résulte.

4. Théorème de comparaison logarithmique

Théorème 16

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.
On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n_0 \geqslant n \ \Rightarrow\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors :

a) pour que $\sum u_n$ converge, il suffit que $\sum v_n$ converge,

b) pour que $\sum v_n$ diverge, il suffit que $\sum u_n$ diverge,

c) dans le cas a), pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{u_n}{v_n}\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$.

- On a $\forall n > n_0, \frac{u_n}{u_{n_0}} = \prod\limits_{k=n_0}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}$ donc $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$ et les propositions a) et b) résultent du théorème 10.
- Supposons $\sum v_n$ convergente.

On a, pour tout $k \geqslant n \geqslant n_0$, $u_k \leqslant \frac{u_n}{v_n} v_k$ d'où $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{u_n}{v_n}\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Règle 1

Critère de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

a) S'il existe $k \in \left]0,1\right[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$,

alors, $\sum u_n$ converge, et pour tout $n \geqslant n_0$ $\quad 0 \leqslant R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{ku_n}{1-k}$.

b) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

c) S'il existe $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$, alors :

- si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge,
- si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement,
- si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

☞ Introduisons la série géométrique de terme général $v_n = k^n$: $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = k$.

a) est conséquence immédiate du théorème 16,

b) résulte de ce que $\left(u_n\right)_{n \geqslant n_0}$ est croissante, donc $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant u_{n_0} > 0$.

c) ▪ Si $\ell < 1$, soit k tel que $\ell < k < 1$, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, donc $\sum u_n$ converge d'après a).

▪ Si $\ell > 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement d'après b).

▪ Le cas $\ell = 1$ peut se produire aussi bien avec une série convergente $\left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)$ qu'avec une série divergente $\left(\sum \dfrac{1}{n}\right)$.

Exemple 14 Étudier les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$.

▪ $u_n = \dfrac{1}{n!}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et $\sum u_n$ converge.

▪ $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = e\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = e\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$ c'est-à-dire :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On se trouve dans le cas douteux : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, cependant, on a, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1 \sim \dfrac{1}{2n}$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1 > 0$ et $\sum v_n$ diverge. ✎(39)

✎(39) On peut aussi utiliser la formule de Stirling avec laquelle on obtient $v_n \sim \sqrt{2\pi n}$.

C. Séries absolument convergentes

1. Absolue convergence

1.1 – Méthodes d'étude

Pour étudier l'absolue convergence d'une série $\sum u_n$ à valeurs dans E, on utilisera les critères développés dans l'étude des séries à termes réels positifs.

En particulier, s'il existe $\sum v_n$ **à termes réels positifs convergente** telle que $u_n = o\left(v_n\right)$ ou $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$, $\sum u_n$ **est alors absolument convergente**.

1.2 – Propriétés générales

Théorème 17

MP*

Comparaison d'une série complexe à une intégrale

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[a, +\infty\right[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que f' soit intégrable ✎(40) sur $\left[a, +\infty\right[$.

Alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ est absolument convergente.

✎(40) Voir chapitre 6.

☞ w_n est définie pour $n \geqslant n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ est tel que $n_0 \geqslant a+1$.
f étant de classe $\mathcal{C}^1$, une intégration par parties donne :
$$\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = nf(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)\mathrm{d}t$$
donc $\quad w_n = (n-1)\big(f(n) - f(n-1)\big) - \displaystyle\int_{n-1}^{n} tf'(t)\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} (n-1-t)f'(t)\mathrm{d}t.$

On en déduit $\quad |w_n| \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$. Or, par définition, $\left|f'\right|$ est intégrable sur $\left[0,+\infty\right[$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$ existe, ce qui traduit que la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$ est convergente, et la majoration précédente donne la convergence de $\sum |w_n|$.

Exemple 15 Étudier la nature de la série de terme général : $u_n = \dfrac{\sin(\ell n\, n)}{n} \quad n \geqslant 1$.

Soit $f \ : \ t \mapsto \dfrac{\sin(\ell n\, t)}{t} \quad , \quad t \in [1,+\infty[$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[1,+\infty\right[$ avec $f'(t) = \dfrac{\cos(\ell n\, t) - \sin(\ell n\, t)}{t^2}$.

On a $\quad \left|f'(t)\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et f' est donc intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$. ✎ (41)

✎ (41) Car $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi le théorème 17 donne que la série de terme général : $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\sin(\ell n\, t)}{t}\mathrm{d}t - \frac{\sin(\ell n\, n)}{n}$ est absolument convergente et il en résulte que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$ avec :
$$v_n = \int_{n-1}^{n} \frac{\sin(\ell n\, t)}{t}\mathrm{d}t.$$
Calculons donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k = \int_{1}^{n} \frac{\sin(\ell n\, t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\ell n\, n} \sin u\mathrm{d}u = 1 - \cos(\ell n\, n).$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que $\sum v_n$ diverge et il en est de même pour $\sum u_n$.

Théorème 18

On suppose que E est de dimension finie : $\dim E = p$.
Soit $\left(e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de E, $\left(u_n\right)$ une suite de E et $\left(u_{i,n}\right)$, $i \in [\![1,p]\!]$, ses suites composantes.
La série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si les p séries composantes $\sum u_{i,n}$, $i \in [\![1,p]\!]$, sont absolument convergentes.

☞ E étant de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes : la nature d'une série ne dépend pas de la norme choisie.

Utilisons la norme définie par $\| x \|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |x_i| \quad$ avec $\quad x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i e_i$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\| u_n \|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |u_{i,n}|$ donc l'absolue convergence des séries $\sum u_{i,n}$ donne celle de $\sum u_n$.

De même, $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall n \in \mathbb{N}, |u_{i,n}| \leqslant \| u_n \|_1$, donc l'absolue convergence de $\sum u_n$ donne celle de chacune des séries $\sum u_{i,n}$, $i \in [\![1,p]\!]$.

- **Cas particulier**

Une série $\sum u_n$ à termes complexes est absolument convergente si et seulement si la série des parties réelles $\sum a_n$ et la série des parties imaginaires $\sum b_n$ sont absolument convergentes, $(u_n = a_n + ib_n, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2)$.

Théorème 19

Si E est un espace de Banach, une série absolument convergente $\sum u_n$, à valeurs dans E, est commutativement convergente.

☞ D'après le corollaire 2 du théorème 8, toute série $\sum u_{\sigma(n)}$ déduite de $\sum u_n$ par réarrangement ✎(42) est encore absolument convergente. Il reste à comparer les sommes.

✎(42) σ est une permutation de $\mathbb{N}$.

La série $\sum \| u_n \|$ vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n > n_0 \ \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+p} \| u_k \| < \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

On note, pour tout n, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$, il vient :

$$U_n - V_n = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k u_k$$

où on a posé $N = \max\left\{n, \sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\right\}$ et pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $\varepsilon_k = 0, 1$ ou -1.

Supposons $n > n_0$ donc $N > n_0$. Pour $k \in [\![0, n_0]\!]$ on a $\varepsilon_k = 0$ si et seulement si $k \in \left\{ \sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\right\}$ donc si et seulement si $\sigma^{-1}(k) \in [\![0, n]\!]$ soit aussi $n \geqslant \sigma^{-1}(k)$.

Soit alors $n_1 = \max\left\{n_0, \sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}\left(n_0\right)\right\}$. Pour $n > n_1$, on a :

$$\forall k \in [\![0, n_0]\!],\ \varepsilon_k = 0 \ \text{ donc } \ U_n - V_n = \sum_{k=n_0+1}^{N} \varepsilon_k u_k$$

et, d'après **(1)**, $\|U_n - V_n\| \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{N} \| u_k \| < \varepsilon$.

On a ainsi montré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant n_1 \ \Rightarrow \ \| U_n - V_n \| < \varepsilon$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - V_n = 0$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Théorème 20

L'ensemble des séries absolument convergentes à valeurs dans E, espace de Banach, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes à valeurs dans E.

☞ D'après le théorème 5, c'est un sous-ensemble non vide (il contient la série nulle) de l'ensemble des séries convergentes à valeurs dans E, et il est stable par combinaison linéaire car :

$$\|\lambda u_n + \mu v_n\| \leqslant |\lambda|\ \ \|u_n\| + |\mu|\ \ \|v_n\|.$$

2. Les espaces ℓ^1 et ℓ^2

Propriété 6

L'ensemble des suites $(u_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, telles que $\sum |u_n|$ soit convergente, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'application $N_1 : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ où $u = (u_n)_{\mathbb{N}}$ est une norme sur cet espace.

L'espace vectoriel normé ainsi défini est noté $\ell^1(\mathbb{K})$ ou ℓ^1.

☞ On sait déjà que l'ensemble des séries absolument convergentes, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (théorème 20), on vérifie sans difficulté que N_1 est une norme.

Propriété 7

Une suite $u = (u_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite de **carré sommable** lorsque la série $\sum |u_n|^2$ est convergente. L'ensemble de ces suites est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'application $(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$ où $u = (u_n)_{\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{\mathbb{N}}$ est un produit scalaire euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. ✎(43)

L'espace préhilbertien (réel ou complexe) ainsi défini est noté $\ell^2(\mathbb{K})$ ou ℓ^2.

✎(43) La norme euclidienne ou hermitienne associée est :
$$N_2 : u \mapsto \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

☞ L'inégalité $|a + b|^2 \leqslant 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$ valable dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ permet de vérifier que toute combinaison linéaire de suites de carrés sommables est aussi de carré sommable.

On vérifie facilement que $(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$ est un produit scalaire. ✎(44)

✎(44) Voir Algèbre – Géométrie MP, chapitre 6.

3. Séries d'éléments d'une algèbre de Banach

3.1 – Série géométrique

Théorème 21

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach (par exemple une algèbre normée de dimension finie) dont l'élément unité est noté e.

Pour tout $u \in \mathcal{A}$ tel que $\| u \| < 1$, la série $\sum u^n$ est absolument convergente, $e - u$ est inversible dans $\mathcal{A}$ avec $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$. ✎(45)

✎(45) Noter que par convention $u^0 = e$.

☞ $\mathcal{A}$ étant une algèbre normée, on a pour tout $u \in \mathcal{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\| u^n \| \leqslant \| u^{n-1} \| \, \| u \|$ donc avec $\| u^0 \| = \| e \| = 1$ il vient par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \| u^n \| \leqslant \| u \|^n.$$
Pour $\| u \| < 1$, la série de terme général $\| u \|^n$ est géométrique convergente, il en résulte que $\sum \| u^n \|$ est convergente donc que $\sum u^n$ est absolument convergente.

L'identité $(e - u) \bullet \left(e + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}\right) = e - u^n$ avec $\lim_{n \to +\infty} u^n = 0$ donne alors en passant à la limite suivant n : $(e - u) \bullet \sum_{k=0}^{+\infty} u^k = e$.

Si $\mathcal{A}$ est de dimension finie, cela suffit pour conclure à $e - u$ est inversible avec :
$$(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

sinon il faut aussi invoquer la relation $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u^k\right) \bullet (e - u) = e$ pour obtenir la même conclusion.

3.2 – Série exponentielle

Théorème 22

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach (par exemple une algèbre normée de dimension finie) dont l'élément unité est noté e.

Pour tout $u \in \mathscr{A}$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente, sa somme est appelée l'exponentielle de u et notée $\exp u$:

$$\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} .$$ ✎(46)

✎(46) Un cas particulier important correspond à $\mathscr{A} = \mathbb{C}$. On obtient alors la fonction exponentielle complexe qui sera étudiée plus en détails dans le chapitre 5 où nous démontrerons que pour tout x réel :

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

☞ On a $\left\| \frac{u^n}{n!} \right\| \leqslant \frac{\|u\|^n}{n!}$ et la série numérique de terme général $\frac{\|u\|^n}{n!}$ est convergente d'après le critère de d'Alembert.

3.3 – Produit de Cauchy de deux séries complexes

Définition 13

On appelle **produit de Cauchy** de deux séries réelles ou complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$, la série $\sum w_n$ de terme général $\quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème 23

$\mathcal{S}(\mathbb{C})$ muni des trois opérations – somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire, produit de Cauchy – est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative unitaire.

☞ Même démonstration que pour la vérification de la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 24

Le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries convergentes à termes réels positifs, $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est une série convergente.

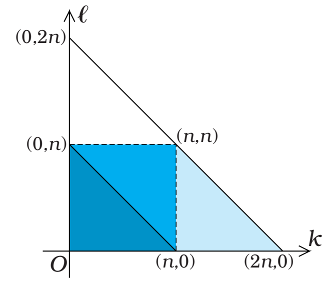
De plus : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$

☞ Posons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. On a :

$$W_n = \sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell, \quad T_n = \left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant k \leqslant n, 0 \leqslant \ell \leqslant n-k\right\}.$$

Posons $I_n = [\![0, n]\!]$, on a $\quad T_n \subset I_n^2 \subset T_{2n}$.

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ étant à termes réels positifs, on en déduit :



$$\sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in I_n^2} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in T_{2n}} \leqslant u_k v_\ell$$

c'est-à-dire $\quad W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}$.

$W_n \leqslant U_n V_n$ donne, pour tout n, $W_n \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$.

Donc, d'après le théorème 8, $\sum w_n$ converge ✎(47) et $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$.

✎(47) $\sum w_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée.

De $U_n V_n \leqslant W_{2n}$, on déduit ensuite par passage à la limite :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} w_k.$$

Finalement $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$.

Théorème 25

Le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries complexes absolument convergentes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est une série absolument convergente.

De plus : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

☞ On a, pour tout n, $|w_n| \leqslant w'_n$ avec $w'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|\ |v_{n-k}|$.

$\sum w'_n$ est le produit de Cauchy de $\sum |u_n|$ et de $\sum |v_n|$ qui sont des séries à termes réels positifs convergentes, donc, d'après le théorème 24, $\sum w'_n$ est convergente. Il en résulte que $\sum w_n$ est absolument convergente.

Avec les notations de la démonstration du théorème 24, on a :

$$U_n V_n - W_n = \sum_{(k,\ell)\in I_n^2\setminus T_n} u_k v_\ell$$

donc :

$$|U_n V_n - W_n| \leqslant \sum_{(k,\ell)\in I_n^2\setminus T_n} |u_k|\ |v_\ell| = \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} |v_\ell|\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} w'_k\right).$$

Or, d'après le théorème 24 :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} w'_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |v_k|\right).$$

En conséquence $\lim_{n\to+\infty} W_n - U_n V_n = 0$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right).$$

Exemple 16 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$. ✎(48)

✎(48) Voir théorème 22.

Montrer que l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ainsi définie vérifie :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z + z') = \exp(z)\exp(z').$$

Le théorème 25 donne :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\,\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}\right).$$

Donc $$\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z^k z'^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp\left(z + z'\right).$$

4. Séries doubles réelles ou complexes

Définition 14

Une suite double à valeurs dans $\mathbb{K}$ (49) est une application u de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{K}$.
Avec $u\ :\ (p,q)\mapsto u_{p,q}$, u est usuellement notée :

$$\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \text{ ou } \left(u_{p,q}\right)_{\mathbb{N}^2}.$$

(49) On peut, de même, définir les suites doubles à valeurs dans un espace vectoriel E.

Remarque

Comme dans le cas des suites usuelles, on peut être amené à considérer des suites doubles qui ne sont définies qu'à partir de certaines valeurs de l'un ou l'autre des deux indices.

Exemples

$\left(\dfrac{1}{p+q-1}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est une suite double définie pour $p\geqslant 1$ et $q\geqslant 1$.

$\left(\dfrac{\ell n\, p}{q+1}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est une suite double définie pour $p\geqslant 1$.

Propriété 8

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ des suites doubles à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. (50)

(50) On a le même résultat pour $E^{\mathbb{N}^2}$.

Théorème 26

Théorème de Fubini

Soit $\left(u_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que

(i) quel que soit $p\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{q\in\mathbb{N}} u_{p,q}$ est absolument convergente ;

(ii) la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} s_p$ avec $s_p=\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\left|u_{p,q}\right|$ est convergente.

Alors les séries $\displaystyle\sum_{q\in\mathbb{N}} u_{p,q}$, $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{p,q}$, $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ et $\displaystyle\sum_{q\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ sont convergentes et on a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

a) Envisageons d'abord le cas où $\left(u_{p,q}\right)_{\mathbb{N}^2}$ est à valeurs réelles positives.

Pour tout $q\in\mathbb{N}$, fixé, on a $\forall p\in\mathbb{N}$, $u_{p,q}\leqslant s_p=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{p,k}$ (51), or la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} s_p$ est convergente, donc $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{p,q}$ est convergente.

(51) Car les $u_{p,k}$ sont positifs.

On pose $s'_q=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et $S'_q=\displaystyle\sum_{k=0}^{q} s'_k=\sum_{k=0}^{q}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,k}$.

Puisqu'il s'agit d'une somme finie de séries convergentes, on a :

$$S'_q=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{q} u_{p,k}$$

et, avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} u_{p,k}\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty} u_{p,k}=s_p$ (52) il vient : $S'_q\leqslant\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} s_p$.

(52) Toujours car les $u_{p,k}$ sont positifs.

On en déduit que la série $\sum_{q\in\mathbb{N}} s'_q$ est convergente et que sa somme vérifie :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} s'_q \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} s_p$$

c'est-à-dire $S' \leqslant S$ où on a posé :

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} s_p = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \quad \text{et} \quad S' = \sum_{q=0}^{+\infty} s'_q = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

De même, on a :

$$S_p = \sum_{j=0}^{p} s_j = \sum_{j=0}^{p}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{j,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{p} u_{j,q} \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty} s'_q = S'$$

donc, en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient $S \leqslant S'$ et finalement $S = S'$.
Le théorème est démontré dans le cas des suites réelles positives.

b) On suppose maintenant que $(u_{p,q})_{\mathbb{N}^2}$ est une suite complexe vérifiant **(i)** et **(ii)**.

Remarquons d'abord que la suite $(|u_{p,q}|)_{\mathbb{N}^2}$ vérifie aussi les conditions **(i)** et **(ii)** donc, d'après le a), les séries :

$$\sum_{q\in\mathbb{N}} |u_{p,q}| \ , \ \sum_{p\in\mathbb{N}} |u_{p,q}| \ , \ \sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right) \quad \text{et} \quad \sum_{q\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right)$$

sont convergentes avec :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right).$$

On en déduit l'absolue convergence donc la convergence des séries :

$$\sum_{q\in\mathbb{N}} u_{p,q} \quad \text{et} \quad \sum_{p\in\mathbb{N}} u_{p,q}$$

puis, avec $s_p = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$, $s'_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et $|s_p| \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$, $|s'_q| \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$, celle des séries :

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} s_p \quad \text{et} \quad \sum_{q\in\mathbb{N}} s'_q . \text{ ✎}^{(53)}$$

✎(53) On remarquera que cette démonstration reste valable dans le cas des suites doubles à valeurs dans un espace de Banach, puisque, dans un tel espace, l'absolue convergence implique la convergence.

Posons comme précédemment :

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} s_p = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \ , \ S' = \sum_{q=0}^{+\infty} s'_q = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Il reste à prouver que $S = S'$ et, en remarquant que :

$$S' = \lim_{q\to+\infty} S'_q \quad \text{avec} \quad S'_q = \sum_{k=0}^{q} s'_k = \sum_{k=0}^{q}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,k}\right),$$

cela revient à montrer que $\lim_{q\to+\infty}\left(S - S'_q\right) = 0.$

Puisqu'il s'agit d'une somme finie de séries convergentes, on a aussi :

$$S'_q = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{q} u_{p,k}\right) \quad \text{donc} \quad S - S'_q = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=q+1}^{+\infty} u_{p,k}\right)$$

il en résulte $\left|S - S'_q\right| \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=q+1}^{+\infty} \left|u_{p,k}\right|\right)$ soit aussi :

$$\left|S - S'_q\right| \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left|u_{p,k}\right|\right) - \sum_{k=0}^{q}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\left|u_{p,k}\right|\right)$$

et, d'après le a) appliqué à la suite $\left(\left|u_{p,q}\right|\right)_{\mathbb{N}^2}$ on en déduit :

$$\lim_{q\to+\infty}\left(S - S'_q\right) = 0, \text{ c'est-à-dire } \quad S = S'.$$

Définition 15

Une suite $\left(u_{p,q}\right)_{\mathbb{N}^2}$ vérifiant les hypothèses **(i)** et **(ii)** du théorème de Fubini est dite **sommable**.

On dit aussi que la **série double** $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$ est **sommable**.

D. Séries alternées [55]

[55] Les méthodes, dans cette section, seront utilisées pour l'étude de séries dont on n'a pas pu établir l'absolue convergence. En dehors des séries alternées, aucune connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est au programme.

Définition 16

Une série **réelle** $\sum u_n$ est dite **alternée** si et seulement si la suite $\left((-1)^n u_n\right)$ est de signe constant.

On a alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n\left|u_n\right| \quad$ ou $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1}\left|u_n\right|$.

N.B. On pose, par convention, $(-1)^0 = 1$.

1. Le critère de Leibniz [56]

[56] aussi appelé **critère spécial** des séries alternées.

Règle 2

Soit $\sum u_n$ une série alternée.

Si la suite $\left(\left|u_n\right|\right)_{\mathbb{N}}$ décroît et si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.

- On montre que les suites de sommes partielles (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes.

En effet $\quad \left|U_{2n+1} - U_{2n}\right| = \left|u_{2n+1}\right| \quad$ donc $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(U_{2n+1} - U_{2n}\right) = 0$,

et, si nous supposons être dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n\left|u_n\right|$, on a :

$$\begin{array}{rcll} U_{2n+2} - U_{2n} & = & \left|u_{2n+2}\right| - \left|u_{2n+1}\right| \leqslant 0, & \text{donc } (U_{2n}) \text{ décroît,} \\ U_{2n+3} - U_{2n+1} & = & -\left|u_{2n+3}\right| + \left|u_{2n+2}\right| \geqslant 0, & \text{donc } (U_{2n+1}) \text{ croît.} \end{array}$$ [57]

- $\left(U_{2n}\right)$ et $\left(U_{2n+1}\right)$ sont donc convergentes de même limite, et $\left(U_n\right)$ converge.

[57] Dans l'autre cas, les résultats sont inversés.

Exemple important [58]

La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, est convergente d'après le critère de Leibniz.

[58] Dans le cas particulier $\alpha = 1$, on retrouve la série harmonique alternée.

Remarque

Il faut savoir que ce critère exprime une condition suffisante de convergence qui n'est absolument pas nécessaire (voir *Mise en œuvre*, Exercice 8).

2. Majoration de la somme

Théorème 27

Soit $\sum u_n$ une série alternée convergente d'après le critère de Leibniz et U sa somme. Alors :

a) U est compris entre deux sommes partielles consécutives quelconques,

b) U est du signe de u_0 et $|U| \leqslant |u_0|$,

c) R_n désignant le reste d'ordre n, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$. ✎ (59)

✎ (59) On prendra bien garde au fait que ces résultats ne sont valables que si le critère de Leibniz est vérifié. En particulier, le simple fait qu'une série alternée soit convergente ne permet pas d'appliquer cette majoration de R_n.

☞ a) La proposition résulte de ce que les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes.

b) Dans le cas où $u_n = (-1)^n |u_n|$, on a :

$$U_1 \leqslant U \leqslant U_0, \text{ d'où } 0 \leqslant u_0 + u_1 \leqslant U \leqslant u_0 \text{ et la conclusion.}$$

Dans le cas où $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$, on a :

$$U_0 \leqslant U \leqslant U_1, \text{ d'où } u_0 \leqslant U \leqslant u_0 + u_1 \leqslant 0 \text{ et la conclusion.}$$

c) On applique b) à la série $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ de somme R_n.

Méthodes

L'essentiel

I. Séries à termes positifs

✔ **Si l'on veut** déterminer la nature d'une série Σu_n à termes réels positifs,

- **on peut** transformer l'expression de u_n au moyen de développements limités ou asymptotiques pour conclure avec la règle des équivalents ou le critère de domination ou la règle de Riemann ou une combinaison de ces règles.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

- **on peut** dans **le cas particulier** où le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ se simplifie, utiliser le critère de d'Alembert,

- **on peut** penser à la formule de Stirling pour conclure avec la règle des équivalents,

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

- **on peut** essayer de majorer u_n par le terme général d'une série convergente, alors Σu_n converge, ou de minorer u_n par le terme général d'une série divergente, alors Σu_n diverge,

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

- **on peut** essayer de pouver que la suite $(U_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée, alors Σu_n converge, ou qu'elle est minorée par une suite de limite infinie, alors Σu_n diverge,

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

- **on peut** penser à comparer Σu_n avec une intégrale.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

  Cette méthode amène à utiliser les notions du chapitre 6.

✔ **Si l'on veut** étudier la nature d'une série Σu_n telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \text{ avec } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

(cas douteux de la règle de d'Alembert),

- **on peut** s'il existe un développement de la forme :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right),$$

  montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^a}$ en considérant la série de terme général $v_n = \ell n\left[(n+1)^a u_{n+1}\right] - \ell n\left[n^a u_n\right]$.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 6

II. Séries à termes quelconques

✔ **Si l'on veut** déterminer la nature d'une série Σu_n à termes quelconques,

- **on peut** commencer par étudier l'absolue convergence. S'il s'agit d'une série alternée, examiner si elle vérifie le critère de Leibniz,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 7
- **on peut** au moyen d'un développement limité ou asymptotique, décomposer u_n en une somme de séries plus simples à étudier,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 8
- **on peut** penser au critère de Cauchy.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 9

III. Sommation des séries numériques

✔ **Si l'on veut** calculer la somme U d'une série Σu_n,

- **on peut** penser à écrire u_n sous une forme télélescopique
  (par exemple : $u_n = h_{n+1} - h_n$)
  ou télescopique généralisée
  (par exemple $u_n = h_{n+1} - 2h_n + h_{n-1}$),
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 10
- **on peut** penser à faire apparaître des sommes géométriques (éventuellement à une intégration près),
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 11
- **on peut** observer que U est la valeur prise par la somme d'une série entière ou d'une série de Fourier en un point de l'ensemble de convergence (cette méthode sera illustrée dans les chapitres 5 et 7).

IV. Suites et séries

✔ **Si l'on veut** étudier la nature d'une suite $\left(u_n\right)_{\mathbb{N}}$ et, plus généralement, déterminer un équivalent ou un développement asymptotique de $\ell - u_n$ (lorsque u_n converge vers ℓ) ou de u_n (lorsque u_n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$)

- **on peut** penser à considérer la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ et appliquer les théorèmes de sommation des relations de comparaison en remarquant que :
  - si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\ell - u_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \left(u_{k+1} - u_k\right)$,
  - et dans tous les cas $u_n = u_0 + \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} \left(u_{k+1} - u_k\right)$.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 12

Mise en œuvre

I. Séries à termes positifs

Ex. 1

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

1) $u_n = \left(\ell n \operatorname{sh} n^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} - n, \quad \alpha > 0$;

2) $u_n = \sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + an}, \quad a \in \mathbb{R}$;

3) $u_n = \dfrac{a^n + (\ell n\, n)^{\sqrt{n}}}{b^n + \left(\sqrt{n}\right)^{\ell n\, n}}, \quad a > 0, b > 0$;

4) $u_n = \dfrac{n^{\ell n\, n}}{(\ell n\, n)^n}$;

5) $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{\ell n\, n}\right)^{2(\ell n\, n)^\alpha}$.

Indications

1) Rechercher un équivalent simple.

2) Effectuer un développement limité de u_n a l'ordre 2 au sens fort.

3) Donner suivant les valeurs de a et b un équivalent simple, puis appliquer éventuellemnet la règle de Riemann.

4) Appliquer la règle de Riemann.

5) Écrire u_n sous forme exponentielle, effectuer un développement asymptotique de l'exposant puis conclure par la règle des équivalents ou la règle de Riemann.

Solution

1) En écrivant $\operatorname{sh} n^\alpha = \dfrac{e^{n^\alpha}}{2}\left(1 - e^{-2n^\alpha}\right)$, il vient :

$$\ell n \operatorname{sh} n^\alpha = n^\alpha - \ell n\, 2 + \ell n\left(1 - e^{-2n^\alpha}\right)$$
$$= n^\alpha\left(1 - \frac{\ell n\, 2}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$
$$\left(\ell n \operatorname{sh} n^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = n\left(1 - \frac{\ell n\, 2}{\alpha\, n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

D'où $\quad u_n \sim -\dfrac{\ell n\, 2}{\alpha\, n^{\alpha-1}}$.

D'après la règle des équivalents, on en déduit que Σu_n converge si et seulement si $\alpha > 2$

2) On remarque d'abord que quel que soit a, u_n est de signe constant à partir d'un certain rang. Donc au besoin en remplaçant u_n par $-u_n$, on se ramène à l'étude d'une série à termes positifs.

Commentaires

Penser à factoriser e^{n^α} pour prendre le logarithme.

Σu_n est de même nature que la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$.

Il suffit d'écrire
$u_n = \dfrac{(1-a)n+1}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+an}}$.

Effectuons un développement limité d'ordre 2 au sens fort :

$$u_n = n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} - n^2\sqrt{1+\frac{a}{n^3}}$$

$$u_n = n^2\left[1+\frac{1}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] - n^2\left[1+\frac{a}{2n^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

$$u_n = \frac{1-a}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 1$, on en déduit $u_n \sim \dfrac{1-a}{2n}$ donc Σu_n diverge.

Si $a = 1$, il reste $u_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ce qui montre que Σu_n converge.

Remarquer la simplification des calculs apportée par l'utilisation des développements limités au sens fort : il aurait été totalement inutile de calculer le coefficient de $\frac{1}{n^2}$.

3) Les règles de comparaison des fonctions puissances et logarithmes donnent :

- pour $a > 1$ et $b > 1$, $u_n \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$,
- pour $a \leqslant 1$ et $b > 1$, $u_n \sim \dfrac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n}$,
- pour $a > 1$ et $b \leqslant 1$, $u_n \sim \dfrac{a^n}{(\sqrt{n})^{\ln n}}$,
- pour $a \leqslant 1$ et $b \leqslant 1$, $u_n \sim \dfrac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^{\ln n}}$.

On en déduit :

- pour $a > 1$ et $b > 1$, Σu_n converge si et seulement si $a < b$;
- pour $a \leqslant 1$ et $b > 1$, $n^2 u_n \sim e^{2\ln n+\sqrt{n}\ln(\ln n)-n\ln b}$;

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, et Σu_n converge ;

- pour $a > 1$ et $b \leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et Σu_n diverge grossièrement ;
- pour $a \leqslant 1$ et $b \leqslant 1$, $u_n \sim e^{\sqrt{n}\ln(\ln n)-\frac{1}{2}\ln^2 n}$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et Σu_n diverge grossièrement.

Sachant que $\ln(\ln n)=o(\sqrt{n})$, on obtient :
$\dfrac{a^n}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}=e^{n\ln a-\sqrt{n}\ln(\ln n)}=e^{n\ln a+o(n)}$
donc, si $a>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}=+\infty$
soit $(\ln n)^{\sqrt{n}}=o(a^n)$ et $a^n+(\ln n)^{\sqrt{n}}\sim a^n$.

Si $a\leqslant 1$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln n)^{\sqrt{n}}=+\infty$
et $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<a^n\leqslant 1$, il est clair que :
$$a^n+(\ln n)^{\sqrt{n}}\sim(\ln n)^{\sqrt{n}}.$$
On raisonne de même pour le dénominateur.

Dans le cas où $u_n\sim\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, on conclut avec la règle des équivalents sachant que la série géométrique $\Sigma\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ converge si et seulement si $\dfrac{a}{b}<1$.
Dans le deuxième cas, on conclut avec la règle de Riemann.

4) On a ici $u_n = e^{\ln^2 n-n\ln(\ln n)}$, donc :

$$n^2u_n = e^{2\ln n+\ln^2 n-n\ln(\ln n)} = e^{-n\ln(\ln n)+o(\ln(\ln n))}.$$

Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$ et la série converge d'après la règle de Riemann.

On utilise :
$\ln n = o(n)$ et $\ln^2 n = o(n)$.

5) Le développement limité à l'ordre 2 de $\cos$ en 0 donne :

$$\cos\frac{1}{\ln n} = 1-\frac{1}{2\ln^2 n}+o\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right).$$

on en déduit :

$$\ln\left(\cos\frac{1}{\ln n}\right) = -\frac{1}{2\ln^2 n}+o\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)$$

$$u_n = e^{-(\ln n)^{\alpha-2}+o\left((\ln n)^{\alpha-2}\right)}$$

Il apparaît alors que pour $\alpha \leqslant 2$, u_n ne tend pas vers 0 et la série est grossièrement divergente.

On suppose maintenant $\alpha > 2$.

En formant $n^\beta u_n = e^{\beta\ln n-(\ln n)^{\alpha-2}+o\left((\ln n)^{\alpha-2}\right)}$, on voit que :

- si $\alpha > 3$, n^2u_n tend vers 0 donc Σu_n converge,
- si $\alpha < 3$ nu_n tend vers $+\infty$ donc Σu_n diverge.

Noter que dans le cas $\alpha>2$, le développement obtenu ne permet pas de donner un équivalent plus simple de u_n, ce qui serait d'ailleurs sans le moindre intérêt.
Avec pour objectif d'appliquer la règle de Riemann, on forme le produit $n^\beta u_n$ que l'on écrit sous forme exponentielle.
Ceci étant fait, on s'aperçoit que :

- si $\alpha-2>1$, on a $\ln n=o\left((\ln n)^{\alpha-2}\right)$

et donc, quel que soit β,
$u_n=e^{-(\ln n)^{\alpha-2}+o\left((\ln n)^{\alpha-2}\right)}$
et $\lim n^\beta u_n = 0$. Il reste à choisir convenablement β pour conclure ;

- si $\alpha-2<1$, on a $(\ln n)^{\alpha-2}=o(\ln n)$

d'où $n^\beta u_n=e^{\beta\ln n+o(\ln n)}$ et quel que soit $\beta>0$, $\lim n^\beta u_n=+\infty$.

Dans le cas $\alpha = 3$, on reprend le développement :

$$\cos\frac{1}{\ell n\, n} = 1 - \frac{1}{2\,\ell n^2\, n} + o\left(\frac{1}{\ell n^3\, n}\right)$$

$$\ell n\left(\cos\frac{1}{\ell n\, n}\right) = -\frac{1}{2\,\ell n^2\, n} + o\left(\frac{1}{\ell n^3\, n}\right)$$

$$u_n = e^{-\ell n\, n + o(1)}.$$

Il en résulte $u_n \sim \frac{1}{n}$ et la série Σu_n diverge d'après la règle des équivalents.

On sait que e^{u+v} est équivalent à e^u si et seulement si v tend vers 0, donc si et seulement si $v = o(1)$.
L'ordre du développement de cos est donc choisi de façon à obtenir $o(1)$ dans le dernier développement.

Ex. 2

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif a la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(3n)!}{a^{3n}(n!)^3}.$$

Indications

Avec un produit de factorielles et de puissances le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ se simplifie de façon intéressante.

Solution

Formons $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{3(3n-2)(3n-1)}{a^3 n^2}$, on obtient clairement :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \sim \left(\frac{3}{a}\right)^3.$$

Il en résulte que, pour $a > 3$, la série converge et que, pour $0 < a < 3$, elle diverge.

Pour étudier le cas $a = 3$, envisageons deux méthodes.

1. Avec la formule de Stirling, on obtient :

$$(3n)! \sim (3n)^{3n} e^{-3n}\sqrt{6\,\pi\, n} \quad \text{et} \quad (n!)^3 \sim n^{3n} e^{-3n}\sqrt{8\,\pi^3\, n^3}$$

donc $u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{2\,\pi\, n}$ et $\sum u_n$ diverge.

2. Effectuons les développements limités :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right) = 1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ell n\,\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ell n\,\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ell n\, n u_n - \ell n(n-1)u_{n-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la série de terme général $\ell n\, n u_n - \ell n(n-1)u_{n-1}$ converge et donc que la suite $(\ell n\, n u_n)_{\mathbb{N}}$ est également convergente.

En posant $\ell = \lim_{n\to+\infty} \ell n\, n u_n$ et $\lambda = e^{\ell}$, on a finalement $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ et on retrouve ainsi que Σu_n diverge.

Commentaires

Remarquer que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ et plus simple que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
Pour $a \neq 3$, on se trouve dans le cas favorable où la règle de d'Alembert s'applique.

Noter la méthode : pour étudier la suite $(\ell n\, n u_n)_{\mathbb{N}}$, on considère la série de terme général $\ell n\, n u_n - \ell n(n-1)u_{n-1}$.
(Cf. théorème 2.)

Ex. 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10.
Étudier, en fonction du réel strictement positif a, la nature de la série de terme général $u_n = a^{-p_n}$.

Indications

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\log n < p_n \leqslant 1 + \log n$.

Solution

Si n s'écrit avec p chiffres, on a $10^{p-1} \leqslant n < 10^p$ donc $(p-1) \leqslant \log n < p$.
Il en résulte $\log n < p_n \leqslant 1 + \log n$.
Pour $a \leqslant 1$, u_n ne tend pas vers 0, la série diverge grossièrement.
Pour $a > 1$, l'encadrement précédent donne $a^{-1-\log n} \leqslant u_n < a^{-\log n}$,
c'est-à-dire , en posant $v_n = a^{-\log n}$, $\dfrac{1}{a} v_n \leqslant u_n < v_n$.

Le premier théorème de comparaison des séries à termes positifs montre alors que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Puisque $v_n = \dfrac{1}{n^{\log a}}$, il en résulte que Σu_n converge si et seulement si $a > 10$.

Commentaires

$\log$ désigne le logarithme décimal.

Pour $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^{-x}$ est décroissante.

$u_n < v_n$ montre que Σu_n est convergente lorsque Σv_n l'est.
$v_n \leqslant a u_n$ montre l'implication réciproque.

Ex. 4

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ la suite croissante formée des entiers naturels non nuls dont l'écriture en base 10 ne contient pas le chiffre 1.

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{a_n}$, $\quad n \geqslant 1$.

Indications

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, dénombrer les a_n compris entre 10^{p-1} et $10^p - 1$ puis en déduire une majoration des sommes partielles de la série Σu_n .

Solution

Soit I_p l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base 10 est formée de p chiffres ne comprenant pas le caractère 1. On pose $N_p = \operatorname{Card} I_p$.
L'entier n appartient à I_p si et seulement s'il s'écrit $a_{p-1}a_{p-2} \cdots a_1 a_0$ avec $a_{p-1} \in [\![1, 9]\!]$ et $\forall k \in [\![0, p-2]\!]$, $\quad a_k \in [\![0, 9]\!]$.
On en déduit $\operatorname{Card} I_p = 8 \cdot 9^{p-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \in I_q$.

On a alors $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \leqslant \sum_{p=1}^{q} \sum_{a_k \in I_p} \frac{1}{a_k}$.

En remarquant que $\displaystyle\sum_{a_k \in I_p} \frac{1}{a_k} \leqslant 8 \cdot 9^{p-1} \times \frac{1}{10^{p-1}}$, il vient :

$$U_n \leqslant 8 \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{p-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad U_n \leqslant 80.$$

La série Σu_n est donc convergente.

Commentaires

Il y a 8 possibilités pour a_{p-1} et 9 possibilités pour chaque a_k, $0 \leqslant k \leqslant p-2$.

Il s'agit d'une série à termes positifs, pour en prouver la convergence, on montre que la suite des sommes partielles est majorée.

Ex. 5

Étudier suivant les valeurs du réel α, la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^\alpha}$.

Indications

Utiliser le théorème de comparaison avec une intégrale.

Solution

Dans le cas $\alpha \leqslant 0$, pour $n \geqslant e^e$, on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{n \ln n}$ donc, sachant que la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ est divergente, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Dans le cas $\alpha > 0$, la fonction :

$$f \ : x \mapsto \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^\alpha}$$

est positive décroissante sur $]e, +\infty[$, on sait, d'après le théorème 9, que $\sum u_n$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, $\quad (a > e)$.

Le changement de variable défini par $u = \ln \ln t$ donne pour tout $x \geqslant a$:

$$\int_a^x \frac{1}{t \ln t (\ln \ln t)^\alpha} \mathrm{d}t = \int_{\ln \ln a}^{\ln \ln x} \frac{1}{u^\alpha} \mathrm{d}u.$$

On en déduit que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $u \mapsto \dfrac{1}{u^\alpha}$ est intégrable sur $\left[\ln \ln a, +\infty\right[$.

Donc $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Commentaires

L'étude des séries de Bertrand a été faite par comparaison avec une intégrale. (Voir le formulaire 3.)

Par exemple a=3.

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t \ln t}$

La fonction f étant continue positive sur $[a,+\infty[$, elle est intégrable sur cet intervalle, si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ admet une limite réelle lorsque x tend vers $+\infty$ (cf. chapitre 6), et il en est de même pour $u \mapsto \frac{1}{u^\alpha}$.

Ex. 6

Étudier la série de terme général : $\quad u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right)$.

Indications

Pour prouver que la suite de terme général nu_n converge, on introduit la série :

$$\sum \ln\left(nu_n\right) - \ln\left((n-1)u_{n-1}\right).$$

Solution

Formons $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 2 - e^{\frac{1}{n}}$, il est clair que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1.$$

Effectuons alors un développement limité à l'ordre 2 au sens fort :

$$2 - e^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc aussi : $\quad \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right) = -\dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right),$

Commentaires

Pour tout $k \geqslant 2$ on a $e^{\frac{1}{k}} < 2$, Σu_n est donc bien une série à termes positifs.

et avec $\ell n\left(\frac{n}{n-1}\right) = -\ell n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, il vient :

$$\ell n\left(\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Noter que l'on obtient des calculs plus simples en considérant le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ plutôt que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Ainsi la série $\sum \ell n\left(nu_n\right) - \ell n\left((n-1)u_{n-1}\right)$ est convergente et il en est de même pour la suite de terme général $\ell n\left(nu_n\right)$.

C'est toujours le théorème 2.

En posant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell n\left(nu_n\right)$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = e^{\ell}$. Il existe donc $\lambda > 0$, $\left(\lambda = e^{\ell}\right)$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge.

II. Séries à termes quelconques

Ex. 7

Étudier suivant les valeurs du réel α la convergence absolue et la semi-convergence de la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n \frac{e^{\sqrt{\ell n(\ell n\, n)}}}{n^{\alpha}}.$$

Indications

Le critère de Leibniz peut s'appliquer lorsque la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante à partir d'un certain rang et tend vers 0 (bien sûr!).

Solution

Pour $n \geqslant 3$, écrivons $|u_n| = \exp\left[\sqrt{\ell n(\ell n\, n)} - \alpha\, \ell n\, n\right]$.

Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

Commentaires

On élimine d'abord les cas de divergence grossière.

- Étude de l'absolue convergence.

Si $0 < \alpha \leqslant 1$, $|u_n| \geqslant \frac{1}{n}$ et, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ diverge.

Si $\alpha > 1$, on a $\beta = \frac{1+\alpha}{2} > 1$ et :

$$n^{\beta}|u_n| = \exp\left[\sqrt{\ell n(\ell n\, n)} - (\alpha-\beta)\,\ell n\, n\right].$$

Comme $\beta < \alpha$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\beta}|u_n| = 0$, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)$ et, par le critère de Riemann, la série $\sum |u_n|$ converge.

En conclusion, la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

- Étude de la semi-convergence.

D'après le début de l'étude, on n'a plus à considérer que le cas $0 < \alpha \leqslant 1$.

Étudions maintenant les variations de la suite $\left(|u_n|\right)$.

Considérons la fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{\ell n\, t} - \alpha t$ sur $]1, +\infty[$.

Sa dérivée est $\varphi'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{\ell n\, t}} - \alpha.$

Il existe un réel t_0 au-delà duquel $\varphi'(t) \leqslant 0$, donc φ est décroissante sur $[t_0, +\infty[$.

Comme $u_n = (-1)^n \exp\left[\varphi(\ell n\, n)\right]$, la suite $n \mapsto |u_n|$ est décroissante à partir d'un certain rang.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (car $\alpha > 0$), donc le critère de Leibniz assure la convergence de la série $\sum u_n$.

En conclusion, la série $\sum u_n$ est semi-convergente si et seulement si $0 < \alpha \leqslant 1$.

Par exemple, si $\alpha = \frac{1}{2}$, pour $t \geqslant 2$, on a : $2t\sqrt{\ell n\, t} \geqslant 4$ donc $\varphi'(t) < 0$.
En conséquence, puisque $n \geqslant 8$ donne $\ell n\, n \geqslant 2$, on en déduit que $(|u_n|)_{n\geqslant 8}$ est décroissante.

Ex. 8

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}, n \geqslant 2.$$

Indications

En factorisant $n^{\frac{\alpha}{2}}$ en dénominateur, on effectue un développement asymptotique à deux termes.

Solution

Comme $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 2$.
Pour $0 < \alpha \leqslant 2$, écrivons au voisinage de $+\infty$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}\right).$$

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ converge d'après le critère de Leibniz.

Avec $\quad v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - u_n \quad$ on a $\quad v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$,

(v_n) est donc positive au voisinage de $+\infty$, la règle des équivalents s'applique :

$$\sum v_n \text{ est de même nature que } \sum \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$$

c'est-à-dire qu'elle converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}$.

En conclusion :

- pour $0 < \alpha \leqslant \dfrac{2}{3}$, $\sum u_n$ diverge en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente ;
- pour $\alpha > \dfrac{2}{3}$, $\sum u_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.

Commentaires

Puisque α est strictement positif, la suite $\left(\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle.

On limite le développement à deux termes, car, dans le second, l'alternance de signe a disparu, ce qui permet de conclure avec la règle des équivalents.
Remarquer que, dans le cas $\alpha = 1$ par exemple, la série converge alors que la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante : le critère de Leibniz n'est pas une condition nécessaire de convergence.

Dans le cas $\alpha = \frac{1}{3}$, on a $\sum u_n$ divergente et $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{6}}}$ convergente, bien que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{6}}}$: **la règle des équivalents ne s'applique pas aux séries qui ne sont pas de signe constant au voisinage de $+\infty$.**

Ex. 9

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos(\ell n\, n)}{n}$ est divergente.

Indications

Montrer que le critère de Cauchy n'est pas satisfait en exhibant deux suites $\left(n_1(k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(n_2(k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de limite infinie telles que $\displaystyle\sum_{n=n_1(k)+1}^{n_2(k)} u_n$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Solution

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \leqslant \ell n\, n \leqslant 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$, c'est-à-dire :

$$e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}} \leqslant n \leqslant e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}}, \text{ on a } \cos(\ell n\, n) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Posons donc $n_1(k) = E\left(e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}}\right)$, $n_2(k) = E\left(e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}}\right)$, puis :

$$S_k = \sum_{n=n_1(k)+1}^{n_2(k)} u_n.$$

On a alors $S_k \geqslant \dfrac{n_2(k) - n_1(k)}{2n_2(k)}$.

De $e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}} - 1 < n_1(k) \leqslant e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}}$ et $e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}} - 1 < n_2(k) \leqslant e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}}$,

on déduit $n_1(k) \underset{+\infty}{\sim} e^{2k\pi-\frac{\pi}{3}}$, $n_2(k) \underset{+\infty}{\sim} e^{2k\pi+\frac{\pi}{3}}$, donc

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{n_1(k)}{n_2(k)} = e^{-\frac{2\pi}{3}} \quad \text{puis} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{n_2(k) - n_1(k)}{n_2(k)} = 1 - e^{\frac{-2\pi}{3}} > 0.$$

En conséquence, S_k ne tend pas vers 0, d'où la conclusion.

Commentaires

E désigne la fonction partie entière.

III. Sommation des séries numériques

Ex. 10

Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \frac{6^n}{\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right)\left(3^n - 2^n\right)} \qquad n \geqslant 1.$$

Indications

Écrire u_n sous la forme d'une fraction rationnelle en $x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et en déduire une décomposition :

$$u_n = f(n) - f(n+1).$$

Solution

- Convergence

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $2^n = o(3^n)$ donc :

$$u_n \sim \frac{6^n}{3 \cdot 3^{2n}} \quad \text{soit aussi} \quad u_n \sim \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente donc $\sum u_n$ converge d'après le critère des équivalents.

Commentaires

■ Calcul de la somme

Transformons l'expression u_n :

$$u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)},$$

donc en posant $x = \left(\frac{2}{3}\right)^n$: $u_n = \dfrac{\frac{x}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}x\right)(1-x)},$

On décompose alors cette fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{\frac{x}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}x\right)(1-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\frac{2}{3}x},$$

d'où $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} - \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}.$

Ainsi on a écrit u_n sous la forme $f(n) - f(n+1)$ et il en résulte :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = f(1) - f(n+1) \quad \text{puis} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 2.$$

Il faut retenir le fait que la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle est un bon moyen pour écrire u_n sous la forme souhaitée.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 3 - \lim_{n\to+\infty} f(n+1).$$

Ex. 11

Montrer la convergence, puis calculer la somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x.$

Indications

Pour la convergence, utiliser le critère de Leibniz.

La somme partielle d'ordre n est l'intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ d'une somme géométrique.

Solution

■ Étude de la convergence.

$\sum u_n$ est une série alternée, on se propose donc d'utiliser le critère de Leibniz.

Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \cos^{n+1} x \leqslant \cos^n x \text{ et } |u_{n+1}| \leqslant |u_n|.$$

Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, écrivons $|u_n| = \int_0^{\varepsilon} \cos^n x\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x.$

Puisque la fonction $\cos^n$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :

$$|u_n| \leqslant \varepsilon + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\cos^n \varepsilon \leqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2}\cos^n \varepsilon.$$

Commentaires

On dispose de nombreuses méthodes pour montrer que l'intégrale de Wallis :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\mathrm{d}x$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$:

■ en découpant l'intégrale $\int_0^{\pi/2}$ en :

$$\int_0^{n^{-1/4}} + \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2}$$

on obtient $W_n \leqslant n^{-1/4} + \frac{\pi}{2}\left(\cos n^{-1/4}\right)^n,$

et on conclut avec :

$$\left(\cos n^{-1/4}\right)^n = e^{-\frac{n^{1/2}}{2} + o(n^{1/2})};$$

Sachant que $\lim_{n\to+\infty} \cos^n \varepsilon = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0, \quad 0 < \frac{\pi}{2}\cos^n \varepsilon < \varepsilon.$$

Ainsi on a obtenu :

$$\forall\, \varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n| \leqslant 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

En conséquence, $\sum u_n$ converge d'après le critère de Leibniz.

■ de la relation de récurrence :

$$nW_n = (n-1)W_{n-2},$$

(voir la démonstration de la formule de Leibniz dans ce chapitre) on en déduit :

$$W_n \sim \sqrt{\pi/2n}\,;$$

■ avec la même relation de récurrence, en considérant la série de terme général $\ell n(n^{1/2}W_{2n}) - \ell n((n-1)^{1/2}W_{2(n-1)})$, on montre qu'il existe $\mu > 0$ tel que $W_{2n} \sim \mu n^{-1/2}$; et enfin $W_{2n} \sim W_{2n+1}$ donne $W_n \sim \lambda n^{-1/2}$;

■ enfin, le théorème de convergence dominée (voir chapitre 6) nous donnera une solution très rapide.

■ Calcul de la somme.

Formons $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^k x \,\mathrm{d}x$.

On s'assure pour justifier ce calcul que, quel que soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la raison de la série géométrique est différente de 1.

On a aussi $U_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(-1)^n\cos^n x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

En remarquant que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{1+\cos x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x = |u_n|$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = 0$, d'où il résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

et finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.

On verra dans le chapitre suivant que ce qui est fait ici consiste à justifier l'intégration terme à terme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la série de fonctions de terme général $v_n : x \to (-1)^n \cos^n x$.
Cette opération ne pourra **jamais** être faite sans justification.

IV. Suites et séries

Ex. 12

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ell n\,k} - \ell n(\ell n\, n)$.

Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et trouver un équivalent simple de $\ell - u_n$ où on a posé :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

On ne demande pas de calculer ℓ.

Indications

Introduire la série de terme général $u_n - u_{n-1}$, puis la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\,t}$.

Pour aborder cet exercice, il est utile de connaître les définitions et techniques du chapitre 6.

Solution

La suite (u_n) est de même nature que la série $\sum v_n$ avec $v_n = u_n - u_{n-1}$.

Le calcul donne $v_n = \dfrac{1}{n\,\ell n\, n} + \ell n\left(\dfrac{\ell n(n-1)}{\ell n\, n}\right)$ et en développant au voisinage de $+\infty$:

$$v_n = -\frac{1}{2n^2\,\ell n\, n} + o\left(\frac{1}{n^2\,\ell n\, n}\right)$$

donc $v_n = o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ et $\sum v_n$ converge d'après la règle de Riemann.

D'autre part, v_n est de signe constant (négatif) au voisinage de $+\infty$, donc d'après le théorème de sommation des équivalences dans le cas des séries convergentes à termes positifs, il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \sim -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\,\ell n\, k} \quad \text{soit} \quad \ell - u_n \sim -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\,\ell n\, k}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\,\ell n\, t}$ étant décroissante, on a :

$$\frac{1}{k^2\,\ell n\, k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\, t} \leqslant \frac{1}{(k-1)^2\,\ell n(k-1)}$$

et il en résulte $\dfrac{1}{k^2\,\ell n\, k} \sim \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\, t}$.

Alors en appliquant le même théorème 12, il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\,\ell n\, k} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\, t}$$

d'où $\ell - u_n \sim -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\, t}$.

Une intégration par parties donne maintenant :

$$\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\, t} = \left[-\frac{1}{t\,\ell n\, t}\right]_{n}^{+\infty} - \int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n^2\, t}\mathrm{d}t.$$

On verra dans le chapitre 6 que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\,\ell n\, t}$ étant intégrable et positive sur $[2, +\infty[$, la relation $\dfrac{1}{t^2\,\ell n^2\, t} = o\left(\dfrac{1}{t^2\,\ell n\, t}\right)$ donne :

$$\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n^2\, t} = o\left(\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\, t}\right)$$

donc $\displaystyle\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\, t} = \frac{1}{n\,\ell n\, n} + o\left(\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\, t}\right)$.

Finalement $\ell - u_n \sim -\dfrac{1}{2n\,\ell n\, n}$.

Commentaires

Remarquer que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ donne des calculs plus faciles à mener que $u_{n+1} - u_n$.

La série de terme général $-v_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang.

car $\dfrac{1}{k^2\,\ell n\, k} \sim \dfrac{1}{(k-1)^2\,\ell n(k-1)}$.

$\displaystyle\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ell n\, t} \sim \frac{1}{n\,\ell n\, n}$.

Exercices

Niveau 1

Séries à termes positifs

Ex. 1

Étudier la nature des séries données par leur terme général u_n :

1) $\dfrac{n!}{n^n}$;

2) $a^{\frac{1}{n}} - \dfrac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}$ où $(a, b, c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$;

3) $\operatorname{Arccos} \dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}$, $(\alpha > 0)$;

4) $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$;

5) $\left(1 - \dfrac{1}{\ell n\, n}\right)^{\ell n^\alpha n}$.

Ex. 2

Soit $u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$.

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général u_n converge.

Ex. 3

(Utilise le chapitre 6.)

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \int_0^1 x^n \,\ell n(1-x)\mathrm{d}x.$$

Ex. 4

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs pour laquelle il existe $\alpha > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha.$$

Montrer que $\sum u_n$ converge.

Application : $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ \cdots \ \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot \ \cdots \ \cdot 2n \cdot 2n+1}$.

Ex. 5

Soit $f : [1, +\infty[\ \to \ ]0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

Démontrer que la série de terme général $f(n)$ converge.

Ex. 6

Soit $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ et $\sum u_n$, $n \geqslant 1$, une série convergente à termes positifs.

Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ converge.

Séries à termes quelconques

Ex. 7

Étudier la nature des séries données par leur terme général u_n :

1) $\dfrac{(-1)^n}{n - (\ell n\, n)^\alpha}$, $(\alpha > 0)$;

2) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2 + k^2}\right)$, $(k \in \mathbb{R})$;

3) $\dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n + (-1)^n}$;

4) $\cos\left[\pi n^2 \,\ell n\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$;

5) $\ell n\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, $(\alpha > 0)$;

6) $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ell n\, k}\right|^{\ell n\, n}$.

Sommation des séries

Ex. 8

Prouver la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$;

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ell n\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$.

Ex. 9

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n - \frac{1}{2}}$.

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 10

On donne une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et on définit la suite $(y_n)_{\mathbb{N}}$ par :

$$y_0 = x_0 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_{n+1} + y_n}{1 + x_{n+1}\, y_n}.$$

Étudier la nature de la série de terme général $1 - y_n$.

Ex. 11

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = a^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}} \qquad a > 0.$$

Ex. 12

Étudier la série de terme général $u_n = 10 - n^{\frac{1}{p}}$ où p est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

Ex. 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive.

On pose $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k\right)$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et, qu'en cas de convergence, elles ont même somme.

Ex. 14

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.
Discuter la nature de la série $\sum v_n$ avec :

$$v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}.$$

Ex. 15

Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ où $u_n = n\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}}$.

Ex. 16

Soit (u_n) une suite décroissante de réels strictement positifs telle que la série $\sum \dfrac{u_n}{n^\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$, converge.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} u_n$.

Ex. 17

Soit (u_n) une suite réelle positive, strictement croissante telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \sim \ell n\, u_n.$$

Ex. 18

1) Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1}$$

$(n \geqslant 1)$, converge et calculer sa limite ℓ.

2) Trouver, quand n tend vers $+\infty$ un équivalent de $\ell - u_n$.

Ex. 19

La règle de Raabe Duhamel

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1) Montrer que :

si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge,

si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge.

2) En considérant les séries de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n(\ell n\, n)^\beta}$, montrer que $\alpha = 1$ est un cas douteux.

3) Étudier la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{n!}\prod_{p=1}^{n} \sin\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Ex. 20

Étudier la série de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Convergence et calcul de la somme.

Ex. 21

Étudier la série de terme général :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1.$$

Ex. 22

Prouver la convergence et calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} nx \operatorname{ch}(n+1)x}.$$

Ex. 23

Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

1) $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}.$

Avec éléments de solution

Ex. 24

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

Ex. 25

Étudier la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ell n^2 k.$

Ex. 26

Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)^\alpha} + \frac{1}{(3n-1)^\alpha} + \frac{1}{(3n)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}, \quad (n \geqslant 1).$$

Ex. 27

Montrer qu'il existe une suite réelle (x_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, e^{x_n} + x_n - n = 0.$$

Étudier la série de terme général :

$$u_n = x_n - a\,\ell n\, n - \frac{b}{n}\ell n\, n, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Ex. 28

On pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$

1) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$u_n = e^{-n} 2^{2n+\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ex. 29

Prouver la convergence et calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})}.$$

Ex. 30

Soit Σu_n une série convergente à termes réels strictement positifs, α et β deux réels tels que $0 < \alpha < 1$, et $\alpha + \beta > 1$.

Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n^\alpha}{n^\beta}$.

Ex. 31

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que pour tout $n \geqslant 1$, $S_{2n} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)S_n$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Ex. 32

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que Σa_n diverge. Étudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}.$$

Ex. 33

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Montrer que la série $\sum u_n$ où $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ diverge.

Ex. 34

Étudier la série de terme général :

$$u_n = n!\sin x \sin\frac{x}{2}\cdots\sin\frac{x}{n},$$

où x est un réel donné.

Ex. 35

Étudier la suite de terme général :

$$u_n = \prod_{p=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{p+1}}{p^\alpha}\right), \alpha \in \left]0,1\right[.$$

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 36

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

Montrer que $\sum v_n$ converge. On pourra commencer par prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{n!} \geqslant \dfrac{n+1}{e}$.

Ex. 37

Soit $\sum u_n$ une série réelle positive, convergente.

Pour tout entier $n \geqslant -1$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1) Montrer que, pour tout $\alpha \in \left]0,1\right[$, la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$ est convergente.

2) Montrer que la série de terme général $w_n = \dfrac{u_n}{R_n}$ est divergente.

Ex. 38

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante et p un entier naturel fixé, $p \geqslant 2$.

Montrer que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum p^n u_{p^n}$.

Application : nature de $\sum \dfrac{1}{n(\ell n\, n)^{\lambda}}$.

Ex. 39

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

Démontrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature avec : $v_n = \dfrac{1}{n}\left(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}\right)$.

Ex. 40

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente, pour $n \geqslant 2$, on pose :

$$v_n = \frac{u_1\, \ell n\, 2 + u_2\, \ell n\, 3 + \cdots + u_n\, \ell n(n+1)}{n\, \ell n\, n\, \ell n(n+1)}.$$

Montrer que $\sum v_n$ converge.

Ex. 41

Soit $(x_n)_{\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$x_0 \in]0,1[,\ \ x_{n+1} = x_n - x_n^2.$$

Montrer qu'il existe λ réel tel que $\dfrac{1}{x_n} = n + \ell n\, n + \lambda + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex. 42

Étudier la série de terme général :

$$u_n = n^{\alpha} \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}}\right).$$

Ex. 43

(Utilise le chapitre 6.)

Soit α un réel strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}$.

Étudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{\sin \sqrt{n}}{n^{\alpha}}.$$

Avec éléments de solution

Ex. 44

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

On suppose que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n\, \ell n\, \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^{\ell n\, n} = \ell,$$

(éventuellement $\ell = +\infty$).

1) Montrer que :

si $\ell > e$, $\sum u_n$ converge,

si $\ell < e$, $\sum u_n$ diverge.

2) Montrer que, pour $\ell = e$, on a un cas douteux (considérer les séries $\sum \dfrac{1}{n\, \ell n\, n (\ell n\, \ell n\, n)^{\beta}}$).

Ex. 45

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ell n\, k}.$$

Ex. 46

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \ell n \left(\tan \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right).$$

Ex. 47

La transformation d'Abel

Étant donné $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$.

1) Montrer que la suite $(A_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{A_n}{(n+1)^{\alpha}} - 1 + \sum_{k=1}^{n} A_k \left(\frac{1}{k^{\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right).$$

En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Pour quelles valeurs de α est-elle absolument convergente ?

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{\cos n\theta}{n^{\alpha}} \text{ et } w_n = \frac{\sin n\theta}{n^{\alpha}}.$$

Étudier la convergence et l'absolue convergence des séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

Ex. 48

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{n^{\alpha} + \cos n} - n^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Indications

Ex. 22

Écrire le terme général comme une fraction rationnelle de $t = e^{2nx}$.

Ex. 28

Poser $v_n = e^n 2^{-2n-\frac{1}{2}} u_n$ et déterminer un équivalent de $\ell n\, v_n - \ell n\, v_{n-1}$.

Ex. 29

Exprimer les sommes partielles en fonction de $u_n\sqrt{n}$.

Ex. 31

Considérer les S_{2^p}.

Ex. 32

Exprimer u_n en fonction de $S_n = a_0 + \cdots + a_n$.

Ex. 33

Considérer $\ell n \cos u_n$.

Ex. 36

Écrire $v_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i\, u_i\right)^{\frac{1}{n}}$ et majorer les sommes partielles de la série $\sum v_n$.

Ex. 37

1) $v_n = (R_{n-1} - R_n)R_n^{-\alpha}$ comparer $\sum v_n$ et $\sum v'_n$ avec $v'_n = R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}$.

2) Comparer w_n à $w'_n = \ell n \dfrac{R_{n-1}}{R_n}$.

Ex. 38

Encadrer $u_{p^n+1} + u_{p^n+2} + \cdots + u_{p^{n+1}}$.

Ex. 39

Comparer les sommes partielles :

$$V_n \text{ et } U_{2n-1} \quad , \quad U_n \text{ et } V_n .$$

Ex. 40

Comparer $\dfrac{1}{n\,\ell n\, n\,\ell n(n+1)}$ et $\dfrac{1}{\ell n\, n} - \dfrac{1}{\ell n(n+1)}$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 41

Former $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}$, puis $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} - 1$ puis

$$y_n = \left(\frac{1}{x_{n+1}} + n + 1 + \ell n(n+1)\right) - \left(\frac{1}{x_n} + n + \ell n\, n\right).$$

Ex. 42

Considérer les suites de termes généraux :

$$P_n = \prod_{p=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}}\right) \quad \text{et} \quad Q_n = \sqrt{n} P_n$$

et les séries :

$$\sum \ell n \frac{P_n}{P_{n-1}} \quad \text{et} \quad \sum \ell n \frac{Q_n}{Q_{n-1}}.$$

Ex. 43

Utiliser le théorème 17 et l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{2\alpha}}\mathrm{d}x$.

Ex. 44

Comparer $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n(\ell n\, n)^\beta}$ au moyen du théorème de comparaison logarithmique

Ex. 45

La décroissance de $\big(|u_n|\big)$ peut se déduire de la convexité de $f\ : x \mapsto \dfrac{1}{\ell n\, x}$.

Ex. 46

$u_n = \ell n\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - R_n\right)\right]$ avec :

$$R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Ex. 47

2) Écrire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $e^{ik\theta} = A_k - A_{k-1}$.

3) Dans le cas $0 < \alpha \leqslant 1$, remarquer que :

$$|\cos n\theta| \geqslant \cos^2 n\theta$$

et de même $|\sin n\theta| \geqslant \sin^2 n\theta$.

Ex. 48

Effectuer un développement asymptotique de u_n et utiliser les résultats de l'exercice précédent.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) Formons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{(n+1)^{n+1}}n^n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\,\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e}$, donc Σu_n converge d'après le critère de d'Alembert.

2) L'étude s'appuie sur le développement limité suivant :

$$\text{quand } n \to +\infty : \ a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ell n\, a} = 1 + \frac{\ell n\, a}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On obtient ici $\quad u_n = \dfrac{1}{n}\left[\ell n\, a - \dfrac{1}{2}(\ell n\, b + \ell n\, c)\right] + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

- Si $\quad a \neq \sqrt{bc}\quad$ on a $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\ell n \dfrac{a}{\sqrt{bc}}$:

la série de terme général u_n diverge d'après la règle des équivalents de séries positives.

- Si $\quad a = \sqrt{bc}\quad$ on a $\quad u_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$:

la série de terme général u_n converge d'après la règle de Riemann.

3) Il est clair que u_n tend vers 0, on a donc $u_n \sim \sin u_n$.

Avec $\sin u_n = \sqrt{1-\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^2} = \sqrt{1-\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^{-2}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n^\alpha}}$, il vient : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}$.

D'après la règle des équivalents, on en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

__Remarque__ : on peut aussi écrire : $\cos u_n = 1 - \dfrac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right)$, $\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha} = 1 - \dfrac{1}{n^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, d'où :

$$u_n^2 + o\left(u_n^2\right) = \frac{2}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

puis par transitivité des équivalents : $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^\alpha}$ et, u_n étant positif, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}$.

4) En remarquant que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, il vient :

$$u_n = e^{-\sqrt{n}\,\ell n\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = e^{-\sqrt{n}\left[\ell n\sqrt{n} + \ell n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\right]} = e^{-\sqrt{n}\left[\frac{1}{2}\ell n\, n + \ell n\, 2 + o(1)\right]} = e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}\ell n\, n + o\left(\sqrt{n}\,\ell n\, n\right)}.$$

Puisque $\ell n\, n = o\left(\sqrt{n}\,\ell n\, n\right)$, on a $\; n^2 u_n = e^{2\ell n\, n - \frac{\sqrt{n}}{2}\ell n\, n + o\left(\sqrt{n}\,\ell n\, n\right)} = e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}\ell n\, n + o\left(\sqrt{n}\,\ell n\, n\right)}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, donc Σu_n converge d'après la règle de Riemann.

5) Du développement : $\ell n\left(1 - \dfrac{1}{\ell n\, n}\right) = -\dfrac{1}{\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{\ell n\, n}\right)$, on déduit $u_n = e^{-\ell n^{\alpha-1} n + o\left(\ell n^{\alpha-1} n\right)}$.

Donc, pour tout β réel, on peut écrire $\; n^\beta u_n = e^{\beta\,\ell n\, n - \ell n^{\alpha-1} n + o\left(\ell n^{\alpha-1} n\right)}$.

- Si $\alpha > 2$, on a $\ell n\, n = o\left(\ell n^{\alpha-1}\, n\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\beta u_n = 0$ quel que soit β. En choisissant $\beta = 2$, avec la règle de Riemann, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ donne la convergence de $\sum u_n$.
- Si $\alpha < 2$, on a $\ell n^{\alpha-1}\, n = o(\ell n\, n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\beta u_n = +\infty$ quel que soit $\beta > 0$. En choisissant $\beta = 1$, avec la règle de Riemann, $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$ donne la divergence de $\sum u_n$.
- Pour $\alpha = 2$, on reprend le développement initial, il vient :

$$u_n = e^{\ell n^2\, n\left[-\frac{1}{\ell n\, n} - \frac{1}{2\,\ell n^2\, n} + o\left(\frac{1}{\ell n^2\, n}\right)\right]} = e^{-\ell n\, n - \frac{1}{2} + o(1)}.$$

Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{n}$ et la série diverge d'après la règle des équivalents.

Ex. 2

Considérons le terme $\quad a_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2}$; on a $\quad a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$

Pour que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ soit bornée il faut que $\sqrt[3]{P(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$

D'où la forme nécessaire de P : $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$

Un calcul plus poussé donne : $\quad a_n = n\left(1 + \dfrac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{4}} = n\left(1 + \dfrac{3}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n + \dfrac{3}{4n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right).$

De même $\quad \sqrt[3]{P(n)} = n\left(1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = n\left(1 + \dfrac{a}{3n} + \left(\dfrac{b}{3} - \dfrac{a^2}{9}\right)\dfrac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$

$$= n + \frac{a}{3} + \left(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $\quad u_n = -\dfrac{a}{3} + \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{b}{3} + \dfrac{a^2}{9}\right)\dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right).$

Si $a \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{a}{3} \neq 0$. Il faut donc $\quad a = 0 \quad$ pour que la série converge.

Il reste alors $\quad u_n = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{b}{3}\right)\dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right).$

Si $\quad b \neq \dfrac{9}{4}$, on a $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{9}{4} - b\right)\dfrac{1}{3n}$, la série diverge. Si $\quad b = \dfrac{9}{4}$, on a $\quad u_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, la série converge.

Les polynômes cherchés sont donc : $\quad P(x) = x^3 + \dfrac{9}{4}x + c \quad (c \in \mathbb{R}).$

Ex. 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \;:\; x \mapsto x^n\, \ell n(1-x)$ est continue sur $[0, 1[$ et, lorsque x tend vers 1 : $f_n(x) \sim \ell n(1-x)$.

L'intégrabilité sur $[0, 1[$ de $x \mapsto \ell n(1-x)$ peut se déduire du calcul suivant :

$$\int_0^x \ell n(1-t)\mathrm{d}t = \int_{1-x}^1 \ell n\, t\mathrm{d}t = \left[t\,\ell n\, t - t\right]_{1-x}^1 = -x - (1-x)\,\ell n(1-x),$$

d'où on déduit $\quad \lim\limits_{x\to 1} \displaystyle\int_0^x \ell n(1-t)\mathrm{d}t = -1.$

Ceci assure que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ f_n est intégrable sur $[0, 1]$, donc que u_n existe avec de plus $u_0 = -1$.

Une intégration par parties donne pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\int_0^x t^n\, \ell n(1-t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1} - 1}{n+1}\,\ell n(1-t)\right]_0^x - \frac{1}{n+1}\int_0^x \frac{1 - t^{n+1}}{1-t}\mathrm{d}t,$$

d'où en faisant tendre x vers 1 :

$$u_n = \frac{-1}{n+1}\int_0^1 \left(1+t+\cdots+t^n\right)\mathrm{d}t = \frac{-1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Il est classique que, lorsque $n \to +\infty$, $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n} \sim \ell n\, n$.

Ainsi $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-\ell n\, n}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge.

Ex. 4

C'est du cours !

En posant $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, la série $\sum v_n$ est convergente et l'hypothèse se lit $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Donc le théorème de comparaison logarithmique donne la convergence de $\sum u_n$.

Application : dans l'exemple proposé, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$, donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)} = 1-\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par ailleurs $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1-\dfrac{\alpha}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc avec α tel que $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$, par exemple $\alpha = \dfrac{5}{4}$, on obtient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{5}{4}} < 0$ et d'après la question préliminaire, la série $\sum u_n$ converge.

Ex. 5

L'hypothèse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$ permet d'écrire :

$$\textbf{(1)}\quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists a \in [1,+\infty[,\ \forall x \in [1,+\infty[, x \geqslant a \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant A.$$

Prenons $A = -1$.

Pour tout $x \geqslant a$, on a $\displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t \leqslant a-x$ donc $\ell n \dfrac{f(x)}{f(a)} \leqslant a-x$.

En posant $\lambda = f(a)e^a$, on obtient, pour tout $n \geqslant a$, $0 < f(n) \leqslant \dfrac{\lambda}{e^n}$, la convergence de $\sum f(n)$ en résulte car $\sum e^{-n}$ est une série géométrique convergente.

Ex. 6

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ nous donne :

$$\left(\frac{\sqrt{u_1}}{1}+\frac{\sqrt{u_2}}{2^\alpha}+\cdots+\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right)^2 \leqslant \left(1+\frac{1}{2^{2\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\left(u_1+u_2+\cdots+u_n\right).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n v_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ainsi $\sum v_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée, elle est donc convergente.

Ex. 7

1) On sait que quel que soit $\alpha > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow n > (\ell n\, n)^\alpha$. La série est donc définie et alternée à partir du rang n_0.

Il est clair que $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc la série n'est pas absolument convergente mais on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

La fonction $f : x \mapsto x - (\ell n\, x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et a pour dérivée f' telle que :

$$f'(x) = \frac{x - \alpha(\ell n\, x)^{\alpha-1}}{x}.$$

Il existe donc $a > 1$ tel que, pour tout $x \geqslant a$, on ait $f'(x) \leqslant 0$.

Puisque pour $n \geqslant n_0$ $|u_n| = \dfrac{1}{f(n)}$, on en déduit l'existence de $n_1 \geqslant n_0$ tel que la suite $\big(|u_n|\big)_{n\geqslant n_1}$ soit décroissante. Finalement, la série converge d'après le critère de Leibniz.

2) Notons $\quad a_n = \pi\sqrt{n^2+k^2} - n\pi = \dfrac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$.

On obtient ainsi $\quad u_n = \sin\big(n\pi + a_n\big) = (-1)^n \sin a_n$.

Comme la suite $\big(a_n\big)$ est positive, décroissante et de limite nulle, la suite $\big(\sin a_n\big)$ a les mêmes qualités à partir d'un certain rang, le critère de Leibniz s'applique : la série $\sum u_n$ est convergente.

Notons que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi k^2}{2n}$, donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

3) On a clairement affaire à une série alternée.

En écrivant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n} \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n}}$, on obtient le développement : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n} - \dfrac{1}{\ell n^2\, n} + o\Big(\dfrac{1}{\ell n^2\, n}\Big)$.

La série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n}$ converge d'après le critère de Leibniz.

Le développement précédent montre que la série de terme général $w_n = u_n - v_n$ est telle que $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\ell n^2\, n}$, elle est donc de signe constant (négatif) à partir d'un certain rang et d'après le critère des équivalents, elle est de même nature que la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{\ell n^2\, n}$ donc divergente.

En conclusion $\sum u_n$ diverge en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.

4) Développons $\ell n \dfrac{n-1}{n} = \ell n \Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)$ à l'ordre 4 au sens fort :

$$\ell n \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^4}\Big),$$

on en déduit $\quad \pi n^2 \ell n \dfrac{n-1}{n} = -\pi n - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, d'où :

$$u_n = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On déduit de ce calcul que $u_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3n}$, donc il s'agit d'une série alternée (à partir d'un certain rang) et $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{3n}$ montre qu'elle n'est pas absolument convergente. De plus $\sum u_n$ apparaît comme la somme d'une série convergente d'après le critère de Leibniz : $\sum (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3n}$, et d'une série absolument convergente puisque $u_n - (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3n} = \mathcal{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$; elle est donc convergente.

5) Notons que $u_n = \ell n\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ est définie pour $n \geqslant 2$. Comme $\alpha > 0$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum u_n$ est donc absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$. Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, procédons par un développement limité à deux termes :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \quad \text{et} \quad -\left[u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right] \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2\alpha}}.$$

La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ étant convergente d'après le critère de Leibniz (car $\alpha > 0$), la série $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ c'est-à-dire convergente si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

6) Puisque la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n}$ vérifie le critère de Leibniz, on a pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ell n\, k}\right| \leqslant \dfrac{1}{\ell n\, n}$ donc $|u_n| \leqslant e^{-\ell n\, n\, \ell n\, \ell n\, n}$. Avec $n^2 e^{-\ell n\, n\, \ell n\, \ell n\, n} = e^{2\ell n\, n - \ell n\, n\, \ell n\, \ell n\, n}$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ donc $\sum u_n$ converge d'après le critère de Riemann.

Ex. 8

1) Posons $u_n = \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$.

En décomposant en éléments simples la fraction $F(X) = \dfrac{X}{X^4+X^2+1}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = \dfrac{1}{2(n^2-n+1)} - \dfrac{1}{2(n^2+n+1)}$ c'est-à-dire $u_n = h(n) - h(n+1)$ où on a posé $h(n) = \dfrac{1}{2(n^2-n+1)}$.

On reconnaît une série télescopique et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = h(0) - h(n+1)$.

Il en résulte que $\sum u_n$ est convergente avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = h(0) - \lim_{n\to+\infty} h(n) = \frac{1}{2}$.

2) Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ et pour $n \geqslant 1$, posons $h(n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On a ainsi pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = h(n-1) - 2h(n) + h(n+1)$, on reconnaît une série téléscopique généralisée.

Formons les sommes partielles : $U_n = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} u_j = \sum_{j=2}^{n} h(j-1) + \sum_{j=2}^{n} h(j+1) - 2\sum_{j=2}^{n} h(j)$,

soit en translatant les indices de sommation : $U_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} h(j) + \sum_{j=3}^{n+1} h(j) - 2\sum_{j=2}^{n} h(j)$,

et après simplification : $U_n = h(1) - h(2) + h(n+1) - h(n)$.

Avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h(n) = 0$, il en résulte que la série est convergente avec $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = h(1) - h(2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarque : on pouvait aussi effectuer ce calcul en remarquant que $u_n = k(n) - k(n+1)$ avec :

$$k(n) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \ell n\left(\cos\left(2^{-n}a\right)\right)$. Pour que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ soit définie il est nécessaire et suffisant que $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Si $a = 0$, on a affaire à la série nulle. On suppose maintenant $a \neq 0$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{a^2}{2^{2n+1}}$ donc, la série géométrique $\sum \dfrac{1}{2^{2n+1}}$ étant convergente, la règle des équivalents donne la convergence de $\sum u_n$.

Notons $S(a)$ la somme, la fonction S ainsi définie est évidemment paire et on peut donc se limiter à $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

En remarquant que pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$, il vient $u_n = \ell n\left(\sin\dfrac{a}{2^{n-1}}\right) - \ell n\left(\sin\dfrac{a}{2^n}\right) - \ell n\, 2$

soit $u_n = \ell n\left(2^{n-1}\sin\dfrac{a}{2^{n-1}}\right) - \ell n\left(2^n \sin\dfrac{a}{2^n}\right)$.

On reconnaît ainsi une série télescopique, et on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \ell n\,\frac{\sin 2a}{2} - \ell n\left(2^n\sin\frac{a}{2^n}\right)$.

Donc, avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{a}{2^n} = a$, il vient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell n\left(\frac{\sin 2a}{2a}\right)$.

Remarquons enfin que la fonction $f\ :\ a \mapsto \dfrac{\sin 2a}{2a}$ étant paire et prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 1$, la formule trouvée est valable sur tout l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Ex. 9

En remarquant que $\dfrac{1}{n-\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)$, on obtient $\dfrac{1}{n-\frac{1}{2}} - \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k^2}$.

La conclusion résulte alors de $\dfrac{1}{k-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{k+\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{k^2-\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{k^2} > 0$.

Niveau 2

Ex. 10

La suite $(y_n)_{\mathbb{N}}$ est définie et positive (par récurrence).

Établissons la propriété $(H_n)\ :\ y_0 \leqslant y_1 \leqslant \dots \leqslant y_n \leqslant 1$.

Sachant que $(H_0)\ :\ y_0 = x_0 \leqslant 1$ est vraie, supposons acquise la propriété (H_n).

Calculons $1 - y_{n+1} = \dfrac{(1-x_{n+1})(1-y_n)}{1+x_{n+1}y_n}$ et $y_{n+1} - y_n = \dfrac{x_{n+1}(1-y_n^2)}{1+x_{n+1}y_n}$.

Ayant supposé que (H_n) est vraie, il vient : $1 - y_{n+1} \geqslant 0$ et $y_{n+1} - y_n \geqslant 0$, d'où $y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant 1$ ce qui donne (H_{n+1}).

Ainsi la suite $(y_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1, elle converge donc.

Minorons l'expression : $y_{n+1} - y_n = \dfrac{x_{n+1}(1-y_n^2)}{1+x_{n+1}y_n} \geqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{(1-y_n^2)}{1+y_n} = \dfrac{1}{2}(1-y_n) \geqslant 0$.

Comme la suite $(y_n)_{\mathbb{N}}$ converge, la série de terme général $y_{n+1} - y_n$ converge, et $0 \leqslant 1 - y_n \leqslant 2(y_{n+1} - y_n)$ prouve par comparaison que la série de terme général $1 - y_n$ converge.

Ex. 11

Sachant que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroisante sur $]0, +\infty[$, on obtient :

pour tout $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$ **(1)** et pour tout $k \geqslant 2$, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ **(2)**

Remarque : l'inégalité **(2)** reste vraie pour $k = 1$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

En sommant les inégalités **(1)** et **(2)**, il vient : $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$, d'où :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 + \int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2\sqrt{n} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

On a donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n}$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2\sqrt{n}+o\big(\sqrt{n}\big)$.

Si $a\geqslant 1$, on a $u_n\geqslant 1$, et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $0<a<1$, on a $n^2u_n=\exp\left[2\,\ell n\,n-\big(2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})\big)\,|\ell n\,a|\right]$, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^2u_n=0$ ou $u_n=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum u_n$ converge d'après le critère de Riemann.

Ex. 12

On a pour $n\geqslant 1$, $10^{p-1}\leqslant n\leqslant 10^p-1$ donc $n<10^p$, $n^{\frac{1}{p}}<10$ et $u_n>0$.

L'inégalité $n\leqslant 10^p-1$ nous donne aussi $10^p\geqslant n+1$ donc $p\geqslant\log(n+1)$ et $\dfrac{1}{p}\leqslant\dfrac{1}{\log(n+1)}$ (le symbole $\log$ désigne le logarithme décimal).

On en déduit : $$n^{\frac{1}{p}}\leqslant n^{\frac{1}{\log(n+1)}}=10^{\frac{\log n}{\log(n+1)}}\quad\text{puis}\quad u_n\geqslant 10\left(1-10^{-\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log(n+1)}}\right).$$

Posons alors $$v_n=10\left(1-10^{-\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log(n+1)}}\right)=10\left(1-10^{-\frac{\ell n(1+\frac{1}{n})}{\ell n(n+1)}}\right)$$

$$v_n=10\left(1-e^{-k\frac{\ell n(1+\frac{1}{n})}{\ell n(n+1)}}\right)\quad\text{avec } k=\ell n\,10=\frac{1}{\log e}$$

Un développement limité donne $\dfrac{\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ell n(n+1)}=\dfrac{1}{n\,\ell n\,n}+o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\,n}\right)$ et donc :
$$v_n=\frac{10k}{n\,\ell n\,n}+o\left(\frac{1}{n\,\ell n\,n}\right)\quad\text{soit}\quad v_n\sim\frac{10k}{n\,\ell n\,n}.$$

Puisque la série de Bertrand $\sum\dfrac{1}{n\,\ell n\,n}$ diverge, on en déduit que $\sum v_n$ diverge puis que $\sum u_n$ diverge.

Ex. 13

Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle U_n=\sum_{k=1}^{n}u_n$, $\displaystyle V_n=\sum_{k=1}^{n}v_n$, on obtient :
$$V_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}\sum_{k=1}^{p}ku_k=\sum_{k=1}^{n}ku_k\sum_{p=k}^{n}\frac{1}{p(p+1)}=\sum_{k=1}^{n}ku_k\sum_{p=k}^{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right),$$
donc $\displaystyle V_n=\sum_{k=1}^{n}ku_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)=U_n-nv_n.$

- Si la série $\sum u_n$ converge, l'inégalité $0\leqslant V_n\leqslant U_n\leqslant U=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}u_n$ prouve que $\sum v_n$, série à termes positifs, est convergente. De $nv_n=U_n-V_n$, on déduit donc que la suite (nv_n) converge, soit λ sa limite.

Si $\lambda\neq 0$, alors $v_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\lambda}{n}$ ce qui est contradictoire ($\sum v_n$ converge) donc $\lambda=0$ et $V=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}U_n$.

- Si la série $\sum u_n$ diverge et la série $\sum v_n$ converge, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}V_n=V$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nv_n=+\infty$, ce qui est contradictoire avec ($\sum v_n$ converge). Donc, si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi.

Ex. 14

1) Étude du cas particulier : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ avec $2 - \alpha > 1$ donc $\sum v_n$ converge.

Pour $\alpha = 1$, $\sum u_n$ diverge et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sum v_n$ diverge.

Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge et :

si $1 < \alpha < 2$, $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ avec $2 - \alpha < 1$ donc $\sum v_n$ diverge,

si $\alpha = 2$, $v_n = \dfrac{1}{2}$ donc $\sum v_n$ diverge,

si $\alpha > 2$, $v_n \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc $\sum v_n$ diverge.

L'étude de cet exemple montre que l'on ne peut rien dire de $\sum v_n$ lorsque $\sum u_n$ diverge.

2) Montrons que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ diverge.

Supposons $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes.

De $v_n = \dfrac{1}{1 + n^2 u_n}$ on tire $u_n v_n = \dfrac{1 - v_n}{n^2}$, d'où :

$$\sqrt{u_n v_n} = \frac{\sqrt{1 - v_n}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ (car } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0\text{) donc } \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ diverge.}$$

Or $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n + v_n\right)$ montre, d'après le critère de domination, que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est convergente.

On a ainsi obtenu une contradiction, ce qui permet de conclure à la proposition annoncée.

Ex. 15

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la somme de la série de terme général $a_k(n) = \dfrac{n}{k^2} e^{\frac{n}{k}}$ défini à partir du rang n.

Comme $a_k(n) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{k^2}$ la série est convergente. Comparons u_n à une intégrale.

La fonction $\varphi : t \mapsto n \dfrac{1}{t^2} e^{\frac{n}{t}}$, étant continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, on dispose de l'encadrement :

$$\int_k^{k+1} n \frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{n}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} n \frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} n \frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2} \mathrm{d}t = \left[-e^{\frac{n}{t}}\right]_n^{+\infty} = e - 1$ existe.

D'où $\displaystyle\int_n^{+\infty} n \frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \leqslant \frac{e}{n} + \int_n^{+\infty} n \frac{e^{\frac{n}{t}}}{t^2} \mathrm{d}t$ puis $e - 1 \leqslant u_n \leqslant e - 1 + \dfrac{e}{n}$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e - 1$.

Ex. 16

Le critère de Cauchy appliqué à la série convergente $\sum \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ montre que la suite de terme général :

$$a_n = \sum_{k=E\left(\frac{n}{2}\right)+1}^{n} \frac{u_k}{k^\alpha}$$

converge vers 0. Envisageons alors deux cas selon le signe de α.

1) Si $\alpha \geqslant 0$, $a_n \geqslant \left[n - E\left(\dfrac{n}{2}\right)\right] \dfrac{u_n}{n^\alpha} > 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[n - E\left(\frac{n}{2}\right)\right] \frac{u_n}{n^\alpha} = 0.$

On a, par ailleurs, $n - E\left(\frac{n}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ (car $n - E\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$), donc :

$$\left[n - E\left(\frac{n}{2}\right)\right] \frac{u_n}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} n^{1-\alpha} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} u_n = 0.$$

2) Si $\alpha < 0$, $a_n \geqslant \left[n - E\left(\frac{n}{2}\right)\right] \frac{2^\alpha}{n^\alpha} u_n > 0$ et on conclut de la même manière.

Ex. 17

Posons $v_n = \ell n\, u_n - \ell n\, u_{n-1}$, $(n \geqslant 1)$, on a alors :

$$v_n = \ell n\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n}{u_{n-1}} - 1 \sim \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n} \quad (\text{car } \frac{u_n}{u_{n-1}} \text{ tend vers } 1).$$

$\sum v_n$ et $\sum \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n}$ sont donc des séries à termes positifs, de même nature.

Par ailleurs, $\sum_{k=1}^{n} v_k = \ell n\, u_n - \ell n\, u_0$ donc $\sum v_n$ est divergente, et il en est de même pour $\sum \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n}$.

Alors, d'après le théorème 13, on a, quand n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k \underset{+\infty}{\sim} \ell n\, u_n$.

Ex. 18

1) On a $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$. La décroissance de $f : \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{2t+1}$ donne, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{2t+1} \leqslant \frac{1}{2k+1} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{2t+1} \text{ d'où } \int_n^{2n} \frac{dt}{2t+1} \leqslant u_n \leqslant \int_{n-1}^{2n-1} \frac{dt}{2t+1}$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2} \ell n\left(\frac{4n+1}{2n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2} \ell n\left(\frac{4n-1}{2n-1}\right)$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2} \ell n\, 2$.

2) On a $\sum_{p=n}^{+\infty} (u_{p+1} - u_p) = \ell - u_n$, cherchons donc un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+1}$$

donc, avec $x = 4n+2$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x(x^2-1)}$ et $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{32n^3}$.

L'encadrement $\frac{1}{(n+1)^3} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$, avec $\frac{1}{(n+1)^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$, donne alors $\frac{1}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^3}$,

et le théorème de sommation des équivalents pour les séries positives convergentes fournit :

$$\sum_{p=n}^{+\infty} (u_{p+1} - u_p) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{32} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3}.$$

D'où finalement $\ell - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{64n^2}$.

Ex. 19

1) Avec $v_n = \frac{1}{n^\beta}$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si $\beta - \alpha \neq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est du signe de $\beta - \alpha$.

Lorsque $\alpha < 1$, prenons $\beta = 1$, alors $\sum v_n$ est divergente et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geqslant n_0$ montre que $\sum u_n$ diverge également.

Lorsque $\alpha > 1$, prenons $\beta = \dfrac{1+\alpha}{2}$, on a alors $1 < \beta < \alpha$ donc $\sum v_n$ converge et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geqslant n_0$ montre que $\sum u_n$ converge également.

2) Avec $u_n = \dfrac{1}{n\,\ell n^{\beta}\, n}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\left(\dfrac{\ell n(n+1)}{\ell n\, n}\right)^{-\beta}$,

et $\ell n(n+1) = \ell n\, n + \ell n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ell n\, n + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donne $\dfrac{\ell n(n+1)}{\ell n\, n} = 1 + \dfrac{1}{n\,\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}\right) = 1 + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$,

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

En conséquence, lorsque $\alpha = 1$, on peut aussi bien avoir affaire à une série convergente (c'est le cas, par exemple, avec $\beta = 2$) qu'à une série divergente (c'est le cas, par exemple, avec $\beta = 1$).

3) On a ici $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \dfrac{1}{6n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. D'après le résultat précédent $\sum u_n$ diverge.

Ex. 20

La suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est définie car u_n est le reste d'ordre n d'une série alternée vérifiant le critère de Leibniz.

On sait aussi que u_n est du signe de son premier terme : $u_n = (-1)^n\,|u_n|$ et que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

En conséquence, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Calculons :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} + u_{N+1}\right)\\ &= N u_{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\left(\sum_{n=1}^{k} 1\right)\\ &= N u_{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}.\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} N u_{N+1} = 0$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\ell n\, 2$.

Ex. 21

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et a pour somme e^x.

Posons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$, $R'_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$, il vient : $u_n = (e - R_n)\left(\dfrac{1}{e} - R'_n\right) - 1 = -\dfrac{1}{e}R_n - eR'_n + R_nR'_n$.

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{1}{(n+k)!} \leqslant \dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{1}{k!}$. Il en résulte $0 < R_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ c'est-à-dire

$0 < R_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$, donc $|R'_n| \leqslant R_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$, et pour $n \geqslant 2$, $|R_nR'_n| \leqslant R_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$.

Ainsi les trois séries $\sum R_n$, $\sum R'_n$ et $\sum R_nR'_n$ sont absolument convergentes et il en est de même pour $\sum u_n$.

Ex. 22

Posons $u_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} nx \operatorname{ch}(n+1)x}$. La fonction u_n ainsi définie est visiblement paire, et on peut donc se limiter à $x \geqslant 0$.

Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = 1$ donc $\sum u_n(0)$ diverge grossièrement.

Pour $x > 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $u_n(x) \sim 4e^{-(2n+1)x}$ et la série géométrique $\sum e^{-2nx}$ étant convergente, la règle des équivalents donne qu'il en est de même pour $\sum u_n(x)$.

En posant $t = e^{2nx}$, on obtient $u_n(x) = \dfrac{4te^{-x}}{(t+1)(t+e^{-2x})}$, et une décomposition en éléments simples donne :

$u_n(x) = \dfrac{2}{\operatorname{sh} x}\cdot\dfrac{1}{t+1} - \dfrac{2e^{-2x}}{\operatorname{sh} x}\cdot\dfrac{1}{t+e^{-2x}}$, d'où enfin $u_n(x) = \dfrac{2}{\operatorname{sh} x}\left[\dfrac{1}{e^{2nx}+1} - \dfrac{1}{e^{2(n+1)x}+1}\right]$.

Pour $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{2(n+1)x} = +\infty$ d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{2}{\operatorname{sh} x}\left(\frac{1}{2} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{2(n+1)x}+1}\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$.

Pour $x < 0$, d'après la parité des u_n, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(-x) = -\frac{1}{\operatorname{sh} x}$.

Ex. 23

1) Pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série $\sum z^p$ est absolument convergente et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} z^p = \frac{1}{1-z}$.

Le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes nous donne donc :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} z^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} z^q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} z^p z^{n-p}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

2) Soit D le disque unité de $\mathbb{C}$: $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \;:\; D \to \mathbb{C},\quad z \mapsto \frac{nz^n}{1-z^n}.$$

Pour tout $z \in D$, on a $|u_n(z)| \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,|z|^n$ et la série $\sum n\,|z|^n$ converge d'après le critère de d'Alembert donc $\sum u_n(z)$ est absolument convergente ce qui assure l'existence de :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nz^n}{1-z^n}.$$

Pour tout $z \in D$, on a $\displaystyle\frac{1}{1-z^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} z^{np}$ donc $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} n\,z^{n(p+1)}$ ce qui amène à considérer la suite double $\left(n\,z^{n(p+1)}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$.

Pour tout z fixé dans D, la série de terme général $x_p = n\,z^{n(p+1)}$ converge absolument et $\displaystyle y_n = \sum_{p=0}^{+\infty}|x_p| = \frac{n\,|z|^n}{1-|z|^n}$. Alors l'équivalence $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,|z|^n$ montre que la série $\sum y_n$ est convergente.

Dans ces conditions, la suite double $\left(n\,z^{n(p+1)}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on peut donc intervertir les sommations, d'où :

$$f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} n\,z^{n(p+1)}.$$

D'après le 1), en posant $v = z^{p+1}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,z^{n(p+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,v^n = v\sum_{n=1}^{+\infty} n\,v^{n-1} = \frac{v}{(1-v)^2}$$

et finalement, $\displaystyle f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{z^{p+1}}{\left(1-z^{p+1}\right)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{z^p}{\left(1-z^p\right)^2}$.

Ex. 24

On reconnaît une intégrale de Wallis : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \mathrm{d}x$.

La formule de récurrence $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ conduit à $I_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ d'où, avec la formule de Stirling :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \text{ et } u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Ex. 25

La fonction ℓn^2 étant croissante, on obtient : $\int_1^n \ell n^2 x \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ell n^2 k \leqslant \int_1^{n+1} \ell n^2 x \mathrm{d}x$.

Calculons $\int_1^n \ell n^2 x \mathrm{d}x = n\,\ell n^2 n - 2n\,\ell n\, n + 2n - 2$, on en déduit $\int_1^n \ell n^2 x \mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \int_1^{n+1} \ell n^2 x \mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} n\,\ell n^2 n$,

d'où : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell n^2 n}{n^{\alpha-1}}$. Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Ex. 26

Formons $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{3n} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

Pour $\alpha > 1$, la série $\sum \dfrac{1}{k^\alpha}$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$: $\sum u_n$ converge avec $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 0$.

Pour $\alpha \leqslant 0$, $U_n \geqslant 2n$: $\sum u_n$ diverge.

Pour $0 < \alpha < 1$, $U_n \geqslant \dfrac{2n}{(3n)^\alpha}$ donc $U_n \geqslant \dfrac{2}{3} n^{1-\alpha}$ et $\sum u_n$ diverge.

Pour $\alpha = 1$, avec $\int_k^{k+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ il vient $\ell n \dfrac{3n+1}{n+1} \leqslant U_n \leqslant \ell n\, 3$: Σu_n converge avec $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ell n\, 3$.

Ex. 27

La fonction $f : x \mapsto e^x + x$ est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On a donc $x_n = f^{-1}(n)$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

$n = e^{x_n} + x_n$ donne $n \underset{+\infty}{\sim} e^{x_n}$ donc $x_n = \ell n\, n + o(\ell n\, n)$, alors :

$$x_n = \ell n(n - x_n) = \ell n \left(n - \ell n\, n + o(\ell n\, n)\right) = \ell n\, n - \frac{\ell n\, n}{n} + o\left(\frac{\ell n\, n}{n}\right),$$

puis $x_n = \ell n\, n + \ell n \left[1 - \dfrac{\ell n\, n}{n} + \dfrac{\ell n\, n}{n^2} + o\left(\dfrac{\ell n\, n}{n^2}\right)\right] = \ell n\, n - \dfrac{\ell n\, n}{n} - \dfrac{\ell n^2 n}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ell n^2 n}{n^2}\right)$.

Finalement $u_n = (1-a)\,\ell n\, n - (1+b)\dfrac{\ell n\, n}{n} - \dfrac{\ell n^2 n}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ell n^2 n}{n^2}\right)$.

Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 1$ et $b = -1$.

Ex. 28

1) En écrivant $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!n^n}$, la formule de Stirling donne $u_n \sim e^{-n} 2^{2n+\frac{1}{2}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Un développement limité donne $\ell n\, u_n - \ell n\, u_{n-1} = 2\,\ell n\, 2 - 1 + \dfrac{1}{24n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Alors, en posant $v_n = e^n 2^{-2n-\frac{1}{2}} u_n$, il vient : $\ell n\, v_n - \ell n\, v_{n-1} = \dfrac{1}{24n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

D'après le théorème de sommation des équivalents pour les séries convergentes à termes positifs,

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell n\, v_n = 0$, on obtient : $\ell n\, v_n \sim -\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{24k^2}$ soit encore $\ell n\, v_n \sim -\dfrac{1}{24n}$.

En conséquence, on a $v_n = e^{-\frac{1}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 - \dfrac{1}{24n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et finalement :

$$u_n = e^{-n} 2^{2n+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ex. 29

Soit $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}$, on a $u_n = u_{n-1}\dfrac{\sqrt{n-1}}{1+\sqrt{n}}$ donc $u_n = u_{n-1}\sqrt{n-1} - u_n\sqrt{n}, (n \geqslant 2)$.

On pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, il vient $U_n = 1 - u_n\sqrt{n},\ \ (n \geqslant 1)$.

Avec $\ell n\left(u_n\sqrt{n}\right) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ell n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, la divergence de la série $\sum \ell n\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = 0$

donc :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

Ex. 30

Dans le cas $v_n \geqslant u_n$, on a $v_n \leqslant \dfrac{1}{n^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}$, d'où $\forall n \geqslant 1,\ \ v_n \leqslant u_n + \dfrac{1}{n^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}$ et $\sum u_n$ est convergente.

Ex. 31

De $\forall p \in \mathbb{N},\ \ S_{2^{p+1}} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{2^p}\right) S_{2^p}$, on déduit $S_{2^n} \leqslant \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) S_1$.

La série $\sum \ell n\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$ étant convergente, il existe $A = \displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ S_{2^n} \leqslant AS_1$.

La suite $(S_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante et, pour tout n, il existe p tel que $2^p \geqslant n$ donc $S_n \leqslant S_{2^p} \leqslant AS_1$. Il en résulte que $\sum u_n$ est convergente.

Ex. 32

Avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et $u_n = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$.

Si $\dfrac{S_{n-1}}{S_n}$ ne tend pas vers 1, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $\dfrac{S_{n-1}}{S_n}$ tend vers 1, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\ell n \dfrac{S_{n-1}}{S_n} = \ell n \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$. Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ell n \frac{S_k}{S_{k-1}} = \ell n \frac{S_n}{S_0}$ tend vers $+\infty$, donc $\sum u_n$ diverge.

Ex. 33

Si $\sum u_n$ converge, u_n tend vers 0 et, à partir d'un certain rang, $0 < u_n^2 \leqslant u_n$ donc $\sum u_n^2$ converge.

Alors $\ell n \cos u_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$ donne que $\sum \ell n \cos u_n$ converge et puisque $\ell n \cos u_n = \ell n\, a_n - \ell n\, a_{n+1}$, la suite $\left(\ell n\, a_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge. C'est contradictoire donc $\sum u_n$ diverge.

Ex. 34

Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, la suite $\left(u_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ est nulle donc $\sum u_n$ converge.

Si $x \in \mathbb{R}\setminus \pi\,\mathbb{Z}$, à partir d'un certain rang n_0, on a $0 < \left|\dfrac{x}{n}\right| < \pi$,

- pour $x > 0$, la série est de signe constant à partir de n_0 ,
- pour $x < 0$, la série est alternée à partir de n_0 .

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$, on voit que pour $|x| < 1$ la série est absolument convergente et, pour $|x| > 1$, u_n ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Dans le cas où $|x| = 1$, formons $\ell n\,|u_n| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ell n\left[k\sin\frac{1}{k}\right]$. Avec $\ell n\left[k\sin\dfrac{1}{k}\right] \sim -\dfrac{1}{6k^2}$, on voit que la série $\sum \ell n\left[k\sin\dfrac{1}{k}\right]$ converge, donc $\ell n\,|u_n|$ a une limite réelle ℓ et $|u_n|$ tend vers $e^{\ell} \neq 0$.

Il en résulte que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Ex. 35

Posons $v_p = \ell n\left(1 + \dfrac{(-1)^{p+1}}{p^{\alpha}}\right)$, on obtient : $v_p = \dfrac{(-1)^{p+1}}{p^{\alpha}} - \dfrac{1}{2p^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{p^{2\alpha}}\right)$.

$\sum v_p$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{p^{2\alpha}}$ donc convergente si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

- Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- Si $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Niveau 3

Ex. 36

Posons $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$; pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e^{n\,\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ donc, sachant que $\ell n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, il vient $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant e$.

On en déduit $\dfrac{a_n}{a_0} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}} \leqslant e^n$, donc $a_n \leqslant e^n$ et enfin $\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant e$.

En écrivant $v_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i\,u_i\right)^{\frac{1}{n}}$, l'inégalité précédente donne : $v_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i\,u_i\right)^{\frac{1}{n}}$ et compte tenu de la relation entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique (qui peut se déduire de la concavité de la fonction ℓn), il vient :

$$v_n \leqslant \frac{e}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\,u_i\,.$$

En conséquence, on a : $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant e\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{i\,u_i}{k(k+1)}$ c'est-à-dire $V_n \leqslant e\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\,u_i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Alors, de $\displaystyle\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{i} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{i}$, on déduit : $V_n \leqslant e\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \leqslant e\sum_{i=1}^{+\infty} u_i$ et la convergence de la série $\sum v_n$, à termes réels positifs, en résulte.

Ex. 37

1) Écrivons $v_n = \left(R_{n-1} - R_n\right)R_{n-1}^{-\alpha}$, alors la décroissance de $x \mapsto x^{-\alpha}$, $(\alpha > 0)$, donne :

$$\left(R_{n-1} - R_n\right)R_{n-1}^{-\alpha} \leqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} x^{-\alpha}\mathrm{d}x \quad \text{donc} \quad v_n \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right).$$

Puisque $1 - \alpha > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$, la série de terme général $v'_n = R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}$ est convergente, $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v'(k) = R_{-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right.$ tend vers $R_{-1}^{1-\alpha}$ quand n tend vers $+\infty\Big)$, et l'inégalité $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}v'_n$ donne la convergence de $\sum v_n$ par application du critère de domination pour les séries à termes positifs.

2) On a de même $w_n = \left(R_{n-1} - R_n\right)\dfrac{1}{R_n} \geqslant \displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, donc :

$$w_n \geqslant w'_n \quad \text{avec} \quad w'_n = \ell n\, R_{n-1} - \ell n\, R_n\,.$$

La série $\sum w'_n$ est divergente car $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell n\, R_n = -\infty$ donc $\sum w_n$ diverge.

Ex. 38

$\left(u_n\right)$ étant décroissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(p^{n+1} - p^n\right) u_{p^{n+1}} \leqslant u_{p^n+1} + u_{p^n+2} + \cdots + u_{p^{n+1}} \leqslant \left(p^{n+1} - p^n\right) u_{p^n},$$

d'où, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(p^{n+1} - p^n\right) u_{p^{n+1}} \leqslant \sum_{k=2}^{p^{N+1}} u_k \leqslant \sum_{n=0}^{N}\left(p^{n+1} - p^n\right) u_{p^n}\,.$

Posons, pour $n \geqslant 2$, $\quad U_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \quad$ et $\quad V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p^k u_{p^k}\,.$

La double inégalité précédente s'écrit alors $\quad \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(V_{N+1} - u_1\right) \leqslant U_{p^{N+1}} \leqslant (p-1)V_n.$

Si $\sum u_n$ converge, on déduit de $\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(V_{N+1} - u_1\right) \leqslant U_{p^{N+1}}$ que la suite $\left(V_n\right)$ est majorée et donc que $\sum p^n u_{p^n}$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge alors $\lim\limits_{N \to +\infty} U_{p^{N+1}} = +\infty$, et on déduit de $U_{p^{N+1}} \leqslant (p-1)V_n$ que $\lim\limits_{N \to +\infty} V_N = +\infty$, donc $\sum p^n u_{p^n}$ diverge.

Application : pour $u_n = \dfrac{1}{n(\ell n\, n)^\lambda}$ on a $\quad p^n u_{p^n} = \dfrac{1}{n^\lambda(\ell n\, p)^\lambda}$ donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \dfrac{1}{n^\lambda}$ converge, c'est-à-dire $\lambda > 1$.

Ex. 39

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$, et lorsque ces séries sont convergentes, $U = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, $V = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} v_k\,.$

On a alors $\quad V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} a_k u_k \quad$ avec $\quad a_k = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ p \leqslant k \leqslant 2p-1}} \frac{1}{p} = \sum_{p=1+E\left(\frac{k}{2}\right)}^{\inf(k,n)} \frac{1}{p}\,.$

1) De $\inf(k, n) \leqslant k$, on déduit :

$$a_k \leqslant \sum_{p=1+E\left(\frac{k}{2}\right)}^{k} \frac{1}{p} \leqslant \frac{k - E\left(\dfrac{k}{2}\right)}{1 + E\left(\dfrac{k}{2}\right)} \quad \text{donc} \quad a_k \leqslant \frac{k}{1 + E\left(\dfrac{k}{2}\right)} \leqslant 2.$$

Il en résulte $\quad V_n \leqslant 2U_{2n-1}\,.$

Si $\sum u_n$ est convergente, on a $\quad \forall n \in \mathbb{N}, U_{2n-1} \leqslant U \quad$ donc $\quad V_n \leqslant 2U$.
Puisque la suite de ses sommes partielles est majorée, la série $\sum v_n$, à termes réels positifs, est convergente.

2) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\quad a_k = \displaystyle\sum_{p=1+E\left(\frac{k}{2}\right)}^{k} \frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{k}\left(k - E\left(\frac{k}{2}\right)\right)$ donc $a_k \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Tenant compte de $\quad V_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k u_k$, on obtient $V_n \geqslant \dfrac{1}{2}U_n$, c'est-à-dire $\quad U_n \leqslant 2V_n$.

Comme au 1), il en résulte que la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

3) On déduit de 1) et 2) que les deux séries sont de même nature.

Ex. 40

On a $\quad \dfrac{1}{n\,\ell n\, n\,\ell n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell n\, n} - \dfrac{1}{\ell n(n+1)}$, donc d'après la règle des équivalents $\sum v_n$ est de même nature que $\sum w_n$ avec $\quad w_n = \left(\dfrac{1}{\ell n\, n} - \dfrac{1}{\ell n(n+1)}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\, \ell n(k+1)$ (il s'agit bien sûr de séries à termes positifs).

Formons $\quad W_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} w_p = \sum_{p=2}^{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\ell n\, p} - \frac{1}{\ell n(p+1)}\right) u_k\, \ell n(k+1)$

$$W_n = u_1\, \ell n\, 2 \sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{\ell n\, p} - \frac{1}{\ell n(p+1)}\right) + \sum_{k=2}^{n} u_k\, \ell n(k+1) \sum_{p=k}^{n}\left(\frac{1}{\ell n\, p} - \frac{1}{\ell n(p+1)}\right).$$

L'introduction de $\dfrac{1}{\ell n\, n} - \dfrac{1}{\ell n(n+1)}$ trouve sa justification dans ce calcul, car on a :

$$\sum_{p=k}^{n}\left(\frac{1}{\ell n\, p} - \frac{1}{\ell n(p+1)}\right) = \frac{1}{\ell n\, k} - \frac{1}{\ell n(n+1)}.$$

On a donc $\quad W_n = u_1\, \ell n\, 2\left(\dfrac{1}{\ell n\, 2} - \dfrac{1}{\ell n(n+1)}\right) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k\, \ell n(k+1)\left(\frac{1}{\ell n\, k} - \frac{1}{\ell n(n+1)}\right)$,

et il en résulte puisque les u_n sont positifs $\quad \forall n \geqslant 2, W_n \leqslant u_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \frac{\ell n(k+1)}{\ell n\, k}$.

Or $\quad u_k \dfrac{\ell n(k+1)}{\ell n\, k} \underset{+\infty}{\sim} u_k$, donc $\quad \sum u_k \dfrac{\ell n(k+1)}{\ell n\, k}$ converge (règle des équivalents),

et avec $\quad S = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k \frac{\ell n(k+1)}{\ell n\, k}$ on obtient $\quad \forall n \geqslant 2, W_n \leqslant u_1 + S$.

Puisque la suite de ses sommes partielles est majorée, la série $\sum w_n$, à termes positifs, est convergente et il en est de même pour $\sum v_n$.

Ex. 41

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x - x^2$, la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est définie par $x_0 \in]0, 1[$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

On a $f(]0, 1[) = \left]0, \dfrac{1}{4}\right]$ et pour $x \in]0, 1[, \; f(x) - x < 0$, donc la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]0, 1[$ et décroissante.

Étant décroissante, minorée, elle converge vers $\ell \in [0, 1]$ et puisque f est continue sur $[0, 1]$, ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$ c'est-à-dire $\ell = 0$.

- Formons $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{1 - x_n}$.

Quand n tend vers $+\infty$, on a $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} \sim 1$, donc le théorème de sommation des équivalents pour les séries divergentes à termes positifs donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) \sim n$, d'où $\dfrac{1}{x_n} \sim n$.

Formons ensuite $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} - 1 = \dfrac{x_n}{1-x_n}$.

Quand n tend vers $+\infty$, on a $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} - 1 \sim x_n \sim \dfrac{1}{n}$ donc aussi $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} - 1 \sim \ell n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Alors le même théorème donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} - 1\right) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} - 1\right) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\big(\ell n(k+1) - \ell n\, k\big) \text{ d'où } \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} - n \sim \ell n\, n.$$

Il reste à montrer que $\dfrac{1}{x_n} - n - \ell n\, n$ a une limite réelle quand n tend vers $+\infty$. On considère pour cela la série de terme général :

$$y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} - 1 - \ell n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{x_n}{1-x_n} - \ell n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

De $\dfrac{1}{x_n} = n + \ell n\, n + o(\ell n\, n)$, on déduit $\dfrac{x_n}{1-x_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ell n\, n}{n^2} + o\left(\dfrac{\ell n\, n}{n^2}\right)$ d'où $y_n \sim -\dfrac{\ell n\, n}{n^2}$.

Ainsi on a $y_n = o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, ce qui prouve la convergence de $\sum y_n$ donc aussi de la suite $\left(\dfrac{1}{x_n} - n - \ell n\, n\right)_{\mathbb{N}}$.

Ex. 42

Étudions la suite de terme général $\quad P_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}}\right)$.

On a $\dfrac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ et $\ell n\,\dfrac{P_n}{P_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Écrivons $\quad \ell n\,\dfrac{P_n}{P_{n-1}} = -\dfrac{1}{2n} + x_n \quad$ où $\quad x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Les séries $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ sont convergentes, donc $\sum x_n$ aussi. Alors compte tenu de $\ell n\,\dfrac{P_n}{P_1} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} x_k$ et de $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ell n\,\frac{1}{\sqrt{n}}$, nous allons comparer P_n et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Posons donc $Q_n = P_n\sqrt{n}$ et formons $\ell n\,\dfrac{Q_n}{Q_{n-1}} = \ell n\,\dfrac{P_n}{P_{n-1}} - \dfrac{1}{2}\ell n\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2n} + x_n + \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$\ell n\, Q_n - \ell n\, Q_{n-1} = x_n + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série convergente, donc la suite $n \mapsto \ell n\, Q_n$ converge :

$$\lim_{n\to+\infty} \ell n\, Q_n = \mu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} Q_n = e^{\mu}.$$

Ainsi $\quad P_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\mu}}{\sqrt{n}}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\mu}}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$. La série $\sum u_n$ est converge si et seulement si $\alpha < -\dfrac{1}{2}$.

Ex. 43

Soit $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x^{\alpha}}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ avec $\quad f'(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2x^{\alpha+\frac{1}{2}}} - \dfrac{\alpha\sin\sqrt{x}}{x^{\alpha+1}}$.

Compte tenu de $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$ et $\alpha + 1 > 1$, la majoration : $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2x^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ donne que f' est intégrable sur $[1,+\infty[$. Le théorème 17 s'applique et donne que la série de terme général $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{\sin\sqrt{t}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t - u_n$ est absolument convergente.

Formons alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\sin\sqrt{t}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \int_{1}^{n}\frac{\sin\sqrt{t}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$, le changement de variable $x = \sqrt{t}$ donne :

$$S_n = 2\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin x}{x^{2\alpha-1}}\mathrm{d}x,$$

puis une intégration par parties :

$$S_n = 2\left[-\frac{\cos x}{x^{2\alpha-1}}\right]_1^{\sqrt{n}} - 2(2\,\alpha\,-1)\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos x}{x^{2\alpha}}\mathrm{d}x$$

$$S_n = 2\cos 1 - \frac{2\cos\sqrt{n}}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}} - 2(2\,\alpha\,-1)\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos x}{x^{2\alpha}}\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de $2\alpha > 1$, la fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^{2\alpha}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $|g(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^{2\alpha}}$), il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe avec $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2\cos 1 - 2(2\,\alpha\,-1)\displaystyle\int_{[1,+\infty[} g$. On a ainsi prouvé la convergence de la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\sin\sqrt{t}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ et finalement $u_n = w_n - v_n$ est convergente.

Ex. 44

1) Avec $v_n = \dfrac{1}{n(\ell n\, n)^{\alpha}}$, on obtient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{\alpha}{n\,\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}\right)$.

Si ℓ est réel, on pose $a = \ell n\,\ell$. On a alors $\ell n\left(n\,\ell n\,\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a}{\ell n\, n}$ donc $\ell n\left(n\,\ell n\,\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \dfrac{a}{\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{\ell n\, n}\right)$

puis $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{a}{n\,\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}\right)$. En conséquence : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\alpha\,-a}{n\,\ell n\, n} + o\left(\dfrac{1}{n\,\ell n\, n}\right)$.

Dans le cas $\ell > e$, on choisit α tel que $1 < \alpha < a$ et on conclut avec le théorème de comparaison logarithmique.

En remarquant que $\left(n\,\ell n\,\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)^{\ell n\, n} \geqslant \left(n\,\ell n\,\dfrac{u'_n}{u'_{n+1}}\right)^{\ell n\, n}$ implique $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{u'_{n+1}}{u'_n}$, on étend la condition précédente au cas $\ell = +\infty$.

Dans le cas $\ell < e$, on choisit $\alpha = 1$ et on conclut de même.

2) Avec $u_n = \dfrac{1}{n\,\ell n\, n(\ell n\,\ell n\, n)^{\beta}}$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\,\ell n\,\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)^{\ell n\, n} = \ell$ quel que soit le réel β.

Ex. 45

La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n}$ vérifie le critère de Leibniz. On en déduit que $\sum u_n$ est elle même une série alternée et que : $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\ell n\, n}$. On a $|u_n| = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{\ell n\, k}$ et en posant $f(x) = \dfrac{1}{\ell n\, x}$ il vient :

$$|u_n| - |u_{n+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} f(n+2k) - 2f(n+2k+1) + f(n+2k+2).$$

En vérifiant que f est convexe sur $]1, +\infty[$ on en déduit que $|u_n| - |u_{n+1}| \geqslant 0$.
Donc la série $\sum u_n$ vérifie, elle aussi, le critère de Leibniz.

Ex. 46

On commence par montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

En remarquant que $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{2k}\mathrm{d}x$, il vient : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$,

puis $0 < \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2n+2}\mathrm{d}x$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

De plus on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - R_n$ avec $R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Il vient ainsi $u_n = \ell n \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - R_n\right)\right]$ et avec un développement limité à l'ordre 2 : $u_n = -2R_n + o\left(R_n^2\right)$.

Avec $R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$, on vérifie que la série alternée ΣR_n converge d'après le critère de Leibniz.

D'autre part $|R_n| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ donne $R_n^2 \leqslant \dfrac{1}{4n^2}$ ce qui prouve que ΣR_n^2 est convergente.

Finalement $\sum u_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.

Ex. 47

1) Avec $e^{i\theta} \neq 1$, on a $A_n = \dfrac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$, d'où $|A_n| = \left|\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$. On pose $M = \dfrac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$.

2) En remplaçant $e^{ik\theta}$ par $A_k - A_{k-1}$ dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k^\alpha}$, on obtient la formule annoncée.

Puisque $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$, la série $\sum \left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ est convergente et la majoration :

$$\left|A_k\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right| \leqslant M\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$

montre que la série $\sum A_k\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ converge également.

Comme de plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{(n+1)^\alpha} = 0$, il existe $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = -1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$, donc $\sum u_n$ est convergente. Avec $|u_n| = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

3) On a $v_n = \mathrm{Re}\ u_n$ et $w_n = \mathrm{Im}\ u_n$ donc $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes et pour $\alpha > 1$ elles sont absolument convergentes. Si $\theta \in \mathbb{R}\backslash \pi\mathbb{Z}$, pour $0 < \alpha \leqslant 1$, écrivons :

$$\left|\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right| \geqslant \frac{\cos^2 n\theta}{n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\cos 2n\theta}{2n^\alpha} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right| \geqslant \frac{\sin^2 n\theta}{n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\cos 2n\theta}{2n^\alpha}.$$

Puisque $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente et $\sum \dfrac{\cos 2n\theta}{2n^\alpha}$ convergente, on en déduit que $\sum |v_n|$ et $\sum |w_n|$ divergent.

Ex. 48

On développe : $u_n = \dfrac{\cos n}{2n^{\alpha/2}} - \dfrac{\cos^2 n}{8n^{3\alpha/2}} + o\left(\dfrac{\cos^2 n}{n^{3\alpha/2}}\right)$, donc $u_n = \dfrac{\cos n}{2n^{\alpha/2}} - \dfrac{\cos 2n}{16n^{3\alpha/2}} - \dfrac{1}{16n^{3\alpha/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$.

Les deux séries $\sum \dfrac{\cos n}{n^{\alpha/2}}$ et $\sum \dfrac{\cos 2n}{n^{3\alpha/2}}$ étant convergentes, $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{n^{3\alpha/2}}$ donc elle converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}$.

CHAPITRE

3

Suites et séries de fonctions

Notations

Dans tout ce chapitre, on convient que :

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

A est une partie non vide d'une espace vectoriel normé E

F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie donc complet,

$\mathcal{F}(A, F)$ est l'espace vectoriel des applications de A dans F soit aussi $\mathcal{F}(A, F) = F^A$,

$\mathcal{B}(A, F)$ est le sous-espace de $\mathcal{F}(A, F)$ formé des applications bornées.

En approfondissement, pour les étudiants de MP*, les résultats de ce chapitre s'étendent au cas où F est un espace de Banach de dimension quelconque.

Comme F désigne toujours l'espace d'arrivée des fonctions étudiées, et qu'en général $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la norme de F sera notée $|\bullet|$.

À toute fonction $f \in \mathcal{F}(A, F)$, on associe sa fonction norme notée $|f|$. Il s'agit de l'élément de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ défini par $A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |f(x)|$.

A. Convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

1. Suites de fonctions : modes de convergence

Définition 1

Suite de fonctions

Une **suite de fonctions** définies sur A à valeurs dans F est une suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(A, F)$. ✎(1)

✎(1) La notion de suite à valeurs dans un espace vectoriel donné est acquise.

Définition 2

Convergence simple d'une suite de fonctions

On dit que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}(A, F)$ **converge simplement sur** A si et seulement si , pour tout $x \in A$, la suite $\left(f_n(x)\right)_{\mathbb{N}}$ converge dans F.

On appelle **limite** ou **limite simple** de la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ ✎(2) , la fonction f de $\mathcal{F}(A, F)$ définie par :

$$f : A \to F, \quad x \mapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

✎(2) On dit usuellement que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers la fonction f.

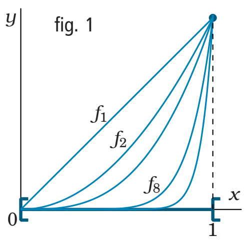


fig. 1

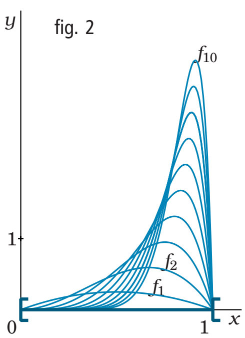


fig. 2

Exemples

1) $A = [0, 1]$, $f_n \ : x \mapsto x^n$ (fig. 1).

La suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in [0, 1[, f(1) = 1.$$

2) $A = [0, 1[$, $f_n \ : x \mapsto n^2 x^n (1 - x)$ (fig. 2).

Pour tout $x \in [0, 1[$, d' après les règles de comparaison des fonctions puissances et exponentielles, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 x^n = 0$.

On en déduit que la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction nulle (de $\mathcal{F}([0, 1[, \mathbb{R})$).

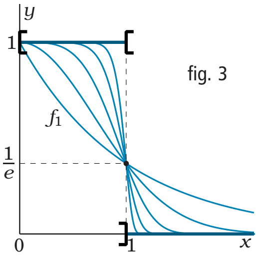


fig. 3

3) $A = [0, +\infty[\,,\ f_n\ : x \mapsto e^{-x^n}$ (fig. 3).
Pour $x \in [0, 1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$.

La suite $\left(f_n(1)\right)_{\mathbb{N}}$ est constante égale à $\dfrac{1}{e}$ et a donc pour limite $\dfrac{1}{e}$.
Pour $x \in]1, +\infty[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.
Ainsi la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in [0, 1[,\ \ f(1) = \frac{1}{e},\ \ f(x) = 0 \text{ si } x \in]1, +\infty[\,.$$

Définition 3

On appelle **norme de la convergence uniforme** sur $\mathcal{B}(A, F)$ l'application :

$$\mathcal{B}(A, F) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \| f \|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|. \text{ ✎}^{(3)}$$

✎ (3) S'il est nécessaire de préciser A, on notera : $\| f \|_\infty^A = \sup\limits_{x \in A} |f(x)|$.

Définition 4

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

On dit que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}(A, F)$ **converge uniformément sur** A si et seulement si il existe une fonction f de $\mathcal{F}(A, F)$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0$. ✎ (4)

✎ (4) On dira encore que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f.

Remarques

1) Ceci suppose qu'à partir d'un certain rang r, chaque fonction $f - f_n$ $(n \geqslant r)$ est bornée et que la suite $\left(f - f_n\right)_{n \geqslant r}$ converge vers 0 dans $\mathcal{B}_\infty(A, F)$.
2) Dans ce cas, pour tout x de A, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \| f - f_n \|_\infty$: la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers f, (cf. propriété 1 suivante).
3) Il se peut qu'une suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}(A, F)$ converge simplement sur A vers $f \in \mathcal{F}(A, F)$ et uniformément sur une partie B de A c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f - f_n \|_\infty^B = 0$.
La limite uniforme de $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ sur B est alors la restriction de f à B. ✎ (5)

✎ (5) Noter que l'on utilise là un langage simplifié puisqu'en toute rigueur il faudrait dire que c'est la suite des restrictions $f_{n|B}$ qui converge vers $f_{|B}$.

Définition 5

Convergence uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions

On dit que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}(A, F)$ **converge uniformément sur tout compact de** A si et seulement si il existe une fonction f de $\mathcal{F}(A, F)$ telle que, quel que soit le compact B inclus dans A, la suite des restrictions $\left(f_{n|B}\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B vers $f_{|B}$. ✎ (6)

✎ (6) Là encore, il en résulte que la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers f.
Dans la pratique on a presque exclusivement affaire à des parties A telles que tout $a \in A$ admet un voisinage relatif V compact. On pourra alors parler de **convergence uniforme locale** sur A.
De telles parties A sont dites **localement compactes**.

Exemples

1) $A = [0, 1]\,,\ f_n\ : x \mapsto \dfrac{x + n}{n + 4nx^2}$ (fig. 4).

La suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f\ : x \mapsto \dfrac{1}{1 + 4x^2}$.

Formons $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{n(1 + 4x^2)}$, il en résulte pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$

donc $\| f_n - f \|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n}$ et la suite converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

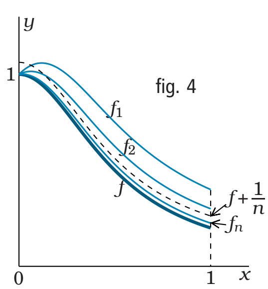


fig. 4

2) $A = [0, 1]\,,\ f_n\ : x \mapsto x^n$.
On a vu précédemment que $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par : $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$.
De $f_n(x) - f(x) = x^n$ si $x \in [0, 1[$ et $f_n(1) - f(1) = 0$, on déduit $\| f_n - f \|_\infty^{[0,1]} = 1$ donc $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.
Fixons alors a quelconque dans $[0, 1[$, on obtient maintenant $\| f_n - f \|_\infty^{[0,a]} = a^n$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_\infty^{[0,a]} = 0$: la convergence est uniforme sur $[0, a]$. On en déduit que $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $[0, 1[$. ✎ (7)

✎ (7) Pour tout segment $S \subset [0,1[$, avec $a = \sup S$ on a $S \subset [0,a]$ donc $\| f_n - f \|_\infty^S \leqslant \| f_n - f \|_\infty^{[0,a]}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_\infty^S = 0$

2. Séries de fonctions : modes de convergence

Définition 6

Série de fonctions

On appelle **série de fonctions** une série $\sum u_n$ de terme général $u_n \in \mathcal{F}(A, F)$.

La suite de fonctions de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée **suite des sommes partielles** de la série de fonctions $\sum u_n$. ✎[8]

✎[8] Une série de fonctions $\sum u_n$ est entièrement définie par la donnée de la suite de fonctions $(S_n)_{\mathbb{N}}$

Définition 7

Convergence simple d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(A, F)$ **converge simplement sur** A :

- si et seulement si, pour tout $x \in A$, la série de terme général $u_n(x)$ converge dans F,

donc :

- si et seulement si la suite $\left(S_n\right)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge simplement sur A. ✎[9]

On appelle **somme de la série** $\sum u_n$, la fonction S de $\mathcal{F}(A, F)$ définie par :

$$S\ : A \to F, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$ ✎[10]

✎[9] En effet, par définition de la convergence d'une série numérique ou vectorielle, $\sum u_n(x)$ converge si et seulement si $(S_n(x))_{\mathbb{N}}$ est convergente.

✎[10] On écrit aussi $S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarque

Dans ces conditions, on dispose de la suite de fonctions $\left(R_n\right)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}(A, F)$:

$$R_n : A \to F, \quad x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

et cette suite converge simplement sur A vers la fonction nulle. ✎[11]

Avec ces notations, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S = S_n + R_n$. ✎[12]

✎[11] $(R_n)_{\mathbb{N}}$ est la suite des restes d'ordre n.
$\forall x \in A, \quad \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$

✎[12] Dans certains cas on pourra rencontrer des notations légérement différentes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k.$$

Exemple

$A = [0, 1]$, $u_n\ : x \mapsto x^n - x^{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = 1 - x^{n+1}$ donc $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$, sa fonction somme S étant définie par $S(x) = 1$ si $x \in [0, 1[$ et $S(1) = 0$.

De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad R_n(x) = S(x) - S_n(x) = x^{n+1}$ si $x \in [0, 1[$ et $R_n(1) = 0$.

Définition 8

Convergence uniforme d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(A, F)$ **converge uniformément sur** A si et seulement si la suite $\left(S_n\right)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge uniformément sur A.

Définition 9

Convergence uniforme sur tout compact d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathcal{F}(A, F)$ **converge uniformément sur tout compact de** A si et seulement si la suite de fonctions $\left(S_n\right)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge uniformément sur tout compact de A.

Remarque

Dans ce cas, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur A.

On dispose donc de la fonction somme $S\ :\ A\ \to F, \ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et de la suite des fonctions restes d'ordre n : $\left(R_n\right)_{\mathbb{N}}$.

Théorème 1

Pour qu'une série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathscr{F}(A,F)$ soit uniformément convergente sur A (resp. sur tout compact de A), il faut et il suffit qu'elle soit simplement convergente sur A et que la suite $\left(R_n\right)_{\mathbb{N}}$ des restes d'ordre n converge uniformément sur A (resp. sur tout compact de A) vers 0 (fonction nulle de $\mathscr{F}(A,F)$). ✎(13)

✎(13) Ce résultat est fondamental : pour prouver que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur A, on essaiera de majorer uniformément (c'est-à-dire indépendamment de x) le reste $R_n(x)$ par une suite de limite nulle.

☞ Il suffit de remarquer que quel que soit n, $S - S_n = R_n$.

Exemple

$$A = [0,1]\ ,\ u_n\ : x \mapsto (-1)^n \frac{x^n}{n+1}\ .$$

Pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum u_n(x)$ converge d'après le critère de Leibniz (ou critère spécial des séries alternées). Dans cette situation on dispose de la majoration :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+2} \leqslant \frac{1}{n+2}\ .$$

On a donc $\| R_n \|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$ et la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la série en résulte.

Définition 10

Convergence normale d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathscr{F}(A,F)$ **converge normalement sur** A si et seulement si la série réelle de terme général $\| u_n \|_\infty^A$ est convergente. ✎(14)

✎(14) La convergence normale est une notion qui ne s'applique qu'aux séries de fonctions.

Remarque

Ceci suppose qu'à partir d'un certain rang r, chaque fonction u_n $(n \geqslant r)$ est bornée.

Théorème 2

La série $\sum u_n$ de $\mathscr{F}(A,F)$ est normalement convergente sur A si et seulement si il existe une série $\sum a_n$ à termes réels positifs convergente et telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ |u_n(x)| \leqslant a_n$.

☞ C'est un corollaire immédiat du critère de domination pour les séries à termes réels positifs.

Définition 11

Convergence normale locale d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathscr{F}(A,F)$ **converge normalement sur tout compact de** A si et seulement si, quel que soit le compact $B \subset A$, la série réelle de terme général $\| u_n \|_\infty^B$ est convergente.

3. Comparaison des modes de convergence

Propriété 1

Convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple

Si une suite ou une série de fonctions de $\mathscr{F}(A,F)$ converge uniformément sur A (resp. sur tout segment de A) alors elle converge simplement sur A. ✎(15)

✎(15) On a vu dans des exemples précédents que la réciproque de cette implication est fausse.

☞ C'est l'objet de la remarque 2) de la définition 4.

Propriété 2

Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme

L'espace F étant de dimension finie, si une série de fonctions $\sum u_n$ de $\mathscr{F}(A,F)$ converge normalement sur A alors elle converge uniformément sur A. ✎[16]

✎[16] L'exemple de la série de terme général $u_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \to (-1)^n \dfrac{x^n}{n+1}$ montre que la réciproque de cette implication est fausse.

☞ Pour tout $x \in A$, on a $|u_n(x)| \leqslant \| u_n \|_\infty^A$, et la série de terme général $\| u_n \|_\infty^A$, $(n \geqslant r)$, est convergente. Il en résulte que la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. ✎[17]

✎[17] Car F est complet puisque de dimension finie. Ce résultat reste donc vrai lorsque F est un espace de Banach (non nécessairement de dimension finie).

C'est la convergence simple sur A de la série de fonctions $\sum u_n$.

Introduisons le reste d'ordre n de la série réelle $\sum \| u_n \|_\infty^A$, $\quad \rho_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \| u_k \|_\infty^A$

et celui de la série de fonctions $\sum u_n$, $\quad R_n : A \to F, \quad x \mapsto \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$.

Majorons : $\quad \left| \displaystyle\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{n+p} \| u_k \|_\infty^A \leqslant \rho_n$,

d'où $\quad |R_n(x)| \leqslant \rho_n \quad , \quad \| R_n \|_\infty^A \leqslant \rho_n \quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \| R_n \|_\infty^A = 0$.

Comme la suite de fonctions $\left(R_n\right)_\mathbb{N}$ converge uniformément sur A vers 0, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur A. ✎[18]

✎[18] C'est le théorème 1.

Propriété 3

Condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathscr{F}(A,F)$ qui converge uniformément sur A ; alors la **suite** de fonctions $(u_n)_\mathbb{N}$ converge uniformément vers 0 sur A. ✎[19]

✎[19] Ceci signifie, qu'à partir d'un certain rang, chaque fonction u_n est bornée et que la suite réelle $n \mapsto \| u_n \|_\infty^A$ converge vers 0.

☞ Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur A, la suite $\left(R_n\right)$ des restes converge uniformément vers 0 sur A.

Or, en écrivant $\quad u_n = R_n - R_{n+1}\quad$ on obtient : $\| u_n \|_\infty^A \leqslant \| R_n \|_\infty^A + \| R_{n+1} \|_\infty^A$ d'où la conclusion.

<u>Conséquence pratique</u>

Pour prouver qu'une série ne converge pas uniformément sur A, il suffit de montrer que le terme général ne tend pas uniformément vers 0.

<u>Exemple</u>

La série de terme général $u_n \ : \ [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto nx^n(1-x)$ converge simplement sur $[0,1]$ car $u_n(1) = 0$ et pour $x \in [0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n(x) = 0$. ✎[20]

✎[20] Pour $0 \leqslant x < 1$, on applique la règle de Riemann. On pourrait aussi utiliser la règle de d'Alembert.

Formons alors $u_n\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \dfrac{1}{e}$ d'où :

$$\| u_n \|_\infty^{[0,1]} \geqslant \frac{1}{e}\,.$$

En conséquence $\| u_n \|_\infty^{[0,1]}$ ne tend pas vers 0, donc $\left(u_n\right)_\mathbb{N}$ ne tend pas uniformément vers 0 et la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

B. Limite – Continuité L'espace vectoriel normé $\mathcal{B}_\infty(A,F)$

1. Limite et convergence uniforme

Théorème 3

Théorème d'interversion des limites ✎[21]

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F qui converge uniformément sur A vers f, et $a \in E$ un point adhérent à A.

Si chaque f_n admet une limite $b_n \in F$ quand x tend vers a suivant A, alors la suite $(b_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente dans F.

Dans ces conditions, en posant $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ on a aussi : $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$ ✎[22]

✎[21] aussi appelé théorème de la **double limite**.

✎[22] Ce résultat reste valable dans les cas : $E=\mathbb{R}$, $a=\pm\infty$. Les adaptations de la démonstration sont laissées à l'initiative du lecteur.

☞ L'espace F (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) étant complet, montrons que $(b_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Pour tout $x \in A$ et tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a par inégalité triangulaire :

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_p(x)|$$

donc $$|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty^A + \|f_p - f\|_\infty^A.$$

À tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty^A \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, ainsi pour tout $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant n_0$, on a : $\forall x \in A,\ |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon$, et en faisant tendre x vers a, il vient $|b_n - b_p| \leqslant \varepsilon$.

On a alors prouvé que $(b_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F donc elle converge vers $b \in F$.

Toujours par inégalité triangulaire, on a pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(x) - b| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b|$$

donc $$|f(x) - b| \leqslant \|f - f_n\|_\infty^A + |b_n - b| + |f_n(x) - b_n|.$$

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty^A = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |b - b_n| = 0$, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\|f - f_{n_0}\|_\infty^A \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$ et $|b_{n_0} - b| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$, et on a pour tout $x \in A$:

$$|f(x) - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |f_{n_0}(x) - b_{n_0}|.$$

L'hypothèse $\lim\limits_{x\to a} f_{n_0}(x) = b_{n_0}$ donne alors l'existence de $\eta > 0$ tel que :

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - b_{n_0}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

donc tel que $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Théorème 4

Théorème de la limite terme à terme

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de A dans F qui converge uniformément sur A, et S sa fonction somme.

Si, a étant un point de E adhérent à A, chaque u_n admet une limite $b_n \in F$ quand x tend vers a suivant A, alors la série $\sum b_n$ est convergente. Dans ces conditions, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{x\to a} S(x) \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} u_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$ ✎[23]

✎[23] Il y a ici interversion des opérateurs $\lim\limits_{x\to a}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$.

☞ On applique le théorème d'interversion des limites à la suite de fonctions de terme général $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

2. Continuité et convergence uniforme

$\mathcal{C}(A, F)$ est l'espace vectoriel des fonctions continues de A dans F.

Théorème 5

Continuité d'une limite uniforme : cas d'une suite de fonctions
Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(A, F)$ qui converge uniformément sur A vers $f : A \to F$, alors f est continue sur A, donc $f \in \mathcal{C}(A, F)$. ✎(24)

✎(24) On peut remarquer que ce résultat reste valable en supposant seulement les fonctions f_n continues à partir d'un certain rang.

☞ Le théorème de la double limite donne la continuité de f en tout point a de A.

Théorème 6

Continuité d'une limite uniforme : cas d'une série de fonctions
Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}(A, F)$ qui converge uniformément sur A, alors sa fonction somme $S : A \to F,\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur A, donc $S \in \mathcal{C}(A, F)$.

☞ Appliquer le théorème précédent à la suite de fonctions $(S_n)_{\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

Conséquence pratique

La non continuité de la fonction limite (resp. de la somme) prouve la non convergence uniforme d'une suite (resp. d'une série) de fonctions continues.

Exemples

1) Nous avons étudié précédemment la suite de fonctions de terme général :
$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = x^n.$$
$(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers f :
$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$
Chaque fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ et f ne l'est pas.
Donc la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

2) Considérons la série de terme général $u_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n(1 - x)$.
Nous avons vu précédemment que celle ci converge simplement sur $[0, 1]$, la fonction somme S étant définie par : $S(x) = 1$ si $x \in [0, 1[$ et $S(1) = 0$.
Comme il s'agit d'une série de fonctions continues sur $[0, 1]$, la non continuité de S en 1 montre que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
Ces théorèmes s'étendent facilement au cas d'une limite uniforme sur tout compact inclus dans A.

MP*

Théorème 7

Continuité d'une limite uniforme sur tout compact : cas d'une suite de fonctions
Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(A, F)$ qui converge simplement sur A vers f.
Si cette convergence est uniforme sur tout compact de A, alors f est continue sur A.

☞ Si A est localement compact, ✎(25) d'après le théorème 5, la restriction de f à tout compact inclus dans A est continue, ce qui assure que f est continue sur A, car la continuité est une propriété locale.

✎(25) Voir la remarque relative à la définition 5. Dans le cas général, pour $a \in A$ et toute suite (x_n) de A convergeant vers a, $X = \{a\} \cup \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est un compact inclus dans A, donc $f|_X$ est continue et $f(a) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$. La caractérisation séquentielle de la continuité donne alors que f est continue en a.

Théorème 8

Continuité d'une limite uniforme sur tout compact : cas d'une série de fonctions
Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}(A, F)$ qui converge simplement sur A.
Si cette convergence est uniforme sur tout compact de A, alors f est continue sur A.

☞ Appliquer le théorème précédent à la suite de fonctions $(S_n)_{\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

Exemple 1

a) Déterminer l'intervalle de définition de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$.

b) Montrer que S est continue sur son intervalle de définition.

c) Quelle est la limite de S en $+\infty$?

a) Il s'agit ici d'étudier la série de fonctions $\sum u_n$ avec $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto n^x e^{-nx}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $u_n(x) > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = e^{-x}$. Avec la règle de d'Alembert on en déduit que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

En conséquence, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ ce qui donne l'intervalle de définition de sa fonction somme S.

b) Puisque $u_n(x) = e^{x(\ln n - n)}$ et $\ln n - n < 0$, la fonction u_n est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Il en résulte que pour tout $a > 0$, on a $\forall x \in [a, +\infty[,\ 0 < u_n(x) \leqslant u_n(a)$. La convergence de la série de terme général $u_n(a)$ donne alors la convergence normale donc uniforme sur $[a, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum u_n$, ✎(26) et il en résulte que S est continue sur $[a, +\infty[$. ✎(27)

Tout x de $]0, +\infty[$ admet un voisinage de la forme $[a, +\infty[$ donc, la continuité étant une propriété locale, S est continue en x. Finalement, S est continue sur $]0, +\infty[$. ✎(28)

c) Avec $\ln n - n < 0$, on a clairement $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x) = 0$ et, puisque la série converge uniformément sur $[1, +\infty[$ (par exemple), le théorème de la limite terme à terme donne $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 0$.

✎(26) Théorème 2.

✎(27) Théorème 6.

✎(28) On peut aussi conclure avec le théorème 8.

Exemple 2

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie dont l'unité est notée e.

a) Montrer que la fonction $\Phi : u \mapsto (e - u)^{-1}$ est continue sur la boule unité ouverte $\mathcal{B}_o(0, 1)$.

b) Montrer que la fonction $\exp$ est continue sur $\mathcal{A}$.

a) Rappelons que pour tout $u \in \mathcal{B}_o(0, 1)$, $(e - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$. ✎(29)

Pour tout $r \in]0, 1[$ la boule fermée $\mathcal{B}_f(0, r)$ est un compact ✎(30) de $\mathcal{A}$ inclus dans $\mathcal{B}_o(0, 1)$. Alors, puisque la série géométrique $\sum r^n$ est convergente lorsque $r \in]0, 1[$, la majoration $\| u^n \| \leqslant r^n$, pour tout u tel que $\| u \| \leqslant r$, assure la convergence normale donc uniforme sur $\mathcal{B}_f(0, r)$ de la série de fonctions $\sum f_n$, avec $f_n : u \mapsto u^n$.

Comme il s'agit d'une série de fonctions continues, ✎(31) on en déduit avec le théorème 6 que la fonction somme Φ est continue sur $\mathcal{B}_f(0, r)$.

Puisque tout u de $\mathcal{B}_o(0, 1)$ admet un voisinage de la forme $\mathcal{B}_f(0, r)$ et la continuité étant une propriété locale, on obtient que Φ est continue en u. Finalement, Φ est continue sur $\mathcal{B}_o(0, 1)$.

b) Par définition, on a $\forall u \in \mathcal{A}$, $\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n!}$.

Pour tout $R > 0$, on a $\forall u \in \mathcal{B}_f(0, R)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\| \dfrac{u^n}{n!} \right\| \leqslant \dfrac{\| u \|^n}{n!} \leqslant \dfrac{R^n}{n!}$.

Puisque $\dfrac{R^n}{n!}$ est le terme général d'une série numérique convergente, la majoration précédente assure la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum g_n$, $g_n : u \mapsto \dfrac{u^n}{n!}$, sur toute boule fermée $\mathcal{B}_f(0, R)$.

On en déduit comme dans le a) que $\exp$ est continue sur $\mathcal{A}$.

✎(29) Ces deux fonctions ont été introduites dans le chapitre 2.

✎(30) Fermé-borné d'un e-v-n de dimension finie.

✎(31) D'après la continuité des opérations dans une algèbre normée.

3. L'espace vectoriel normé $\mathcal{B}_\infty(A, F)$

L'espace vectoriel normé $\left(\mathcal{B}(A, F), \|\bullet\|_\infty\right)$ est noté $\mathcal{B}_\infty(A, F)$.

Théorème 9

F étant un espace de Banach, $\mathcal{B}_\infty(A, F)$ est complet.

☞ Soit $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{B}_\infty(A, F)$:

pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\delta_n = \sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \| f_{n+p} - f_n \|_\infty^A$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

Pour tout x de A, la suite $\left(f_n(x)\right)_{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F car : $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \delta_n$.

Or F est complet, donc elle converge : $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers une fonction que l'on note f.

Cette fonction est bornée car $|f_{n+p}(x)| \leqslant |f_n(x)| + \delta_n \leqslant \| f_n \|_\infty^A + \delta_n$ donne, en faisant tendre p vers $+\infty$:

$$|f(x)| \leqslant \| f_n \|_\infty^A + \delta_n.$$

De même $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \delta_n$ donne $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \delta_n$ et donc $\| f - f_n \|_\infty^A \leqslant \delta_n$.

Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f - f_n \|_\infty^A = 0$.

Ainsi, la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace $\mathcal{B}_\infty(A, F)$.

Théorème 10

F étant un espace de Banach et A une partie compacte de l'e-v-n E, l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}_\infty(A, F)$ est complet.

☞ Puisque A est compacte, toute application $f : A \to F$, continue sur A est bornée : $\mathcal{C}(A, F) \subset \mathcal{B}(A, F)$. ✎[32]

Soit alors une suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_\infty(A, F)$ convergeant dans $\mathcal{B}_\infty(A, F)$ vers f. Il s'agit par définition d'une convergence uniforme donc, d'après le théorème **5**, f est continue sur A c'est-à-dire que $f \in \mathcal{C}_\infty(A, F)$.

En conséquence, la caractérisation séquentielle des fermés montre que $\mathcal{C}_\infty(A, F)$ est un fermé de l'espace complet $\mathcal{B}_\infty(A, F)$. La conclusion en résulte.

✎[32] On sait que $\mathcal{B}_\infty(A,F)$ est complet donc, pour prouver qu'il en est de même pour $\mathcal{C}_\infty(A,F)$, il suffit de vérifier que c'est une partie fermée de $\mathcal{B}_\infty(A,F)$.

C. Intégration – Dérivation ✎[34]

✎[34] Dans le cadre des fonctions à valeurs réelles ou complexes, les notions nécessaires pour la compréhension de cette section ont été développées en première année. Les extensions aux fonctions vectorielles sont présentées dans le chapitre 4.

1. Intégration et convergence uniforme

$\mathcal{C}([a, b], F)$ désigne toujours l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans F.

Théorème 11

Intégrale d'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues

Soit $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}([a, b], F)$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f. Alors f est continue sur $[a, b]$ et :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Le résultat se déduit de :

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant (b-a)\, \|f - f_n\|_\infty^{[a,b]}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty^{[a,b]} = 0$.

Remarques

1) La continuité des fonctions f_n n'est utile qu'à partir d'un certain rang, avec la convergence uniforme elle procure la continuité de f.

2) Dans le cadre de ce théorème, il y a permutation des opérateurs $\lim\limits_{n\to+\infty} \bullet$ et $\displaystyle\int_a^b \bullet$

$$\int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right] \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$

3) Ce théorème concerne exclusivement les intégrales sur un intervalle compact. ✎ (35)

✎ (35) Noter que la longueur du segment d'intégration intervient explicitement dans la démonstration. On verra dans le chapitre 6 des résultats analogues relatifs aux intégrales sur un intervalle quelconque.

Théorème 12

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}(I, F)$ convergeant uniformément sur tout segment de I vers f.

Alors a étant fixé dans I, on définit $\Phi \ : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_n \ : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n$.

La suite $(\Phi_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers Φ. ✎ (36)

✎ (36) D'après le théorème 7, f est continue sur I. Alors Φ (resp. Φ_n) est l'unique primitive de f (resp. f_n) sur I s'annulant en a.

☞ Pour tout segment S inclus dans I, il existe un segment $J = [\alpha, \beta]$, $(\alpha < \beta)$ inclus dans I contenant a et S et on a alors $\forall x \in S$, $|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_\infty^J$, donc :

$$\|\Phi_n - \Phi\|_\infty^S \leqslant (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_\infty^J.$$

La conclusion en résulte.

Théorème 13

Intégration terme à terme d'une série de fonctions continues

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}([a, b], F)$ qui converge uniformément sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

☞ Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite de fonctions $(S_n)_{\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$.

Remarques

1) Dans le cadre de ce théorème, il y a permutation des opérateurs $\displaystyle\int_a^b \bullet$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \bullet$

2) Ce théorème concerne exclusivement les intégrales sur un intervalle compact.

Exemple 3 Sachant que, pour tout x réel, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, établir l'égalité :

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

Pour tout $x \in]0, 1]$, on a $x^x = e^{x \ell n\, x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ell n^n\, x}{n!}$.

Introduisons la série de fonctions de terme général u_n :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(0) = 0, \quad u_n(x) = \frac{x^n \ell n^n\, x}{n!} \quad \text{si } x \in]0, 1].$$

Établissons la convergence normale donc uniforme sur $[0, 1]$:

$$\forall x \in]0, 1], |u_n(x)| = \frac{|x \ell n\, x|^n}{n!} \leqslant \frac{1}{e^n n!}. \text{ ✎ (37)}$$

$\|u_n\|_\infty^{[0,1]} = \left|u_n\left(\dfrac{1}{e}\right)\right| = \dfrac{1}{e^n n!}$ est le terme général d'une série convergente.

✎ (37) Car l'étude des variations de $x \mapsto x \ell n\, x$ montre que : $\sup\limits_{]0,1]} |x \ell n\, x| = \dfrac{1}{e}$.

On peut alors appliquer le théorème 13 : ✎ (38)

✎ (38) Intégration terme à terme d'une série de fonctions convergeant uniformément sur le segment [0,1].

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x \ell n\, x)^n}{n!} \mathrm{d}x$$

Il reste à calculer $a_n = \displaystyle\int_0^1 (x\,\ell n\, x)^n \mathrm{d}x.$

Une intégration par parties donne, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 x^n(\ell n\, x)^p \mathrm{d}x = -\frac{p}{n+1}\int_0^1 x^n(\ell n\, x)^{p-1}\mathrm{d}x \quad \text{d'où} \quad a_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et en conclusion : $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ ou $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$

2. Dérivation et convergence uniforme

I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $\mathcal{C}^1(I, F)$ désigne l'espace des fonctions de I dans F de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 14

Dérivation d'une suite de fonctions

Soit $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1(I, F)$ ✎(39) telle que :

- la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur I, vers $f \in \mathcal{F}(I, F)$;
- la suite $(f_n')_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, vers $g \in \mathcal{F}(I, F)$.

Alors :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f' = g$;
- la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

✎(39) La condition «à partir d'un certain rang, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I» suffit.

☞ a étant un point fixé de I, et f_n étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a :

$$\forall x \in I,\ \ f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

D'après le théorème 12, la suite $\left(f_n - f_n(a)\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $G\ : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g.$

Il en résulte $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x g$. Donc, puisque g est continue, ✎(40) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f' = g$.

Et d'autre part, pour tout segment S de I, on obtient :

$$\|f_n - f\|_\infty^S \leqslant \|f_n - f_n(a) - G\|_\infty^S + |f_n(a) - f(a)|$$

donc $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f = f(a) + G$.

✎(40) En tant que limite d'une suite de fonctions continues sur I, la convergence étant uniforme sur tout segment de I.

Remarque

Dans le cadre de ce théorème, les opérateurs «dérivation» et «limite» commutent :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'.$$

Corollaire 1

Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^k(I, F)$, $k \in \mathbb{N}^*$ telle que :

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g \in \mathcal{F}(I, F)$.

Alors la fonction $f = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec $f^{(k)} = g$ et chaque suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leqslant j \leqslant k$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

☞ D'après le théorème 14, la propriété est vraie pour $k = 1$. ✎(41)

✎(41) On opère par récurrence sur k.

Supposons la vraie pour $k-1$ avec $k \geqslant 2$. Posons alors pour tout n, $h_n = f_n^{(k-1)}$, la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur I et la suite des dérivées $(h'_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers g. Donc, toujours avec le théorème 14, la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I et sa limite h est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $h' = g$. ✎(42)

Il en résulte d'après l'hypothèse de récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I avec $f^{(k-1)} = h$ et que chaque suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$. Sachant que h est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $h' = g$, on en déduit enfin que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec $f^{(k)} = g$ et chaque suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leqslant j \leqslant k$, converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

On a ainsi prouvé que la propriété est récurrente, et puisqu'elle est vraie pour $k = 1$, elle l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

✎(42) Les conditions pour appliquer le théorème à l'ordre $k-1$ sont alors réunies.

Corollaire 2

Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(I, F)$ telle que :

- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geqslant p$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et chaque suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$. ✎(43)

✎(43) Le corollaire précédent s'applique à tout ordre $k \geqslant p$.

Théorème 15

Dérivation terme à terme

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}^1(I, F)$ ✎(44) telle que :

- la série $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
- la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur I sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Alors la fonction somme $S : I \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec :

$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

✎(44) Ici, il est utile que **toutes** les fonctions u_n soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

☞ Appliquer le théorème 14 à la suite de fonctions $(S_n)_{\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

Remarque

Dans le cadre de ce théorème, la dérivation et la sommation commutent :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n.$$

Corollaire 1

Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}^k(I, F)$ telle que :

- chaque série $\sum u_n^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, converge simplement sur I ;
- la série $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction somme $S : I \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et chaque série $\sum u_n^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant k$, converge uniformément sur tout segment de I avec pour fonction somme $S^{(j)}$:

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad \forall x \in I, \quad S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x). \text{ ✎(45)}$$

✎(45) Appliquer le corollaire 1 du théorème 14.

Corollaire 2

Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(I, F)$ telle que :

- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geqslant p$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction somme $S : I \to F$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et chaque série $\sum u_n^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur tout segment de I avec pour fonction somme $S^{(j)}$:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x).$$

D. Approximation des fonctions d'une variable réelle

1. Approximation par des fonctions en escalier

Soit $[a, b]$, $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Définition 12

Une application $f : [a, b] \to F$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $\left(c_j\right)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $]c_{j-1}, c_j[$ soit prolongeable par continuité sur $\left[c_{j-1}, c_j\right]$. Une telle subdivision est dite **adaptée** à f. ✎(46)

L'ensemble des applications continues par morceaux de $[a, b]$ dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\left([a, b], F\right)$; on le note $\mathcal{M}\left([a, b], F\right)$.

✎(46) La définition est identique à celle donnée en première année dans le cadre des fonctions réelles.
Comme dans ce cas, f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si elle est continue sauf en un nombre fini de points de $]a,b[$ et admet, une limite à droite et une limite à gauche en chacun de ces points, une limite à droite en a, et une limite à gauche en b.

Définition 13

Une application $f : [a, b] \to F$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\left(c_j\right)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $\left]c_{j-1}, c_j\right[$ soit constante. Une telle subdivision est dite **adaptée** à f. ✎(47)

L'ensemble des applications en escalier de $[a, b]$ dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}\left([a, b], F\right)$; on le note $\mathcal{E}\left([a, b], F\right)$.

✎(47) Ici aussi, la définition est identique à celle donnée pour les fonctions réelles.

Propriété 4

Soit $n = \dim F$, $n \geqslant 1$, et $\left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de F.

Un élément f de $\mathcal{F}\left([a, b], F\right)$ est défini par ses composantes $f_1, \ldots, f_n$ sur $\left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

a) f est continue par morceaux si et seulement si chacune des fonctions f_i est continue par morceaux.

b) f est en escalier si et seulement si chacune des fonctions f_i est en escalier.

☞ a) f est continue (resp. admet une limite) en x si et seulement si chaque f_i est continue (resp. admet une limite) en x.

b) f est constante sur un sous-intervalle J de $[a, b]$ si et seulement si chaque f_i est constante sur J.

Théorème 16

Toute fonction $f : [a, b] \to F$ continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite $\left(\varphi_n\right)_{\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty^{[a,b]} = 0.$$

✎ (48) Théorème de Heine.

☞ f est uniformément continue sur $[a, b]$, ✎ (48) donc, à tout $n \in \mathbb{N}$ on peut associer $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |x - y| \leqslant \alpha_n \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

À $\alpha_n > 0$, on associe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{p} \leqslant \alpha_n$ et $\sigma_n = \left(c_j\right)_{j\in[\![0,p]\!]}$, $c_j = a + j\dfrac{b-a}{p}$, subdivision régulière de $[a, b]$, puis on définit la fonction $\varphi \in \mathscr{E}\left([a, b], F\right)$ par

$$\forall j \in [\![0, p-1]\!], \forall x \in \left[c_j, c_{j+1}\right[, \varphi_n(x) = f\left(c_j\right), \quad \varphi_n(b) = f(b).$$

Par construction, on a $\quad \forall x \in [a, b], \ |f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi $f = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n$ dans $\mathscr{B}_\infty\left([a, b], F\right)$.

Théorème 17

Toute fonction $f : [a, b] \to F$ continue par morceaux sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite $\left(\varphi_n\right)_{\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

C'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$.

✎ (49)

✎ (49) **Remarque**

Dans l'espace vectoriel normé $\mathscr{B}_\infty([a,b],E)$ on peut interpréter les théorèmes 16 et 17 par :

$\mathcal{C}([a,b],E) \subset \overline{\mathscr{E}([a,b],E)}$

$\mathscr{M}([a,b,E) \subset \overline{\mathscr{E}([a,b],E)}$.

☞ Soit $f \in \mathscr{M}\left([a, b], F\right)$ et $\left(c_j\right)_{j\in[\![0,p]\!]}$ une subdivision adaptée :

pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, la restriction de f à $\left]c_j, c_{j+1}\right[$ est prolongeable en une application continue $\quad f_j : \left[c_j, c_{j+1}\right] \to F$.

D'après le théorème 16, à tout $n \in \mathbb{N}$ on peut associer une application $\varphi_{j,n} : \left[c_j, c_{j+1}\right] \to F$ telle que : $\forall x \in \left[c_j, c_{j+1}\right], \quad \left|f_j(x) - \varphi_{j,n}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Alors, soit $\varphi_n : [a, b] \to F$ définie par :

$$\forall j \in [\![0, p]\!], \quad \varphi_n\left(c_j\right) = f\left(c_j\right), \ \forall j \in [\![0, p-1]\!], \forall t \in \left]c_j, c_{j+1}\right[, \quad \varphi_n(x) = \varphi_{j,n}(x).$$

Cette fonction φ_n réalise $\quad \varphi_n \in \mathscr{E}\left([a, b]\right) \quad$ et $\quad \|f - \varphi_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi, on a $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = f \quad$ dans $\mathscr{B}_\infty\left([a, b], F\right)$.

2. Approximation par des fonctions affines par morceaux

Définition 14

Une application f de I dans F est dite **affine par morceaux** quand il existe une subdivision $\sigma = \left(c_j\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $I_j = \left[c_{j-1}, c_j\right]$ est affine.

La subdivision σ est dite **adaptée** à f.

Dans ce cas, f est continue sur I et, pour tout $x \in I_j$,

$$f(x) = \frac{\left(c_j - x\right)f\left(c_{j-1}\right) + \left(x - c_{j-1}\right)f\left(c_j\right)}{c_j - c_{j-1}}.$$

✎ (50) C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,F)$.

Nous notons $\mathcal{A}(I, F)$ l'ensemble des applications affines par morceaux de I dans F, $\mathcal{A}(I, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. ✎ (50)

Théorème 18

Soit $I = [a, b]$, $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$.
Toute fonction $f : I \to F$ continue sur I : $f \in \mathcal{C}(I, F)$ est limite uniforme sur I d'une suite d'applications affines par morceaux.

☞ Étant continue sur $I = [a, b]$, la fonction f est uniformément continue sur I.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{p}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$.

On construit la subdivision $\left(c_j\right)_{j \in [\![0,n]\!]}$ où $c_j = a + j\dfrac{b-a}{n}$.

Soit φ_p la fonction définie par : pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et pour tout $x \in I_j = \left[c_{j-1}, c_j\right]$,

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{c_j - c_{j-1}} \left[\left(c_j - x\right) f\left(c_{j-1}\right) + \left(x - c_{j-1}\right) f\left(c_j\right)\right].$$

φ_p est une fonction affine par morceaux sur I (et quel que soit $j \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_p\left(c_j\right) = f\left(c_j\right)$).
Pour tout $x \in I$, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in I_j$.

Alors, avec $f(x) = \dfrac{1}{c_j - c_{j-1}} \left[\left(c_j - x\right) f(x) + \left(x - c_{j-1}\right) f(x)\right]$, il vient :

$$f(x) - \varphi_p(x) = \frac{1}{c_j - c_{j-1}} \left[\left(c_j - x\right)\left(f(x) - f\left(c_{j-1}\right)\right) + \left(x - c_{j-1}\right)\left(f(x) - f\left(c_j\right)\right)\right],$$

$$|f(x) - \varphi_p(x)| \leqslant \frac{1}{c_j - c_{j-1}} \left[\left(c_j - x\right)\left|f(x) - f\left(c_{j-1}\right)\right| + \left(x - c_{j-1}\right)\left|f(x) - f\left(c_j\right)\right|\right].$$

Pour $x \in \left[c_{j-1}, c_j\right]$, on a $0 \leqslant x - c_{j-1} \leqslant \dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant c_j - x \leqslant \dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$,

donc, $\left|f(x) - f(c_{j-1})\right| \leqslant \dfrac{1}{p}$ et $\left|f(x) - f\left(c_j\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{p}$.

Il s'ensuit $|f(x) - \varphi_p(x)| \leqslant \dfrac{1}{p}$ et par suite $\|f - \varphi_p\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \dfrac{1}{p}$.

3. Approximation par des fonctions polynômes des fonctions complexes continues

Théorème 19

Premier théorème de Weierstrass
Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $a < b$.
Toute application $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Les démonstrations de ces théorèmes sont non exigibles.

Exemple 4 Soit a, b réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b x^n f(x) \mathrm{d}x = 0$.
Montrer que f est nulle.

Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a : $\displaystyle\int_a^b P(x) f(x) \mathrm{d}x = 0$.

La fonction $\overline{f} : x \mapsto \overline{f(x)}$ est elle aussi continue sur $[a, b]$. Donc, d'après le premier théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers $\overline{f}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, en écrivant :

$$\left||f(x)|^2 - f(x) P_n(x)\right| = \left|f(x)\left(\overline{f(x)} - P_n(x)\right)\right|$$

✎ (51) $|f|^2$ est la fonction définie sur $[a,b]$ par $x \mapsto |f(x)|^2$.

on obtient :

$$\| \, |f|^2 - f P_n \|_\infty^{[a,b]} \leqslant \| f \|_\infty^{[a,b]} \| \overline{f} - P_n \|_\infty^{[a,b]} \quad ✎ (51)$$

et il en résulte que la suite $(f P_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|f|^2$ sur $[a, b]$.
D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors :

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) P_n(x) \mathrm{d}x$$

donc

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[a, b]$, on sait que $\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0$ donne $\forall x \in [a, b], \; f(x) = 0$.

Théorème 20

Théorème de Weierstrass trigonométrique

Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques T-périodiques. ✎ (52)

✎ (52) Voir le chapitre 8 pour la définition des polynômes trigonométriques.

Tout polynôme trigonométrique, T-périodique, s'écrit :

$$P : x \mapsto \sum_{k=-p}^{k=p} a_k e^{ik\omega x} \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \; \left(a_k\right)_{-p \leqslant k \leqslant p} \in \mathbb{C}^{2p+1}, \text{ et } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Le théorème précédent nous donne l'existence d'une suite $\left(P_n\right)_{\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques ✎ (53) telle que $\lim_{n \to +\infty} \| f - P_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = 0$, c'est-à-dire telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \| f - P_n \|_\infty^{[0,T]} = 0.$$

✎ (53) Pour tout n, P_n s'écrit : $P_n(x) = \sum_{k=-p_n}^{k=p_n} a_k(n) e^{ik\omega x}$.

En effet, la fonction $f - P_n$ étant T-périodique, on a : $\| f - P_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \| f - P_n \|_\infty^{[0,T]}$.

Exemple 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue, T-périodique et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \int_0^T f(x) e^{in\omega x} \mathrm{d}x = 0 \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Montrer que f est nulle.

Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme trigonométrique T-périodique P on a :

$$\int_0^T f(x) P(x) \mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $\overline{f}$ est, elle aussi, continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Donc, d'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, il existe $\left(P_n\right)_{\mathbb{N}}$ suite de polynômes trigonométriques T-périodiques uniformément convergente vers $\overline{f}$ sur $\mathbb{R}$.

Comme dans l'exemple 4, on montre que la suite $(f P_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|f|^2$ sur $\mathbb{R}$, et le théorème d'intégration des limites uniformes donne :

$$\int_0^T |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_0^T f(x) P_n(x) \mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[0, T]$, on en déduit :

$$\forall x \in [0, T], \; f(x) = 0.$$

Enfin la périodicité donne que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Méthodes

L'essentiel

I. Suites de fonctions

✔ **Si l'on veut** étudier une suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$,

▪ **on peut** suivre le plan suivant.

1) Préciser l'ensemble de définition A commun à tous les f_n

On remarquera les propriétés de parité, périodicité, qui permettent éventuellement de restreindre cet ensemble d'étude.
Dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une étude rapide des variations (si elle est raisonnable) et la construction du graphe de f_n peut apporter des renseignements intéressants.

2) Étude de la convergence simple de la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$

On précisera la partie $B = \{x \in A / \left(f_n(x)\right)_{\mathbb{N}}$ converge$\}$ et la fonction $f\ : B \to F, \quad x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Dans la pratique on aura le plus souvent affaire à des fonctions de la variable réelle, A et B étant alors des intervalles ou réunions d'intervalles de $\mathbb{R}$.

3) Étude de la convergence uniforme de la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ sur B

▪ Former la fonction différence $\delta_n\ :\ B \to \mathbb{R}_+,\ \ x \mapsto |f(x) - f_n(x)|$.

▪ Si cela est possible, expliciter $\|f - f_n\|_\infty^B = \sup\limits_{x\in B} \delta_n(x)$, et étudier la suite numérique de terme général $\|f - f_n\|_\infty^B$.

▪ Sinon, essayer de trouver une suite majorante $\left(\mu_n\right)_{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in B, \delta_n(x) \leqslant \mu_n, \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \mu_n = 0.$$

▪ Montrer (éventuellement) que la convergence n'est pas uniforme sur B.

4) Si la convergence n'est pas uniforme sur B,

essayer de trouver des parties de B sur lesquelles elle l'est.
En particulier, on s'attachera à mettre en évidence les cas de convergence uniforme sur tout compact inclus dans B.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2.

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur une partie B,

▪ **on peut** si on n'a pas pu calculer $\|f - f_n\|_\infty^B$, essayer de trouver une suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ de points de B telle que $\delta_n\left(x_n\right)$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$,

▪ **on peut** s'il s'agit d'une suite de fonctions continues, penser à observer (éventuellement) que la limite n'est pas continue,

▪ **on peut** si B est un segment de $\mathbb{R}$ et si les fonctions f_n sont continues, penser à comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_B f_n$ et $\int_B \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

II. Séries de fonctions

✔ **Si l'on veut** étudier une série de fonctions de terme général $u_n : A \to F$

▪ **on peut** suivre le plan suivant.

1) Étude de la convergence simple

▪ Déterminer la partie $B = \{x \in A / \sum u_n(x) \text{ converge}\}$.

2) Étude de la convergence normale sur B

▪ Si c'est faisable, calculer $v_n = \| u_n \|_\infty^B$. Alors l'étude de la série réelle $\sum v_n$ permet de dire si la série $\sum u_n$ est, ou n'est pas, normalement convergente sur B.

▪ Sinon, essayer de trouver une série réelle $\sum w_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in B$, $|u_n(x)| \leqslant w_n$. Alors la convergence de la série $\sum w_n$ est une condition suffisante pour que $\sum u_n$ soit normalement convergente sur B.

▪ Si la convergence n'est pas normale sur B, on examinera s'il existe des parties de B sur lesquelles elle l'est.
En particulier, on mettra en évidence les cas (éventuels) de convergence normale sur tout compact inclus dans B.

3) Étude de la convergence uniforme sur B

▪ La question ne se pose que lorsque la convergence n'est pas normale.

▪ On essaiera de majorer uniformément le reste R_n pour mettre en évidence une suite numérique $(\mu_n)_\mathbb{N}$ telle que $\| R_n \|_\infty^B \leqslant \mu_n$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu_n = 0$ est une condition suffisante pour que la convergence soit uniforme sur B.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 4, 5.

✔ **Si l'on veut** montrer que la convergence d'une série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas uniforme sur B,

▪ **on peut** essayer de trouver une suite $(x_n)_\mathbb{N}$ de points de B telle que $R_n(x_n)$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$,

▪ **on peut** examiner si l'on est dans le cas particulier où u_n ne tend pas uniformément vers 0 sur B,

▪ **on peut** s'il s'agit d'une série de fonctions continues sur B, observer (éventuellement) que la fonction somme n'est pas continue.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 6

✔ **Si l'on veut** déterminer un équivalent de la somme d'une série de fonctions en une borne de l'ensemble de définition

▪ **on peut** essayer (s'il s'agit de fonctions numériques) d'encadrer cette somme au moyen d'intégrales.
On sera alors amené à utiliser la notion d'intégrale sur un intervalle quelconque présentée dans le chapitre 6.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7.

▪ **on peut** envisager un équivalent au premier terme (si celui-ci est prédominant), ou encore un équivalent terme à terme.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 8, 9.

Mise en œuvre

I. Suites de fonctions

Ex. 1

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf\left(n, \dfrac{x^2}{n}\right), \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

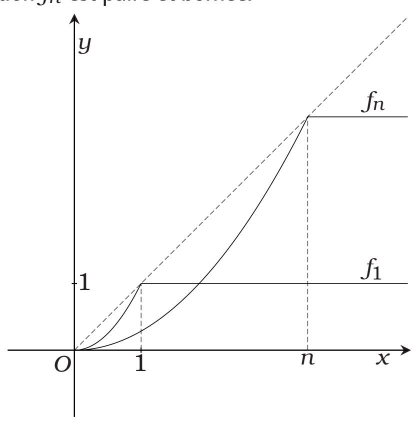
Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}^*}$.

Indications

La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ mais elle l'est sur tout intervalle compact $[-a, a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution

Chaque fonction f_n est paire et bornée.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, dès que $n \geqslant |x|$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers 0 (fonction nulle).

Par ailleurs, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = n$.

La suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a, a]$ car :

$$\|f_n\|_\infty^{[-a,a]} = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{a^2}{n} \quad \text{dès que } n \geqslant a.$$

Commentaires

Du fait de la parité, on se contente de représenter le graphe de f_n sur $\mathbb{R}_+$.

À défaut de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, on met en évidence la convergence uniforme sur tout intervalle compact $[a, -a]$ donc aussi sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ex. 2

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} \quad n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (vers f).

Donner l'allure des courbes représentatives $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C})$ de f_n et f.

2) Établir sa convergence uniforme sur $\mathbb{R} \setminus]-1-a, -1+a[$ pour tout $a > 0$.

Indications

Convergence simple : distinguer les cas $|x| > 1$ et $|x| < 1$.

Convergence uniforme : soit f la limite simple de $(f_n)_{\mathbb{N}}$, majorer $|f(x) - f_n(x)|$ pour x décrivant $]1, +\infty[$, puis $[0, 1]$, et enfin $[-1 + a, 0]$ et $]-\infty, -1 - a]$ $(0 < a < 1)$.

Solution

Observons que $f_n(-1) = 0$, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 1$.
Les courbes $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ont donc trois points communs :

$$A = (-1, 0) \quad , \quad B = (0, 1) \quad , \quad C = (1, 1).$$

1) Convergence simple

Si $|x| > 1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$ et $x - f_n(x) = \dfrac{x-1}{x^{2n}+1}$.

Si $|x| < 1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $1 - f_n(x) = \dfrac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}}$.

La suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers f définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

2) Convergence uniforme

- Sur $]1, +\infty[$:

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) = \frac{x-1}{x^{2n}+1} \leqslant \frac{x-1}{x^{2n}-1}$$

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{x^{2n-1} + \ldots + x + 1} \leqslant \frac{1}{2n}$$

$f - f_n$ est bornée sur $]1, +\infty[$ et $\displaystyle\sup_{x\in]1,+\infty[} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n}$.

- Sur $[0, 1]$:

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) = \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}} \leqslant \frac{x^{2n}(1-x)}{1-x^{2n}}$$

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{1 + x + \ldots + x^{2n-1}} \leqslant \frac{x^{2n}}{2nx^{2n-1}} \leqslant \frac{1}{2n}$$

$f - f_n$ est bornée sur $[0, 1]$ et $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n}$.

Ainsi $\|f(x) - f_n(x)\|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{2n}$: la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Prenons maintenant un réel $a \in]0, 1[$.

- Sur $[-1 + a, 0]$

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) = \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}} \leqslant 2(1-a)^{2n} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 2(1-a)^{2n} = 0.$$

Commentaires

Puisque l'on a affaire à une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont la limite simple f n'est pas continue, il est acquis que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

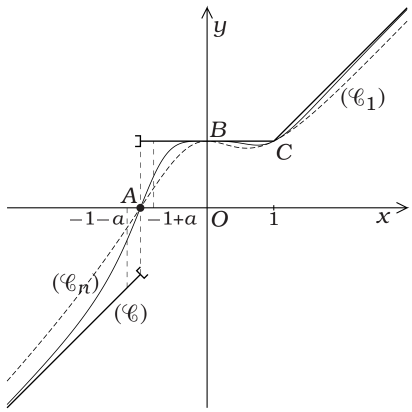
Ne tentons pas l'étude des variations de $f - f_n$ qui est compliquée alors qu'une simple majoration fournit le résultat.

Utiliser $1 \leqslant 1 - x \leqslant 2 - a < 2$, $0 \leqslant x^{2n} \leqslant (1-a)^{2n}$, et $0 < \dfrac{1}{1+x^{2n}} \leqslant 1$.

■ Sur $]-\infty,-1-a]$

$$0 \leqslant f_n(x)-f(x)=\frac{|x|+1}{x^{2n}+1} \leqslant \frac{2|x|}{x^{2n}} \leqslant \frac{2}{(1+a)^{2n-1}}$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(1+a)^{2n-1}}=0.$



Conclusion : pour tout a fixé dans $]0,1[$, la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur :

$$]-\infty,-1-a] \cup [-1+a,+\infty[=\ \mathbb{R}\backslash]-1-a,-1+a[.$$

Utiliser $-x=|x| \geqslant 1+a>1$.

Remarque : $\displaystyle\lim_{x\to-1} |f(x)-f_n(x)|=1$ donne :

$$\|f-f_n\|_\infty^{]-1,+\infty[} \geqslant 1$$

et $\|f-f_n\|_\infty^{]-\infty,-1[} \geqslant 1$

il n'y a donc pas convergence uniforme ni sur $]-1,+\infty[$, ni sur $]-\infty,-1[$.

On peut aussi, pour arriver à ce résultat, observer qu'il n'y a pas interversion des limites au point -1.

Ex. 3

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

1) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$. La convergence est-elle uniforme ?

3) Montrer que pour tout $a>0$, la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur la demi-droite $[a,+\infty[$.

Indications

Pour l'étude de la convergence uniforme, on peut se limiter à $x \in [0,+\infty[$. Remarquer que f_n atteint son maximum en un point x_n tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n=0$.

Solution

1) Pour $x=0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(0)=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(0)=0$.

Pour $x \neq 0$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

En conclusion, la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

2) Posons $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n$.

On trouve $I_n=\dfrac{1}{2n}\ell n\left(1+n2^n\right)$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n=\frac{\ell n\, 2}{2}$.

Si la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur $[0,1]$, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n=\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n=0.$$

Ceci n'étant pas réalisé, la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$ et a fortiori sur $\mathbb{R}$.

Commentaires

$\ell n(1+n2^n)=n\,\ell n\, 2+\ell n\, n+\ell n\left(1+\dfrac{1}{n2^n}\right)$

3) Les variations de f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont résumées dans le tableau :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}2^{-\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
$f_n(x)$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{n}}2^{\frac{n}{2}-1}$	$\searrow$ 0

Soit maintenant $a > 0$ fixé. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}2^{-\frac{n}{2}} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $\frac{1}{\sqrt{n}}2^{-\frac{n}{2}} \leqslant a$.

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$ et on a :

$$\| f_n \|_\infty^{[a,+\infty[} = f_n(a).$$

Donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = 0$, la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.

L'imparité des f_n permet de dire qu'il en est de même sur $]-\infty, -a]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{2^n\left(1-n2^n x^2\right)}{\left(1+n2^n x^2\right)^2}.$$

De plus f étant impaire, on limite l'étude à $[0,+\infty[$.

L'étude des variations donne :

$$\| f_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{n}}2^{\frac{n}{2}-1},$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = +\infty$, et on retrouve ainsi que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

II. Série de fonctions

Ex. 4

Étudier les convergences normale, simple et uniforme sur $]0, 1]$ des deux séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum v_n$ définies par : $\quad u_n(x) = x^n \ln^2 x \quad$ et $\quad v_n(x) = x^n \ln x$.

Indications

Pour étudier la convergence uniforme de la série Σv_n, expliciter le reste d'ordre n.

Solution

1) Cas de la série $\sum u_n$

$u_0(x) = \ln^2 x$, u_0 est non bornée sur $]0, 1]$.

Sinon, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(x) = \frac{1}{n^2}\left(x^n \ln^2 x^n\right) = \frac{\varphi(x^n)}{n^2}$ où

$\varphi(t) = t \ln^2 t$, φ est bornée sur $]0, 1]$: $\| \varphi \|_\infty^{]0,1]} = \frac{4}{e^2}$.

D'où $\quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{4}{n^2 e^2} \quad$ et $\quad \| u_n \|_\infty^{]0,1]} \leqslant \frac{4}{n^2 e^2}$.

Conclusion : la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $]0, 1]$.

2) Cas de la série $\sum v_n$

- Étude de la convergence normale

$v_0(x) = \ln x$, v_0 est non bornée sur $]0, 1]$.

Sinon, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n(x) = \frac{x^n \ln x^n}{n} = \frac{\theta(x^n)}{n}$ où $\theta(t) = t \ln t$;

θ est bornée sur $]0, 1]$: $\| \theta \|_\infty^{]0,1]} = \frac{1}{e} = \left|\theta\left(\frac{1}{e}\right)\right|$ d'où :

$$\| v_n \|_\infty^{]0,1]} = \frac{1}{ne}.$$

<u>Conclusion</u> : la série de fonctions $\sum v_n$ ne converge pas normalement sur $]0, 1]$.

Commentaires

Comme il s'agit d'une série géométrique, on peut expliciter la somme S :

$\forall x \in]0,1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln^2 x = \frac{\ln^2 x}{1-x}, \quad S(1) = 0.$$

En fait, avec $u_n\left(e^{-\frac{2}{n}}\right) = \frac{4}{n^2 e^2}$, il vient

$$\| u_n \|_\infty^{]0,1]} = \frac{4}{n^2 e^2}.$$

- Étude de la convergence simple

$v_n(1) = 0$ et pour $x \in]0,1[$: $v_n(x) = x^n \ln x$ est une série géométrique de raison x.

Conclusion : la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $]0,1]$.

Sa somme T est connue :

$$\forall x \in]0,1[, \quad T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln x = \frac{\ln x}{1-x}, \quad T(1) = 0.$$

- Étude de la convergence uniforme

Examinons la suite des restes : $(R_n)_{\mathbb{N}}$

$$\forall x \in]0,1[, R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} x^k \ln x = \frac{x^n \ln x}{1-x} \quad , \quad R_n(1) = 0.$$

Comme la fonction R_n admet des limites aux bornes de $]0,1[$:

$$\lim_{x\to 0} R_n(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1} R_n(x) = -1,$$

R_n est bornée sur $]0,1]$ mais $\| R_n \|_\infty^{]0,1]} \geqslant 1$; la suite $\left(\| R_n \|_\infty^{]0,1]}\right)$ ne converge pas vers 0.

Conclusion : la série de fonctions $\sum v_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,1]$.

Ex. 5

Soit $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto n^\alpha x^n (1-x), \; (n \in \mathbb{N}^*)$. Trouver les valeurs du réel α pour lesquelles la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente, simplement convergente, uniformément convergente sur $[0,1]$.

Indications

Pour l'étude de la convergence uniforme dans le cas $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, minorer le reste d'ordre n en faisant apparaître une série télescopique.

Solution

1) Convergence normale

$$\sup_{[0,1]} |u_n(x)| = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

Commentaires : L'étude de la fonction u_n est directe avec : $u_n'(x) = n^\alpha x^{n-1}[n-(n+1)x]$

La série de terme général $\| u_n \|_\infty$ converge si et seulement si $\alpha < 0$.

Commentaires : Série de Riemann et critère des équivalents de séries positives.

Conclusion : la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha < 0$.

2) Convergence simple

$u_n(0) = 0$ et $u_n(1) = 0$. Si $x \in]0,1[$, $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$

Commentaires : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

et, d'après le critère de Riemann, la série $\sum u_n(x)$ converge.

Conclusion : la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

Commentaires : quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Convergence uniforme

Rappelons que $\| u_n \|_\infty^{[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ et qu'une condition nécessaire pour la convergence uniforme est $\lim_{n\to+\infty} \| u_n \|_\infty^{[0,1]} = 0$ donc nécessairement $\alpha < 1$.

Pour $\alpha < 0$, la convergence est normale donc uniforme.

Plaçons-nous désormais dans le cas $0 \leqslant \alpha < 1$.

Examinons la suite des restes d'ordre n :

$$R_n\ :\ [0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sum_{k=n}^{+\infty}k^\alpha x^k(1-x).$$

Pour $0<x<1$, on a : $\quad R_n(x)\geqslant n^\alpha\sum_{k=n}^{+\infty}x^k-x^{k+1}=n^\alpha x^n.$

À supposer que la fonction R_n soit bornée sur $[0,1]$, cette minoration donne :

$$\|R_n\|_\infty^{[0,1]}\geqslant n^\alpha\geqslant 1.$$

Donc la suite $\left(R_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers 0.

Conclusion : la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha<0$ (cas de la convergence normale).

Pour mettre en défaut la convergence uniforme, on tente de minorer $R_n(x)$ sur $]0,1[$.

Il est clair que si R_n n'est pas bornée, la convergence n'est pas uniforme.

Ex. 6

1) Établir la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto e^{-nx}-(1-x)^n$.

2) Que dire de la série de fonctions $\sum f_n$?

Indications

La présence de séries géométriques permet d'expliciter la fonction somme S et on peut alors étudier sa continuité.

Solution

1) Résumons les variations de f_n :

x	0		$\frac{1}{n}$		a_n		1
$g_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$f_n(x)$	0		$\nearrow$		b_n	$\searrow$	e^{-n}

De cette étude il résulte : $\|f_n\|_\infty^{[0,1]}=b_n=f_n(a_n)$, où a_n est caractérisé par $g_n(a_n)=(1-a_n)^{n-1}e^{na_n}-1=0$.

En remplaçant $(1-a_n)^n$ par $(1-a_n)e^{-na_n}$ dans b_n, il vient :

$$b_n=a_ne^{-na_n}=\frac{(na_ne^{-na_n})}{n}\leqslant\frac{1}{ne}.$$

Ainsi $\|f_n\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{ne}$ et la suite de fonction $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

2) La convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ est claire.

La somme $S=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est définie par $S(0)=0$ et pour $x\in\ ]0,1]$:

$$S(x)=\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}.$$

Donnons un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0 :

$$S(x)=\frac{e^{-x}-1+x}{\left(1-e^{-x}\right)x}\sim\frac{1}{2}.$$

Ainsi S n'est pas continue en 0. Le théorème «continuité et limite uniforme» étant mis en défaut, la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Commentaires

$f_n'(x)=ne^{-nx}\left[(1-x)^{n-1}e^{nx}-1\right]$

$f_n'(x)$ est du signe de $g_n(x)$ avec
$g_n(x)=(1-x)^{n-1}e^{nx}-1$.
$g_n'(x)=(1-x)^{n-2}e^{nx}(1-nx)$.

Donc $\left(1-a_n\right)^n=\left(1-a_n\right)e^{-na_n}$.

Car $\sup\limits_{t\in[0,1]}te^{-t}=\dfrac{1}{e}$.

$f_n(0)=0$ et pour $x\in\ ]0,1]$, on a la somme de deux séries géométriques de raison e^{-x} et $(1-x)$.

Ex. 7

Trouver un équivalent de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} nx}$ quand x tend vers 0, $x > 0$.

Indications

La méthode consiste à comparer la somme de la série $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} nx}$ à la valeur de l'intégrale :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} tx}.$$

L'exercice ne sera donc utilement abordé qu'après avoir étudié la notion de fonction intégrable sur un intervalle quelconque (chapitre 6).

Solution

On commence par vérifier que la série de terme général :

$$u_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} nx}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction somme f est donc, en particulier, définie sur $]0, +\infty[$.

Pour $x > 0$ fixé, notons g_x la fonction $[0, +\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} tx}$.
On a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = g_x(n)$.

La décroissance de g_x sur $[0, +\infty[$ donne alors :

$$\forall n \geqslant 0, \int_n^{n+1} g_x(t)\mathrm{d}t \leqslant g_x(n) \text{ et } \forall n \geqslant 1, g_x(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(t)\mathrm{d}t.$$

La série converge et la fonction g_x est intégrable sur $[0, +\infty[$, on peut donc sommer ces inégalités et il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} g_x(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leqslant u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} g_x(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$h(x) \leqslant f(x) \leqslant u_0(x) + h(x).$$

Calculons alors $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} tx} = \left[\frac{2}{x} \operatorname{Arctan} e^{tx}\right]_0^{+\infty}$

$$h(x) = \frac{\pi}{2x}.$$

La condition $u_0(x) = o\big(h(x)\big)$ est essentielle pour conclure :

$$f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\sim} h(x) \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} nx} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

Commentaires

Pour $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} nx} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$$

ce qui assure la convergence simple sur $]0,+\infty[$. Comme de plus les fonctions u_n sont paires, la somme f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire également.

Notons les conditions à réunir :

- pour $x > 0$ fixé, la fonction g_x est continue, décroissante sur $[0,+\infty[$,
- la fonction g_x est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} tx}$ et possède une limite ou un équivalent simple quand x tend vers 0,
- la fonction $x \mapsto u_0(x)$ est négligeable devant $h(x)$ quand x tend vers 0.

Pour $x < 0$ on obtiendrait :

$$h(x) = -\frac{\pi}{2x}.$$

Ex. 8

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\operatorname{sh} nx}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Indications

f est somme de la série de fonctions de terme général : $u_n \; :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh} nx}$.

Pour $n \geqslant 2$, chaque fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh} nx}$, $(n \geqslant 2)$, est négligeable devant $u_1(x) : x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ quand x tend vers $+\infty$. Nous allons conclure en montrant que leur somme est encore négligeable devant $u_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution

On a ici, $u_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} nx} = \dfrac{2e^{-nx}}{1-e^{-2nx}}$

et pour $n \geqslant 2$, $\quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{2e^{-nx}}{1-e^{-4x}}$.

Ainsi $\quad 0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \dfrac{2e^{-2x}}{(1-e^{-4x})(1-e^{-x})} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^{-2x}$ et

$u_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^{-x}$, donc $\left[f(x)-u_1(x)\right] = o\left(u_1(x)\right)$ et enfin :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^{-x}.$$

Commentaires

La convergence simple sur $]0,+\infty[$ tient à l'équivalent $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{-nx}$.

On reconnaît une série géométrique de raison $e^{-x} < 1$.

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} u_1(x)$.

Ex. 9

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1+nx}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Indications

f est somme de la série de fonctions de terme général : $u_n \; :]0,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^n}{1+nx}$.

Ici, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, on a $u_n(x) \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$ terme général d'une série divergente,

mais aussi $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{n-1}}{n} = v_n(x)$. $\sum v_n$ est une série entière dont la somme g se calcule aisément. (Voir en *Exercices*, Exercice 11 ou le chapitre 5.)

Solution

Majorons la différence $v_n(x) - u_n(x)$:

$$\forall x \in]0,1[,\ 0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n(1+nx)} \leqslant \frac{x^{n-2}}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}.$$

En écrivant $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$,

puis en sommant l'inégalité précédente :

$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left(v_n(x) - u_n(x)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ c'est-à-dire $0 \leqslant g(x) - f(x) \leqslant 1$.

Donc $[g(x)-f(x)] = o\left(g(x)\right)$, et on peut conclure à $f(x) \underset{x\to1}{\sim} g(x)$.

Commentaires

La convergence simple sur $]0,1[$ de $\sum u_n$ tient à l'équivalent $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{n-1}}{n}$.

Nous verrons dans le chapitre 5 que $xg(x) = -\ln(1-x)$ d'où ici $f(x) \underset{x\to1}{\sim} |\ln(1-x)|$.

Exercices

Niveau 1

Suites de fonctions

Ex. 1

On considère la suite de fonctions $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_1(x) = \sin x, \quad \forall n \geqslant 2 \quad u_n(x) = \sin u_{n-1}(x).$

Montrer que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ex. 2

Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Arctan} \dfrac{x+n}{1+nx}$.

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Ex. 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{\left(1 - e^{-x}\right)^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = n.$$

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$.

Ex. 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right).$$

1) Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$.

2) Comparer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n$.

Séries de fonctions

Ex. 5

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$:

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \sin x (\cos x)^n.$$

1) Étudier la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$.

2) Étudier la série $\sum f_n$.

Ex. 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{1 + a^{2n}x^2}$.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la convergence de la série de terme général f_n.

Ex. 7

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ell n\, n} \quad (n \geqslant 2).$$

Ex. 8

Pour x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Trouver un équivalent simple de f au voisinage de 0.

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 9

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ avec :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}.$$

On distinguera les cas $x = 2, \quad x > 2$, et $\quad x < 2$.

Ex. 10

Étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b$, on définit une suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ par la donnée de f_0 dans $\mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [a,b], \quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

1) Étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

2) Calculer la fonction somme : $F = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Ex. 11

Soit $a \in \mathbb{R}, |a| < 1$ et :

$$S : [0,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1 - x^n}.$$

1) Montrer que S est continue sur $[0, 1[$.

2) Montrer que pour tout $a \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ell n(1-a).$$

3) Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend 1.

Ex. 12

1) Justifier la définition de la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n x \sin nx.$$

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$; calculer f'.

3) En déduire f.

Ex. 13

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite complexe qui converge vers 0.

1) Justifier la définition de :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

2) Montrer que $f(x) = o(e^x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Ex. 14

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Ex. 15

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Ex. 16

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Ex. 17

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x (1 - t^2)^n \mathrm{d}t,$$

et $$Q_n(x) = \frac{1}{P_n(1)} \int_0^x P_n(u)\mathrm{d}u.$$

Montrer que la suite de polynômes $(Q_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue $A : x \mapsto |x|$.

Ex. 18

On considère $(P_n)_{\mathbb{N}}$ suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ définie par récurrence :

$$P_0 = 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right).$$

1) Étudier la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$.

2) Pour tout $x \in [0, 1]$, établir les inégalités :

$$\sqrt{x} - P_n(x) \geqslant 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \qquad \textbf{(2)}$$

Montrer que la suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

3) En déduire (sans utiliser un théorème de Weierstrass) qu'il existe une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue $A : x \mapsto |x|$.

Ex. 19

Montrer que la série de fonctions de terme général :

$$u_n : x \mapsto (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + x^2}, \quad (n \geqslant 1)$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ex. 20

Étudier la suite de fonctions $(u_n)_{\mathbb{N}}$ avec :

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

Ex. 21

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{-x}}{\ln n}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f.

3) Trouver en chaque borne de D_f la limite et un équivalent simple de f.

Ex. 22

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1 + x^2)}\right).$$

1) Trouver l'ensemble de définition de f.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Ex. 23

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_0^1 e^{nx(1-t)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 24

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) On pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{k^2+x^2}$.

Montrer que $R_n(2n) \geqslant n \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{4n}\right)$.

Qu'en déduit-on pour la convergence uniforme éventuelle sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général :

$$u_n : x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{x}{n^2+x^2}\ ?$$

4) Établir pour tout $x > 0$:

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

En déduire $x \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} \operatorname{Arctan} x \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Retrouver le résultat du 3).

Ex. 25

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\operatorname{ch}(nx)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2) Montrer que f est continue sur D.

3) Montrer que $\forall x \in D$:

$f(x) =$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(nx)} - \frac{1}{\operatorname{ch}((n+1)x)}\right).$$

4) En étudiant la convexité de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$,

en déduire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Ex. 26

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite complexe et $(\lambda_n)_{\mathbb{N}}$ une suite réelle, positive, strictement croissante, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$. On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\left(\sum a_n e^{-\lambda_n z_0}\right)$ soit convergente ; montrer que la série $\left(\sum a_n e^{-\lambda_n z}\right)$ est uniformément convergente dans $D_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\},\ \left|\operatorname{Arg}\left(z - z_0\right)\right| < \alpha\right\}$ avec $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Ex. 27

Les théorèmes de Dini

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue.

1) Montrer que si la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ est monotone, la convergence est uniforme sur I.

2) Montrer que si chaque f_n est croissante (ou chaque f_n est décroissante), la convergence est uniforme sur I.

Ex. 28

Polynômes de Bernstein

Théorème de Stone Weierstrass

À toute fonction $f \in \mathcal{C}\left([0,1], \mathbb{C}\right)$, on associe la suite de polynômes :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$

1) Déterminer $B_n(f)$ pour :

- $f : x \mapsto 1$,
- $f : x \mapsto x$,
- $f : x \mapsto x^2$.

2) Calculer :

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k}.$$

3) La continuité uniforme de f sur $[0,1]$ donne :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (u,v) \in [0,1]^2,$

$$|u - v| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

En observant que :

$f(x) - B_n(f)(x) =$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k(1-x)^{n-k},$$

et en décomposant la somme suivant la partition de $[\![0, n]\!]$ formée de :

$$I_n = \left\{k / \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha\right\}$$

et $\qquad J_n = [\![0, n]\!] \setminus I_n,$

montrer que la suite $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Ex. 29

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n!x)}{n!}.$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Dans la suite, x est un réel fixé quelconque.

On pose $h = \dfrac{2\pi}{p!}$. Montrer que :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{p!}{\pi\, n!} \sin\left(\frac{\pi\, n!}{p!}\right) \cos\left(n!\left(x+\frac{\pi}{p!}\right)\right).$$

3) Montrer que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a une limite réelle quand $p \to +\infty$ si et seulement si

$$A_p = \sum_{n=0}^{p-1} \cos\left(n!\left(x+\frac{\pi}{p!}\right)\right) \text{ en a une.}$$

4) On pose :

$$A'_p = \sum_{n=0}^{p-1} \cos\left(n!x\right) \cos\left(n!\frac{\pi}{p!}\right)$$

$$\text{et } A''_p = \sum_{n=0}^{p-1} \sin\left(n!x\right) \sin\left(n!\frac{\pi}{p!}\right).$$

Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} A''_p = 0$.

Montrer que A'_p a une limite quand $p \to +\infty$ si et seulement si $B_p = \sum\limits_{n=0}^{p-1} \cos\left(n!x\right)$ en a une.

5) Montrer que f n'est dérivable en aucun point x de $\mathbb{R}$.

Avec éléments de solution

Ex. 30

Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell n\left(1-e^{-nx}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2) Montrer que f est continue sur D.

3) (Utilise le chapitre 6.)

Déterminer les limites et des équivalents simples de f aux bornes de D.

Ex. 31

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \inf\left\{|z|\ /\ z \in \mathbb{C}\ /\ 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}=0\right\}.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Ex. 32

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(k\lambda) = \displaystyle\int_0^1 f.$

Indications

Ex. 9

Pour $x > 2$, couper la somme en deux en considérant l'entier $E(\sqrt{n})$, puis majorer séparément les deux sommes.

Pour $x < 2$, encadrer $f_n(x)$.

Ex. 10

1) Établir $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], |f_n(x)| \leqslant M \dfrac{(x-a)^n}{n!}$.

2) Trouver une équation différentielle ayant pour solution :

$$G : x \mapsto \int_a^x F.$$

Ex. 11

2) $-\ell n(1-a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{d}x.$

Montrer que l'on peut intégrer terme à terme sur $[0,a]$.

3) Montrer que $x \mapsto (1-x)S(x)$ est la somme d'une série normalement convergente sur $[0,1[$.

Ex. 12

Appliquer le théorème de dérivation terme à terme.

Ex. 13

Établir la convergence uniforme sur $]0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n e^{-x}$.

Ex. 14

Écrire :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j(n)$$

et appliquer le théorème de la limite terme à terme.

Ex. 15

Écrire $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$

et appliquer le théorème de la limite terme à terme.

Ex. 16

$e^A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

Écrire $\left(I_p + \dfrac{A}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{A^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(n).$

Appliquer le théorème de la limite terme à terme.

Il s'agit d'une copie conforme de l'exercice précédent.

Ex. 17

Majorer $\| Q_n - A \|_\infty^{[0,1]}$ en fonction de $P_n(1)$, puis montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nP_n(1) = +\infty$.

Ex. 18

1) $\big(P_n(x)\big)_{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente.

2) Établir **(2)** par récurrence.

Ex. 19

Le théorème des séries alternées ne permet pas d'effectuer une majoration uniforme du reste R_n.

Majorer $R_{2n}(x)$ en groupant les termes deux par deux.

Ex. 20

- Convergence uniforme sur $[0,+\infty[$:

majorer $\left|e^{-2x} - u_n(x)\right|$ en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

- Convergence non uniforme sur $]-\infty,0]$:

montrer $\displaystyle\sup_{]-\infty,0]} \left(e^{-2x} - u_{n-1}(x)\right) \geqslant \frac{e^n n^n}{n!}$.

Ex. 21

2) Observer que lorsque $x \to +\infty$, le premier terme de la série est dominant. Lorsque $x \to 0$, encadrer $f(x)$ au moyen de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x \,\ell n\, t}$ et effectuer deux intégrations par parties pour trouver un équivalent simple de cette intégrale.

Ex. 22

2) Montrer que le théorème de la limite terme à terme s'applique.

Ex. 23

Justifier la permutation de la somme et de l'intégrale puis montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t) e^{-e^{x(1-t)}} \mathrm{d}t = 0.$

Ex. 24

Majorer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$

et minorer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$

en utilisant que sur $[0,+\infty[$, Arctan est concave.

Ex. 25

4) La fonction $\varphi\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ change de concavité en un point $\alpha > 0$.

En fonction de ce changement de concavité, couper en deux la somme égale à $f(x) - \dfrac{1}{2}$ puis majorer chacune des deux sommes en groupant ses termes deux par deux et en exploitant la concavité ou convexité de f.

Ex. 26

Observer que l'on peut suposer $z_0 = 0$.

Poser $R_n = \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} a_i$ et exprimer $S_{n,p}(z) = \displaystyle\sum_{i=n}^{n+p} a_i e^{-\lambda_i z}$ en fonction des R_i.

En déduire une majoration uniforme du reste de la série de fonctions proposée.

Ex. 27

1) Raisonner par l'absurde en introduisant une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \|g_n\|_\infty^I = g_n(x_n)$.

2) Étant donné $\varepsilon > 0$, utiliser la continuité uniforme de f sur I pour construire une subdivision

$$(x_0, \ldots, x_p) \text{ de } I$$

telle que $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $\forall (x, x') \in [x_i, x_{i+1}]^2$, $|f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et en déduire une majoration de $\|f - f_n\|_\infty^I$.

Ex. 28

1) Introduire la fonction :

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, e^{kt} x^k (1-x)^{n-k} \text{ et ses dérivées.}$$

3) Observer que, pour $k \in J_n$:

$$1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2.$$

Ex. 29

3) Montrer que $\left|\dfrac{\sin x}{x} - 1\right| \leqslant \dfrac{x^2}{6}$.

4) Majorer $|A'_p - B_p|$ en utilisant $|\cos x - 1| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

5) Pour que f soit dérivable en x il faudrait que la série $\sum \cos(n!x)$ soit convergente.

Avec éléments de solution

Ex. 30

3) ▪ Équivalent en $+\infty$

Montrer que pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $|\ell n(1-x) + x| \leqslant x^2$.

▪ Équivalent en 0

Encadrer par des intégrales.

Ex. 31

$a_n = |z_n|$ où z_n est une racine du polynôme :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

On montre par l'absurde que a_n tend vers $+\infty$: dans le cas contraire, il existerait une suite extraite de $(z_n)_{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$ et on aurait $e^\ell = 0$!

Ex. 32

Vérifier que la propiété est vraie lorsque f est un polynôme trigonométrique 1-périodique puis appliquer le deuxième théorème de Weierstrass.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

Convergence simple

Il s'agit ici d'étudier une suite récurrente très classique.

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) \in [-1, 1]$. D'autre part, la fonction $\sin$ étant impaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ les suites $\left(u_n(x)\right)_{\mathbb{N}^*}$ et $\left(u_n(-x)\right)_{\mathbb{N}^*}$ sont opposées ; on peut donc, pour cette étude se limiter au cas où $u_1(x) \in [0, 1]$.

Sachant que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $0 \leqslant \sin x \leqslant x$, la suite $\left(u_n(x)\right)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers $\ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque la fonction $\sin$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ, on a $\sin \ell = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$. En conclusion, la suite de fonctions $\left(u_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme

De $|u_1(x)| \leqslant 1$, on déduit $|u_2(x)| \leqslant \sin 1$ et, par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n(x)| \leqslant u_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Il en résulte $\| u_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = u_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc, d'après l'étude de la convergence simple, $\left(u_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Ex. 2

Convergence simple

$f_n(0) = \operatorname{Arctan} n$ tend vers $\frac{\pi}{2}$. Pour $x > 0$, $\frac{x+n}{nx+1}$ tend vers $\frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$.

En remarquant que, pour $x > 0$, $\operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$, on conclut que la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $f\ :\ x \mapsto \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$.

Convergence uniforme

- Première solution

En posant $\delta_n(x) = f_n(x) - f(x)$, il vient $\delta_n'(x) = \dfrac{2\left(1 + x^2 + 2nx\right)}{\left(1 + x^2\right)\left[(x+n)^2 + (nx+1)^2\right]}$, donc δ_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Alors, de $\delta_n(0) = -\operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta_n(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$, on déduit $\| \delta_n \|_\infty^{[0,+\infty[} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$ et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \| \delta_n \|_\infty^{[0,+\infty[} = 0.$$

En conclusion, la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

- Deuxième solution

On peut éviter l'étude de variation.

Pour $x > 0$, formons $\tan\left(f_n(x) - f(x)\right) = \dfrac{x^2 - 1}{n\left(x^2 + 1\right) + 2x}$.

Puisque $f_n(x) - f(x) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on en déduit $f_n(x) - f(x) = \operatorname{Arctan} \dfrac{x^2 - 1}{n\left(x^2 + 1\right) + 2x}$, et donc :

$$|f_n(x) - f(x)| = \operatorname{Arctan} \frac{\left|x^2 - 1\right|}{n\left(x^2 + 1\right) + 2x}.$$

Sachant que Arctan est croissante, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \operatorname{Arctan} \frac{x^2+1}{n\left(x^2+1\right)+2x} \leqslant \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}.$$

Cette inégalité reste vraie pour $x = 0$, il en résulte donc $\| f_n - f \|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n}$ et on conclut comme précédemment.

Ex. 3

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{x} = 1$, donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Convergence simple

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = +\infty$.

Pour $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-nx} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Pour $x < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-nx} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

La suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme

De $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = n$, on déduit $\| f_n \|_\infty^{]0,+\infty[} \geqslant n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n \|_\infty^{]0,+\infty[} = +\infty$ et il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

Étudions maintenant s'il y a convergence uniforme locale.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) = ne^{-(n-1)x} g(x)$ où g est la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^2e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

La fonction g ainsi définie est continue sur $[0,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée sur cet intervalle. Posons $M = \| g \|_\infty^{[0,+\infty[}$, on obtient pour tout $x \in [0,+\infty[,\ \ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant Mne^{-(n-1)x}$.

Fixons alors $a > 0$, il vient pour tout $x \in [a,+\infty[,\ \ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant Mne^{-(n-1)a}$ donc $\| f_n \|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant Mne^{-(n-1)a}$, ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

En conclusion la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ est localement uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

La majoration préalable a permis d'éviter l'étude des variations de f_n, néammoins celle-ci est faisable.

En calculant $f_n'(x) = \dfrac{nxe^{-nx}}{(1-e^{-x})^3}\left[2 - nx + (n-2)xe^{-x} - 2e^{-x}\right]$, on voit que $f_n'(x)$ est du signe de :

$$u(x) = 2 - nx + (n-2)xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

On forme ensuite $u'(x) = -n + e^{-x}\left[n-(n-2)x\right]$ puis $u''(x) = e^{-x}\left[(n-2)x - 2n + 2\right]$, ceci permet l'étude des variations et du signe de u' puis de u.

Finalement, on trouve que f_n est décroissante sur $[0,+\infty[$ donc, quel que soit $a > 0$, on a $\| f_n \|_\infty^{[a,+\infty[} = f_n(a)$ et la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ résulte de la convergence de la suite numérique $(f_n(a))_{\mathbb{N}}$.

Ex. 4

1) La suite converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

En effet, $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n(0) = f_n(1) = 0$ et pour $0 < x < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \ell n\, x + n\, \ell n\, 3 = -\infty$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n x^{2^n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \text{ car } 0 \leqslant f_n(x) \leqslant 3^n x^{2n}.$$

Sachant que $\sup\limits_{t\in[0,1]} t(1-t) = \dfrac{1}{4}$, en écrivant $f_n(x) = 3^n x^{2^n}\left(1 - x^{2^n}\right)$, on voit que $\| f_n \|_\infty^{[0,1]} = \dfrac{3^n}{4}$ (ce maximum est atteint pour $x^{2^n} = \dfrac{1}{2}$).

Il en résulte que la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2) Calculons $\displaystyle\int_0^1 f_n = 3^n\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right) = \frac{3^n \cdot 2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$.

On obtient $\displaystyle\int_0^1 f_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6^n}{2\cdot 4^n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n = +\infty$. Par ailleurs, on a $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$.

Puisque les deux limites sont distinctes, on retrouve que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Ex. 5

1) Posons $g_n(x) = \sin x(\cos x)^n$, on a $g_n'(x) = (\cos^2 x - n\sin^2 x)\cos^{n-1} x$.

D'où le tableau de variation :

x	0		a_n		$\pi/2$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	b_n	$\searrow$	0

$$a_n = \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$b_n = \sin a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, on a au voisinage de $+\infty$ $\displaystyle b_n \sim \frac{1}{\sqrt{ne}}$.

Donc, puisque $\| g_n \|_\infty^{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} = b_n$, la suite de fonctions $(g_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et il en est de même pour la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ car $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}|g_n(x)|$.

2) La série $\sum f_n$ est simplement convergente sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; en effet, $\sum f_n(0)$ est la série nulle et pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sum f_n(x)$ est une série géométrique de raison $\cos x$ avec $0 \leqslant \cos x < 1$.

La somme est donc la fonction f définie par : $f(0) = 0$ et pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 2$, la fonction f n'est pas continue, or les fonctions f_n sont continues sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, la série $\sum f_n$ n'est donc pas uniformément convergente sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. De même puisque $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$, la convergence n'est pas uniforme sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Par contre, pour tout $a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\| f_n \|_\infty^{\left[a,\frac{\pi}{2}\right]} \leqslant \frac{\pi}{2}(\cos a)^n$ ce qui avec $0 \leqslant \cos a < 1$ montre la convergence normale sur $\left[a,\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi la série est normalement donc uniformément convergente sur tout segment inclus dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Ex. 6

Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $\sum f_n(0)$ est la série nulle donc convergente.

Envisageons maintenant trois cas suivant la position de $|a|$ par rapport à 1.

- $|a| < 1$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$ donc, pour $x \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum f_n(x)$ est grossièrement divergente.
- $|a| = 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, la suite de terme général $f_n(x)$ est constante non nulle donc la série $\sum f_n(x)$ est encore grossièrement divergente.
- $|a| > 1$. Écrivons $\displaystyle f_n(x) = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{a^n x}{1+a^{2n}x^2}$.

Sachant que pour tout t réel $\left|\dfrac{2t}{1+t^2}\right| \leqslant 1$, avec égalité si et seulement si $|t| = 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\,|a|^n} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{2\,|a|^n}.$$

Puisque la série géométrique de raison $\dfrac{1}{|a|} < 1$ est convergente, la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Ex. 7

On a $u_n(0) = 0$ et pour $x > 0$, $u_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. L'étude des variations de la fonction $t \mapsto te^{-t}$ donne $\sup\limits_{t\in[0,+\infty[} te^{-t} = \dfrac{1}{e}$.

Donc, en écrivant $u_n(x) = \dfrac{nxe^{-nx}}{n\,\ell n\, n}$, on obtient $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} u_n(x) = \dfrac{1}{en\,\ell n\, n}$ et, puisque u_n est clairement positive :

$$\|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = \frac{1}{en\,\ell n\, n}.$$

On sait que la série $\sum \dfrac{1}{n\,\ell n\, n}$ est divergente, en conséquence la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Fixons alors $a > 0$. Pour tout $n \geqslant \dfrac{1}{a}$, on a $\|u_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = u_n(a)$ donc la convergence de $\Sigma u_n(a)$ donne la convergence normale sur $[a, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum u_n$.

Montrons maintenant que la série converge uniformément sur $[0, +\infty[$ en considérant le reste d'ordre n :

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ell n\, k}.$$

Une majoration donne $\forall x \in]0, +\infty[,\ \ 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{x}{\ell n\, n} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx}$, donc :

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{xe^{-(n+1)x}}{\left(1 - e^{-x}\right)\ell n\, n} \leqslant \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{1}{\ell n\, n}.$$

Notons φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x > 0$ et $\varphi(0) = 1$. Avec $R_n(0) = 0$, la majoration précédente donne $\forall x \in [0, +\infty[,\ \ 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{\ell n\, n}$.

Puisque φ est continue sur $[0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, elle est bornée sur cet intervalle, et on obtient :

$$\forall x \in [0, +\infty[\ \ 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{1}{\ell n\, n} \cdot \|\varphi\|_\infty^{[0,+\infty[} \text{ donc } \|R_n\|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{\ell n\, n} \cdot \|\varphi\|_\infty^{[0,+\infty[}.$$

En conclusion la suite $(R_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$ ce qui donne la convergence uniforme de $\sum u_n$.

Ex. 8

1) Posons $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

Pour $x \leqslant 0$, la suite $\left(u_n(x)\right)_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\Sigma u_n(x)$ est grossièrement divergente.

Pour $x > 0$ on a, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n(x)$ est convergente.

Finalement la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. Cet intervalle constitue l'ensemble de définition de f.

2) x étant fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, soit $v_x : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ \ t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$.

La fonction v_x est décroissante sur $[0,+\infty[$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_x(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} v_x(t)\mathrm{d}t \leqslant v_x(n)$, c'est-à-dire :

$$e^{-x\sqrt{n+1}} \leqslant \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leqslant e^{-x\sqrt{n}}.$$

D'autre part la convergence de la série $\sum v_x(n)$ assure que v_x est intégrable sur $[0,+\infty[$ (voir chapitre 2, théorème 9) et en sommant les inégalités précédentes, il vient :

$$\int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_x(n) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire
$$\int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t.$$

Le calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} v_x(t)\mathrm{d}t$ peut se faire au moyen du changement de variable défini par $z = x\sqrt{t}$. Il vient ainsi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} ze^{-z}\mathrm{d}z = \frac{2}{x^2}\Big[-(z+1)e^{-z}\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{x^2}.$$

On en déduit $\dfrac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{2}{x^2}$, et finalement : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

Niveau 2

Ex. 9

Convergence simple

Premier cas : $x = 2$

On reconnaît une somme de Riemann.

$$f_n(2) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{n}\right)^2}}, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(2) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ell n(1+\sqrt{2}).$$

Deuxième cas : $x > 2$

Coupons la somme en deux :

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} + \sum_{p=1+E(\sqrt{n})}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}}$$ (E est la fonction «partie entière»),

puis majorons les deux sommes obtenues :

$$\sum_{p=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \leqslant \frac{E(\sqrt{n})}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{p=1+E(\sqrt{n})}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \leqslant \sum_{p=1+E(\sqrt{n})}^{n} \frac{1}{p^{\frac{x}{2}}}.$$

Il est alors clair que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} = 0$ et, puisque $\dfrac{x}{2} > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{p^{\frac{x}{2}}}$ est convergente et on a aussi, d'après le critère de Cauchy, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1+E(\sqrt{n})}^{n} \frac{1}{p^{\frac{x}{2}}} = 0$. En conséquence, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Troisième cas : $x < 2$

Pour $0 \leqslant x < 2$, la fonction $t \mapsto t^x$ est croissante sur $[0,+\infty[$ et on a donc :

$$\forall p \in [\![1,n]\!], \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+n^x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n^x}} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant 1.$$

Alors, avec le théorème d'encadrement, $n^2+n^x \underset{+\infty}{\sim} n^2$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=1$.

Pour $x<0$, la fonction $t\mapsto t^x$ est décroissante et on obtient :

$$\forall p\in [\![1,n]\!],\quad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}}\leqslant \frac{1}{n}\quad \text{d'où}\quad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant f_n(x)\leqslant 1 \text{ puis } \lim_{n\to+\infty} f_n(x)=1.$$

En conclusion, la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x)=1 \text{ si } x<2,\ f(2)=\ell n(1+\sqrt{2}),\ f(x)=0 \text{ si } x>2.$$

Convergence uniforme

On a affaire à une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont la somme n'est pas continue, il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Par contre chaque fonction f_n étant visiblement décroissante, pour tout $a>2$, on a $\forall x\in [a,+\infty[,\ \ 0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(a)$. Donc $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[}\leqslant f_n(a)$ et la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,+\infty[$.

De même, pour tout $b<2$ on a $\forall x\in]-\infty,b],\ \ 0<1-f_n(x)\leqslant 1-f_n(b)$. Donc $\|1-f_n\|_\infty^{]-\infty,b]}\leqslant 1-f_n(b)$ et la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante 1 sur $]-\infty,b]$.

En conclusion, il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans l'un ou l'autre des intervalles $]-\infty,2[$ et $]2,+\infty[$.

Ex. 10

1) Puisqu'elle est continue, la fonction f_0 est bornée sur l'intervalle compact $[a,b]$. Posons $\|f_0\|_\infty^{[a,b]}=M$.

On obtient alors $\forall x\in [a,b],\ \ |f_1(x)|\leqslant \displaystyle\int_a^x M\mathrm{d}t=M(x-a)$,

donc $\quad |f_2(x)|\leqslant \displaystyle\int_a^x M(t-a)\mathrm{d}t=M\frac{(x-a)^2}{2}$, et par récurrence : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \ |f_n(x)|\leqslant M\dfrac{(x-a)^n}{n!}$.

Il en résulte $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \ \|f_n\|_\infty^{[a,b]}\leqslant M\dfrac{(b-a)^n}{n!}$ et, puisque $M\dfrac{(b-a)^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente, la série de fonctions Σf_n converge normalement sur $[a,b]$.

2) Posons $F=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et soit $G\ :\ [a,b]\to\mathbb{R},\ \ x\mapsto \displaystyle\int_a^x F$.

Pour tout $x\in [a,b]$, la série Σf_n converge normalement donc uniformément sur le segment $[a,x]$ et le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$\int_a^x F(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x)=F(x)-f_0(x)$$

c'est-à-dire $$G(x)=G'(x)-f_0(x).$$

En résolvant l'équation différentielle $y'=y+f_0(x)$ par la méthode de la variation de la constante, on obtient :

$$G(x)=e^x\int_a^x f_0(t)e^{-t}\mathrm{d}t+\lambda e^x,\quad \lambda\in\mathbb{R},$$

$$\text{donc}\quad F(x)=f_0(x)+e^x\int_a^x f_0(t)e^{-t}\mathrm{d}t+\lambda e^x.$$

Pour tout $n\geqslant 1$, on a $f_n(a)=0$ donc $F(a)=f_0(a)$ et $\lambda=0$.

Finalement : $\quad F(x)=f_0(x)+\displaystyle\int_a^x f_0(t)e^{x-t}\mathrm{d}t.$

Ex. 11

Nous avons affaire à la série de terme général : $\quad u_n : [0,1[\to\mathbb{R}, x\mapsto \dfrac{a^n}{1-x^n}$.

1) Montrons la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout segment $[0,b]$ inclus dans $[0,1[$.

Pour tout x de $[0,b]$:

$$|u_n(x)|=\frac{|a|^n}{1-x^n}\leqslant \frac{|a^n|}{1-x}\leqslant \frac{|a|^n}{1-b}\qquad \text{donc}\qquad \|u_n\|_\infty^{[0,b]}\leqslant \frac{|a|^n}{1-b}.$$

La série géométrique de raison $|a| < 1$ est convergente, donc la série de terme général $\| u_n \|_\infty^{[a,b]}$ converge.

Conclusion : la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, b]$ pour tout réel $b \in [0, 1[$.

Il en résulte la convergence simple sur $[0, 1[$, l'existence de la somme :

$$S \ : \ [0, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1 - x^n}$$

et, d'après le théorème **8**, la continuité de S sur $[0, 1[$.

2) On part de la relation connue : $\forall x \in]-1, 1[, \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Pour tout $a \in]-1, 1[$, la série de fonctions de terme général $x \mapsto x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, a]$ car $\displaystyle\sup_{x \in [0,a]} |x^n| = |a|^n$. En conséquence, le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a x^n \mathrm{d}x \ \text{ c'est-à-dire } \ -\ell n(1-a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}.$$

Remarque

On vient en fait d'utiliser une technique propre aux séries entières : intégration terme à terme sur un intervalle compact inclus dans l'intervalle ouvert de convergence (voir le chapitre 5.)

3) La solution tient à l'identité et à la limite suivantes :

$$\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{n}.$$

Comme $\displaystyle (1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-x}{1-x^n} a^n$, introduisons la suite de fonctions de terme général :

$$v_n \ : \ [0, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1-x}{1-x^n} a^n.$$

Notons que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} v_n(x) = \frac{a^n}{n}$.

La convergence normale sur $[0, 1[$ s'obtient par :

$$|v_n(x)| = \frac{|a|^n}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} \leqslant |a|^n \qquad \| v_n \|_\infty^{[0,1[} = |a|^n.$$

Sachant que, pour $|a| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ell n(1-a)$, il suffit d'appliquer le théorème 4 (limite terme à terme)

pour obtenir : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} v_n(x)$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} = -\ell n(1-a)$.

Conclusion :

$$S(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x<1}}{\sim} -\frac{\ell n(1-a)}{1-x}.$$

Ex. 12

1) Étudions la série de fonctions de terme général $\quad u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{n} \cos^n x \sin nx.$

Chaque fonction u_n est impaire de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et de période π.

La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$:

$$u_n(0) = u_n(\pi) = 0 \quad \text{et pour } x \in]0, \pi[, \quad |u_n(x)| \leqslant \frac{|\cos x|^n}{n}$$

(majoration par une série géométrique de raison $|\cos x| < 1$).

Elle a pour somme la fonction f, impaire et π-périodique :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n x \sin nx.$$

2) Un calcul simple donne $\quad u_n'(x) = \left(\cos x\right)^{n-1} \cos(n+1)x.$

La série $\sum u_n'$ est normalement convergente sur $[a, \pi - a]$ pour tout $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car :

$$\left|u_n'(x)\right| \leqslant |\cos x|^{n-1} \leqslant |\cos a|^{n-1} \quad \text{donc} \quad \| u_n'(x) \|_\infty^{[a,\pi-a]} \leqslant |\cos a|^{n-1},$$

et la série géométrique de raison $|\cos a|$ est convergente.

Le théorème de «dérivation terme à terme» s'applique, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et, compte tenu de la π-périodicité, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ avec :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos x\right)^{n-1} \cos(n+1)x.$$

Le calcul utilise $\quad \cos(n+1)x = \operatorname{Re}\ e^{i(n+1)x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos x\right)^{n-1} x\, e^{i(n+1)x} \right) \\ f'(x) &= \operatorname{Re} \frac{e^{2ix}}{1 - \cos x \bullet e^{ix}} = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ix}}{e^{-ix} - \cos x} \right) \\ f'(x) &= -1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \pi\, \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

3) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, \pi[$, il existe un réel C tel que $\quad f(x) = C - x.$

Or, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \quad$ donc $\quad f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x \quad$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

On complète la description de f sachant qu'elle est π-périodique et nulle en tout point de $\pi\mathbb{Z}$.

Observer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13

La suite $\left(a_n\right)_\mathbb{N}$ est convergente donc bornée. Il sera utile de noter $\quad M_n = \sup\limits_{i \geqslant n} |a_i| \quad$ et d'observer que la suite réelle $(M_n)_\mathbb{N}$ est positive, décroissante et qu'elle converge vers 0.

1) L'existence de f tient à l'absolue convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ car $\left|\dfrac{a_n x^n}{n!}\right| \leqslant M_0 \dfrac{|x^n|}{n!}$ (puis critère de domination des séries à termes positifs).

2) Comme $\quad e^{-x} f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!} e^{-x}$, introduisons la série de fonctions de terme général :

$$u_n : [0, +\infty[\to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \frac{a_n}{n!} x^n e^{-x}.$$

Nous avons déjà la convergence simple et la somme, établissons la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Le reste d'ordre n est $\quad R_n : [0, +\infty[\to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k x^k}{k!} e^{-x}$

et une majoration $\quad |R_n(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k!} x^k e^{-x} \leqslant M_n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^k e^{-x}}{k!} \leqslant M_n \ \left(\text{car} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x\right).$

Ainsi $\quad \|R_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = \sup\limits_{x \in [0,+\infty[} |R_n(x)| \leqslant M_n \quad$ donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = 0.$

La suite $\left(R_n\right)_\mathbb{N}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Appliquons le théorème de la limite terme à terme : $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\lim_{x\to+\infty} u_n(x)\right]$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} f(x) = 0 \quad$ donc $\quad f(x) = o(e^x)\ $ quand $x \to +\infty$.

Ex. 14

Considérons la série de fonctions $\sum u_j$ de $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ où les u_j sont définis par :

$$u_j \ : \ [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{j}{x}\right)^x & \text{si } x \geqslant j, \\ 0 & \text{si } x < j. \end{cases}$$

On obtient alors l'égalité $\quad S(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j(n).$

Pour établir la convergence normale sur $[1, +\infty[$ de cette série de fonctions, étudions la fonction :

$$\varphi_j \ :]j, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x\,\ell n\left(1 - \frac{j}{x}\right).$$

Calculons $\quad \varphi_j'(x) = \ell n\left(1 - \dfrac{j}{x}\right) + \dfrac{j}{x-j} = -\ell n\left(1 + \dfrac{j}{x-j}\right) + \dfrac{j}{x-j} \geqslant 0 \quad$ (utiliser $\ell n(1+u) \leqslant u$).

Ainsi la fonction φ_j est croissante, il en est de même pour u_j et :

$$\left\|u_j\right\|_{\infty}^{[1,+\infty[} = \lim_{x \to +\infty} u_j(x) = e^{-j}$$

La série géométrique $\sum e^{-j}$ est convergente, donc $\sum u_j$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

On dispose alors du théorème de la limite terme à terme :

$$\lim_{n \to +\infty} S(n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} u_j(n) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j} = \frac{e}{e-1}\,.$$

Ex. 15

Fixons z dans $\mathbb{C}$ et appliquons la formule du binôme, il vient :

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{z^k}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(n)$$

où on a introduit la série de fonctions $\sum u_k$ de $\mathcal{F}\big([1, +\infty[, \mathbb{C}\big)$, telle que :

$$u_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k} \cdot \frac{z^k}{k!} \quad \text{si } x \geqslant k \quad , \quad u_k(x) = 0 \ \text{ si } x < k.$$

La convergence normale sur $[1, +\infty[$ de cette série $\sum u_k$ résulte de :

$$\|u_k\|_{\infty}^{[1,+\infty[} = \sup_{x \in [k,+\infty[} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{x}\right) \frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^k}{k!} \quad \text{avec} \quad \sum \frac{|z|^k}{k!} \text{convergente.}$$

Le théorème de la limite terme à terme peut donc s'appliquer :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} u_k(n).$$

C'est-à-dire $\quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$

Ex. 16

Il convient d'abord de munir l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre (par exemple).

Nous reconnaissons dans l'énoncé la définition de l'exponentielle d'une matrice : $\exp A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}\,.$

La matrice A étant fixée dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la formule du binôme donne :

$$\left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{A^k}{n^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} U_k(n)$$

où on a introduit la série de fonctions de $\mathcal{F}\big([1,+\infty[,\mathcal{M}_p(\mathbb{K})\big)$, de terme général U_k tel que :

$$U_k(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{x^k}\cdot\frac{A^k}{k!} \text{ si } x \geqslant k \quad \text{et} \quad U_k(x) = 0 \text{ si } x < k.$$

Le résultat tient à la convergence normale et à une limite terme à terme.

La majoration : $$\|U_k(x)\| \leqslant \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{x^k}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!} \text{ pour } x \geqslant k$$

donne : $$\|U_k\|_\infty^{[1,+\infty[} = \sup_{x\in[k,+\infty[}\|U_k(x)\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!},$$

et la convergence normale sur $[1,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum U_k$ en résulte.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_k(n) = \dfrac{A^k}{k!}$, l'application du théorème de la limite terme à terme donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} U_k(n) \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!} = \exp A.$$

Ex. 17

P_n est un polynôme impair de degré $2n+1$ donc Q_n est un polynôme pair de degré $2n+2$.

Pour $x \in [0,1]$, étudions $Q_n(x) - x$:

$$Q_n(x) - x = \frac{1}{P_n(1)}\int_0^x\left(\int_1^u (1-t^2)^n \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

$$|Q_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{P_n(1)}\int_0^1\left(\int_u^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

$$|Q_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{P_n(1)}\int_0^1 u\big(1-u^2\big)^n \mathrm{d}u \quad \text{(intégrer par parties)}$$

$$|Q_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{2(n+1)P_n(1)}.$$

On en déduit : $$\|Q_n - A\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{1}{2(n+1)P_n(1)}.$$

Il reste à étudier la suite $n \mapsto nP_n(1)$.

Une solution consiste à reconnaître une intégrale de Wallis : le changement de variable défini par $t = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donne $P_n(1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = W_{2n+1}$ et on en déduit $P_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$ (voir par exemple la démonstration de la formule de Stirling dans le chapitre 2). Il vient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nP_n(1) = +\infty$.

Voyons une autre méthode. Une intégration par parties donne : $(2n+1)P_n(1) = 2nP_n(1)$, ce qui s'écrit aussi :

$$(2n+1)P_n(1) - (2n-1)P_n(1) = P_{n-1}(1).$$

Cette formule montre que la suite $\big((2n+1)P_n(1)\big)_{\mathbb{N}^*}$ est croissante et de même nature que la série de terme général $P_{n-1}(1)$ (cf. chapitre 2, théorème 2).

Puisqu'elle est positive croissante, la suite $\big((2n+1)P_n(1)\big)_{\mathbb{N}^*}$ admet une limite $a>0$ finie ou infinie. En supposant $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire a finie, il vient $P_{n-1}(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{2n-1}$, donc $\Sigma P_n(1)$ diverge et il en est de même pour la suite $\big((2n+1)P_n(1)\big)_{\mathbb{N}^*}$. C'est contradictoire, donc $a=+\infty$.

Conclusion :

$\| Q_n - A\|_\infty^{[-1,1]} = \| Q_n - A\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)P_n(1)}$ donne la convergence uniforme sur $[-1,1]$ de (Q_n) vers A.

Ex. 18

1) Pour $x \in [0,1]$, posons $u_n = P_n(x)$.

On a affaire à une suite récurrente : $u_{n+1} = f\big(u_n\big)$ avec $f \;:\; x \mapsto -\dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{x}{2}$ et $u_0 = 0$.

La fonction f est continue strictement croissante sur $[0,1]$ et $f\big([0,1]\big) = \left[\dfrac{x}{2}, \dfrac{1+x}{2}\right] \subset [0,1]$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\;\; u_n \in [0,1]$ puis que $\big(u_n\big)_{\mathbb{N}}$ est croissante, majorée, donc convergente vers ℓ unique point fixe de f sur $[0,1]$, c'est-à-dire $\ell = \sqrt{x}$.

Ainsi la suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée $R \;:\; x \mapsto \sqrt{x}$.

2) L'inégalité **(1)** résulte de ce que $\sqrt{x}$ est limite de la suite croissante $\big(P_n(x)\big)_{\mathbb{N}}$.

L'inégalité **(2)** peut se montrer par récurrence : propriété $\big(H_n\big)$.

(H_0) est vraie.

On suppose $\big(H_n\big)$ vraie. Alors, en écrivant :

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \Big(\sqrt{x} - P_n(x)\Big)\left(1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{x} + P_n(x)\big)\right),$$

avec $\big(H_n\big)$, on obtient : $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leqslant \dfrac{2\sqrt{x}\big(2+(n-1)\sqrt{x} - nx\big)}{\big(2+n\sqrt{x}\big)^2} \leqslant \dfrac{2\sqrt{x}\big(2+(n-1)\sqrt{x}\big)}{\big(2+n\sqrt{x}\big)^2}$.

Il reste à remarquer que $\big(2+(n+1)\sqrt{x}\big)\big(2+(n-1)\sqrt{x}\big) \leqslant \big(2+n\sqrt{x}\big)^2$ pour obtenir :

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}$$

ce qui prouve que (H_{n+1}) est vraie.

Convergence uniforme En utilisant la croissance de $t \mapsto \dfrac{2t}{2+nt}$, les inégalités **(1)** et **(2)** donnent :

$$\|P_n - R\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{2}{n+2}.$$

3) La suite de polynômes $\big(Q_n\big)_{\mathbb{N}}$ définis par $Q_n(x) = P_n(x^2)$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $A \;:\; x \mapsto |x|$.

Ex. 19

Il s'agit d'étudier la série de terme général $\quad u_n \;:\; x \mapsto (-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^2+x^2}$.

La convergence simple sur $\mathbb{R}$ s'obtient grâce au théorème des séries alternées (ou critère de Leibniz).

En effet, quel que soit x réel, $u_n(x)$ tend vers 0 et $n \mapsto |u_n(x)|$ décroît dès que $n \geqslant |x|$.

Le fait que cette décroissance ne soit acquise qu'à partir d'un rang, dépendant de x, rend impossible une majoration uniforme du reste d'ordre n avec le théorème des séries alternées :

en posant $\quad R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$ on n'a $|R_n(x)| \leqslant |u_n(x)|$ que pour $n \geqslant |x|$.

Considérons d'abord $R_{2n}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \big(u_{2k}(x) + u_{2k+1}(x)\big)$.

En formant $u_n(x) + u_{n+1}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{n^2+n-x^2}{\big(n^2+x^2\big)\big((n+1)^2+x^2\big)}$, on obtient $|u_n(x) + u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Il en résulte $\| R_{2n} \|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{4k^2}$ donc, puisque $\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{4k^2}$ et le reste d'une série convergente, la suite $(R_{2n})_{\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

En remarquant que $\| R_{2n+1} \|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \| u_{2n} \|_\infty^{\mathbb{R}} + \| R_{2n} \|_\infty^{\mathbb{R}}$ et que $\| u_{2n} \|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n}$, on voit qu'il en est de même pour la suite $\big(R_{2n+1}\big)_{\mathbb{N}^*}$. Finalement $\big(R_n\big)_{\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ d'où la conclusion.

Ex. 20

Convergence simple

On sait que, quel que soit x réel, $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$, il en résulte que la suite $\big(u_n\big)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $F \ : \ x \mapsto e^{-2x}$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$

Formons $F(x) - u_n(x) = e^{-x} \left(e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^k}{k!} \right)$.

La formule de Taylor avec reste intégral fournit $e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^k}{k!} = \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} (-1)^{n+1} e^{-t} \mathrm{d}t$, d'où :

$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \ \ |F(x) - u_n(x)| \leqslant e^{-x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

L'étude des variations de la fonction $f_n \ : \ x \mapsto x^n e^{-x}$ donne $\sup_{[0,+\infty[} f_n(x) = n^n e^{-n}$ d'où $\| F - u_n \|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$ et la formule de Stirling montre la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Convergence uniforme locale sur $]-\infty, 0]$

Pour tout $a > 0$, on a $\forall x \in [-a, 0], \ |F(x) - u_n(x)| \leqslant e^a \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{a^k}{k!}$.

La convergence uniforme sur $[-a, 0]$ en résulte.

Sur $]-\infty, 0]$, on a $F(x) - u_{n-1}(x) \geqslant e^{-x} \dfrac{|x|^n}{n!}$ donc $\sup_{]-\infty,0]} F(x) - u_{n-1}(x) \geqslant \dfrac{e^n n^n}{n!}$ (prendre $x = -n$).

La formule de Stirling donne $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{e^n n^n}{n!} = +\infty$ et la convergence n'est pas uniforme sur $]-\infty, 0]$.

Ex. 21

1) On pose $u_n(x) = \dfrac{n^{-x}}{\ell n\, n}$. La série $\Sigma u_n(x)$ converge si et seulement si $x > 1$. L'ensemble de définition de f est donc $D_f =]1, +\infty[$.

2) Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ avec pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^{(p)}(x) = (-1)^p (\ell n\, n)^{p-1} e^{-x\, \ell n\, n}$.

Pour tout $a > 1$ et tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ (voir théorème 15, corollaire f2).

3) **Étude au voisinage de $+\infty$**

La convergence étant uniforme sur $[2, +\infty[$, le théorème de la limite terme à terme donne $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On voit que le premier terme de la série est dominant lorsque x tend vers $+\infty$, d'où l'idée de le factoriser :

$$f(x) = \frac{2^{-x}}{\ell n\, 2}\left[1 + \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^{-x}\frac{\ell n\, 2}{\ell n\, n}\right].$$

La série de fonctions de terme général $x \mapsto \left(\frac{n}{2}\right)^{-x}\frac{\ell n\, 2}{\ell n\, n}$ est encore normalement convergente sur toute demi-droite $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ donc, comme précédemment :

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^{-x}\frac{\ell n\, 2}{\ell n\, n} = 0.$$

La factorisation donne alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2^{-x}}{\ell n\, 2}$.

Étude au voisinage de 1

Pour $x > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x\, \ell n\, t}$ est positive, décroissante, et intégrable sur $[2, +\infty[$, on obtient donc l'encadrement :

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x\,\ell n\, t} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2^{-x}}{\ell n\, 2} + \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x\,\ell n\, t}.$$

Deux intégrations par parties successives donnent :

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{t^{-x}}{\ell n\, t}\mathrm{d}t &= \frac{2^{1-x}}{(x-1)\,\ell n\, 2} + \frac{1}{1-x}\int_2^{+\infty}\frac{t^{-x}}{\ell n^2\, t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{2^{1-x}}{(x-1)\,\ell n\, 2} - \frac{2^{1-x}}{(x-1)^2\,\ell n^2\, 2} + \frac{2}{(x-1)^2}\int_2^{+\infty}\frac{t^{-x}}{\ell n^3\, t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Alors, avec $0 < \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x\,\ell n^3\, t} \leqslant \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\,\ell n^3\, t}$ et le calcul précédent, il vient quand x tend vers 1 :

$$\int_2^{+\infty}\frac{t^{-x}}{\ell n\, t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(x-1)\,\ell n\, 2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right).$$

Finalement $f(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x>1}}{\sim} \frac{1}{(x-1)\,\ell n\, 2}$.

Ex. 22

1) Posons $u_n(x) = (-1)^{n-1}\,\ell n\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

$\Sigma u_n(0)$ est la série nulle et, pour $x \neq 0$, $\Sigma u_n(x)$ est une série alternée convergente d'après le critère de Leibniz. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$. D'après le théorème des séries alternées, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$,

on en déduit $\| R_n \|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{n+1}$, la série est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

En conséquence, le théorème de la limite terme à terme donne $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\ell n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Il reste à calculer la somme de cette série, formons donc :

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\,\ell n\left(\frac{k+1}{k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\ell n(2k) - 2\sum_{k=1}^{n}\ell n(2k+1) + \ell n(2n+1)$$

$$= \ell n\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\right).$$

Alors la formule de Stirling donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\,\ell n\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ell n\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Ex. 23

Pour x réel fixé, on considère la série de fonctions de terme général $u_n \ : \ t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}e^{nx(1-t)}f(t)$.

La fonction f étant continue sur $[0, 1]$, elle est bornée. Posons donc $M = \|f\|_\infty^{[0,1]}$, on obtient :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \ \|u_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant M\frac{e^{n|x|}}{n!}.$$

Puisque la série de terme général $M\dfrac{X^n}{n!}$ $(X = e^{|x|})$ est convergente, il en résulte que Σu_n est normalement donc uniformément convergente sur $[0, 1]$.

En conséquence, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\left[1 - e^{-e^{x(1-t)}}\right]f(t)\mathrm{d}t$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t,$$

et on est donc ramené à démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 f(t)e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t = 0$.

On suppose $x > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on a :

$$0 \leqslant \int_0^{1-\varepsilon} e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t \leqslant e^{-e^{\varepsilon x}} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \int_{1-\varepsilon}^1 e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que pour x assez grand, $\displaystyle\left|\int_0^1 f(t)e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t\right| \leqslant 2M\varepsilon$, ce qui assure la conclusion.

Pour une deuxième lecture

Le théorème de convergence dominée (cf. chapitre 6) donne une autre démonstration.

Soit $(x_n)_\mathbb{N}$ une suite de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons g_n la fonction $t \mapsto e^{-e^{x_n(1-t)}}$, $(g_n)_\mathbb{N}$ est une suite de fonctions continues donc intégrables sur $[0, 1]$ convergeant simplement sur cet intervalle vers la fonction g définie par $g(t) = 0$ si $t \in [0, 1[$ et $g(1) = \dfrac{1}{e}$. Cette fonction g est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant g_n \leqslant 1$. Dans ces conditions, le théorème de convergence dominée donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = 0$.

Ceci étant vrai quelle que soit la suite $(x_n)_\mathbb{N}$ de limite infinie, il en résulte, d'après la caractérisation séquentielle des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 e^{-e^{x(1-t)}}\mathrm{d}t = 0$.

Niveau 3

Ex. 24

1) Posons $u_n(x) = \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ donc $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Remarquons que u_n est impaire et que pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \operatorname{Arctan} x \leqslant x$.
Pour tout $a > 0$, on a donc :

$$\forall x \in [-a, a],\quad |u_n(x)| \leqslant \operatorname{Arctan} \frac{a}{n^2} \leqslant \frac{a}{n^2} \quad \text{donc} \quad \|u_n\|_\infty^{[-a,a]} \leqslant \frac{a}{n^2}.$$

Ainsi $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-a, a]$. Puisqu'il s'agit d'une série de fonctions continues, cette convergence uniforme locale sur $\mathbb{R}$ donne que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) $R_n(2n) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2n}{4n^2+k^2}\right) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2n}{4n^2+k^2}\right) \geqslant n \operatorname{Arctan}\left(\frac{2n}{8n^2}\right)$ soit :

$$R_n(2n) \geqslant n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{4n}\right).$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{Arctan} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$, on a $\|R_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \geqslant \dfrac{1}{4}$, donc $\|R_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ ne tend pas vers 0 et la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

4) Par décroissance de $t \mapsto \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{x^2+t^2}$ ($x > 0$ fixé) il vient :

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Avec $\operatorname{Arctan} u \leqslant u$ pour $u > 0$, on en déduit $f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ **(1)**.

Sur $[0, +\infty[$, la fonction Arctan est concave donc, pour tout $u > 0$ et tout $v \in [0, u]$, on a $\operatorname{Arctan} v \geqslant \dfrac{v}{u} \operatorname{Arctan} u$.

Quand t décrit $[1, +\infty[$, $\dfrac{x}{x^2+t^2}$ décrit $\left]0, \dfrac{x}{x^2+1}\right] \subset \left]0, \dfrac{1}{x}\right]$ et sur cet intervalle $\left]0, \dfrac{1}{x}\right]$, on a :

$$\operatorname{Arctan} u \geqslant u\, x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad \forall t \in [1, +\infty[,\ \operatorname{Arctan} \frac{x}{x^2+t^2} \geqslant \frac{x^2}{x^2+t^2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}.$$

Il en résulte $f(x) \geqslant x \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right) \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ **(2)**.

Avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = 1$, les inégalités **(1)** et **(2)** donnent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
Puisque le théorème de la limite terme à terme ne s'applique pas, on retrouve que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Ex. 25

1) Posons $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\operatorname{ch} nx}$. Les u_n sont paires, on se limite donc à $x \geqslant 0$.

Pour $x > 0$, on a $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{e^{nx}}$ d'où la convergence de la série $\sum u_n(x)$.

Pour $x = 0$, $u_n(0) = (-1)^n$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n(0)$ diverge.

Finalement l'ensemble de définition D de f est $\mathbb{R}^*$.

2) Pour tout $a>0$, on a $\|u_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} na}$, la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement donc uniformément convergente sur tout intervalle $[a,+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Comme il s'agit d'une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après la parité, elle est également continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

3) Une simple vérification donne :

$$\forall x\in D,\ f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\operatorname{ch} nx} - \frac{1}{\operatorname{ch}(n+1)x}\right).$$

4) ▪ Convexité de $\varphi : x\mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

On calcule $\varphi'(x) = -\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\varphi''(x) = \dfrac{\operatorname{sh}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^3 x}$.

Donc en posant $\alpha = \operatorname{Argsh} 1 = \ell n\left(1+\sqrt{2}\right)$, on a $\forall x\in [0,\alpha[,\ \varphi''(x)<0$ et $\forall x \in]\alpha,+\infty[,\ \varphi''(x)>0$: φ est concave sur $[0,\alpha]$ et convexe sur $[\alpha,+\infty[$.

▪ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Posons $v_n = \dfrac{1}{\operatorname{ch} nx} - \dfrac{1}{\operatorname{ch}(n+1)x}$ et pour tout $x>0$, $n_x = E\left(\dfrac{\alpha}{2x} - \dfrac{1}{2}\right)$ (on a donc $2n_x + 1 \leqslant \dfrac{\alpha}{x}$).

La formule du 3) permet d'écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2n_x}(-1)^n v_n + \frac{1}{2}\sum_{n=2n_x+4}^{+\infty}(-1)^n v_n - \frac{1}{2}v_{2n_x+1} + \frac{1}{2}v_{2n_x+2} - \frac{1}{2}v_{2n_x+3}.$$

Pour tout $n\in [\![1,2n_x]\!]$, on a $0\leqslant (n-1)x<(n+1)x\leqslant \alpha$ donc la concavité de φ sur $[0,\alpha]$ donne :

$$v_{n-1} - v_n = \varphi\big((n-1)x\big) + \varphi\big((n+1)x\big) - 2\,\varphi(nx) \leqslant 0.$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{2n_x}(-1)^n v_n &= v_0 + \sum_{k=1}^{n_x}\big(v_{2k} - v_{2k-1}\big) \geqslant v_0 > 0\\ \text{et}\quad \sum_{n=0}^{2n_x}(-1)^n v_n &= \sum_{k=0}^{n_x-1}(v_{2k} - v_{2k+1}) + v_{2n_x} \leqslant v_{2n_x}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$0<\sum_{n=0}^{2n_x}(-1)^n v_n \leqslant v_{2n_x}.$$

De même, pour $n\geqslant 2n_x+4$, on a $\alpha\leqslant (n-1)x$ donc la convexité de φ sur $[\alpha,+\infty[$ donne $v_{n-1}-v_n\geqslant 0$ et alors, d'après le théorème des séries alternées, la somme $\displaystyle\sum_{n=2n_x+4}^{+\infty}(-1)^n v_n$ est du signe de son premier terme et majorée en valeur absolue par v_{2n_x+4}.

On en déduit :

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(v_{2n_x} + v_{2n_x+1} + v_{2n_x+2} + v_{2n_x+3} + v_{2n_x+4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} 2n_x x} - \frac{1}{\operatorname{ch}\left(2n_x+5\right)x}\right).$$

En remarquant que lorsque x tend vers 0, on a $E\left(\dfrac{\alpha}{2x} - 1\right)\sim\dfrac{\alpha}{2x}$, il vient $\lim\limits_{x\to 0} 2xn_x = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2xn_x+5x = \alpha$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(2xn_x\right)} - \dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(2xn_x+5\right)} = 0$ et finalement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Ex. 26

On peut supposer $z_0 = 0$ car on se ramène à ce cas en posant :

$$z = z_0 + u \ \text{ et } \ a_n' = a_n e^{-\lambda_n z_0}.$$

La suite de terme général $R_n = \sum_{i=n}^{+\infty} a_i$ converge vers 0 car la série $\sum a_n$ converge. En notant que $a_n = R_n - R_{n+1}$, et posant $S_{n,p}(z) = \sum_{i=n}^{n+p} a_i e^{-\lambda_i z}$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_{n,p}(z) &= \sum_{i=n}^{n+p} R_i e^{-\lambda_i z} - \sum_{i=n+1}^{n+p+1} R_i e^{-\lambda_{i-1} z} \\ &= \sum_{i=n}^{n+p} R_i \left(e^{-\lambda_i z} - e^{-\lambda_{i-1} z}\right) + R_n e^{-\lambda_{n-1} z} - R_{n+p+1} e^{-\lambda_{n+p} z} \end{aligned}$$

Pour $z \in D_\alpha$, on a $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $|\theta| < \alpha$.
Il vient alors :

$$\left|e^{-\lambda_n z}\right| = e^{-\lambda_n r \cos\theta} \leqslant 1$$

$$\left|e^{-\lambda_i z} - e^{-\lambda_{i-1} z}\right| = \left|z \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} e^{-tz} \mathrm{d}t\right| \leqslant r \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} e^{-tr\cos\theta} \mathrm{d}t$$

$$\left|e^{-\lambda_i z} - e^{-\lambda_{i-1} z}\right| \leqslant \frac{1}{\cos\theta}\left(e^{-\lambda_{i-1} r\cos\theta} - e^{-\lambda_i r\cos\theta}\right)$$

Notons $\rho_n = \sup_{i \geqslant n} |R_i|$ de sorte que $\lim_{n \to +\infty} \rho_n = 0$ et :

$$\begin{aligned} |S_{n,p}(z)| &\leqslant \rho_n \sum_{i=n}^{n+p} \frac{1}{\cos\theta}\left(e^{-\lambda_{i-1} r\cos\theta} - e^{-\lambda_i r\cos\theta}\right) + 2\rho_n \\ &\leqslant \rho_n \frac{e^{-\lambda_{n-1} r\cos\theta}}{\cos\theta} + 2\,\rho_n \leqslant \rho_n \left(2 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) \end{aligned}$$

Pour tout $z \in D_\alpha$ la série de terme général $a_n e^{-\lambda_n z}$ satisfait au critère de Cauchy, donc elle converge et son reste d'ordre n vérifie :

$$\left|\sum_{i=n}^{+\infty} a_i e^{-\lambda_i z}\right| \leqslant \rho_n \left(2 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$ sur D_α.

Ex. 27

1) Au besoin en remplaçant les f_n par $-f_n$ on peut supposer $(f_n)_{\mathbb{N}}$ croissante c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} \geqslant f_n$.

Posons $g_n = f - f_n$, $(g_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions positives continues sur I, convergeant simplement vers la fonction nulle.

Supposons la convergence non uniforme, alors $\|g_n\|_\infty^I \not\to 0$.

g_n étant continue, positive, sur I compact, il existe $x_n \in I$ tel que $g_n(x_n) = \|g_n\|_\infty^I$.

Puisque $\left(g_n(x_n)\right)_{\mathbb{N}}$ est positive et ne tend pas vers 0, il existe $a > 0$ et une suite extraite $\left(g_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)_{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, g_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \geqslant a$. La décroissance de $(g_n)_{\mathbb{N}}$ donne alors :

$$\text{pour tout } p \leqslant \varphi(n),\ \ g_p\left(x_{\varphi(n)}\right) \geqslant g_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \geqslant a > 0.$$

D'après Bolzano-Weierstrass, il existe une suite $\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$ extraite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{\mathbb{N}}$, convergeant vers $\ell \in [a, b]$.

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, si $p \leqslant n$, on a : $p \leqslant n \leqslant \psi(n) \leqslant \varphi \circ \psi(n)$, donc :

$$g_p\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \geqslant g_{\psi(n)}\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \geqslant g_{\varphi\circ\psi(n)}\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \geqslant a$$

puis $g_p(\ell) = g_p(\ell) - g_p\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) + g_p\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \geqslant a + g_p(\ell) - g_p\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$.

Puisque g_p est continue en $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi\circ\psi(n)}$, il existe $n_0 \geqslant p$ tel que $\left|g_p(\ell) - g_p\left(x_{\varphi\circ\psi(n_0)}\right)\right| \leqslant \dfrac{a}{2}$

donc $g_p(\ell) \geqslant a + g_p(\ell) - g_p\left(x_{\varphi\circ\psi(n_0)}\right) \geqslant \dfrac{a}{2} > 0$,

ce qui est incompatible avec $\lim\limits_{p\to+\infty} g_p(\ell) = 0$, d'où la conclusion.

2) Comme en 1), on peut supposer que les f_n sont croissantes et il en est de même pour f.
Alors I étant un intervalle compact, f est uniformément continue sur I :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \left(x, x'\right) \in [a, b]^2, \left|x - x'\right| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons une subdivision $\sigma = \left(x_0, \ldots x_p\right)$ de $[a, b]$ de pas inférieur à η : $|\sigma| < \eta$.
Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(x_i\right) = f\left(x_i\right)$ donne l'existence de $n_i \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{pour tout } n \geqslant n_i,\; \left|f_n\left(x_i\right) - f\left(x_i\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $N = \max\left\{n_0, n_1, \ldots, n_p\right\}$.
Pour tout $x \in I$, il existe $i \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $x \in \left[x_i, x_{i+1}\right]$, alors pour $n \geqslant N$, on a :

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= f_n(x) - f\left(x_{i+1}\right) + f\left(x_{i+1}\right) - f(x) \\ &\leqslant f_n\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_{i+1}\right) + f\left(x_{i+1}\right) - f(x) \leqslant \varepsilon \\ f(x) - f_n(x) &= f(x) - f\left(x_i\right) + f\left(x_i\right) - f_n(x) \\ &\leqslant f(x) - f\left(x_i\right) + f\left(x_i\right) - f_n\left(x_i\right) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Il en résulte $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$, et finalement $\|f - f_n\|_\infty^I \leqslant \varepsilon$, d'où la conclusion.

Ex. 28

1) Considérons pour x donné dans $[0, 1]$ la fonction :

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k e^{kt} x^k (1-x)^{n-k} = \left[x\, e^t + (1-x)\right]^n,$$

intéressante pour ses dérivées en 0 : $\quad \varphi^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k k^p x^k (1-x)^{n-k}$.

Ainsi $\quad B_n(1) = \varphi(0), \quad B_n(x) = \dfrac{\varphi'(0)}{n} \quad$ et $\quad B_n(x^2) = \dfrac{\varphi''(0)}{n^2}$.

Les dérivées de φ en 0 s'obtiennent par développement limité :

$$\varphi(t) = \left[1 + xt + \frac{1}{2}xt^2 + o\left(t^2\right)\right]^n = 1 + nxt + (nx + n(n-1)x^2)\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$$

ce qui donne directement les trois résultats :

$$B_n(1) = 1 \quad , \quad B_n(x) = x \quad , \quad B_n(x^2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

2) Le développement $\left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2 = \dfrac{k^2}{n^2} - 2\dfrac{k}{n}x + x^2$ donne :

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = B_n(x^2) - 2xB_n(x) + x^2 B_n(1) \\ g_n(x) &= \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

3) Pour établir la convergence uniforme de $\left(B_n(f)\right)_{\mathbb{N}}$ vers f, formons la différence :

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k (1-x)^{n-k}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuité de f sur $[0, 1]$ donne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, \quad |u - v| < \alpha \;\Rightarrow\; |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $x \in [0,1]$, considérons alors la partition de $[\![0,n]\!]$ formée de :

$$I_n = \left\{ k/ \left| \frac{k}{n} - x \right| < \alpha \right\} \quad , \quad J_n = \left\{ k/ \left| \frac{k}{n} - x \right| \geqslant \alpha \right\}.$$

On a ainsi $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k \in I_n} \mathrm{C}_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon \sum_{k \in I_n} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon.$

Pour majorer $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k \in J_n} \mathrm{C}_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}$, observons d'abord que :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant 2 \| f \|_\infty^{[0,1]}$$

et il vient :
$$v_n \leqslant 2 \| f \|_\infty^{[0,1]} \sum_{k \in J_n} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Remarquons ensuite que, pour $k \in J_n$, $\quad \left| \dfrac{k}{n} - x \right| \geqslant \alpha \quad$ soit $\quad 1 \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2}\left(\dfrac{k}{n} - x \right)^2$, et on obtient :

$$v_n \leqslant \frac{2 \| f \|_\infty^{[0,1]}}{\alpha^2} \sum_{k \in J_n} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{2 \| f \|_\infty^{[0,1]}}{\alpha^2} g_n(x)$$

d'où enfin $\quad v_n \leqslant \dfrac{2 \| f \|_\infty^{[0,1]}}{n\alpha^2} \displaystyle\sup_{x \in [0,1]} x(1-x) \quad$ soit $\quad v_n = \leqslant \dfrac{\| f \|_\infty^{[0,1]}}{2n\alpha^2}$.

Rassemblons ces deux majorations : $\quad |f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant u_n + v_n \leqslant \varepsilon + \dfrac{\| f \|_\infty^{[0,1]}}{2n\alpha^2}$.

Il est possible de choisir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_\varepsilon \ : \ \dfrac{\| f \|_\infty^{[0,1]}}{2n\alpha^2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour conclure à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_\varepsilon, \quad \| f - B_n(f) \|_\infty^{[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui traduit l'uniforme convergence sur $[0,1]$ de la suite de polynômes $\big(B_n(f)\big)_{\mathbb{N}}$ vers la fonction f.

Ex. 29

1) Posons $u_n \ : \ x \mapsto \dfrac{\sin n! x}{n!}$. On a $\| u_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n!}$ et la série converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$; sa fonction somme f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2) Avec $h = \dfrac{2\pi}{p!}$, il vient $u_n(x+h) - u_n(x) = \dfrac{2}{n!} \sin\left(\dfrac{\pi\, n!}{p!} \right) \cos\left(n! \left(x + \dfrac{\pi}{p!} \right) \right)$.

Pour $n \geqslant p$, on a $\dfrac{n!}{p!} \in \mathbb{N}$ donc $\sin\left(\pi \dfrac{n!}{p!} \right) = 0$ et :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{p!}{\pi\, n!} \sin\left(\pi \frac{n!}{p!} \right) \cos\left(n! \left(x + \frac{\pi}{p!} \right) \right).$$

3) Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$ donc $\left| \dfrac{\sin x}{x} - 1 \right| \leqslant \dfrac{x^2}{6}$, il vient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A_p \right| &\leqslant \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\pi^2\, (n!)^2}{6 (p!)^2} \left| \cos\left(n! \left(x + \frac{\pi}{p!} \right) \right) \right| \\ &\leqslant \frac{\pi^2}{6} p \left(\frac{(p-1)!}{p!} \right)^2 = \frac{\pi^2}{6p}. \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A_p \right) = 0$ et $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ a une limite réelle quand $h \to 0$ (c'est-à-dire quand $p \to +\infty$) si et seulement si A_p en a une.

4) $A''_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} \sin(n!x)\sin\left(n!\frac{\pi}{p!}\right)$. De $|\sin x| \leqslant |x|$ on déduit :

$$\left|A''_p\right| \leqslant \frac{\pi}{p!}\sum_{n=0}^{p-1} n! = \pi\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} + \dots + \frac{1}{p!}\right)$$

$$\left|A''_p\right| \leqslant \pi\left(\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p(p-1)}\right) = \frac{2\pi}{p} \text{ donc } \lim_{p\to+\infty} A''_p = 0$$

$$A'_p = \sum_{n=0}^{p-1} \cos(n!x)\cos\left(n!\frac{\pi}{p!}\right) \quad , \quad B_p = \sum_{n=0}^{p-1}\cos(n!x).$$

Sachant que $|\cos x - 1| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$, on obtient $\left|A'_p - B_p\right| \leqslant \dfrac{\pi^2}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(n!)^2}{(p!)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{2p}$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(A'_p - B_p\right) = 0$ et A'_p a une limite réelle quand $p \to +\infty$ si et seulement si B_p en a une.

5) Avec $A_p = A'_p - A''_p$, il résulte de 3) et 4) que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=0}^{p-1}\cos(n!x)$ existe c'est-à-dire si et seulement si la série de terme général $v_n = \cos(n!x)$ converge.

Sachant que $\cos(n!x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, la série $\sum v_n$ diverge en tout point de $\mathbb{R}$ et $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a pas de limite. Ainsi f n'est pas dérivable en x et ceci quel que soit $x \in \mathbb{R}$!

Ex. 30

On pose $u_n(x) = \ell n\left(1 - e^{-nx}\right)$.

1) $D = \mathbb{R}_+^*$.

2) La série converge normalement sur toute demi-droite $[a, +\infty[$, $a > 0$, donc aussi sur tout intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

3) ▪ Limite et équivalent en $+\infty$

La convergence étant uniforme sur $[1, +\infty[$, le théorème de la limite terme à terme donne :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim u_n(x) = 0.$$

On montre que pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $|\ell n(1-x) + x| \leqslant x^2$. Il en résulte pour $n \geqslant 1$ et pour $x \geqslant \ell n\, 2$,

$$\left|\ell n\left(1 - e^{-nx}\right) + e^{-nx}\right| \leqslant e^{-2nx} \quad \text{d'où en sommant} \quad \left|f(x) + \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right| \leqslant \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}},$$

puis $f(x) + \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = o\left(e^{-x}\right)$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.

▪ Limite et équivalent en 0

$\ell n\left(1 - e^{-nx}\right) \leqslant -e^{-nx}$ donne $f(x) \leqslant -\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Soit $x > 0$ fixé. La fonction $t \mapsto \ell n\left(1 - e^{-tx}\right)$ étant croissante et intégrable sur $]0, +\infty[$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\ell n\left(1 - e^{-tx}\right)\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty}\ell n\left(1 - e^{-tx}\right)\mathrm{d}t - \int_0^1 \ell n\left(1 - e^{-tx}\right)\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable défini par $u = 1 - e^{-tx}$ donne :

$$\int_0^{+\infty}\ell n\left(1 - e^{-tx}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\ell n\, u}{1-u}\mathrm{d}u,$$

de même $\displaystyle\int_0^1 \ell n\left(1 - e^{-tx}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{1-e^{-x}}\frac{\ell n\, u}{1-u}\mathrm{d}u = o\left(\frac{1}{x}\right)$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^{1-e^{-x}}\frac{\ell n\, u}{1-u}\mathrm{d}u = 0.$

En conclusion : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{A}{x}$ avec $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ell n\, u}{1-u}\mathrm{d}u$.

Pour une deuxième lecture

Avec $\forall u \in]0,1[,\ \dfrac{\ell n\, u}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\, \ell n\, u$ et la convergence de la série de terme général :

$$\int_0^1 u^n\, \ell n\, u \mathrm{d}u = -\frac{1}{(n+1)^2},$$

le théorème de convergence dominée pour les séries (cf. chapitre 6) donne :

$$A = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} \quad \text{et donc} \quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{6x}.$$

Ex. 31

Pour tout n, on a $a_n = |z_n|$ où z_n est une racine du polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

Si $|z_n|$ ne tend pas vers $+\infty$, on peut extraire de $\big(|z_n|\big)_{\mathbb{N}}$ une suite bornée puis, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de cette suite bornée une suite $\big(z_{\varphi(n)}\big)_{\mathbb{N}}$ convergente. Posons $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_{\varphi(n)}$.

Par construction, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|z_{\varphi(n)}\right| \leqslant a$.

La série de fonctions (en fait série entière) de terme général $z \mapsto \dfrac{z^n}{n!}$ étant normalement convergente sur le disque compact $D_a = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leqslant a\}$, en notant R_n le reste d'ordre n de cette série, la majoration :

$$\left|e^{\ell} - \sum_{k=0}^{\varphi(n)} \frac{z_{\varphi(n)}^k}{k!}\right| \leqslant \left|e^{\ell} - e^{z_{\varphi(n)}}\right| + \left|\sum_{k=\varphi(n)+1}^{+\infty} \frac{z_{\varphi(n)}^k}{k!}\right| \leqslant \left|e^{\ell} - e^{z_{\varphi(n)}}\right| + \| R_{\varphi(n)} \|_{\infty}^{D_a} \text{ donne : } \lim_{n\to+\infty} e^{\ell} - P_{\varphi(n)}\big(z_{\varphi(n)}\big) = 0.$$

Puisque, par définition, $P_{\varphi(n)}\big(z_{\varphi(n)}\big) = 0$ pour tout n, on obtient finalement $e^{\ell} = 0$ ce qui est à rejeter.

Ex. 32

Nous allons utiliser le deuxième théorème de Weierstrass.

On commence par vérifier que la propriété est vraie pour $f_p\ :\ x \mapsto e^{2i\pi p x},\ (p \in \mathbb{Z})$.

Puisque $\lambda \notin \mathbb{Q}$, pour $p \neq 0$ on a $e^{2ip\pi\lambda} \neq 1$ et le calcul de $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi k\lambda}$ donne :

$$|u_n| \leqslant \frac{2}{n\,|\sin p\,\pi\,\lambda|} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 = \int_0^1 f_p.$$

Si $p = 0$, on a $u_n = 1 = \displaystyle\int_0^1 f_0$.

Par linéarité, on en déduit que la propriété reste vraie pour tout polynôme trigonométrique 1-périodique :

$$f\ : x \mapsto \sum_{p=u}^{p=v} a_p e^{2ip\pi x}, \quad (u,v) \in \mathbb{Z}^2.$$

La fonction f, continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique, est limite uniforme d'une suite $\big(P_q\big)_{\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques 1-périodiques.

Avec $u_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k\lambda)$, on obtient pour tout q la majoration :

$$\left|u_n(f) - \int_0^1 f\right| \leqslant 2\| f - P_q \|_{\infty}^{\mathbb{R}} + \left|u_n\big(P_q\big) - \int_0^1 P_q\right|.$$

Pour conclure, à $\varepsilon > 0$ on associe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\| f - P_q \|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$ et on utilise que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|u_n\big(P_q\big) - \int_0^1 P_q\right| = 0$.

CHAPITRE

4

Dérivation Intégration sur un segment

E, F et G sont des espaces vectoriels normés de dimensions finies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A. Dérivation des fonctions vectorielles

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point donc tel que $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$.

1. Dérivation

Les notions de dérivabilité et de dérivée sont usuelles au niveau des fonctions réelles ou complexes. On se propose dans cette section de les étendre aux fonctions vectorielles.
Certaines propriétés sont données sans démonstration (ou avec une justification succincte) car celles-ci sont pratiquement identiques à celles qui ont été données en première année dans le cadre des fonctions numériques.

1.1 – Dérivation

Définition 1

On dit que $f : I \to E$ est **dérivable au point** $a \in I$ si l'application :

$$I \setminus \{a\} \to E, x \mapsto \frac{1}{x-a}\left[f(x) - f(a)\right]$$

admet une limite en a suivant $I \setminus \{a\}$.
En cas d'existence, cette limite s'appelle la **dérivée de** f **en** a, on la note $f'(a)$.

Définition 2

On dit que $f : I \to E$ est **dérivable à droite (resp. dérivable à gauche) au point** $a \in I$ si l'intervalle $I'_a = I \cap [a, +\infty[$ (resp. $I''_a = I \cap]-\infty, a]$) n'est pas réduit à $\{a\}$ et si la restriction de f à I'_a (resp. I''_a) est dérivable en a.

Si elle existe, une telle dérivée s'appelle **dérivée à droite (resp. dérivée à gauche) de f en a**, on la note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Chacune des notions concernées par les définitions 1, 2 et 3 est indépendante de la norme choisie dans E.
En effet, cet espace étant de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes ce qui fait que l'existence et la valeur d'une limite ne dépendent pas de la norme choisie.

Définition 3

On dit que $f : I \to E$ est **dérivable (resp. dérivable à droite), (resp. dérivable à gauche)** sur I si f est (resp. dérivable à droite), (resp. dérivable à gauche) en tout point de I.
On définit alors **l'application dérivée** de f, notée f' par :

$$f' : I \to E, x \mapsto f'(x).$$

On définit de façon analogue les applications f'_d : dérivée à droite, f'_g : dérivée à gauche.

✎ (1) Il suffit de remarquer que l'on a les mêmes équivalences pour l'existence de la limite en a d'une fonction et de la restriction correspondante.

Propriété 1

Caractère local de la dérivabilité ✎ (1)

- Si a n'est pas une borne de I, pour tout $(c, d) \in I^2$ tel que $c < a < d$, on a :
$$f \text{ est dérivable en } a \iff f|_{[c,d]} \text{ est dérivable en } a.$$
- Si $a = \inf I$, pour tout $c \in I \setminus \{a\}$, on a :
$$f \text{ est dérivable en } a \iff f|_{[a,c]} \text{ est dérivable en } a.$$
- Si $a = \sup I$, pour tout $c \in I \setminus \{a\}$, on a :
$$f \text{ est dérivable en } a \iff f|_{[a,c]} \text{ est dérivable en } a.$$

Propriété 2

Si $a \in I$ n'est pas une borne de I, $f : I \to E$ est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$ et dans ce cas on a :

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

(2) La propriété est connue pour les fonctions numériques. En examinant les composantes, on voit qu'elle reste vraie pour les fonctions vectorielles.

En effet, on sait que $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite ℓ en a si et seulement si elle admet une limite à gauche ℓ_g et une limite à droite ℓ_d en ce point avec $\ell_g = \ell_d$, (2) et dans ce cas : $\ell = \ell_g = \ell_d$.

(3) Il suffit de remarquer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ se traduit par : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell + o(1)$.

Propriété 3

La dérivabilité de $f : I \to E$ en $a \in I$ se traduit aussi par :

il existe $\ell \in E$ tel que $f(a+h) = f(a) + h\,\ell + o(h)$ quand h tend vers 0. (3)

(4) Corollaire immédiat de la propriété 3.

Propriété 4

La dérivabilité en un point (resp. sur I) entraîne la continuité en ce point (resp. sur I). (4)

Propriété 5

L'ensemble $\mathcal{D}(I,E)$ des applications dérivables de I dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,E)$. L'application «dérivation » : $\mathcal{D}(I,E) \to \mathcal{F}(I,E)$, $f \mapsto f'$ est linéaire.
(5)

(5) Démonstration identique à celle donnée en Analyse-MPSI pour les fonctions numériques.

Propriété 6

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $f : I \to E$ et $g = u \circ f : I \to E$.
Si f est dérivable en $a \in I$ (resp. sur I) alors g est dérivable en a (resp. sur I) avec :

$$g'(a) = u\big(f'(a)\big) \quad (\text{resp. } g' = u \circ f').$$

(6) Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue (cf. chapitre 1).

u étant continue, (6) si $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, on a $\lim\limits_{h\to 0} u\big(\varepsilon(h)\big) = 0$ donc $u\big(o(h)\big) = o(h)$.

Alors $g(a+h) - g(a) = u\big(hf'(a) + o(h)\big) = hu\big(f'(a)\big) + o(h)$.

Propriété 7

Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, $f : I \to E$, $g : I \to F$ et $B(f,g)$ l'application de I dans G définie par $B(f,g) : x \mapsto B\big(f(x), g(x)\big)$.
Si f et g sont dérivables en $a \in I$ (resp. sur I) alors $B(f,g)$ est dérivable en a (resp. sur I) avec :

$$B(f,g)'(a) = B\big(f'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), g'(a)\big) \quad (\text{resp. } B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')).$$

$B(f,g)(a+h) = B\big[f(a) + hf'(a) + o(h), g(a) + hg'(a) + o(h)\big]$
en développant par bilinéarité, compte tenu de la continuité de B, il vient :

$$B(f,g)(a+h) - B(f,g)(a) = h\,B\big(f'(a), g(a)\big) + h\,B\big(f(a), g'(a)\big) + o(h).$$

Exemples

- Le produit usuel : $E = F = G = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $B : (x,y) \mapsto xy$
$$(fg)' = f'g + fg'$$
- Le produit scalaire : $E = F$ espace euclidien (resp. hermitien), $G = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), $B : (x,y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$.
$$\langle f \mid g \rangle' = \langle f' \mid g \rangle + \langle f \mid g' \rangle$$
$$\left(\|f\|^2\right)' = 2\langle f' \mid f \rangle \quad (\text{resp. } \langle f' \mid f \rangle + \langle f \mid f' \rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\langle f' \mid f \rangle).$$
On en déduit que si $f \in \mathcal{D}(I,E)$ est unitaire c'est-à-dire si $\forall x \in I, \|f(x)\| = 1$ alors :
$$\forall x \in I,\ f'(x) \text{ est orthogonal à } f(x).$$

Propriété 8

Soit $p = \dim E$ et $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une base de E.

Si $f \in \mathcal{F}(I, E)$ est donnée par $x \mapsto f(x) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x) e_j$, alors f est dérivable en a (resp. sur I) si et seulement si toutes les applications coordonnées $f_1, \dots, f_p$ le sont et dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{p} f_j'(a) e_j .$$

✎(7)

✎(7) C'est une conséquence de la propriété analogue sur les limites de fonctions vectorielles.
Dans le cas particulier où $E = \mathbb{C}$, avec $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, f est dérivable en a (resp. sur I) si et seulement si u et v le sont. et alors $f'(a) = u'(a) + iv'(a)$ (resp. $f' = u' + iv'$).

Propriété 9

Soit $f : I \to E$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

Alors f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ (sur $\overset{\circ}{I}$).

☞ Le résultat analogue est connu pour les fonctions réelles. On l'applique donc à $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ pour l'étendre aux fonctions complexes puis aux composantes pour l'étendre aux fonctions vectorielles.

Propriété 10

Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $\varphi(I) \subset J$ et $f \in \mathcal{D}(J, E)$.
Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I avec :

$$(f \circ \varphi)' = \left(f' \circ \varphi\right)\varphi' .$$

☞ Le résultat est connu dans le cas $E = \mathbb{R}$. En examinant les fonctions composantes, on l'étend successivement au cas $E = \mathbb{C}$ puis à E quelconque.

2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

Définition 4

Comme dans le cas des fonctions réelles, pour $f : I \to E$, on définit par récurrence les dérivées successives à partir de : $f^{(0)} = f$ dérivée d'ordre 0. Elles sont notées $f^{(p)}$ ou $\mathcal{D}^p f$.
On note $\mathcal{D}^n(I, E)$ l'ensemble des applications de I dans E n fois dérivables.

Définition 5

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to E$, on dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^p$ si $f \in \mathcal{D}^p(I, E)$ et si $f^{(p)} : I \to E$ est continue.
On note $\mathcal{C}^p(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^p$ de I dans E. ✎(8)
On dit que $f : I \to E$ est de **classe** $\mathcal{C}^\infty$ si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^p$.

✎(8) D'après la relation de définition $f^{(0)} = f$, la continuité de f correspond à la classe $\mathcal{C}^0$. De ce fait, $\mathcal{C}(I,E)$ est aussi noté $\mathcal{C}^0(I,E)$.

Définition 6

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
On dit que f est un $\mathcal{C}^p$**-difféomorphisme** de I sur J lorsque :

(1) f est un homéomorphisme de I sur J,

(2) f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,

(3) f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^p$ sur J.

La notion d'homéomorphisme a été introduite en Analyse – MPSI, chapitre 5 et revue dans le chapitre 1 de ce tome.

Propriété 11

Soit $n = \dim E$, $\left(e_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une base de E et $f \in \mathcal{F}(I, E)$ définie par ses composantes $f_1, \ldots, f_p$ sur cette base.
Alors, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I si et seulement si chaque f_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, est de classe $\mathcal{C}^p$, et dans ces conditions :

$$\forall x \in I,\quad f^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(p)}(x) e_i\,.$$

Propriété 12

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}^p(I, E)$ et $\mathcal{C}^p(I, E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(I, E)$.

Dans le cas où $E = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Propriété 13

Formule de Leibniz

Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, et $p \in \mathbb{N}^*$.
Si $f \in \mathcal{C}^p(I, E)$ et $g \in \mathcal{C}^p(I, F)$, alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^p(I, G)$ et, pour $0 \leqslant n \leqslant p$:

$$B(f, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, B\left(f^{(n-k)}, g^{(k)}\right).$$ ✎[9]

✎[9] Démonstration analogue à celle donnée en première année pour les produits de fonctions réelles. Voir MPSI – Analyse, chapitre 6, théorème 17.

Propriété 14

Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^p(I, J)$ et $f \in \mathcal{C}^p(J, E)$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

☞ La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$ d'après la propriété 10, on achève par récurrence en constatant que :

$$(f \circ \varphi)^{(p)} = \left[(f \circ \varphi)'\right]^{(p-1)} \quad \text{et} \quad (f \circ \varphi)' = \left(f' \circ \varphi\right)\varphi'.$$ ✎[10]

✎[10] On pourrait aussi utiliser que la propriété est connue pour les fonctions composantes.

Propriété 15

Caractérisation des $\mathcal{C}^p$-difféomorphismes, $p \in \mathbb{N}^*$

Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, une application f de I dans J est un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de I sur J si et seulement si :

(1) f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,

(2) $f(I) = J$,

(3) $\forall x \in I,\quad f'(x) \neq 0$.

☞
- La dérivablilité des fonctions réciproques a été étudiée en Analyse – MPSI, chapitre 6, et d'après cette étude si f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ on a $0 \notin f'(I)$: les conditions **(1)**, **(2)**, **(3)** sont nécessaires.
- Réciproquement, si f vérifie **(1)**, **(2)**, **(3)** :

f' est continue et ne s'annule pas sur I, elle est donc de signe constant, f est strictement monotone, c'est un homéomorphisme de I sur $J = f(I)$. Il reste à montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^p$ ce que l'on obtient par récurrence en notant :

1) que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J avec $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$,

2) que $\left(f^{-1}\right)' = i \circ f' \circ f^{-1}$, où i est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $f'(I) \subset \mathbb{R}^*$, donc en supposant la propriété vraie pour $p-1$, $\left(f^{-1}\right)'$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ puisqu'elle apparaît comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^{p-1}$. Ainsi f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^p$ ce qui achève la récurrence.

3. Fonctions de classe C^p par morceaux

(11) Pour $p=0$, on retrouve la notion de fonction **continue par morceaux**.

Définition 7

Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. (11)

a) Une application $f : [a,b] \to E$, (a et b réels, $a < b$) est dite de **classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\left(a_0, a_1, \dots, a_n\right)$ de $[a,b]$ telle que la restriction $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ de f à chaque intervalle $\left]a_i, a_{i+1}\right[$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\left[a_i, a_{i+1}\right]$.

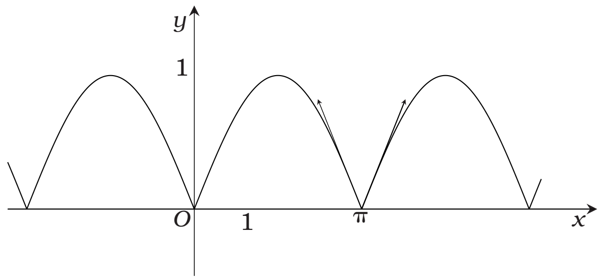
Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.

b) Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Une application $f : I \to E$ est dite de **classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux** sur I si sa restriction à tout segment $[a,b] \subset I$ est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $[a,b]$.

Exemples

- La fonction partie entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.



Définition 8

Si $f : [a,b] \to E$ est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $[a,b]$, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de f sont définies sur $[a,b]$ privé d'une partie finie, on les note encore $f^{(p)}$ ou $\mathcal{D}^p f$.

(12) Dans le cas $p=0$, on note aussi $\mathcal{M}(I,E)$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux de I dans E.

Propriété 16

Soit $p \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

L'ensemble noté $\mathcal{M}^p(I,E)$ (12) des applications de I dans E de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$.

Propriété 17

Si $f : I \to E$ est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, f est constante sur I si et seulement si $\mathcal{D}f = 0$.

☞ Si $\mathcal{D}f = 0$ soit $(x,y) \in I^2$, $x < y$.

Il existe une subdivision $\left(a_0, \dots, a_n\right)$ de $[x,y]$ telle que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $\left]a_i, a_{i+1}\right[$ et continue sur $\left[a_i, a_{i+1}\right]$.

Alors d'après la propriété **9**, f est constante sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ et finalement $f(x) = f(y)$.

B. Intégration sur un segment

Dans cette section, on se propose également d'étendre aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé E des notions introduites en MPSI et relatives aux fonctions numériques.

1. Intégrale d'une fonction en escalier

L'intégrale d'une fonction en escalier vectorielle se définit comme dans le cas des fonctions numériques, les propriétés sont les mêmes.

Définition 9

Soit $[a, b]$, $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{E}([a, b], E)$. ✎(13)

Si $\sigma = (c_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, on pose :

$$I(f, \sigma) = \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{j-1})\lambda_j$$

où λ_j est la valeur constante prise par f sur $]c_{j-1}, c_j[$.

Ce vecteur est indépendant du choix de la subdivision adaptée à f, on l'appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ et on le note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

✎(13) $\mathscr{E}([a,b],E)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans E. (Cf. chapitre 3, définition 13.)

a et b sont des réels tels que a < b.

Propriété 18

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de E.

Une application $f : [a, b] \to E$ est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si chacune de ses composantes f_i sur la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est en escalier sur $[a, b]$.

On a alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \sum_{i=1}^{p} f_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{[a,b]} f_i \right) e_i$.

Propriété 19

L'application $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ qui, à une fonction $f \in \mathscr{E}([a, b], E)$, associe son intégrale, est linéaire.

Propriété 20

Si f est en escalier $[a, b]$: $f \in \mathscr{E}([a, b], E)$, pour tout $c \in]a, b[$ les restrictions $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

En notant $\displaystyle\int_{[a,c]} f$ au lieu de $\displaystyle\int_{[a,c]} f_{|[a,c]}$ et $\displaystyle\int_{[c,b]} f$ au lieu de $\displaystyle\int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$, on a :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Propriété 21

Soit $f \in \mathscr{E}([a, b])$ et $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur E. Alors :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|.$$

2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

2.1 – Définition

Théorème 1

Soit $I = [a,b]$, $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{M}([a,b],E)$ et $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications en escalier de I dans E convergeant uniformément vers f sur I. ✎(14)

Alors la suite $\left(\int_I \varphi_n\right) \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite ne dépend que de f, on la note :

$$\mathcal{I}([a,b],f).$$

✎(14) On a vu dans le chapitre 3 que toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions en escalier.

☞ Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a $\left\|\int_I \varphi_n - \int_I \varphi_p\right\| = \left\|\int_I \varphi_n - \varphi_p\right\| \leqslant \left|\int_I \|\ \varphi_n - \varphi_p\ \|_\infty^I\right|$

donc $$\left\|\int_I \varphi_n - \int_I \varphi_p\right\| \leqslant |b-a|\ \|\varphi_n - \varphi_p\|_\infty^I.$$ ✎(15)

✎(15) On utilise là les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier.

$\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{B}_\infty([a,b],E)$, c'est donc une suite de Cauchy et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant p \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \|\varphi_n - \varphi_p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{|b-a|}.$$

Ainsi $n \geqslant p \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \left\|\int_I \varphi_n - \int_I \varphi_p\right\| < \varepsilon$. On a montré que $\left(\int_I \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, elle est donc convergente puisque E est complet car de dimension finie.

Si $\left(\psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une seconde suite de $\mathcal{E}\left([a,b],E\right)$ convergeant uniformément vers f, la suite $(\varphi_n - \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

Or, $\left\|\int_I \varphi_n - \int_I \psi_n\right\| = \left\|\int_I \varphi_n - \psi_n\right\| \leqslant |b-a|\ \|\varphi_n - \psi_n\|_\infty^I$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I \psi_n.$$

Propriété 22

a et b étant fixés, l'application $\mathcal{I}\ :\ \mathcal{M}\left([a,b],E\right) \to E,\ f \mapsto \mathcal{I}\left([a,b],f\right)$ définie dans le théorème 1, coïncide sur $\mathcal{E}\left([a,b],E\right)$ avec l'application intégrale sur $[a,b]$.

On dit aussi que $\mathcal{I}$ prolonge l'application $\mathcal{E}\left([a,b],E\right) \to E, \varphi \mapsto \int_I \varphi$.

☞ Soit $\varphi \in \mathcal{E}\left([a,b],E\right)$, φ est limite uniforme sur $[a,b]$ de la suite constante $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n = \varphi$.

Alors $\mathcal{I}\left([a,b],\varphi\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_I \varphi_n$ donne $\mathcal{I}\left([a,b],\varphi\right) = \int_I \varphi$.

Définition 10

Pour tout $f \in \mathcal{M}\left([a,b],E\right)$, l'élément $\mathcal{I}\left([a,b],f\right)$ de E qui lui est associé est appelé **intégrale** de f sur $[a,b]$ et noté :

$$\int_I f \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b]} f.$$ ✎(16)

✎(16) Pour que cette construction soit cohérente, on s'assure que si f est une fonction numérique, $\mathcal{I}([a,b],f)$ est bien égal à l'intégrale $\int_I f$ telle qu'elle a été définie en MPSI.

2.2 – Propriétés

✎[17] **Étant donnés a et b réels tels que a < b, on pose I = [a, b].**

✎[17] Les propriétés spécifiques aux intégrales de fonctions numériques, ont été étudiées en Analyse – MPSI et sont rappelées ici sans aucune démonstration.

Propriété 23

E étant rapporté à une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$ de fonctions composantes f_i, $1 \leqslant i \leqslant p$: $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e_i$.

Alors $\forall i \in [\![1, p]\!],\ f_i \in \mathcal{M}(I, \mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et :

$$\int_I f = \int_I \sum_{i=1}^{p} f_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_I f_i \right) e_i .$$

☞ Si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{E}(I, E)$ convergeant uniformément vers f, notons pour tout n :

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{p} \varphi_{i,n} e_i .$$

Choisissons dans E la norme définie par : $\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, $\|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$,

il vient alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\|\varphi_{i,n} - f_i\|_\infty^I \leqslant \|\varphi_n - f\|_\infty^I$ donc chaque suite $(\varphi_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, converge uniformément vers f_i. ✎[18]

Pour les fonctions en escalier, on a :

$$\int_I \varphi_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_I \varphi_{i,n} \right) e_i$$

d'où la conclusion par passage à la limite.

✎[18] Ce résultat ne dépend pas du choix fait pour la norme sur E puisque toutes les normes sur E sont équivalentes.

Conséquence

Les propriétés 24, 26 et 27 qui suivent peuvent se prouver de deux façons :

1) on utilise le fait que les fonctions en escalier vérifient cette propriété et on conclut par passage à la limite ; ✎[19]
2) on utilise la propriété 22 et le fait que les fonctions composantes vérifient la même propriété.

✎[19] C'est cette méthode que nous allons retenir.

Propriété 24

Linéarité de l'intégrale

L'application $\mathcal{I} : \mathcal{M}(I, E) \to E,\ f \mapsto \int_I f$ est linéaire.

☞ Soit $(f, g) \in \mathcal{M}(I, E)^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Si $(\varphi_n)_{\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{\mathbb{N}}$ sont deux suites de fonctions en escalier convergeant uniformément sur I vers f et g respectivement, $(\lambda\,\varphi_n + \mu\,\psi_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

La relation $\int_I \lambda\,\varphi_n + \mu\,\psi_n = \lambda \int_I \varphi_n + \mu \int_I \psi_n$ donne alors $\int_I \lambda f + \mu g = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$ par passage à la limite.

Corollaire 1

Soit f et g deux applications de I dans E continues par morceaux sur I et coïncidant, sauf sur une partie finie de I.

On a alors $\int_I f = \int_I g$.

☞ En effet, $\int_I f - \int_I g = \int_I (f - g)$, et $f - g$ est en escalier, nulle sur les intervalles ouverts d'une subdivision adaptée donc $\int_I (f - g) = 0$.

Corollaire 2

Soit f une fonction de I dans E définie sur I sauf peut-être aux points d'une subdivision $\sigma = \left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)$ de I et telle que la restriction de f à chaque sous-intervalle $\left]a_i, a_{i+1}\right[$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, soit prolongeable en une fonction continue sur $\left[a_i, a_{i+1}\right]$.

Alors toutes les fonctions continues par morceaux sur I et coïncidant avec f sur $I \setminus \left\{a_0, a_1, \ldots, a_n\right\}$ ont la même intégrale sur I.

On pose par définition $\displaystyle\int_I f = \int_I g$ où g est l'une quelconque de ces fonctions.

Propriété 25

Positivité – Croissance ✎[20]

✎[20] Voir Analyse – MPSI.

- Si $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})$ est positive sur I alors : $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$.
- L'application $\displaystyle\int_I : \mathcal{M}(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_I f$ est croissante, c'est-à-dire que pour tout $(f, g) \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})^2$, on a :

$$f \leqslant g \ \Rightarrow\ \int_I f \leqslant \int_I g.$$

Propriété 26

Intégrale sur un sous-intervalle

Soit $K = [c, d]$, $(c < d)$, un segment inclus dans $I = [a, b]$ et $f \in \mathcal{M}(I, E)$. Alors la restriction $f_{|K}$ est continue par morceaux sur K, et l'intégrale $\displaystyle\int_K f_{|K}$ est encore notée $\displaystyle\int_K f$.

En appelant χ_K la fonction caractéristique de K, ✎[21] on a :

$$\int_K f = \int_I \chi_K f.$$

✎[21] Rappelons que χ_K est définie par : $\chi_K(x) = 1$ si $x \in K$ et, $\chi_K(x) = 0$ si $x \notin K$.

☞ Si $\left(\varphi_n\right)_{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier uniformément convergente vers f sur I, la suite $\left(\psi_n\right)_{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \psi_n = \varphi_n|_K$ converge uniformément vers $f|_K$ sur K ✎[22] donc $\displaystyle\int_K f = \lim_{n\to+\infty} \int_K \psi_n$.

✎[22] car il est clair que $\| \psi_n - f|_K \|_\infty^K \leqslant \| \varphi_n - f \|_\infty^I$.

En remarquant que pour les fonctions en escalier on a $\displaystyle\int_K \psi_n = \int_I \chi_K \varphi_n$ et que la suite $(\chi_K \varphi_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\chi_K f$ sur I, un passage à la limite donne :

$$\int_K f = \lim_{n\to+\infty} \int_I \chi_K \varphi_n = \int_I \chi_K f.$$

Propriété 27

Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration

Soit c réel tel que $a < c < b$ et $f \in \mathcal{M}\big([a, b], E\big)$. Alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

☞ Soit $g = \chi_{[a,c]} f + \chi_{[c,b]} f$. Les fonctions f et g coïncident sur $[a, b] \setminus \{c\}$ ✎[23] donc, d'après le corollaire 1 de la propriété 24, on a $\displaystyle\int_I f = \int_I g$ d'où par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_I f = \int_I \chi_{[a,c]} f + \int_I \chi_{[c,b]} f$, puis avec la propriété 26 $\displaystyle\int_I f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

✎[23] $g(c) = 2f(c)$.

✎(24) Il s'agit là d'un résultat établi en Analyse – MPSI que nous rappelons ici vu son importance dans les notions de norme en moyenne et en moyenne quadratique.

Propriété 28

Intégrale d'une fonction continue positive ✎(24)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et positive sur $I = [a, b]$.

- Si $f \neq 0$ alors $\int_I f > 0$.
- Si $\int_I f = 0$ alors $f = 0$.

Propriété 29

Image par une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $u \circ f \in \mathcal{M}(I, F)$ et :

$$\int_I u \circ f = u\left(\int_I f\right).$$

☞ La propriété est vraie lorsque f est en escalier.

En effet, on a alors $\int_I f = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j - c_{j-1}\right) \lambda_j$ ✎(25) et par linéarité de u :

✎(25) $\left(c_j\right)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ étant une subdivision adaptée à f.

$$\int_I u \circ f = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j - c_{j-1}\right) u\left(\lambda_j\right) = u\left(\sum_{j=1}^{n} \left(c_j - c_{j-1}\right) \lambda_j\right) = u\left(\int_I f\right).$$

Pour $f \in \mathcal{M}(I, E)$, f est limite uniforme d'une suite $\left(\varphi_k\right)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}(I, E)$. L'espace E étant de dimension finie, l'application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue et en posant $\lambda = \|u\|$ on a $\forall y \in E,\ \ \|u(y)\| \leqslant \lambda \|y\|$. ✎(26)

✎(26) $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ subordonnée aux normes choisies dans E et F. (Cf. chapitre 1.)

Alors l'inégalité : $\forall x \in I,\ \ \|u \circ f(x) - u \circ \varphi_k(x)\| \leqslant \lambda \|f(x) - \varphi_k(x)\| \leqslant \lambda \|f - \varphi_k\|_\infty^I$, montre que $u \circ f$ est limite uniforme sur I de $\left(u \circ \varphi_k\right)_{\mathbb{N}}$.

On en déduit :

$$\int_I u \circ f = \lim_{k \to +\infty} \left(\int_I u \circ \varphi_k\right) = \lim_{k \to +\infty} u\left(\int_I \varphi_k\right)$$

et, avec de nouveau la continuité de u :

$$\lim_{k \to +\infty} u\left(\int_I \varphi_k\right) = u\left(\lim_{k \to +\infty} \int_I \varphi_k\right) = u\left(\int_I f\right).$$

Exemples

Soit E un espace euclidien, v un vecteur fixé de E et $f \in \mathcal{M}(I, E)$.

La propriété 29 donne : $\int_I \langle v \mid f(x) \rangle \mathrm{d}x = \left\langle v \,\middle|\, \int_I f(x) \mathrm{d}x \right\rangle$.

Si E est orienté de dimension 3, on a de même $\int_I v \wedge f(x) \mathrm{d}x = v \wedge \int_I f(x) \mathrm{d}x$.

Propriété 30

Inégalité de la moyenne

Soit $\mathcal{M}(I, E)$. La norme sur E étant notée $\|\bullet\|$, on définit la fonction $\|f\| \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})$ par $\|f\| : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \|f(x)\|$. Alors :

$$\left\|\int_I f\right\| \leqslant \int_I \|f\|.$$

✎(27) C'est la propriété 21.

☞ La propriété est vraie pour une fonction en escalier. ✎(27)

Dans le cas général, f est limite uniforme d'une suite $\left(\varphi_k\right)_{\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur I, et l'inégalité :

$$\forall x \in I, \quad \Big|\|f(x)\| - \|\varphi_k(x)\|\Big| \leqslant \|f(x) - \varphi_k(x)\| \leqslant \|f - \varphi_k\|_\infty^I$$

montre que $\|f\|$ est limite uniforme de $\left(\|\varphi_k\|\right)_{\mathbb{N}}$ sur I.

La propriété annoncée résulte alors de $\forall k \in \mathbb{N}, \left\| \int_I \varphi_k \right\| \leqslant \int_I \| \varphi_k \|$

$$\lim_{k \to +\infty} \int_I \varphi_k = \int_I f \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} \int_I \| \varphi_k \| = \int_I \| f \|.$$

Remarque

Dans le cas où $E = \mathbb{C}$, en introduisant les parties réelles et imaginaires u et v de $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{C})$, on obtient $\left(\int_I u \right)^2 + \left(\int_I v \right)^2 \leqslant \left(\int_I \sqrt{u^2 + v^2} \right)^2$.

Corollaire 1

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$.

Alors f est bornée sur I et $\left\| \int_I f \right\| \leqslant |b - a| \; \| f \|_\infty^I$.

2.3 – Extension de la définition

I est maintenant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 11

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$, étant donné a et b dans I, on pose :

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t =$

- $\int_{[a,b]} f$ si $a < b$
- 0 si $a = b$
- $-\int_{[b,a]} f$ si $b < a$.

Propriété 31

Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et a, b, c des éléments de I. On a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 32

Inégalité de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et a, b des éléments de I.

On a $\left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| \leqslant \left| \int_a^b \| f(t) \| \mathrm{d}t \right| \leqslant |b - a| \sup_{t \in [a,b]} \| f(t) \|$.

Propriété 33

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Quels que soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathcal{M}\big([a, b], \mathbb{K}\big)^2$, ✎[28] on a :

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leqslant \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2.$$

✎[28] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

☞ La formule est invariante par échange de a et b, on peut donc supposer $a < b$. ✎[29]

- Premier cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2$.

Si $\int_a^b f^2 \neq 0$, l'application $\lambda \mapsto \int_a^b (\lambda f + g)^2$ est un polynôme réel de degré 2 et de signe constant. Son discriminant est donc négatif ou nul ce qui donne l'inégalité annoncée.

✎[29] Le cas $a = b$ est évident et sans intérêt.

Si $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0$, la même application est affine de signe constant donc $\displaystyle\int_a^b fg = 0$ et l'inégalité est encore vraie.

- Deuxième cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

L'inégalité est vraie pour les fonctions $|f|$ et $|g|$ d'où :

$$\left|\int_a^b fg\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |fg|\right)^2 \leqslant \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2.$$

2.4 – Sommes de Riemann

Étant donné $f \in \mathcal{M}\big([a,b],E\big)$, $a<b$, soit $\sigma = \big(x_k\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on choisit $c_k \in \big[x_k, x_{k+1}\big]$.

Définition 12

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\big(x_{k+1}-x_k\big)f\big(c_k\big)$ est appelée **somme de Riemann** relative à σ et à $\big(c_k\big)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

Théorème 2

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, quelle que soit la subdivision σ et quelle que soit la famille $\big(c_k\big)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ associée à cette subdivision, on a :

$$|\sigma| \leqslant \eta \quad\Rightarrow\quad \left\|\int_a^b f - \sum_{k=0}^{n-1}\big(x_{k+1}-x_k\big)f\big(c_k\big)\right\| < \varepsilon. \text{ ✎(30)}$$

☞ Limitons nous au cas où f est continue sur $[a,b]$. ✎(31)

Posons $R(\sigma)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\big(x_{k+1}-x_k\big)f\big(c_k\big)$, on a alors $\displaystyle\int_a^b f - R(\sigma)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\big(f(x)-f\big(c_k\big)\big)\mathrm{d}x$.

Par uniforme continuité de f sur $[a,b]$, à $\varepsilon > 0$, on peut associer $\eta > 0$ tel que, pour tout $\big(x,x'\big) \in [a,b]^2$, $\big|x-x'\big| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; \|f(x)-f\big(x'\big)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Alors si $|\sigma| \leqslant \eta$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $x \in \big[x_k, x_{k+1}\big]$, on a $|x-c_k| \leqslant \eta$ donc :

$$\|f(x)-f\big(c_k\big)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On en déduit $\displaystyle\left\|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\big(f(x)-f\big(c_k\big)\big)\mathrm{d}x\right\| \leqslant \frac{\varepsilon\,(x_{k+1}-x_k)}{b-a}$ puis $\displaystyle\left\|\int_a^b f - R(\sigma)\right\| \leqslant \varepsilon.$

✎(30) Le réel $|\sigma| = \displaystyle\sup_{0\leqslant k\leqslant n-1}|x_{k+1}-x_k|$, est appelé le **pas** de la subdivision σ.
On interprète ce résultat en disant que $\displaystyle\int_a^b f$ est la limite, quand $|\sigma|$ tend vers 0, des sommes de Riemann $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\big(c_k\big)$.

✎(31) Nous admettons ce résultat lorsque f est seulement continue par morceaux.

Remarque

Ce résultat reste vrai dans le cas $a > b$, avec $\sigma = (x_n)_{0\leqslant k\leqslant n}$ subdivision décroissante de $[a,b]$.

Conséquence

Si σ est une subdivision régulière, on retrouve, dans le cas cas des fonctions vectorielles continues par morceaux, les limites classiques :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\big(c_k\big) = \int_a^b f.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f \quad,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f.$$

C. Dérivation et intégration

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point : $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$.
Les fonctions étudiées dans cette section sont définies sur I et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie : E.

1. Primitives

Définition 13

Soit f une application de I dans E : $f \in \mathcal{F}(I, E)$.
Une primitive de f sur I est une application $g \in \mathcal{D}^1(I, E)$ telle que $g' = f$.

Conséquence

Si $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et si g est une primitive de f sur I, alors $g \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

Théorème 3

Deux primitives g_1 et g_2 d'une même application $f \in \mathcal{F}(I, E)$ diffèrent d'une constante.

☞ $g_2 - g_1$ est dérivable sur I avec $\left(g_2 - g_1\right)' = 0$ donc, d'après la propriété 9, $g_2 - g_1$ est constante.

Conséquence

Si $f \in \mathcal{F}(I, E)$ admet une primitive g sur I, elle en admet une infinité. L'ensemble de ces primitives est décrit par les fonctions $g + V \ : \ I \to E,\ x \mapsto g(x) + V$ avec $V \in E$. ✎(32)

✎(32) La constante V est vectorielle.

Théorème 4

Étant donné $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et a un point fixé quelconque dans I :

a) la fonction $F : I \to E, x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I : $F \in \mathcal{C}^1(I, E)$,

b) F est une primitive de f sur I,

c) c'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

☞ ✎(33) Soit $x \in I$, pour tout h tel que $x + h \in I$, on a :

$$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \int_x^{x+h} \left(f(t) - f(x)\right) \mathrm{d}x$$

d'où :

$$\| F(x+h) - F(x) - hf(x) \| \leqslant |h| \sup_{t \in [x, x+h]} \| f(t) - f(x) \|.$$

La continuité de f en x donne $\displaystyle\sup_{t \in [x,x+h]} \| f(t) - f(x) \| = o(1)$ (quand h tend vers 0) d'où :

$$F(x+h) - F(x) - hf(x) = o(h).$$

On a ainsi montré a) et b), puis on note que c) est une conséquence du théorème 3.

✎(33) On obtient une autre démonstration en notant que le résultat est connu dans le cas où $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$ (cf. Analyse – MPSI).
Dans le cas général, il suffit de constater que, si $f_1, \cdots f_n$ sont les composantes de f sur une base $\left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, celles de F sont $F_1, \cdots, F_n$ avec $F_i : I \to E, x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_i$, puis que chaque F_i est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $F_i' = f_i$.

Corollaire 1

Si $f \ : \ I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, $p \in \mathbb{N}$, a étant un point fixé de I, la fonction $F \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I.

Théorème 5

Extension aux fonctions continues par morceaux

Étant donné $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et a un point fixé quelconque dans I :

a) la fonction $F \ : \ I \to E, \ \ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est continue sur I,

b) F est dérivable en tout point $x \in I$ où f est continue avec $F'(x) = f(x)$.

c) F est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.

☞ a) Sur tout segment $[x, y] \subset I$, f est continue par morceaux donc bornée. On en déduit que F est localement lipschtzienne donc continue sur I. ✎(34)

✎(34) En effet avec $M = \sup\limits_{t \in [x,y]} \| f(t) \|$, on obtient : $\forall (t,t') \in [x,y]^2$, $\|F(t')-F(t)\| \leqslant |t-t'|M$.

b) Par définition, si f est continue en x, il existe c, d dans I tels que $c < x < d$ si x n'est pas borne de I, ou $c = x < d$ si $x = \inf I$, ou $c < d = x$ si $x = \sup I$, avec f continue sur $[c, d]$.

D'après la relation de Chasles, on a $F(x) = \displaystyle\int_a^c f + \int_c^x f$ et le théorème 4 donne que $G \ : \ t \mapsto \displaystyle\int_c^t f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c, d]$ avec $\forall t \in [c, d]$, $\ G'(t) = f(t)$. Il en est donc de même pour $F_{|[c,d]}$.

D'après le caractère local de la dérivabilité (cf. propriété 1), on en déduit que F est dérivable en x avec $F'(x) = G'(x) = f(x)$. ✎(35)

✎(35) $[c,d]$ est un voisinage de x relatif à I.

c) Si $[\alpha, \beta] \subset I$, $\alpha < \beta$ est un segment tel que f soit continue sur $]\alpha, \beta[$ et prolongeable par continuité sur $[\alpha, \beta]$, la fonction F est continue sur $[\alpha, \beta]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$ et F' admet :

– une limite à droite en α : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} F'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x)$ et

– une limite à gauche en β : $\lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} F'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} f(x)$.

Dans ces conditions, on sait que $F_{|[\alpha,\beta]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$. ✎(36)

✎(36) C'est une conséquence du théorème 11. Celui-ci n'ayant pas encore été démontré, on peut contourner la difficulté en observant qu'il est connu dans le cas des fonctions numériques (voir Analyse – MPSI, chapitre 6) et on applique le raisonnement ci-contre aux fonctions composantes F_i et f_i de F et f sur une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E.

Ceci montre que F est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.

Conséquences

Comme dans le cas des fonctions réelles ou complexes, il en résulte que :

1) si $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et si P est une primitive de f sur I :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \int_a^b f = P(b) - P(a) \quad \text{ce que l'on note} \quad \int_a^b f = \big[P(x)\big]_a^b.$$

Exemple : pour tout $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\int_a^b e^{i\omega x} \mathrm{d}x = \frac{i}{\omega}\left(e^{i\omega a} - e^{i\omega b}\right)$.

2) Si $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$, $\forall (a, b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

3) Comme dans le cas des fonctions réelles, pour $f \in \mathcal{C}(I, E)$, $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$ représente une primitive non précisée de f sur I.

Théorème 6

Intégration par parties

Soit $f \ : \ I \to \mathbb{K}$ et $g \ : \ I \to E$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$.

☞ Il suffit de noter que fg est une primitive de $fg' + f'g$.

✎[37] Il faut comprendre cette égalité «à une constante près».

Corollaire 1

En conservant les hypothèses du théorème 6 avec la notation des intégrales indéfinies :

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$ ✎[37]

✎[38] Même démonstration que dans le cas où f est réelle : voir Analyse – MPSI, chapitre 9, théorème 15.

Théorème 7

Changement de variables

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$.

Alors $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u.$ ✎[38]

Cas particulier

Lorsque φ est strictement monotone, elle est inversible et $\varphi\big([\alpha, \beta]\big) = \big[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\big]$.

En posant $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u.$

Théorème 8

Changement de variable : extension

Soit $f \in \mathcal{M}(I, E)$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ strictement monotone telle que $\varphi(\alpha) \in I$ et $\varphi(\beta) \in I$. Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

☞ Soit $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, il existe une famille finie de points de I : $(a_0, \dots, a_k)$ strictement monotone avec $a_0 = a$, $a_k = b$, telle que quel que soit $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ soit prolongeable par une fonction f_i continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

On applique le théorème 7 sur chaque intervalle :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a_i)}^{\varphi^{-1}(a_{i+1})} f_i\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(a_i)}^{\varphi^{-1}(a_{i+1})} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$ ✎[39]

et on obtient le résultat avec la relation de Chasles en sommant pour i variant de 0 à $k-1$.

✎[39] Noter l'importance de l'hypothèse «φ est strictement monotone» : quand u décrit $\big[\varphi^{-1}(a_i), \varphi^{-1}(a_{i+1})\big]$, $\varphi(u)$ décrit $\big[a_i, a_{i+1}\big]$ donc $u \mapsto f_i\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)$ est continue par morceaux sur $\big[\varphi^{-1}(a_i), \varphi^{-1}(a_{i+1})\big]$.

2. Étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geqslant 1$

2.1 – Inégalité des accroissements finis

a et b sont des réels tels que a < b.

Théorème 9

On considère une application continue f de $[a, b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ telle que f' soit bornée sur $]a, b[$.

En posant $M = \sup_{t \in]a,b[} \|f'(t)\|$, on a alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b-a).$$

☞ Soit $g \in \mathcal{M}\big([a, b], E\big)$ telle que $g(a) = g(b) = 0$ et $\forall t \in]a, b[,\ g(t) = f'(t)$.

D'après le théorème 5, la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ avec $\forall x \in]a, b[$, $G'(x) = g(x) = f'(x)$, il existe donc $k \in E$ tel que :

$$\forall x \in]a, b[,\ G(x) = f(x) + k.$$ ✎[40]

✎[40] G et f sont deux primitives de f' sur $]a,b[$.

La continuité de f et G en a et b donne alors $G(a) = f(a) + k$ donc $f(a) = -k$ et $G(b) = f(b) + k$ donc $G(b) = f(b) - f(a)$ c'est-à-dire :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Par définition de g, on a $\sup\limits_{t\in[a,b]} \| g(t) \| = M$ donc :

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant M(b-a).$$

Théorème 10

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$.
Alors f' est bornée sur J et en posant $M = \sup\limits_{t\in J} \| f'(t) \|$, on a :

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant M(b-a).$$

✎ (41) Cf. définition 7.

✎ (42) Les restrictions f_i se raccordent continûment, mais il n'en est pas de même pour les dérivée f_i'.
Pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, f' et f_i' coïncident sur $]a_i, a_{i+1}[$.

☞ Soit $big(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, ✎ (41) pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f_i = f_{|[a_i, a_{i+1}]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. ✎ (42)

Ainsi f' est bornée sur chaque $\left] a_i, a_{i+1} \right[$ donc elle est bornée sur $J = \bigcup\limits_{0\leqslant i\leqslant k-1} \left] a_i, a_{i+1} \right[$.

D'après le théorème 9, on a pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$:

$$\left\| f\left(a_{i+1}\right) - f\left(a_i\right) \right\| \leqslant M\left(a_{i+1} - a_i\right)$$

on conclut avec :

$$\| f(b) - f(a) \| = \left\| \sum_{i=0}^{k-1} f\left(a_{i+1}\right) - f\left(a_i\right) \right\| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \left\| f\left(a_{i+1}\right) - f\left(a_i\right) \right\|.$$

Théorème 11

✎ (43) C'est la version «vectorielle» d'un résultat vu en MPSI, dans le cadre des fonctions numériques.

Caractérisation des applications de classe $\mathcal{C}^1$ ✎ (43)
Soit f une application de $[a,b]$ dans E, continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ si et seulement si f' a une limite (dans E) en a.

✎ (44) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, $f'(x)$ a $f'(a)$ pour limite en a. Seule la réciproque pose problème.

☞ ✎ (44) Si f' a une limite en a, f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ et comme dans la démonstration du théorème 9, on a : $\forall x \in [a,b],\ f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$

Donc en notant g le prolongement continu de f' sur $[a,b]$:

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

ce qui prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $f' = g$.

Remarque

Sous les hypothèses du théorème 11, si f' admet une limite en a, alors $f'(a)$ existe et est égale à cette limite.

Corollaire 1

Extension aux applications de classe $\mathcal{C}^p$
Soit une application f, continue de $[a,b]$ dans E et de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]a,b]$.
Si, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{D}^j f = f^{(j)}$ admet une limite (dans E) en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$.

☞ Récurrence sur p en utilisant le théorème 11.

Corollaire 2

Caractérisation des applications de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux

Une application f de $[a, b]$ dans E est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\left(a_0, a_1, \ldots, a_k\right)$ de $[a, b]$ telle que :

- $\forall i \in [\![0, k-1]\!], f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\left]a_i, a_{i+1}\right[$;
- chaque $f^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant p$, admet une limite à droite en $a_0 = a$, une limite à droite et une limite à gauche en a_i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, et une limite à gauche en $a_k = b$.

☞ L'existence des limites pour f aux points a_i montre que chaque restriction $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$ est prolongeable par continuité sur $\left[a_i, a_{i+1}\right]$: f est donc continue par morceaux sur $[a, b]$.
Soit alors, pour $i \in [\![0, k-1]\!]$, f_i le prolongement continu de $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ sur $\left[a_i, a_{i+1}\right]$, d'après le corollaire précédent , f_i est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\left[a_i, a_{i+1}\right]$ d'où la conclusion.

2.2 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 12

Formule de Taylor avec reste intégral

Étant donné $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, pour tout $(a, x) \in I^2$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \quad ✎^{(45)}$$

$R_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$ est appelé **reste intégral** d'ordre n.

✎(45) Même démonstration que pour les fonctions réelles en utilisant l'extension de la formule d'intégration par parties aux produits de fonctions numériques et vectorielles de classe $\mathcal{C}^1$ (cf. Analyse – MPSI, chapitre 9).

Corollaire 1

Inégalité de Taylor-Lagrange

Étant donné $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, pour tout $(a, x) \in I^2$, on a :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

2.3 – Développements limités

Théorème 13

Développement limité d'une primitive d'une application continue

Soit f une application continue de I dans E admettant au voisinage de $x_0 \in I$ un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x - x_0\right) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + o\left(\left(x - x_0\right)^n\right).$$

Alors toute primitive F de f sur I admet au voisinage de x_0 le développement limité d'ordre $n+1$:

$$F(x) = F\left(x_0\right) + a_0\left(x - x_0\right) + a_1 \frac{\left(x - x_0\right)^2}{2} + \cdots + a_n \frac{\left(x - x_0\right)^{n+1}}{n+1} + o\left(\left(x - x_0\right)^{n+1}\right).$$

✎(46)

✎(46) On retiendra que la partie régulière du développement d'ordre n+1 de F est égale à

$$F(x_0) + \int_{x_0}^x P(t) \mathrm{d}t \text{ où } P(t)$$

est la partie régulière du développement d'ordre n de f.

☞ On a $F(x) = F\left(x_0\right) + \displaystyle\int_{x_0}^x f(t) \mathrm{d}t$ d'où :

$$F(x) - F\left(x_0\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \left(x - x_0\right)^{k+1} = \int_{x_0}^x \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k \left(t - x_0\right)^k \right) \mathrm{d}t$$

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k \left(t - x_0\right)^k \right\| < \varepsilon \left|t - x_0\right|^n \quad \text{dès que} \quad \left|t - x_0\right| < \eta.$$

En conséquence, pour $\left|x - x_0\right| < \eta$, on a :

$$\left\| F(x) - F\left(x_0\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \left(x - x_0\right)^{k+1} \right\| \leqslant \varepsilon \left| \int_{x_0}^{x} \left|t - x_0\right|^n \mathrm{d}t \right|$$

c'est-à-dire $$\left\| F(x) - F\left(x_0\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \left(x - x_0\right)^{k+1} \right\| \leqslant \varepsilon \frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{n+1}$$

d'où la conclusion.

Théorème 14

Développement limité de la dérivée d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ ✎[47]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E telle que f' admette un développement limité d'ordre n au voisinage de $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de x_0 et la partie régulière du développement d'ordre n de f' est la dérivée de la partie régulière du développement d'ordre $n+1$ de f.

✎[47] Ce résultat n'est utilisable que si l'on dispose d'un argument permettant d'affirmer l'existence d'un développement limité pour f', d'où l'intérêt du théorème suivant.

☞ C'est un corollaire du théorème 13 en notant que : $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t$.

Théorème 15

Formule de Taylor-Young

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E. Pour tout $x_0 \in I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(x - x_0\right)^k}{k!} f^{(k)}\left(x_0\right) + o\left(\left(x - x_0\right)^n\right).$$

f admet donc un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0.

☞ En écrivant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$, on obtient :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(x - x_0\right)^k}{k!} f^{(k)}\left(x_0\right) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(x - x_0\right)^k}{k!} f^{(k)}\left(x_0\right) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}\left(x_0\right)\right) \mathrm{d}t$$

$f^{(n)}$ est continue en x_0, donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\left\| f^{(n)}(t) - f^{(n)}\left(x_0\right) \right\| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad \left|t - x_0\right| < \eta.$$

Il en résulte $$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(x - x_0\right)^k}{k!} f^{(k)}\left(x_0\right) \right\| \leqslant \varepsilon \frac{\left|x - x_0\right|^n}{n!} \quad \text{dès que} \quad \left|x - x_0\right| < \eta,$$

d'où la conclusion.

Exemple 1 Soit $a \in \mathbb{C}^*$, écrire le développement limité d'ordre $n-1$ au voisinage de 0 de :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \frac{1}{(x-a)^2}.$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elle admet donc un développement limité à tout ordre.

On a $f(x) = F'(x)$ avec $F(x) = \dfrac{1}{a-x}$ et avec :

$$a^{n+1} - x^{n+1} = (a-x)\left(a^n + a^{n-1}x + \cdots + ax^{n-1} + x^n\right)$$

on obtient :

$$a^{n+1}F(x) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}x^k + \frac{x^{n+1}}{a-x}$$

donc $$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{a^{k+1}} + o(x^n).$$

Par application du théorème 14, il vient alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)x^k}{a^{k+2}} + o\left(x^{n-1}\right).$$

3. Théorème de relèvement

Théorème 16

Relèvement d'une application de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geqslant 1$

Étant donné $f \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{C})$, $(p \geqslant 1)$, telle que $f(I) \subset \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\theta(t)}. \quad ✎^{(48)}$$

On dit que θ est un **relèvement** de f.

✎(48) Les propriétés essentielles de la fonction exponentielle complexe sont présentées dans le chapitre 5. Rappelons que $\mathbb{U}$ désigne le cercle unité de $\mathbb{C}$: $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$.

☞ **Analyse**

Supposons qu'il existe $\theta \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ tel que $f = e^{i\theta}$.

Alors $\forall t \in I, f'(t) = i\,\theta'(t)e^{i\theta(t)}$ donc $\theta'(t) = -i\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ puis, avec $t_0 \in I$:

$$\theta(t) = \theta(t_0) - i\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\mathrm{d}u \text{ et } f\left(t_0\right) = e^{i\theta(t_0)}.$$

Synthèse

Montrons que toute fonction $\theta \ : \ I \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda - i\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{f'(u)}{f(u)}\mathrm{d}u$ où t_0 est un point de I et λ un réel tel que $f\left(t_0\right) = e^{i\lambda}$, est solution du problème.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et ne s'annule pas car $f(I) \subset \mathbb{U}$ donc $\dfrac{f'}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et $t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{f'(u)}{f(u)}\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

Notons de plus que θ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. En effet, on a $\forall u \in I, |f(u)|^2 = 1$ soit $f(u)\overline{f(u)} = 1$ et en dérivant $f'(u)\overline{f(u)} + f(u)\overline{f'(u)} = 0$ d'où $\dfrac{f'(u)}{f(u)} = -\overline{\dfrac{f'(u)}{f(u)}}$ ce qui montre que $u \mapsto \dfrac{f'(u)}{f(u)}$ est imaginaire pure et donc que $t \mapsto i\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{f'(u)}{f(u)}\mathrm{d}u$ est réelle.

Ainsi θ est bien élément de $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$.

On a alors $\forall t \in I, \ \ \theta'(t) = -i\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ d'où $f'(t) - i\,\theta'(t)f(t) = 0$.

Posons $z(t) = f(t)e^{-i\theta(t)}$, on obtient $z'(t) = \left(f'(t) - i\,\theta'(t)f(t)\right)e^{-i\theta(t)} = 0$, donc la fonction $z \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{C})$ est constante et on a :

$$\forall t \in I, \quad z(t) = f\left(t_0\right)e^{-i\theta(t_0)} = e^{i\lambda}e^{-i\lambda} = 1.$$

Finalement $\quad \forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\theta(t)}$.

Application

Soit Γ un arc paramétré de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^p$, ($p \geqslant 1$), défini par :

$$f\ :\ I \to \mathbb{R}^2,\quad t \mapsto \big(x(t), y(t)\big).$$

On suppose que Γ ne contient pas le point $O(0,0)$ c'est-à-dire que $\forall t \in I,\ \ f(t) \neq (0,0)$.

Alors il existe $\rho \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in I,\ \ f(t) = \big(\,\rho\,(t) \cos\theta(t), \rho(t) \sin\theta(t)\big).$$

☞ Nécessairement, $\forall t \in I,\ \ \rho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ et en posant $F(t) = \dfrac{x(t) + i\,y(t)}{\rho\,(t)}$:

$$F(t) = e^{i\theta(t)}.$$

Réciproquement, ρ étant ainsi définie, tout couple (ρ, θ) où θ est un relèvement de F est solution du problème.

Remarque

Géométriquement, ce résultat signifie que si l'arc Γ de classe $\mathcal{C}^p$, paramétré par :

$$t\ \mapsto\ \overrightarrow{OM} = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j}$$

ne passe pas par O, il admet un paramétrage polaire de même classe :

$$t\ \mapsto\ \overrightarrow{OM} = \rho(t)\ \overrightarrow{u_{\theta(t)}}\quad (\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\ \overrightarrow{i}\ + \sin\theta\ \overrightarrow{j}\,).$$

Méthodes

L'essentiel

✔ **Si l'on veut** établir une propriété de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment I,

▪ **on peut** essayer d'utiliser la densité de $\mathcal{E}\big([a,b],E\big)$ dans $\mathcal{M}\big([a,b],E\big)$

1) vérifier cette propriété dans le cas des fonctions en escalier ;

2) étendre au cas des fonctions continues par morceaux au moyen d'un passage à la limite en considérant une suite de fonctions en escalier uniformément convergente vers la fonction donnée.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une fonction est nulle sur un segment I,

▪ **on peut** penser à utiliser que si $f\ : I \to \mathbb{R}$ est continue et de signe constant sur I, elle est nulle sur I si et seulement si $\displaystyle\int_I f = 0$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

✔ **Si l'on veut** majorer ou minorer une intégrale,

▪ **on peut** penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

✔ **Si l'on veut** résoudre une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue est seulement supposée continue ou continue par morceaux,

▪ **on peut** penser à effectuer une intégration qui permet de mettre en évidence que toute solution éventuelle est dérivable ou mieux, de classe $\mathcal{C}^n$ (avec n assez grand), et en déduire une équation différentielle vérifiée par cette fonction.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

Mise en œuvre

Ex. 1

Le lemme de Lebesgue

Soit a et b réels, $a < b$, et $f\ : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0$.

2) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.$

Indications

Pour traiter le cas des fonctions en escalier il est intéressant de commencer par considérer f constante égale à 1 puis de généraliser avec la linéarité de l'intégrale et la relation de Chasles.

Solution

1) ▪ Envisageons d'abord le cas où f est constante égale à 1 sur $[a, b]$:

$$\forall x \in [a, b], f(x) = 1.$$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{in}\left(e^{inb} - e^{ina}\right)$ donc :

$$\left|\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0.$$

▪ Si f est en escalier sur $[a, b]$, il existe $\sigma = (c_j)_{0\leqslant j\leqslant p}$ subdivision de $[a, b]$ telle que f soit constante (égale à λ_j) sur chaque intervalle $]c_j, c_{j+1}[, j \in [\![0, p-1]\!]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \int_{c_j}^{c_{j+1}} e^{inx}\mathrm{d}x.$

Or d'après l'étude précédente, pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{c_j}^{c_{j+1}} e^{inx}\mathrm{d}x = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0.$$

▪ Dans le cas général, soit $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{E}\left([a, b], \mathbb{C}\right)$ convergeant uniformément vers f : $\lim\limits_{k\to+\infty} \|f - \varphi_k\|_\infty^{[a,b]} = 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - \varphi_k\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Donc en écrivant

$$\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x) - \varphi_k(x)\right) e^{inx}\mathrm{d}x + \int_a^b \varphi_k(x)e^{inx}\mathrm{d}x$$

il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \varphi_k(x)e^{inx}\mathrm{d}x$

k étant fixé, d'après le 1), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b \varphi_k(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0$ donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\left|\int_a^b \varphi_k(x)e^{inx}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Commentaires

Il est important de voir que ce résultat est vrai quel que soit le couple (a,b), ce qui va permettre de le généraliser à une fonction en escalier quelconque avec la relation de Chasles.

Il n'est pas indispensable d'introduire une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. En effet, en invoquant la densité de $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}([a,b],\mathbb{C})$, on obtient, pour tout $\varepsilon>0$ l'existence de $\varphi\in\mathscr{E}([a,b],\mathbb{C})$ tel que $\|f-\varphi\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et le raisonnement se termine de la même façon.

Finalement $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon.$

C'est la conclusion.

2) On démontre de même que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = 0$ et la conclusion résulte de :

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Remarquer que si f est réelle, le 1) suffit pour conclure.

Ex. 2

Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$, $a < b$, telle que : $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$ **(1)**

Montrer que $f(x)$ a un argument constant sur $[a,b]$.

Indications

Avec $\theta = \arg\left(\int_a^b f\right)$ et $g = fe^{-i\theta}$, **(1)** s'écrit $\int_a^b g = \int_a^b |g|$.

Solution

Posons $\quad \theta = \arg\left(\int_a^b f\right) \quad$ et $\quad g = fe^{-i\theta}. \quad$ Alors :

$$\int_a^b g = \left(\int_a^b f\right) e^{-i\theta} = \left| \int_a^b f \right|,$$

et, puisque $|f| = |g|$, la condition **(1)** s'écrit $\displaystyle\int_a^b g = \int_a^b |g|$ **(2)**.

En considérant la partie réelle, on en déduit :

$$\int_a^b \big(|g| - \mathrm{Re}(g)\big) = 0. \qquad \textbf{(3)}$$

Enfin, la fonction $|g| - \mathrm{Re}(g)$ étant positive et continue sur $[a,b]$, la relation **(3)** donne $|g| - \mathrm{Re}(g) = 0$.
Il en résulte $\forall x \in [a,b], \arg g(x) = 0$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in [a,b], \arg f(x) = \theta.$$

Commentaires

Le but est d'écrire l'hypothèse sous une forme équivalente avec une seule intégrale. Il faut donc faire disparaître la valeur absolue dans le premier membre, pour ensuite regrouper les deux intégrales par linéarité.

Ex. 3

Trouver le minimum de $\int_0^1 f''^2$ quand f décrit l'ensemble E des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = a$ où a est un réel donné.

Indications

Écrire la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0,1]$ à l'ordre 2.

Solution

Pour tout $f \in E$, on a :

$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t)f''(t)\mathrm{d}t$, donc $a = -\int_0^1 (1-t)f''(t)\mathrm{d}t.$

Commentaires

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$a^2 = \left(\int_0^1 (t-1)^2 f''(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 (t-1)^2\mathrm{d}t \int_0^1 f''(t)^2\mathrm{d}t$$

donc $\displaystyle\int_0^1 f''^2 \geqslant 3a^2$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut être utilisée pour des majorations, mais aussi pour des minorations.

On sait que $f \in E$ réalise l'égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0,1],\ f''(t) = \lambda(t-1).$$

Compte tenu des conditions $f'(0) = a,\ f(0) = f(1) = 0$, on obtient alors :

$$f(t) = \frac{a}{2}t(t-1)(t-2).$$

Ainsi la valeur $3a^2$ est atteinte lorsque f décrit E, ce qui prouve que c'est le minimum cherché. D'autre part il s'agit d'un minimum strict car il est atteint en un seul point de E.

Sur l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, l'application $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 fg$ est un produit scalaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui s'écrit alors $\left|\langle f \mid g\rangle\right| \leqslant \| f \| \| g \|$ devient une égalité si et seulement si le couple (f,g) est lié. (Cf. Algèbre-Géométrie, chapitre 6).

Ex. 4

Trouver les fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \quad (E)$.

Indications

Écrire l'équation obtenue en intégrant les deux membres de (E) par rapport à y pour en déduire que toute solution éventuelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution

Soit f une solution de E. On a alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_0^y f(x+t)\mathrm{d}t = yf(x) + \int_0^y f(t)\mathrm{d}t + x\frac{y^2}{2},$$

donc après changement de variable dans la première intégrale :

$$\int_x^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = yf(x) + \int_0^y f(t)\mathrm{d}t + x\frac{y^2}{2}.$$

En choisissant par exemple $y = 1$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{2} - \int_0^1 f.$$

Cette expression montre que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ alors elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ donc, puisque par hypothèse elle est de classe $\mathcal{C}^0$, une récurrence immédiate donne qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En dérivant les deux membres de E, par rapport à x puis par rapport à y, il vient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y) = 1$.

Donc si f est solution du problème, f'' est constante égale à 1, et il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{2} + ax + b$.

Comme de plus l'équation (E) donne $f(0) = 0$, il vient $b = 0$ et les solutions possibles sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + ax$.

Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, avec $f_a \ : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + ax$, on obtient $f_a(x+y) = f_a(x) + f_a(y) + xy$. L'ensemble des solutions du problème est donc constitué de ces fonctions $f_a,\ a \in \mathbb{R}$, on peut noter qu'il s'agit d'une droite affine.

Commentaires

Face à une telle équation une démarche fructueuse consiste à supposer f dérivable autant qu'il est nécessaire, dériver les deux membres de E par rapport à x et y, et examiner si l'on peut trouver une équation différentielle simple dont f est solution. Si c'est le cas, il faut commencer par prouver que toute solution éventuelle du problème est de classe suffisante.

Il est toujours intéressant de voir si l'on peut trouver des conditions initiales permettant de pousser un peu plus loin l'analyse ce qui simplifie la synthèse.

Remarque : une autre solution consiste à observer que $h : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est solution évidente et donc, que f est solution de (E) si et seulement si $g = f - h$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même, c'est-à-dire si et seulement si g est une application linéaire $x \mapsto ax$.

Exercices

E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie.

Niveau 1

Ex. 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}^+\big)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, $a<b$.

Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)}\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Ex. 2

Soit $f \in \mathcal{M}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ positive ou nulle, telle que $\displaystyle\int_0^1 f > 0$ et A un polynôme réel tel que $\displaystyle\int_0^1 A^2 f = 0.$

Montrer que A est le polynôme nul.

Ex. 3

1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$u_n(x) = \frac{n\,x^{n-1}}{x^n-1}.$$

2) En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z-e^{it}}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{U\}$.

Ex. 4

Soit $f \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+\big)$.

On suppose qu'il existe $k>0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$0 \leqslant f(x) \leqslant k\int_0^x f.$$

Montrer que f est nulle.

Ex. 5

Soit a un réel tel que $|a|<1$ et $f : \mathbb{R} \to E$ une application continue par morceaux vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est l'application nulle.

Ex. 6

Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ telle que $f(a)=f(b)=0$, $a<b$.

On pose $M = \|f'\|_\infty^{[a,b]}$.

1) Établir que $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)^2\dfrac{M}{4}$.

2) Étudier les cas d'égalité.

Ex. 7

Trouver les applications $f : \mathbb{R} \to E$ continues par morceaux et telles que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ 2af(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t.$$

Ex. 8

Soit $f \in \mathcal{C}^2\big([a,b],E\big)$, $a<b$. Montrer que :

$$\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right\| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty^{[a,b]}.$$

Ex. 9

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$ et $f \in \mathcal{C}^1\big([a,b],E\big)$.

1) Montrer que pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^t \frac{x-a}{b-a}f'(x)\mathrm{d}x + \int_t^b \frac{x-b}{b-a}f'(x)\mathrm{d}x$$

2) En déduire :

(1) $\forall t \in [a,b],\ \ \|f(t)\| \leqslant$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \int_a^b \|f'(x)\|\mathrm{d}x$$

(2) $\left\|f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right\| \leqslant$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_b^a \|f'(x)\|\mathrm{d}x.$$

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 10

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\ :\ ]-a,a[\to \mathbb{C}$ continue en 0.
On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(kx)}{x} = \ell,\ \ \ell \in \mathbb{C}\ .$$

Montrer que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \dfrac{\ell}{1-k}$.

Ex. 11

Soit $I = [-a,a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^2(I,E)$.

1) On pose $M_k = \sup\limits_{x\in I} \left\| f^{(k)}(x) \right\|$, $k = 0, 1$ ou 2.
Montrer que pour tout $x \in I$:
$$\left\| f'(x) \right\| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{x^2+a^2}{2a} M_2\ .$$

2) I est maintenant un intervalle quelconque non vide non réduit à un point. Montrer que si f et f'' sont bornées sur I, il en est de même pour f'.

3) M_1, M_2, M_3 étant alors définis comme en 1), montrer que si $I = \mathbb{R}$: $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Ex. 12

Déterminer $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} \sin\frac{k}{n^2}$.

Ex. 13

1) Étudier la suite de terme général :
$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 nx}\ .$$

2) $f \in \mathcal{C}^0\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$ étant donnée, étudier :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{f(x)}{1+\cos^2 nx}\mathrm{d}x.$$

Ex. 14

Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([0,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ telle que $f(0) = 0$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1.$$

1) Montrer que $\displaystyle \left(\int_0^x f\right)^2 \geqslant \int_0^x f^3.$

2) Dans quels cas y a-t-il égalité ?

Avec éléments de solution

Ex. 15

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ \ f''(x) \geqslant k.$$

Montrer que $\forall t \in [0,1]$,

$$tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)b) \geqslant \frac{k}{2}t(1-t)(b-a)^2.$$

Ex. 16

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathcal{M}([a,b],\mathbb{R})$.

Étudier $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

Ex. 17

On pose $\displaystyle u_{n,p} = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p$.

1) Évaluer $\displaystyle \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}\right)$.

2) Évaluer $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}\right)$.

Ex. 18

Pour a et b réels tels que $a < b$, on pose $I = [a,b]$, et soit f et g dans $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ telles que :

- f est décroissante,
- $g(I) \subset [0,1]$.

Enfin, on pose $\displaystyle \lambda = \int_a^b g$.

1) Montrer que $\displaystyle \int_a^b fg \leqslant \int_a^{a+\lambda} f$ **(1)**.

2) Si $g(I) \subset]0,1[$, montrer que **(1)** devient une égalité si et seulement si f est constante.

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 19

Normes de Hölder sur $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, $E=\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$,

$p\in]1,+\infty[$ et $q=\dfrac{p}{p-1}$.

On note $N_p\ :E\to\mathbb{R}^+,\ f\mapsto\left(\displaystyle\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

1) Montrer que $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^2,\ \ \alpha\,\beta\leqslant\dfrac{1}{p}\,\alpha^p+\dfrac{1}{q}\beta^q$.

2) Montrer que pour tout $(f,g)\in E^2$:

$$\left|\int_a^b\overline{f}g\right|\leqslant N_p(f)N_p(g).$$

En déduire que N_p est une norme sur E.

3) Montrer que $\forall f\in E,\ \ \displaystyle\lim_{p\to+\infty}N_p(f)=\|f\|_\infty^{\mathbb{R}}$.

Ex. 20

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ et $f\in\mathcal{M}\big([a,b],E\big)$, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t.$$

Avec éléments de solution

Ex. 21

Étant donnés f et g dans $\mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}_+^*\big)$, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\int_0^1 fg^n$.

Étudier la suite de terme général $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Ex. 22

On recherche les applications $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ f^2(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\qquad(E).$$

1) Donner une solution non triviale.

2) Soit f une solution sur $[0,+\infty[$ pour laquelle il existe $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_0)>0$. Que peut-on dire de f sur $[x_0,+\infty[$? Décrire f sur $[0,+\infty[$.

3) Décrire toutes les solutions du problème.

Indications

Ex. 10

$$f(x)-f(0)=\sum_{p=0}^{+\infty} f\left(k^p x\right)-f\left(k^{p+1}x\right).$$

Ex. 11

1) Appliquer la formule de Taylor sur $[x,a]$ et sur $[x,-a]$.

2) Utiliser le résultat du 1) en distinguant les cas : I borné, I non majoré, I non minoré.

3) Le résultat du 1) est valable sur tout segment $[-a,a]$.

Ex. 12

Introduire $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}$.

Ex. 13

1) I_n est constant.

2) Considérer $K_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{f\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u$.

Ex. 14

1) Étudier les variations de $x\mapsto\left(\displaystyle\int_0^x f\right)^2-\int_0^x f^3$.

2) Si f est une solution non nulle, introduire :

$$a=\sup\{x\in\mathbb{R}^+ \,/\, f(x)=0\}$$

et étudier la dérivabilité de f en a.

Ex. 15

Ramener le problème à l'étude des variations d'une fonction F bien choisie.

Ex. 16

Montrer que pour $|x|<\dfrac{1}{2}$, on a $x-2x^2\leqslant \ell n(1+x)\leqslant x$.

Ce n'est pas le meilleur encadrement possible mais il suffit.

Ex. 17

2) Pour n fixé, développer $\ell n\, u_{n,p}$.

Ex. 18

2) Considérer l'ensemble $E=\{x\in I \,/\, f(x)=f(b)\}$.

Ex. 19

1) Utiliser la concavité de ℓn.

3) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, $\alpha<\beta$ tel que :

$$\forall x\in[\alpha,\beta],\quad |f(x)|\geqslant \|f\|_{\infty}^{[a,b]}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ex. 20

Commencer par étudier le cas où f est constante.

Approcher f par une suite de fonctions en escalier.

Ex. 21

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne le sens de variation de (v_n).

Remarquer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}}$.

Ex. 22

2) Si f ne s'annule pas sur un intervalle I, elle y est dérivable d'après (E).

Considérer l'ensemble

$A=\{x\in[x_0,+\infty[\,/\,\forall t\in[x_0,x],\ f(t)\geqslant f(x_0)\}$

puis $B=\{x\in\mathbb{R}_+^* \,/\, f(x)>0\}$.

3) Remarquer que f est solution sur $]-\infty,0]$ si et seulement si $g\ :\ x\mapsto -f(-x)$ est solution sur $[0,+\infty[$.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

Posons $\left|\int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)}\mathrm{d}t\right| = r$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)}\mathrm{d}t = re^{i\theta}$ donc $r = \int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)-\theta}\mathrm{d}t$.

Puisque r est réel, il vient : $r = \mathrm{Re}\int_a^b f(t)e^{i\varphi(t)-\theta}\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\cos\left(\varphi(t)-\theta\right)\mathrm{d}t$, et enfin, f étant positive :

$$r \leqslant \int_a^b f(t)\left|\cos\left(\varphi(t)-\theta\right)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Ex. 2

Si $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision adaptée, il existe $a \in \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n-1}\left]a_i, a_{i+1}\right[$ tel que $f(a) > 0$, sinon on aurait $\int_0^1 f = 0$.

Par continuité de f en a, il existe donc aussi $b \in [0,1]$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) > 0$.

Puisque $A^2 f$ est positive ou nulle sur $[0,1]$, on a $\int_0^1 A^2 f \geqslant \int_a^b A^2 f \geqslant 0$, donc $\int_0^1 A^2 f = 0$ donne $\int_a^b A^2 f = 0$, et, la fonction $A^2 f$ étant continue positive sur $[a,b]$, il vient $\forall x \in [a,b],\ A(x)^2 f(x) = 0$ donc $A(x) = 0$.

Le polynôme A est nul car il admet une infinité de racines.

Ex. 3

1) Les pôles de $u_n(x)$ sont les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité : $\omega_k = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et comme $u_n(x)$ est de la forme $\frac{P'}{P}$, la décomposition s'écrit : $u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-\omega_k}$. **(1)**

2) Pour $z \in \mathbb{C}\setminus U$, la fonction $f : \mathbb{R}\to\mathbb{C},\ t \mapsto \frac{1}{z-e^{it}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui assure l'existence de :

$$F(z) = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{z-e^{it}}.$$

Calculons $F(z)$, $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$, par la limite d'une somme de Riemann relative à la subdivision $\left(\frac{2k\pi}{n}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Soit $S_n(z) = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z-e^{\frac{2ki\pi}{n}}}$. D'après **(1)**, on a $S_n(z) = \frac{2\pi z^{n-1}}{z^n-1}$. D'où :

$$F(z) = \lim_{n\to+\infty} S_n(z) = \begin{cases}\frac{2\pi}{z} & \text{si } |z| > 1\\ 0 & \text{si } |z| < 1\end{cases}$$

Ex. 4

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = \int_0^x f$. La fonction F ainsi définie est positive et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

L'hypothèse sur f donne $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant F'(x) \leqslant kF(x)$.

En posant $G(x) = F(x)e^{-kx}$, on voit que G est positive de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ G'(x) = \left(F'(x) - kF(x)\right)e^{-kx} \leqslant 0$.

Donc G est positive décroissante et, puisque $G(0) = 0$, elle est nulle sur $\mathbb{R}^+$ et il en est de même pour F, donc aussi pour $f = F'$.

Ex. 5

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, posons $M = \|f\|_\infty^{[-b,b]}$.

En remarquant que pour tout $x \in [-b, b]$, $[0, ax] \subset [-b, b]$, on obtient :

$$\forall x \in [-b, b], \quad \|f(x)\| \leqslant \left| \int_0^{ax} \|f(t)\| \mathrm{d}t \right| \leqslant M\,|ax| \leqslant M\,|x|,$$

puis
$$\|f(x)\| \leqslant \left| \int_0^{ax} M\,|t|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant M \frac{|x|^2}{2}.$$

Par récurrence, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-b, b], \quad \|f(x)\| \leqslant M \frac{|x|^n}{n!}$. Donc, puisque $\frac{|x|^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente, il vient $\forall x \in [-b, b], \quad \|f(x)\| = 0$.

Ceci étant vrai quel que soit $b > 0$, on en conclut finalement que $f = 0$.

Ex. 6

1) Nous avons ici $\forall x \in I, \ f(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_b^x f'(t)\mathrm{d}t$ d'où $|f(x)| \leqslant (x-a)M$ et $|f(x)| \leqslant (b-x)M$.

Avec la relation de Chasles, on obtient alors $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, d'où :

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)M\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)M\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{M}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{M}{2}$ ou aussi $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant (b-a)^2 \frac{M}{4}$.

2) L'égalité nécessite $\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)M\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(t)\mathrm{d}t| = \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)M\mathrm{d}t$ c'est-à-dire :

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \Big((t-a)M - |f(t)|\Big)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\frac{a+b}{2}}^b \Big((b-t)M - |f(t)|\Big)\mathrm{d}t = 0.$$

Les fonctions $x \mapsto (x-a)M - |f(x)|$ et $t \mapsto (b-x)M - |f(x)|$ étant continues positives, ces conditions donnent :

$$\forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad |f(x)| = (x-a)M \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad |f(x)| = (b-x)M.$$

Il existe donc $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$f(x) = \varepsilon_1(x-a)M \text{ sur } \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ et } f(x) = \varepsilon_2(b-x)M \text{ sur } \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Si $M = 0$ il vient $f = 0$ et si $M \neq 0$, la continuité de f en $\frac{a+b}{2}$ exige $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($\lambda = \pm M$) tel que $f(x) = \lambda(x-a)$ sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $f(x) = \lambda(b-x)$ sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

Il est clair que pour $\lambda = 0$ le deuxième cas redonne la fonction nulle. D'autre part on vérifie facilement que quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction f définie comme ci-dessus vérifie :

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| = |\lambda| \frac{b^2 - a^2}{4} \quad \text{avec } |\lambda| = \|f'\|_\infty^I.$$

Ces fonctions constituent donc l'ensemble des solutions du cas d'égalité.

Ex. 7

Soit f une solution du problème.

Avec $a = 1$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ \ 2f(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$, donc f continue par morceaux implique f continue, et f de classe $\mathcal{C}^n$ implique f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. En conséquence, on obtient par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En dérivant par rapport à a les deux membres de l'égalité

$$2af(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t,$$

on obtient successivement $2f(x) = f(x+a) + f(x-a)$ et $0 = f'(x+a) - f'(x-a)$. Donc f' est constante et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \lambda x + \mu$.

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction $x \mapsto \lambda x + \mu$ $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ est solution du problème. On a ainsi trouvé l'ensemble de ces solutions.

Ex. 8

Soit $F\ :\ [a,b] \to E,\ \ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{x-a}{2}\big(f(x)+f(a)\big)$.

Cette fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ avec :

$$\forall x \in [a,b],\ \ F'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(a) - (x-a)f'(x)\big)$$

$$\text{et}\quad F''(x) = -\frac{1}{2}(x-a)f''(x).$$

Compte tenu de $F(a) = 0,\ \ F'(a) = 0$, la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$F(b) = \int_a^b (b-x)F''(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\mathrm{d}x$$

et donc $$\| F(b) \| \leqslant \frac{1}{2}\left\|f''\right\|_\infty^{[a,b]} \int_a^b (b-x)(x-a)\mathrm{d}x.$$

Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int_a^b (b-x)(x-a)\mathrm{d}x = \left[-\frac{(b-x)^2}{2}(x-a)\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(b-a)^3.$

D'où finalement $\| F(b) \| \leqslant \dfrac{1}{12}\left\|f''\right\|_\infty^{[a,b]}$ ce qui constitue l'inégalité demandée.

Ex. 9

1) En intégrant par parties :

$$\int_a^t \frac{x-a}{b-a}f'(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x-a}{b-a}f(x)\right]_a^t - \frac{1}{b-a}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x = \frac{t-a}{b-a}f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_t^b \frac{x-b}{b-a}f'(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x-b}{b-a}f(x)\right]_t^b - \frac{1}{b-a}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-t}{b-a}f(t) - \frac{1}{b-a}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

et par addition, on obtient la formule annoncée.

2) Pour $x \in [a,b]$, on a $\left|\dfrac{x-a}{b-a}\right| \leqslant 1$ et $\left|\dfrac{x-b}{b-a}\right| \leqslant 1$ et le 1) donne :

$$\|f(t)\| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \int_a^t \left|\frac{x-a}{b-a}\right| \|f'(x)\|\mathrm{d}x + \int_t^b \left|\frac{x-b}{b-a}\right| \|f'(x)\|\mathrm{d}x$$

$$\text{d'où}\quad \|f(t)\| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \int_a^b \|f'(x)\|\mathrm{d}x \qquad \textbf{(1)}$$

Pour $x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, on a $\left|\dfrac{x-a}{b-a}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et pour $x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$, on a $\left|\dfrac{b-x}{b-a}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$,

d'où maintenant :

$$\left\| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b \|f'(x)\|\mathrm{d}x. \qquad \textbf{(2)}$$

Niveau 2

Ex. 10

L'hypothèse $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(kx)}{x} = \ell$ donne l'existence de $\varphi\ :]-a,a[\to \mathbb{C}$, continue en 0 avec $\varphi(0)=0$ et telle que :

$$\forall x \in]-a,a[,\ \ f(x)-f(kx) = \ell x + x\,\varphi\,(x).$$

On en déduit $\forall x \in]-a,a[,\ \ \forall p\in\mathbb{N},\ \ f\left(k^p x\right) - f\left(k^{p+1}x\right) = \ell k^p x + k^p x\,\varphi\left(k^p x\right).$ **(1)**

Remarquons alors que, f étant continue en 0, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} f\left(k^{p+1}x\right) = f(0)$ ce qui assure la convergence de la série de terme général $f\left(k^p x\right) - f\left(k^{p+1}x\right)$ et en sommant les égalités **(1)**, il vient :

$$f(x)-f(0) = \frac{\ell\, x}{1-k} + x\sum_{p=0}^{+\infty} k^p\,\varphi\,\left(k^p x\right). \qquad \textbf{(2)}$$

Puisque la fonction φ est également continue en 0 avec $\varphi(0)=0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $b\in]0,a[$ tel que :

$$\forall t\in]-b,b[,\ \ |\varphi(t)|\leqslant\varepsilon.$$

Alors pour $|x|<b$, on a $\forall p\in\mathbb{N},\ \ \left|k^p x\right| < b$ donc $\left|\varphi(k^p x)\right|\leqslant\varepsilon$ et $\left|\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} k^p\,\varphi\,\left(k^p x\right)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{1-k}$.

En conséquence, la relation **(2)** s'écrit :

$$f(x)-f(0) = \frac{\ell\, x}{1-k} + o(x),$$

d'où la conclusion.

Remarque

La série de fonctions de terme général $u_p\ :\ x\mapsto k^p\,\varphi\,\left(k^p x\right)$ converge normalement donc uniformément sur $[-b,b]$.

On peut donc conclure avec le théorème de la limite terme à terme qui donne $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} u_p(x) = 0$.

Ex. 11

1) Soit $x\in[-a,a]$, appliquons la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre 2 sur $[x,a]$ et sur $[x,-a]$:

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \int_x^a (a-t)f''(t)\mathrm{d}t \qquad f(-a) = f(x) - (a+x)f'(x) - \int_x^{-a}(a+t)f''(t)\mathrm{d}t,$$

donc en retranchant membre à membre, $2af'(x) = f(a)-f(-a) - \displaystyle\int_x^a (a-t)f''(t)\mathrm{d}t + \int_{-a}^x (a+t)f''(t)\mathrm{d}t.$

Il reste à majorer : $\ \ 2a\|f'(x)\| \leqslant 2M_0 + M_2\left(\displaystyle\int_x^a (a-t)\mathrm{d}t + \int_{-a}^x (a+t)\mathrm{d}t\right)$, c'est-à-dire

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{a^2+x^2}{2a}M_2\,.$$

Remarquons qu'il résulte de cette majoration que f' est bornée sur $[-a,a]$ avec $M_1 = \|f'\|_\infty^{[-a,a]} \leqslant \dfrac{M_0}{a} + aM_2\,.$

2) ▪ Premier cas : supposons I borné.

Si I est un segment : $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, en posant $a = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $J = [-a, a]$,

et $g : J \to E$, $t \mapsto f(\gamma + t)$ on se retrouve dans les conditions du 1).

On a en effet $g \in \mathcal{C}^2(J, E)$, avec $\forall t \in J$, $g'(t) = f'(\gamma + t)$, $g''(t) = f''(\gamma + t)$ donc g et g'' sont bornées sur J avec $\| g \|_\infty^J = M_0$, $\| g'' \|_\infty^J = M_2$ et, d'après le 1), il en résulte que g' est bornée sur J avec $\| g' \|_\infty^J \leqslant \dfrac{M_0}{a} + aM_2$,

donc f' est bornée sur I avec $\| f' \|_\infty^I = \| g' \|_\infty^J \leqslant \dfrac{M_0}{a} + aM_2$.

Si I est quelconque, on peut remarquer que f' est bornée sur I si et seulement si elle l'est sur :

$$\overset{\circ}{I} =]\alpha, \beta[, \quad (\alpha = \inf I, \quad \beta = \sup I).$$

On pose maintenant $a = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $J =]-a, a[$ et $g : J \to E$, $t \mapsto f(\gamma + t)$.

Pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, on a $x - \gamma \in J$ et il existe $b \in \left[\dfrac{a}{2}, a\right[$ tel que $x - \gamma \in [-b, b] \subset J$. On se retrouve pour g dans les conditions du 1) sur $[-b, b]$ et on en déduit $\| f'(x) \| \leqslant \dfrac{M_0}{b} + bM_2$.

En conséquence, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, on a $\| f'(x) \| \leqslant \displaystyle\sup_{b \in [\frac{a}{2}, a]} \left(\frac{M_0}{b} + bM_2 \right)$ (il s'agit de la borne supérieure d'une fonction continue sur un segment).

▪ Deuxième cas : I est non borné.

Si I est non majoré, pour tout $x \in I$, on a $[x, x+2] \subset I$ et comme ci-dessus, en considérant la fonction $t \mapsto f(x+1+t)$, on obtient $\| f'(x) \| \leqslant M_0 + M_2$.

Si I n'est pas minoré, pour tout $x \in I$, on a $[x - 2, x] \subset I$ et on obtient de même $\| f'(x) \| \leqslant M_0 + M_2$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, considérons la fonction $g_x : [-a, a] \to E$, $t \mapsto f(x + t)$.

Avec $\| g_x \|_\infty^{[-a,a]} \leqslant M_0$ et $\| g_x'' \|_\infty^{[-a,a]} \leqslant M_2$, d'après le 1), on a $\| g_x'(0) \| \leqslant \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{a}{2} M_2$, c'est-à-dire $\| f'(x) \| \leqslant \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{a}{2} M_2$, et il en résulte $\| f'(x) \| \leqslant \displaystyle\min_{a \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{M_0}{a} + \frac{a}{2} M_2 \right)$.

L'étude des variations de $\varphi : a \mapsto \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{a}{2} M_2$ sur $]0, +\infty[$ montre que φ atteint son minimum en $a = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$

et avec $\varphi\left(\sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}} \right) = \sqrt{2M_0 M_2}$, on en déduit $M_1 = \| f' \|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$.

Ex. 12

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne pour tout x réel : $|\sin x - x| \leqslant \left| \displaystyle\int_0^x |x - t| \, \mathrm{d}t \right|$ c'est-à-dire $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

Posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin \frac{k}{n}$.

D'après la remarque initiale, on obtient $|u_n - v_n| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \sin \frac{k}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n}$, d'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

Pour v_n, on reconnaît une somme de Riemann, et finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \int_0^1 t \sin t \, dt = \sin 1 - \cos 1.$$

Ex. 13

1) Le changement de variable défini par $t = nx$ donne $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$ et, la fonction $\varphi\ : t \mapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 t}$ étant π-périodique, on a $\displaystyle\int_0^{n\pi} \varphi = n\int_0^{\pi} \varphi$ donc $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$.

Ainsi la suite $(I_n)_{\mathbb{N}}$ est constante.

Pour effectuer le calcul de cette constante, remarquons d'abord que la π-périodicité et la parité de φ donnent :

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\,,$$

et puisque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a aussi $I_n = 2\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$.

Pour $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la fonction tangente induit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ sur $[0, \operatorname{cotan}\varepsilon]$. Le changement de variable défini par $u = \tan t$ donne donc

$$I_n = 2\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_0^{\operatorname{cotan}\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} \quad\text{soit}\quad I_n = \sqrt{2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[\operatorname{Arctan}\frac{u}{\sqrt{2}}\right]_0^{\operatorname{cotan}\varepsilon} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Remarque : après avoir étudié l'intégration sur un intervalle quelconque (cf. chap. **6**), on pourra écrire directement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}.$$

2) En opérant comme précédemment, on obtient $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{f(x)}{1+\cos^2 nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u.$

Posons alors $K_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{f\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u$. D'après le 1), on a $K_n = \dfrac{\pi}{n\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ donc, en reconnaissant une somme de Riemann, il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} f$.

Formons maintenant $J_n - K_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u$, par uniforme continuité de f sur $[0,\pi]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall u \in [0,\pi], \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \left| f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon,$$

et il vient donc $\quad |J_n - K_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} \leqslant \frac{\varepsilon\,\pi}{\sqrt{2}} \leqslant \varepsilon\pi.$

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n - K_n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} f.$

Ex. 14

1) Posons $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3,\ x \in [0,+\infty[$.

On a $F(0) = 0$ et F dérivable sur $[0,+\infty[$: $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ F'(x) = f(x)g(x)$ avec $g(x) = 2\displaystyle\int_0^x f - f^2(x).$

La fonction g ainsi définie est, elle aussi, dérivable sur $[0,+\infty[$ avec $g'(x) = 2f(x)\big(1 - f'(x)\big)$.

La positivité de f' donne que f est croissante sur $[0,+\infty[$ et, puisque $f(0) = 0$, on a $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ f(x) \geqslant 0$. Alors, en tenant compte de $f'(x) \leqslant 1$, on obtient $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ g'(x) \geqslant 0$, donc g est croissante et, $g(0) = 0$ donne $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ g(x) \geqslant 0$.

Finalement F' est positive sur $\mathbb{R}^+$ et, avec $F(0) = 0$, on conclut à $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ F(x) \geqslant 0$ ce qui donne l'inégalité annoncée.

2) Supposons maintenant $\quad \forall x \in [0,+\infty[,\ \ \left(\displaystyle\int_0^x f\right)^2 = \displaystyle\int_0^x f^3 \qquad (E).$

Deux solutions évidentes sont fournies par la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, et la fonction identité sur $\mathbb{R}^+$: $x \mapsto x$.

Soit f une solution non nulle de (E). Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_0) > 0$ et, f étant croissante, on a $\forall x \in [x_0,+\infty[,\ \ f(x) > 0$. Ainsi l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^+ / f(x) = 0\}$ est majoré non vide (car il contient 0), donc il existe $a \in \mathbb{R}^+,\ \ a = \sup\{x \in \mathbb{R}^+ / f(x) = 0\}$.

Supposons $a > 0$. Par continuité on a $f(a) = 0$ et, f étant croisssante, $\forall x \in [0,a],\ \ f(x) = 0$ donc :

$$f'(a) = f'_g(a) = 0.$$

Par ailleurs F nulle sur $[a,+\infty[$ et $f(x) > 0$ sur $]a,+\infty[$ donne successivement : $\forall x \in]a,+\infty[,\ \ g(x) = 0$ et $f'(x) = 1$. Donc, par continuité de f' en a, $f'(a) = 1$ ce qui est contradictoire avec le résultat précédent.

On en conclut que $a = 0$ d'où $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ f(x) > 0,\ \ g(x) = 0,\ \ f'(x) = 1$ et finalement $f(x) = x$.

L'égalité (E) est donc réalisée uniquement pour la fonction nulle ou la fonction identité.

Ex. 15

Introduisons la fonction définie sur $[0,1]$ par $F(t) = tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) - \dfrac{k}{2}t(1-t)(b-a)^2$.

L'hypothèse $\forall x \in [a,b],\ \ f''(x) \geqslant k$ donne que F'' est négative sur $[0,1]$, donc F' est décroissante.

Toujours avec cette hypothèse et la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient :

$$F'(0) = \int_a^b (t-a)\big(f''(t) - k\big)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \text{ et } F'(1) = -\int_a^b (b-t)\big(f''(t) - k\big)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

En conséquence, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $F'(\alpha) = 0$, la fonction F est croissante sur $[0,\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha,1]$. La conclusion résulte alors de $F(0) = F(1) = 0$.

Ex. 16

Notons u_n le terme général de la suite proposée, f est bornée donc, pour n assez grand, on a :

$$1 + \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) > 0$$

et on peut définir la suite de terme général :

$$v_n = \ell n\, u_n = \sum_{k=1}^{n} \ell n \left(1 + \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Avec, par exemple, l'inégalité de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient une minoration de $\ell n(1+x)$ valable pour $|x| < \dfrac{1}{2}$: $x - 2x^2 \leqslant \ell n(1+x)$, d'où, compte tenu de l'inégalité de convexité $\ell n(1+x) \leqslant x$, il vient pour n assez grand :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - 2\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leqslant v_n \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

En majorant $\left|f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)\right|$ par $\|f\|_\infty^{[a,b]}$, on montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = 0$, et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$, on trouve finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \exp\left(\int_a^b f\right)$.

Ex. 17

1) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $\alpha_p = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}x = \frac{p}{p+1} \left(2^{\frac{p+1}{p}} - 1\right)$.

Avec les développements limités $2^{\frac{p+1}{p}} = 2\left(1 + \frac{\ell n\, 2}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)$, $\ell n \left(2^{\frac{p+1}{p}} - 1\right) = \frac{2\,\ell n\, 2}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)$, on obtient $\lim_{p \to +\infty} p\, \ell n\, \alpha_p = 2\,\ell n\, 2 - 1$ d'où $\lim_{p \to +\infty} \alpha_p^p = \frac{4}{e}$.

2) Pour $x > 0$, la formule de Taylor avec reste intégral donne $e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t \mathrm{d}t$ donc :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} R(x) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant R(x) \leqslant e^x.$$

On en déduit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p} \ell n \left(1 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{p^2} r(n,k)$ avec $0 \leqslant r(n,k) \leqslant 1$, puis $\ell n\, u_{n,p} = p\, \ell n \left[1 + \frac{1}{np} \sum_{k=0}^{n-1} \ell n \left(1 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{p^2} R_n\right.$ avec $0 \leqslant R_n \leqslant 1$.

Il en résulte, pour n fixé, $\beta_n = \lim_{p \to +\infty} \ell n\, u_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ell n \left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

On a ensuite $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ell n \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ell n(1+x) \mathrm{d}x = 2\,\ell n\, 2 - 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} \beta_n = \frac{4}{e}$.

Ex. 18

1) La question se ramène à une étude de variation : on définit $G \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ par $G(x) = \int_a^x g$.

L'hypothèse sur g donne $\forall x \in I,\ \ 0 \leqslant G(x) \leqslant x - a$ donc $[a, a + G(x)] \subset I$.

On peut donc ensuite définir $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ par $F(x) = \int_a^{a+G(x)} f - \int_a^x fg$.

La décroissance de f et la positivité de g avec de plus $a + G(x) \leqslant x$ donnent alors :

$$\forall x \in I,\ \ F'(x) = \Big[f\big((a + g(x)\big) - f(x)\Big] g(x) \geqslant 0.$$

F étant croissante avec $F(a) = 0$, il vient enfin $F(b) \geqslant 0$ ce qui est exactement l'inégalité **(1)**.

2) Si f est constante, il est clair que **(1)** se réduit à une égalité.

Réciproquement, l'égalité dans **(1)** donne que F' est nulle sur I, et puisque g ne s'annule pas, on a :

$$\forall x \in I,\ \ f\big(a + G(x)\big) - f(x) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Avec la décroissance de f, la condition **(2)** donne que pour tout $x \in I$, f est constante sur $[a + G(x), x]$ **(3)**.

On considère alors $E = \{x \in I / f(x) = f(b)\}$.

Cet ensemble est non vide, minoré par a il admet donc une borne inférieure $c \in I$, et puisque f est continue, c appartient à E.

En supposant $c > a$, on obtient $a + G(c) < c$ et d'après **(2)** $f\big(a + G(c)\big) = f(c) = f(b)$. C'est contradictoire avec la définition de c, donc $c = a$ et finalement f est constante sur $[a, b]$.

Niveau 3

Ex. 19

1) La propriété est évidente lorsque α ou β est nul.

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la fonction ℓn étant concave sur $]0, +\infty[$, en remarquant que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, il vient :

$$\ell n\left(\frac{1}{p}\,\alpha^p + \frac{1}{q}\,\beta^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\,\ell n\,\alpha^p + \frac{1}{q}\,\ell n\,\beta^q = \ell n(\alpha\beta).$$

2) ▪ Ici encore l'inégalité est évidente lorsque f ou g est nulle.

On suppose maintenant $f \neq 0$ et $g \neq 0$ alors les fonctions $|f|^p$ et $|g|^q$ étant continues positives, on a $N_p(f) > 0$ et $N_p(g) > 0$ et le **1)** donne pour tout $x \in [a, b]$:

$$\left|\frac{\overline{f(x)}}{N_p(f)} \cdot \frac{g(x)}{N_q(g)}\right| \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{N_p(f)}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{N_q(g)}\right)^q.$$

En intégrant sur $[a, b]$, on en déduit : $\displaystyle\left|\int_a^b \frac{\overline{f}}{N_p(f)} \cdot \frac{g}{N_q(g)}\right| \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b \frac{|f|^p}{N_p(f)^p} + \frac{1}{q}\int_a^b \frac{|g|^p}{N_q(g)^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$

d'où la conclusion : $\displaystyle\left|\int_a^b \overline{f}g\right| \leqslant N_p(f)N_q(g).$

▪ Nous venons de démontrer que $f \neq 0$ donne $N_p(f) > 0$. D'autre part il est évident que quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $N_p(\lambda f) = |\lambda|\, N_p(f)$. Il reste donc à vérifier l'inégalité triangulaire pour affirmer que N_p est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

En écrivant $\displaystyle N_p(f+g)^p = \int_a^b |f+g|^p \leqslant \int_a^b |f|\,|f+g|^{p-1} + \int_a^b |g|\,|f+g|^{p-1}$, l'inégalité du **2)** donne :

$$N_p(f+g)^p \leqslant N_p(f)\left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + N_p(g)\left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

c'est-à-dire $N_p(f+g)^p \leqslant \Big(N_p(f) + N_p(g)\Big)N_p(f+g)^{\frac{p}{q}}$ (car $(p-1)q = p$).

On en déduit finalement :

$$N_p(f) + N_p(g) \geqslant N_p(f+g)^{p-\frac{p}{q}} = N_p(f+g).$$

3) Puisque f est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \|f\|_\infty^{[a,b]}$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $\alpha < \beta$ tel que $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $|f(x)| \geqslant |f(c)|\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

On obtient alors $N_p(f) \geqslant \|f\|_\infty^{[a,b]}(\beta - \alpha)^{\frac{1}{p}}\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ et, puisque $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}(\beta - \alpha)^{\frac{1}{p}} = 1$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$p \geqslant p_0 \quad\Rightarrow\quad N_p(f) \geqslant \|f\|_\infty^{[a,b]}(1 - \varepsilon).$$

Comme d'autre part il est clair que $N_p(f) \leqslant \|f\|_\infty^{[a,b]}$, on a finalement :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N}^*,\ p \geqslant p_0 \quad\Rightarrow\quad \|f\|_\infty^{[a,b]}(1 - \varepsilon) \leqslant N_p(f) \leqslant \|f\|_\infty^{[a,b]}$$

d'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} N_p(f) = \|f\|_\infty^{[a,b]}.$

Ex. 20

▪ On commence par le cas où f est constante réelle égale à 1. Il s'agit alors d'étudier la suite de terme général :

$$u_n = \int_a^b |\sin nt|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb} |\sin x|\,\mathrm{d}x.$$

En posant $p = E\left(\frac{na}{\pi}\right)$ et $q = E\left(\frac{nb}{\pi}\right)$, où E désigne la fonction «partie entière », on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{na}^{nb} |\sin x|\,\mathrm{d}x &= \int_{na}^{(p+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{q\pi}^{nb} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \sum_{k=p+1}^{q-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{na}^{(p+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{q\pi}^{nb} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \sum_{k=p+1}^{q-1} \int_{0}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x \\ &= \int_{na}^{(p+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{q\pi}^{nb} |\sin x|\,\mathrm{d}x + 2(q-p-1).\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales sont majorées par π et avec l'encadrement :

$$\frac{n(b-a)}{\pi} - 1 \leqslant q - p \leqslant \frac{n(b-a)}{\pi} + 1,$$

on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\dfrac{b-a}{\pi}$.

- Dans le cas d'une fonction en escalier, $\left(a_i\right)_{0\leqslant i\leqslant p}$ étant une subdivision adaptée, on écrit :

$$u_n = \int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin nt|\,\mathrm{d}t$$

où λ_i est la valeur constante prise par f sur $]a_i, a_{i+1}[$.
Compte tenu de l'étude du cas des fonctions constantes, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i\left(a_{i+1} - a_i\right) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f.$$

- Dans le cas général, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi\ : [a, b] \to E$, en escalier, et telle que $\|f - \varphi\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Avec $u_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t$, en écrivant :

$$u_n - \frac{2}{\pi}\int_a^b f = \int_a^b \Big(f(t) - \varphi(t)\Big)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t + \int_a^b \varphi(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\Big(\int_a^b \varphi(t) - f(t)\Big)\mathrm{d}t,$$

on obtient :

$$\left|u_n - \frac{2}{\pi}\int_a^b f\right| \leqslant 2\,\varepsilon + \left|\int_a^b \varphi(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t\right|.$$

L'étude du cas des fonctions en escalier, montre alors l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \quad\Rightarrow\quad \left|\int_a^b \varphi(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

Finalement : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \quad\Rightarrow\quad \left|u_n - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant 3\varepsilon$, d'où la conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_a^b f.$$

Ex. 21

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $u_{n+1}^2 \leqslant u_{n+2}u_n$ c'est-à-dire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$: la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante, elle est donc convergente dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

Posons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, le théorème de Cesaro montre que l'on a aussi $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}}$.

Or de $u_n = \displaystyle\int_0^1 fg^n$, on déduit $u_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \| f \|_\infty^{\frac{1}{n}} \| g \|_\infty$ et donc $L \leqslant \| g \|_\infty$: L est fini.

La continuité et la positivité de g sur $[0, 1]$ donne l'existence de $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\| g \|_\infty = g(x_0)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a, b) \in [0, 1]^2$, $a < b$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $\| g \|_\infty - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \| g \|_\infty$.

On en déduit $u_n^{\frac{1}{n}} \geqslant \Big(\| g \|_\infty - \varepsilon\Big) A^{\frac{1}{n}}$ où on a posé $A = \displaystyle\int_a^b f$, puis en passant à la limite : $L \geqslant \| g \|_\infty - \varepsilon$.

En conclusion, on a $L = \| g \|_\infty$.

Ex. 22

1) $x \mapsto x$ est solution.

2) Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f(x) > 0$ et donc $f(x) = \sqrt{2\displaystyle\int_0^x f}$.

En conséquence f est dérivable sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et en dérivant les deux membres de (E), il vient :

$$\forall x \in \big]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\big[, \quad 2f(x)f'(x) = 2f(x)$$

d'où $f'(x) = 1$ car f ne s'annule pas.

Il en résulte que $\forall x \in \big]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\big[$, $f(x) \geqslant f\big(x_0\big)$ puis que l'ensemble :

$$A = ig\{x \in \big[x_0, +\infty\big[\ / \ \forall\, t \in \big[x_0, x\big], \ f(t) \geqslant f(x_0)\big\},$$

est non majoré, et qu'il est donc égal à $\big[x_0, +\infty\big[$.

Ainsi f est strictement positive sur cet intervalle, puis comme ci-dessus on en déduit $\forall x \in \big[x_0, +\infty\big[$, $f'(x) = 1$ d'où aussi $f(x) = f\big(x_0\big) + x - x_0$.

Posons alors $B = \big\{x \in \mathbb{R}_+^* \ / \ f(x) > 0\big\}$. D'après ce qui précède, B est un intervalle minoré par 0 et non majoré.

En posant $a = \inf B$, deux cas se présentent :

- si $a = 0$ on a $f(a) = 0$ d'après l'équation (E) et, $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = x$,
- si $a > 0$ la continuité de f en a montre que l'on a encore $f(a) = 0$, puis la relation $\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = 0$ avec f

continue négative sur $[0, a]$ donne que f est identiquement nulle sur $[0, a]$. Alors f est définie par $f(x) = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant a$ et $f(x) = x - a$ pour $x \geqslant a$.

3) Remarquons d'abord que f est solution sur $]-\infty, 0]$ si et seulement si $g \ : x \mapsto -f(-x)$ est solution sur $[0, +\infty[$.

Si f est une solution telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant 0$, l'équation (E) donne $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^2(x) \leqslant 0$ donc $f(x) = 0$: f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

On est alors en mesure de donner les quatre types de solutions sur $\mathbb{R}$:

- $f = 0$,
- $f(x) = 0$ sur $]-\infty, a]$, $f(x) = x - a$ sur $[a, +\infty[$ $(a \geqslant 0)$,
- $f(x) = x - b$ sur $]-\infty, b]$, $f(x) = 0$ sur $[b, +\infty[$, $(b \leqslant 0)$,
- $f(x) = x - b$ sur $]-\infty, b]$, $f(x) = 0$ sur $[b, a]$, $f(x) = x - a$ sur $[a, +\infty[$ $(b \leqslant 0 \leqslant a$.

CHAPITRE

5 Séries entières

On rappelle que le symbole $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A. Définition – Rayon de convergence

Définition 1

Une **série entière** ✎ (1) d'une variable complexe (resp. d'une variable réelle) est une série de fonctions $\sum u_n$ pour laquelle il existe une suite complexe (a_n) telle que chaque u_n $(n \in \mathbb{N})$ soit définie par $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto a_n z^n$ (resp. $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto a_n x^n$).

Une telle série sera notée abusivement $\sum a_n z^n$. ✎ (2)

✎ (1) Le qualificatif «entière» provient du fait que chaque u_n est proportionnelle à la fonction «puissance entière» $z \mapsto z^n$.

✎ (2) Cette notation est dangereuse ! En effet, elle peut aussi bien désigner la série entière $\sum u_n$, avec $u_n : z \mapsto a_n z^n$, que la série complexe de terme général $a_n z^n$, avec z fixé dans $\mathbb{C}$.

Remarque

Dans le cas d'une variable réelle, si la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est réelle, on obtient une série entière réelle d'une variable réelle.

Exemples

- $\sum z^n : \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1.$
- $\sum z^{2n+1} : \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0, a_{2n+1} = 1.$
- $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{z^n}{n(n-1)} : a_0 = a_1 = 0, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, a_n = \frac{1}{n(n-1)}.$

1. Opérations algébriques sur les séries entières

- **La somme de deux séries entières** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière associée à la suite $(a_n + b_n)_{\mathbb{N}}$: $\quad \sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n.$
- **Le produit d'une série entière** $\sum a_n z^n$ **par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{C}$ est la série entière associée à la suite $(\lambda a_n)_{\mathbb{N}}$: $\quad \lambda \sum a_n z^n = \sum (\lambda a_n) z^n.$
- **Le produit de deux séries entières** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière associée à la suite $(c_n)_{\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$:

$$\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n. \text{ ✎ (3)}$$

- L'ensemble des séries entières d'une variable complexe (resp. réelle) est, pour ces trois lois, une $\mathbb{C}$-algèbre commutative.
- Le sous-ensemble formé des séries entières réelles d'une variable réelle, est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

✎ (3) On retrouve le produit de Cauchy introduit dans le chapitre 2.

2. Rayon de convergence

Définition 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle.

L'ensemble $I = \left\{ r \in \mathbb{R}_+ \,/\, \sum |a_n|\, r^n \text{ converge} \right\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

La borne supérieure ρ de I, dans $\overline{\mathbb{R}}$, est appelée **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$. ✎ (4)

✎ (4) Tout intervalle I non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ρ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Si I est majoré, ρ est réel.
Si I est non majoré, alors $\rho = +\infty$.

I est non vide car $0 \in I$.
Si r est dans I, on a $[0, r] \subset I$, donc I est bien un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

Remarques

(5) On retiendra pour ρ que celui-ci peut :
– être fini ou infini,
– appartenir ou ne pas appartenir à I.

Tout les cas de figure sont a priori possibles pour l'intervalle I. Plus précisément, celui-ci peut être de l'une quelconques des formes suivantes : (5)

- $I = \{0\}$. Dans ce cas, le rayon de convergence est nul : $\rho = 0$.
Exemple : $\sum n^n z^n$.

Pour tout $r > 0$, avec $v_n = n^n r^n$, on a $v_n > 2^n$ dès que $n > \dfrac{2}{r}$,
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ et $\sum v_n$ est a fortiori divergente.

- $I = [0, +\infty[$. Dans ce cas, le rayon de convergence est infini : $\rho = +\infty$.
Exemple : $\sum \dfrac{z^n}{n!}$.

Pour tout $r > 0$, avec $v_n = \dfrac{r^n}{n!}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0$, donc $\sum v_n$ converge.

- $I = [0, \rho[$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Exemple : $\sum z^n$.
La série géométrique $\sum r^n$, $r \in \mathbb{R}_+$, converge si et seulement si $r < 1$, donc $I = [0, 1[$ et $\rho = 1$.

- $I = [0, \rho]$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Exemple : $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{z^n}{n^2}$.

Pour tout $r > 1$, avec $v_n = \dfrac{r^n}{n^2}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, donc $\sum v_n$ diverge.

Pour tout $r \in [0, 1]$, on a $v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum v_n$ converge. Ainsi, $I = [0, 1]$ et $\rho = 1$.

Définition 3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe (resp. réelle) de rayon de convergence ρ.
L'ensemble $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} / |z| < \rho\}$ (resp. $D_\rho = \{z \in \mathbb{R} / |z| < \rho\} =]-\rho, \rho[$) est appelé **disque ouvert (resp. intervalle ouvert) de convergence**. (6)

(6) On notera que D_ρ est vide lorsque $\rho = 0$.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle et son rayon de convergence ρ :

Théorème 1

La série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in D_\rho$. (7)

(7) Pour $z \in D_\rho$, on a $|z| < \rho$ donc $|z| \in I$.

Théorème 2

Lemme d'Abel

Soit $r_0 > 0$; si la suite $\left(|a_n|\, r_0^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors, quel que soit $r \in [0, r_0[$, la série $\sum |a_n|\, r^n$ est convergente.

S'il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n|\, r_0^n \leqslant A$, alors :

$$\forall r \in [0, r_0[, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n|\, r^n \leqslant A \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

et la convergence de la série $\sum |a_n|\, r^n$ (à termes réels positifs) résulte de celle de la série géométrique de raison $\dfrac{r}{r_0} < 1$ et du critère de domination.

Théorème 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, (resp. $z \in \mathbb{R}$), tel que $|z| > \rho$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, donc la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

☞ Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > \rho$ et $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $\rho < r < |z|$.
Par définition de ρ, la série $\sum |a_n|\, r^n$ est divergente.
Supposons que la suite $\left(|a_n z^n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée alors, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum |a_n|\, r^n$ serait convergente ce qui est exclu. La conclusion en résulte.

3. Calcul du rayon de convergence

Théorème 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle. Son rayon de convergence ρ est défini par :

a) $\rho = \sup\left\{ |z|\,, z \in \mathbb{C}, \sum |a_n|\ |z|^n \text{ converge}\right\}$,

b) $\rho = \sup\left\{ |z|\,, z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$,

c) $\rho = \sup\left\{ |z|\,, z \in \mathbb{C}, \left(a_n z^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$,

d) $\rho = \sup\left\{ |z|\,, z \in \mathbb{C}, \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$.

Remarque : le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, dont tous les coefficients a_k sont nuls à partir d'un certain rang p, est $+\infty$.
Dans ce cas, la suite des sommes partielles est constante à partir du rang p : $\forall n \geqslant p$,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k,$$

on dit qu'il s'agit d'une **série entière polynôme**.

☞ a) par définition de ρ.
b), c) et d) Pour $|z| < \rho$, $\sum a_n z^n$ converge donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$ et $\left(a_n z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour $|z| > \rho$, $\left(a_n z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée donc cette suite ne tend pas vers 0 et $\sum a_n z^n$ diverge.

Corollaire 1

Rayon de convergence et relations de comparaison
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières d'une variable complexe ou réelle et de rayons de convergence respectifs ρ_1 et ρ_2.

a) Si $a_n = \mathcal{O}\left(b_n\right)$ quand $n \to +\infty$, alors $\rho_1 \geqslant \rho_2$.

b) Si $a_n \sim b_n$ quand $n \to +\infty$, alors $\rho_1 = \rho_2$. ✎(8)

✎(8) Cependant, les comportements au bord du disque (ou intervalle) de convergence peuvent être différents.

Théorème 5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle et ρ son rayon de convergence.
Si le rapport $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet quand n tend vers $+\infty$ une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, ✎(9) en posant par convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, on a $\rho = \dfrac{1}{\ell}$.

✎(9) On notera bien qu'il ne s'agit pas là que d'un **cas particulier**. On peut trouver de nombreux exemples de séries entières qui ne rentrent pas dans ce cadre. Voir Exemple 1, c) ou d).

☞ On utilise le critère de d'Alembert.
Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|\, r^{n+1}}{|a_n|\, r^n} = \ell r$ donc, pour $r < \dfrac{1}{\ell}$, $\sum |a_n|\, r^n$ converge et pour $r > \dfrac{1}{\ell}$, $\sum |a_n|\, r^n$ diverge, ce qui prouve que $\rho = \dfrac{1}{\ell}$.

Si $\ell = 0$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|\, r^{n+1}}{|a_n|\, r^n} = 0$ donc $\sum |a_n|\, r^n$ converge et $\rho = +\infty$.

Si $\ell = +\infty$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|\, r^{n+1}}{|a_n|\, r^n} = +\infty$ donc $\sum |a_n|\, r^n$ diverge et $\rho = 0$.

Exemple 1 Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :

a) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$, $(n \geqslant 1)$;

b) $a_n = \dfrac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$, $(n \geqslant 1)$;

c) $a_n = \tan\dfrac{n\pi}{7}$, $(n \geqslant 0)$;

d) $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$, $(n \geqslant 1)$.

On pose $u_n = a_n z^n$, $v_n = |u_n|$ où $z \in \mathbb{C}^*$.

a) $\ell n\, v_n = n\,\ell n|z| + n^2\,\ell n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = n\left(\ell n|z| - 1\right) - \dfrac{1}{2} + o(1)$.

Ainsi, u_n tend vers 0 si et seulement si $|z| < e$ donc $\rho = e$.

b) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)\ |z|}{4\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{|z|}{8}$, donc $\rho = 8$.

c) Quand n décrit $\mathbb{N}$, $\left|\tan\dfrac{n\pi}{7}\right|$ prend quatre valeurs distinctes : $0, \tan\dfrac{\pi}{7}, \tan\dfrac{2\pi}{7}, \tan\dfrac{3\pi}{7}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |u_n| \leqslant |z|^n \tan\dfrac{3\pi}{7}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

D'autre part, pour $|z| = 1$, $|u_{7n+1}| = \tan\dfrac{\pi}{7}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc u_n ne tend pas vers 0. En conclusion, $\rho = \sup\left\{|z|\ /\ z \in \mathbb{C},\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\} = 1$.

d) On a $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{|z^n|}{n}$ donc $|z| < 1$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Pour $|z| > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|^n}{n} = +\infty$ et, d'autre part, on sait que la suite $n \mapsto \sin n$ ne converge pas vers 0, il en est donc de même pour $\left(\dfrac{|\sin n|\ |z^n|}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ainsi, $\rho = \sup\left\{|z|\ /\ z \in \mathbb{C},\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\} = 1$.

4. Opérations algèbriques et rayon de convergence

Théorème 6

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières d'une variable complexe - ou réelle - de rayon de convergence respectifs ρ_1 et ρ_2. Alors :

a) Le rayon de convergence ρ de la série somme $\sum \left(a_n + b_n\right) z^n$ vérifie :

- lorsque $\rho_1 \neq \rho_2$: $\rho = \inf\left(\rho_1\,, \rho_2 big\right)$,
- lorsque $\rho_1 = \rho_2$: $\rho \geqslant \rho_1$.

Donc, dans tous les cas, $\rho \geqslant \inf\left(\rho_1, \rho_2\right)$. ✎ (10)

b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

c) Le rayon de convergence ρ' de la série produit $\sum c_n z^n$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ vérifie :

$$\rho' \geqslant \inf\left(\rho_1, \rho_2\right). \quad ✎ (11)$$

✎ (10) Dans le cas où $\rho_1 = \rho_2$, le rayon ρ de la série somme peut être tel que $\rho > \rho_1$.
Par exemple, $\sum\left(\frac{1}{n!}+1\right) z^n$ et $\sum\left(\frac{1}{n!}-1\right) z^n$ ont le même rayon de convergence égal à 1 et la série somme a un rayon de convergence infini.

✎ (11) Là aussi, l'inégalité peut être stricte. Par exemple, le produit des deux séries entières $1-z$ (série entière polynôme) et $\sum z^n$ est 1. Et on a $\rho_1 = +\infty$, $\rho_2 = 1$, $\rho' = +\infty$.

a) Pour $z \in \mathbb{K}$, tel que $|z| < \inf(\rho_1, \rho_2)$, $\sum (a_n + b_n) z^n$ est absolument convergente comme somme de deux séries absolument convergentes. Donc $\rho \geqslant \inf(\rho_1, \rho_2)$.

Si $\rho_1 < \rho_2$, pour $z \in \mathbb{K}$, tel que $\rho_1 < |z| < \rho_2$, $\sum (a_n + b_n) z^n$ est divergente comme somme d'une série convergente et d'une série divergente. Donc, dans ce cas, $\rho = \inf(\rho_1, \rho_2)$.

b) La multiplication par un scalaire non nul ne modifie pas la nature d'une série numérique.

c) Même raisonnement qu'en a) en utilisant que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergent. (Cf. chapitre 2, théorème 25.)

Corollaire 1

Si $\rho_1 = \rho_2$ et si les suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ sont telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n b_n = 0$, alors la série somme a pour rayon $\rho = \rho_1 = \rho_2$. ✎[12]

✎[12] Dans cette situation, nous dirons que les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont **disjointes** : si a_n est non nul, b_n est nul et réciproquement.

Pour $r > \rho_1$, la suite $(|a_n| \, r^n)$ est non majorée.

Or, dans ce cas, $|a_n + b_n| = |a_n| + |b_n|$, donc $(|a_n + b_n| \, r^n)$ est non majorée, et on en déduit $\rho \leqslant \rho_1$. On conclut avec le théorème 6 a).

Exemple 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \right| = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}} \right| = 2$.

Calculer son rayon de convergence.

De $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+2}} \right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+3}} \right| = 2$, on déduit que les deux séries :

$$\sum a_{2n} z^{2n} \text{ et } \sum a_{2n+1} z^{2n+1}$$

ont le même rayon de convergence égal à $\sqrt{2}$.

$\sum a_n z^n$ étant somme de ces deux séries disjointes, on a encore $\rho = \sqrt{2}$.

Théorème 7

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières d'une variable complexe - ou réelle - de rayons de convergence respectifs ρ_1 et ρ_2 . Alors :

a) Quel que soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < \inf(\rho_1, \rho_2)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

b) Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < \inf(\rho_1, \rho_2)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

D'après le chapitre 2, la formule du a) est vraie dès que les séries sont convergentes et celle du b) dès qu'elles sont absolument convergentse.

B. Convergence uniforme Continuité de la somme

1. Étude dans le disque ouvert de convergence

Théorème 8

Une série entière d'une variable complexe – ou réelle – $\sum a_n z^n$ est normalement – donc uniformément – convergente sur tout disque compact $\overline{D}_R$ inclus dans le disque ouvert de convergence D_ρ : $0 \leqslant R < \rho$.

☞ $\overline{D}_R = \{z \in \mathbb{K} \; / \; |z| \leqslant R\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{z \in \overline{D}_R} \left|a_n z^n\right| = |a_n| \, R^n$.

La convergente normale de $\sum a_n z^n$ sur $\overline{D}_R$ résulte de la convergence de la série numérique $\sum |a_n| \, R^n$ et du critère de domination.

Théorème 9

La somme f d'une série entière de rayon $\rho > 0$ est une fonction continue sur le disque ouvert de convergence.

☞ D'après le théorème précédent, la série entière considérée converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence. Puisqu'il s'agit d'une série de fonctions continues (polynômes), la continuité de la somme résulte du théorème 7 du chapitre 3.

Remarque

Une série entière de rayon de convergence ρ n'est en général pas uniformément convergente sur le disque D_ρ.

Soit, par exemple, la série entière d'une variable réelle $\sum x^n$. On a ici $D_\rho =]-1,1[$.

On sait, (voir chapitre 3, propriété 3), que si une série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur une partie A, alors le terme général tend uniformément vers 0 sur A :

$$\lim_{n\to+\infty} \| \, u_n \, \|_\infty^A = 0.$$

Dans l'exemple proposé, $u_n : x \mapsto x^n$, on a $\|u_n\|_\infty^{]-1,1[} = 1$, la convergence n'est donc pas uniforme sur $]-1,1[$.

2. Étude sur le bord du disque de convergence

✎(13) Tout résultat général concernant cette étude est hors programme, nous nous limitons ici à des cas particuliers.

✎(13)

Soit une série entière réelle ou complexe de rayon $\rho \in \mathbb{R}_+^*$; il est assez fréquent que l'on puisse mettre en évidence une convergence uniforme sur $\overline{D_\rho}$, ou sur $[0,\rho]$ dans le cas d'une série réelle. Ce sera le cas dans les situations suivantes :

1) $\sum |a_n| \, \rho^n$ est convergente : $\sum a_n x^n$ est alors normalement convergente sur $\overline{D_\rho}$,

2) $\sum a_n \rho^n$ est réelle alternée, convergente d'après le critère de Leibniz.
Pour tout $x \in [0,\rho]$, $\sum a_n x^n$ vérifie aussi ce critère, donc :

$$\forall x \in [0,\rho], \qquad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant |a_n| \, x^n \leqslant |a_n| \, \rho^n$$

et la convergence uniforme sur $[0,\rho]$ résulte de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \rho^n = 0$.

Exemple 3 Étudier la continuité des fonctions définies par :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

a) $u_n = \frac{x^n}{n^2}$, pour $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$, le rayon de convergence est donc $\rho = 1$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$ et f est continue sur $[-1, 1]$.

b) $v_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, pour $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = |x|$, le rayon de convergence est donc $\rho = 1$.

La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente, d'après le critère spécial des séries alternées.

On se trouve dans la situation 2) précédente, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$ et g est continue sur $[0, 1]$.

En -1, la série diverge. Finalement, g est continue sur $]-1, 1]$.

C. Séries entières d'une variable réelle Intégration – Dérivation

1. Intégration

Théorème 10

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle de rayon $\rho > 0$. ✎(14)

Pour tout x réel tel que $0 < |x| < \rho$, on a :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

✎(14) La variable est réelle, les coefficients sont complexes ou réels.

☞ C'est une conséquence immédiate de la convergence normale, donc uniforme de la série proposée sur $[0, x]$ (cf. théorème 8) et du théorème d'intégration terme à terme d'une série uniformément convergente sur un segment (cf. chapitre 3, théorème 11).

Théorème 11

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière d'une variable réelle de rayon ρ, la série entière $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, qui est déduite de $\sum a_n x^n$ par **intégration terme à terme**, a le même rayon de convergence.

☞ Soit ρ_1 le rayon de convergence de $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Supposons $|x| < \rho$. Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$ et, puisque $\frac{|a_n|}{n+1} \leqslant |a_n|$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$ donc $|x| \leqslant \rho_1$. Ceci prouve $\rho \leqslant \rho_1$ **(1)**. ✎(15)

✎(15) car on a montré $[0,\rho[\subset[0,\rho_1]$

Supposons $|x| < \rho_1$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x| < \lambda < \rho_1$ donc tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} = 0.$$

✎(16) avec $v_n = (n+1)\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|x|}{\lambda} < 1.$

Remarquons que $(n+1)\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^n$ est, d'après la règle de d'Alembert, le terme général d'une série convergente, ✎(16) on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^n = 0$ et, en écrivant $\left|a_n x^n\right| = \frac{1}{\lambda}\left|a_n \frac{\lambda^{n+1}}{n+1}\right| \bullet (n+1)\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^n$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0.$

On a ainsi prouvé $\rho_1 \leqslant \rho$ **(2)**. De **(1)** et **(2)** on déduit $\rho_1 = \rho$.

Remarques

1) Les deux séries $\sum a_n x^n$ et $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ont le même intervalle ouvert de convergence, mais elles peuvent avoir des comportements différents au bord de cet intervalle.

   Par exemple, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ diverge pour $x = 1$ mais $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge pour $x = 1$.

2) Le théorème 11 est valable pour les séries entières de la variable complexe.

Exemple 4 Montrer que $\forall x \in]-1,1],\quad \ell n(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ (série géométrique).

Par application du théorème 10, on en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \ell n(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

On a vu, dans l'exemple 3, que la somme de la série entière $\sum(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ est continue sur $]-1,1]$, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ell n(1+x) = \ell n\, 2$, d'où,

finalement $\forall x \in]-1,1],\quad \ell n(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$ ✎(17)

✎(17) **Remarque**
La validité de la formule précédente en $x=1$ peut être établie directement, sans recours au théorème 10. (Voir chapitre 2, exemple 2.)

Exemple 5 Montrer que $\forall x \in [-1,1],\quad \mathrm{Arctan}\, x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ (série géométrique).

Par application du théorème 10, on en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \mathrm{Arctan}\, x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

La série $\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ et sur $[-1,0]$ ✎(18) donc la fonction somme est continue sur $[-1,1]$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \mathrm{Arctan}\, x = \frac{\pi}{4}.$$

De même $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = -\frac{\pi}{4}$ d'où, finalement $\forall x \in [-1,1]$, $\mathrm{Arctan}\, x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

✎(18) On se retrouve en effet dans la situation 2 du paragraphe B.2 précédent : la série alternée $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ vérifiant le critère de Leibniz, on obtient : $\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{2n+1}.$

2. Dérivation

✎[19] On donne les mêmes définitions dans le cas de la variable complexe.

Définition 4

Étant donné une série entière d'une variable réelle ✎[19] $\sum a_n x^n$:

- la **série dérivée première** est $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)a_{n+1}x^n$;
- la **série dérivée deuxième** est $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$;
- Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la **série dérivée p ième** est :

$$\sum_{n\geqslant p} n(n-1)\ldots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}x^n.$$

✎[20] Ce résultat reste valable pour les séries entières de la variable complexe.

Théorème 12

Si une série entière d'une variable réelle a pour rayon de convergence ρ, toutes ses séries dérivées ont aussi pour rayon de convergence ρ. ✎[20]

☞ En remarquant que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ se déduit de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n x^{n-1}$ par intégration terme à terme puis en appliquant le théorème 11, on voit qu'une série entière d'une variable réelle et sa série dérivée première ont même rayon de convergence.

La conclusion résulte alors de ce que la série dérivée $(k+1)$ ième est la série dérivée première de la série dérivée k ième. ✎[21]

✎[21] avec une récurrence évidente.

Théorème 13

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle de rayon $\rho > 0$, f sa somme et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f_p la somme de la série dérivée p ième. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\rho,\rho[, f_p(x) = f^{(p)}(x).$$

Relation que l'on peut écrire :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\rho,\rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d^p}{dx^p}\left(a_n x^n\right) = \frac{d^p}{dx^p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right).$$

On dit encore que les dérivations s'effectuent terme à terme à tout ordre.

☞ D'après le théorème 10, on a $\quad \forall x \in]-\rho,\rho[, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t.$

f_1 étant continue sur $]-\rho,\rho[$, on en déduit $\quad f'(x) = f_1(x)$.

Une récurrence immédiate donne la conclusion pour les dérivées p ièmes.

✎[22] C'est un corollaire du théorème 13 et de l'expression de la série dérivée p ième.

Théorème 14

La somme f d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $\rho > 0$ est indéfiniment dérivable sur $]-\rho,\rho[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \quad ✎[22]$$

Théorème 15

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières d'une variable réelle de rayons respectifs ρ et ρ' non nuls.

Supposons $0 < \rho \leqslant \rho'$. S'il existe α, $0 < \alpha < \rho$, tel que :

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \text{alors} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n.$$

✎[23] En effet, $\forall x \in]-\alpha,\alpha[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n=0$.

☞ D'après le théorème 14, on a $\forall n\in\mathbb{N}, a_n-b_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ✎[23] où f est la fonction nulle sur $]-\alpha,\alpha[$, donc $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n-b_n=0$.

Application pratique

Pour montrer qu'une fonction $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage V d'un point $a\in\mathbb{R}$, il suffit d'exhiber une série entière dont la somme coïncide avec $x\mapsto g(a+x)$ sur V.

Exemple 6 Montrer que g, prolongement par continuité de $x\mapsto\dfrac{\ell n\, x}{x-1}$ sur $]0,+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

On a ici $g(1)=1$. Le seul problème est bien sûr en 1. Posons, pour tout $u\in]-1,1[$:

$$f(u)=g(1+u).$$

On a ainsi, pour $u\neq 0$: $f(u)=\dfrac{\ell n(1+u)}{u}$ et $f(0)=1$.

On déduit de l'exemple 4 que : $\forall u\in]-1,1[,\quad f(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{u^n}{n+1}$.

f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,2[$.

D'autre part, g est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ d'où finalement : $g\in\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.

D. Développement en série entière

1. Fonctions développables

Définition 5

Soit $f\ :\ \mathbb{K}\to\mathbb{C}$ définie au voisinage de 0.
On dit que f est **développable en série entière en 0** (ou à l'origine) si et seulement si il existe une série entière $\sum a_nz^n$ de rayon ρ **non nul** et un voisinage U de 0 tels que :

$$\forall z\in U, f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n.$$

☞ On notera que l'on a nécessairement $U\subset\overline{D}_\rho\cap\mathrm{Def}(f)$ où $\mathrm{Def}(f)$ est l'ensemble de définition de f.

Définition 6

Soit $f\ :\ \mathbb{K}\to\mathbb{C}$ définie au voisinage de z_0.
On dit que f est **développable en série entière en** z_0 si et seulement si $g\ :\ z\to f(z_0+z)$ est développable en série entière à l'origine, donc si et seulement si il existe une série entière $\sum a_nz^n$ de **rayon** ρ **non nul** et un voisinage U de z_0 tel que :

$$\forall z\in U,\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n.$$

Exemple

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto\dfrac{1}{1-z}$ est développable en série entière à l'origine.

En effet, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, on a $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$.

Propriété 1

La définition 6 ramène tout problème de développement en série entière à un problème de développement en série entière à l'origine. ✎[24]

✎[24] Dans la suite, nous pourrons nous limiter à des développements à l'origine.

Propriété 2

Si f et g, fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$, sont développables en série entière à l'origine, il en est de même de $\lambda f + \mu g$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et de fg.
L'ensemble des fonctions développables en série entière à l'origine est donc une $\mathbb{C}$-algèbre (sous-algèbre des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$ définie au voisinage de 0). ✎(25)

✎(25) C'est un corollaire du théorème 7.

2. Développement des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Théorème 16

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière à l'origine, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, et cette série est $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. ✎(26)

✎(26) C'est un corollaire du théorème 14.

Définition 7

Étant donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on appelle **série de Taylor** de f en a, la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. ✎(27)

Dans le cas où $a = 0$, $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est dite **série de Mac Laurin** de f.

✎(27) C'est une série entière de la variable $x-a$.

Théorème 17

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière à l'origine (resp. en a), ce développement est unique : c'est la série de Mac Laurin de f (resp. la série de Taylor de f en a).

Théorème 18

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière à l'origine (resp. en a), toutes ses dérivées le sont également.

Exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non développable en série entière ✎(28)

✎(28) Cet exemple montre que les conditions : «f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0» et «la série de Mac Laurin de f a un rayon non nul» ne sont donc pas suffisantes pour assurer que f est développable en série entière à l'origine.

Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
On établit, par récurrence, la propriété (H_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(H_n) : f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$

où P_n est un polynôme.
La propiété (H_0) est vraie.
En supposant (H_n) vraie, on obtient que $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-\frac{1}{x^2}}$ ce qui donne, quand x tend vers 0 :

$$f^{(n+1)}(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3(n+1)}} e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \text{ et donc } \lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0.$$

Dans ces conditions le théorème de caractérisation des applications de classe $\mathcal{C}^1$ (cf. chapitre 4, théorème 11) donne que $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n+1)}(0) = 0$.
En tenant compte du calcul de $f^{(n+1)}(x)$ sur $\mathbb{R}^*$, on a ainsi prouvé que (H_{n+1}) est vraie.
Donc, par récurrence, (H_n) est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
En conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la série de Mac Laurin de f est la série nulle.
Puisque f ne s'annule qu'en 0, il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ce qui prouve que f n'est pas développable en série entière à l'origine.

3. Développements obtenus par la formule de Mac Laurin

Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $V=]-a,a[$, $(a>0)$, telle que la série de Mac Laurin ait un rayon ρ non nul.

3.1 – Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in V$, posons $\quad R_n(x)=f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0).$

On sait que $\quad |R_n(x)|\leqslant\dfrac{|x|^n}{n!}\displaystyle\sup_{t\in[0,x]}\left|f^{(n)}(t)\right|$ c'est-à-dire $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{|x|^n}{n!}\|f^{(n)}\|_\infty^{[0,x]}$.

Par définition, pour que f soit développable en série entière à l'origine, **il faut et il suffit** qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\quad\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0.$

Une **condition suffisante** est donc qu'il existe $\alpha>0$, et $M\in\mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\quad\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M.$$

En effet, on a alors $\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\quad |R_n(x)|\leqslant M\dfrac{\alpha^n}{n!}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$ car $M\dfrac{\alpha^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente.

3.2 – Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in V$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$

Donc $$R_n(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

Par définition, pour que f soit développable en série entière à l'origine, **il faut et il suffit** qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\quad\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t=0.$

Applications

1) Cosinus

La série de Mac Laurin est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ de rayon de convergence $\rho=+\infty$.

La condition suffisante du 3.1 s'applique. En effet :

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\quad\cos^{(n)}x=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\quad\text{donc}\quad\left|\cos^{(n)}x\right|\leqslant 1.$$

Ainsi $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$

2) Sinus $\quad$ Comme ci-dessus, on obtient $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad\sin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

3) Exponentielle népérienne

La série de Mac Laurin est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ de rayon $\rho=+\infty$. Pour tout x réel, l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0,x]$ donne $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{|x|^n}{n!}e^{|x|}$. La conclusion en résulte car, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{|x|^n}{n!}$ tend vers 0 comme terme général d'une série convergente.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.\ ✎^{(29)}$$

✎ (29) On sait maintenant que la fonction $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie au chapitre 2 par : $\forall z\in\mathbb{C},\exp(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ coïncide sur $\mathbb{R}$ avec l'exponentielle népérienne. Cela nous autorise à noter e^z au lieu de $\exp(z)$.

4) $f : x \mapsto (1+x)^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

- f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-1,+\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1,+\infty[, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1), \ldots, (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

- La série de Mac Laurin de f est donc :

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{de rayon } \rho = 1.$$ ✎(30)

✎(30) car avec $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

- Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, le reste intégral d'ordre n de la formule de Mac Laurin sur $[0,x]$ est : $R_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} \displaystyle\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} \mathrm{d}t.$

Étant donné que $\rho = 1$, on se limite à $|x| < 1$. En écrivant :

$$\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} \mathrm{d}t,$$

de $\forall t \in [0,x], \quad \left|\dfrac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$, ✎(31) on déduit :

✎(31) On peut prouver cette inégalité en étudiant les variations de $t \mapsto \frac{x-t}{1+t}$.

$|R_n(x)| \leqslant |\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)| \dfrac{|x|^n}{n!} A(x)$ où on a posé $A(x) = \left|\displaystyle\int_0^x (1+t)^{\alpha-1} \mathrm{d}t\right|$. ✎(32)

✎(32) $A(x)$ ne dépend pas de n.

Pour tout $x \in]-1,1[$, $|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)| \dfrac{|x|^n}{n!}$ est, d'après le critère de d'Alembert, le terme général d'une série convergente, donc il tend vers 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

On retiendra :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\rho = 1).$$

4. Autres méthodes de développement

4.1 – Intégration de développements connus

On applique les théorèmes 10 et 11.

Partant de $\quad \forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad (\rho = 1),$

on a déjà obtenu par cette méthode : ✎(33)

✎(33) Cf. exemple 4 où on a vu que cette formule est encore valable pour $x = 1$.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1).$$

Une conséquence immédiate est :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ell n(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1).$$

- De manière analogue, on a obtenu : ✎(34)

✎(34) Cf. exemple 5.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\rho = 1).$$

Formule encore valable pour $x = 1$ et $x = -1$.

- Partant de $\forall x \in]-1,1[, \dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}, (\rho = 1)$ et $\operatorname{Argth} x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$,

on obtient $\quad \forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Argth} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\rho = 1).$

4.2 – Dérivation de développements connus

On applique les théorèmes 12 et 13.

- Partant de :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ (\rho = 1) \text{ et } \frac{1}{(1-x)^p} = \frac{1}{(p-1)!}\frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}x^{p-1}}\left(\frac{1}{1-x}\right),\ p \in \mathbb{N}^*,$$

on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=p-1}^{+\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)}{(p-1)!}x^{n-p+1} \quad (\rho = 1)$$

ou encore $\displaystyle \frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{n+p-1}^{p-1}\, x^n.$

(35) En particulier, pour développer les fonctions rationnelles.

- Il peut être utile de savoir que le résultat précédent reste vrai sur $\mathbb{C}$. (35)

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto \dfrac{1}{1-tz}$.

Pour tout $t \in \left]-\dfrac{1}{|z|}, \dfrac{1}{|z|}\right[$, on a $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n z^n$ donc :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} t^n z^{n+p}.$$

Comme par ailleurs $f^{(p-1)}(t) = \dfrac{(p-1)!z^{p-1}}{(1-tz)^p}$, il vient :

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[,\ \frac{1}{(1-tz)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} t^n z^n,$$

donc, pour $t = 1$, $\displaystyle \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{n+p-1}^{p-1}\, z^n.$ (36)

(36) **Remarque** : on peut aussi obtenir ce résultat par récurrence en utilisant les produits de séries entières.

4.3 – Combinaison linéaire de développements connus

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad , \quad \operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\rho = +\infty) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\rho = +\infty).$$

- Pour développer une fonction rationnelle (n'admettant pas le pôle 0), on commence par la décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{C}$ éventuellement, pour faire apparaître une combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^p}$.

Par exemple, pour $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x\sqrt{3} + 4}$, les pôles sont $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} - i$ soit aussi $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et la décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\frac{1}{x^2 - 2x\sqrt{3} + 4} = \frac{i}{2\left(x - 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)} - \frac{i}{2\left(x - 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}.$$

d'où :

$$f(x) = \frac{i}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}} - \frac{i}{4}e^{i\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in]-2,2[,\ f(x) = \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} e^{-(n+1)i\frac{\pi}{6}} - \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} e^{(n+1)i\frac{\pi}{6}}$$ (37)

(37) avec $\left|\dfrac{x}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = \dfrac{|x|}{2}$ et $\left|\dfrac{x}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = \dfrac{|x|}{2}$ on voit que ces deux séries ont un rayon de convergence égal à 2.

soit : $$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{6}\right]$$

Le rayon de convergence ρ vérifie $\rho\geqslant 2$.
En observant que, pour $x=2$, la série est grossièrement divergente, on obtient $\rho\leqslant 2$, et finalement $\rho=2$. ✎(38)

✎(38) Il faut prendre garde au fait que lorsque l'on fait une combinaison linéaire de deux séries entières de même rayon de convergence, ρ, le rayon final est a priori supérieur ou égal à ρ. Sur chaque exemple une étude supplémentaire sera alors nécessaire pour en donner la valeur précise.

4.4 – Produit de développements connus

- $\forall x\in]-1,1[,\quad \ell n(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad(\rho=1),$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\quad(\rho=1).$$

On en déduit $\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{\ell n(1+x)}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac1n\right)x^n.$

Le rayon de convergence ρ de cette série est a priori supérieur ou égal à 1. Il suffit de constater que $\left(1+\dfrac12+\dfrac13+\cdots+\dfrac1n\right)$ ne tend pas vers 0 pour conclure que $\rho=1$.

4.5 – Utilisation d'une équation différentielle

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
Supposons avoir exhibé une équation différentielle (E) et un intervalle ouvert I contenant 0 tels que la restriction de f à I soit l'unique solution de (E) sur I vérifiant certaines conditions initiales.
Supposons avoir déterminé une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $\rho>0$ dont la somme est solution de (E) sur $]-\rho,\rho[$ et vérifie les mêmes conditions initiales.

On a alors $\quad\forall x\in I\cap]-\rho,\rho[,\quad f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n.$

- Considérons, par exemple, la fonction exponentielle $\quad\exp: x\mapsto e^x$.

exp est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de $(E): y'-y=0$ telle que $f(0)=1$.

<u>Analyse</u> ✎(39)

✎(39) Pour déterminer une série entière solution du problème, on procède par analyse-synthèse.

Supposons qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon ρ non nul dont la somme S est solution de (E) sur $]-\rho,\rho[$ et vérifie $S(0)=1$. On a alors :

$$\forall x\in]-\rho,\rho[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$$

c'est-à-dire , par unicité du développement en série entière quand il existe :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+1)a_{n+1}=a_n\qquad \textbf{(1)}.$$

Remarquons que la relation **(1)** permet de calculer ρ avant d'avoir déterminé la suite $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}^*}$. En effet, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0\ \text{ donc }\ \rho=+\infty.$$

De **(1)**, on déduit $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\dfrac{a_0}{n!}$. D'autre part, la condition $S(0)=1$ donne $a_0=1$.
Ainsi, il existe au plus une série entière de rayon $\rho>0$ dont la somme S est solution de (E) sur $]-\rho,\rho[$ et vérifie $S(0)=1$, il s'agit de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}\quad(\rho=+\infty)$.

<u>Synthèse</u> ✎(40)

✎(40) On remarquera que la synthèse revient en fait à vérifier que ρ est non nul.

La série précédente a un rayon de convergence non nul, ses coefficients a_n vérifient $a_0=1$ et la relation **(1)** donc sa somme S est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $S(0)=1$.

Conséquence : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.$

Remarque

Il apparaît que cette méthode est exploitable avec des équations différentielles **linéaires** (d'ordre $n = 1, 2$ en général) : $a_0(x)\ y^{(n)} + a_1(x)\ y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\ y = b(x)$ dont les coefficients $a_i(x)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, sont **polynomiaux** (simples) et dont on connaît un développement en série entière à l'origine du second membre $b(x)$.

5. Sommation des séries entières

✎ (41) **Remarque** : on n'oubliera pas de commencer par déterminer le rayon de convergence de la série proposée.

C'est le problème inverse de celui du développement en série entière. ✎ (41)

Il s'agit, en utilisant les résultats établis dans le paragraphe précédent, d'exprimer la somme d'une série entière au moyen des fonctions usuelles.

On utilisera essentiellement deux méthodes.

1) On fait apparaître que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ s'écrit simplement en fonction des développements usuels.

Pour y parvenir on pourra penser à :

- linéariser a_n ce qui décompose $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ou une combinaison linéaire de développements connus ou susceptibles d'être traités au moyen de l'un ou l'autre des procédés suivants :
- reconnaître un produit de développements connus ;
- un changement de variable ;
- une dérivation ou une intégration.

2) On détermine une équation différentielle dont la somme proposée est solution.

✎ (42) Dans cet exemple, on opère en deux temps.
1) une linéarisation de $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$ décompose la somme proposée en combinaison linéaire de développements plus simples ;
2) pour chacun de ceux-ci, un changement de variable ramène à des développements usuels.

✎ (43) On applique le théorème 5.

Exemple 7 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$. ✎ (42)

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{n}{(2n+1)!}$ et $u_n(x) = \dfrac{nx^n}{(2n+1)!}$ · On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2n(2n+3)} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

et le rayon de convergence est $\rho = +\infty$. ✎ (43)

On a $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2n+1)-1}{(2n+1)!}x^n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^n}{(2n)!} - \dfrac{x^n}{(2n+1)!}\right)$

donc $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}\right)$

(toutes ces séries ont un rayon infini).

- Pour $x > 0$, en posant $u = \sqrt{x}$: $S(x) = \displaystyle\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

donc $\quad S(x) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch} u - \dfrac{\operatorname{sh} u}{u}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{x} - \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$.

- Pour $x < 0$, en posant $u = \sqrt{-x}$: $S(x) = \displaystyle\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

donc $\quad S(x) = \dfrac{1}{2}\left(\cos u - \dfrac{\sin u}{u}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\sqrt{-x} - \dfrac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\right)$.

- Pour $x = 0$, il est immédiat que $S(0) = 0$.

On remarquera que ce calcul montre que la fonction S définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} S(x) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\sqrt{-x} - \dfrac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\right) & \text{pour} \quad x < 0 \\ S(0) = 0 & \\ S(x) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{x} - \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) & \text{pour} \quad x > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas une évidence a priori.

Exemple 8 calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$ et $u_n(x) = a_n x^{2n}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = 4x^2$. Donc le rayon de convergence est $\rho = \dfrac{1}{2}$. ✎ (44)

✎ (44) Attention ! on n'est pas dans les conditions d'application du théorème **5**, on revient donc à l'étude de $\sum |a_n x^{2n}|$. D'après la règle de d'Alembert, pour $|x| < \frac{1}{2}$, la série $\sum |a_n x^{2n}|$ converge et pour $|x| > \frac{1}{2}$, elle diverge.

Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$, il vient aussi :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^{2n+1}.$$

Alors la relation $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+3)a_n$ donne :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n x^{2n+1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

d'où :

$$\left(1 - 4x^2\right) f'(x) = 12x f(x).$$

Ainsi f est l'unique solution sur $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$, de l'équation différentielle (E) : $\left(1 - 4x^2\right)y' - 12y = 0$. ✎ (45)

✎ (45) On pourra éventuellement consulter le chapitre 8.

On en déduit :

$$f(x) = \left(1 - 4x^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

E. Fonctions usuelles d'une variable complexe

1. La fonction exponentielle complexe

Définition 8

La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est appelée fonction **exponentielle complexe**.

On sait que, pour tout x réel, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. La fonction ainsi définie est donc un prolongement de l'exponentielle réelle, ce qui permet de noter, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$.

Propriété 3

$z \mapsto e^z$ est une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. ✎ (46)

✎ (46) C'est la somme d'une série entière de rayon $\rho = +\infty$.

Propriété 4 ✎(47)

a) $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

b) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$.

c) $\exp : z \mapsto e^z$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

d) $\forall z \in \mathbb{C}, e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

e) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, \left(e^z\right)^n = e^{nz}$.

✎(47)
a) Voir chapitre 2, Exemple 17.
b) S'il existait $z_1 \in \mathbb{C}$, tel que $e^{z_1} = 0$, d'après a), e^z serait identiquement nulle.
d) et e) sont des propriétés du morphisme de groupes.

Propriété 5

Module et argument de e^z

$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, $\arg e^z = \mathrm{Im}(z)$.

☞ Posons $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $e^z = e^x e^{iy}$.

En revenant à la définition :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$e^{iy} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

il vient donc $\quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Exemple 9 Développer en série entière à l'origine la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x \sin x$. ✎(48)

✎(48) f est développable en série entière de rayon de convergence infini car c'est le produit de deux telles fonctions.

Écrivons $\quad f(x) = \dfrac{1}{2i}\left[e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}\right] = \dfrac{1}{2i} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(1+i)^n - (1-i)^n\right] \frac{x^n}{n!}$.

De $(1+i) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $(1-i) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on déduit :

$$\frac{1}{2i}\left[(1+i)^n - (1-i)^n\right] = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin \frac{n\pi}{4} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n \sin \frac{n\pi}{4} \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Notons que $\quad \sin \dfrac{n\pi}{4} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 4p \\ \dfrac{(-1)^p}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad n = 4p+1 \\ (-1)^p & \text{si} \quad n = 4p+2 \\ \dfrac{(-1)^p}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad n = 4p+3 \end{cases}$

d'où $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^{2p}}{(4p+1)!} x^{4p+1} + \frac{(-1)^p 2^{2p+1}}{(4p+2)!} x^{4p+2} + \frac{(-1)^p 2^{2p+1}}{(4p+3)!} x^{4p+3}$.

Exemple 10 Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière :

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n \sin n\alpha}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

La série $\sum \dfrac{|x|^n}{n!}$ converge quel que soit x donc, avec $\left|\dfrac{x^n \sin n\alpha}{n!}\right| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}$, on voit que le rayon de convergence de la série proposée est infini.

✎(49) On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Notons f la fonction somme. De $\sin n\alpha = \operatorname{Im} e^{in\alpha}$, on déduit :

$$f(x) = \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(xe^{i\alpha}\right)^n}{n!} = \operatorname{Im} e^{xe^{i\alpha}} \quad ✎(49)$$

soit $\quad f(x) = e^{x\cos\alpha} \sin(x \sin\alpha)$.

Propriété 6

Équation $e^z = a \quad a \in \mathbb{C}$.

☞ Posons $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la propriété 5, $e^z = a$ équivaut à $e^x = |a|$, $y = \arg(a) \pmod{2\pi}$, donc :

$$z = \ell n\,|a| + i \arg a + 2ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

✎(50) On prendra bien garde au fait que l'on ne définit pas **le** logarithme d'un nombre complexe.

Les solutions de cette équation sont appelées **les** logarithmes de a. ✎(50)

Application

$e^{z'} = e^z$ équivaut à $e^{z'-z} = 1$ donc à $z' = z + 2ik\pi$; $k \in \mathbb{Z}$,

le noyau de la fonction exponentielle ✎(51) est $2i\,\pi\,\mathbb{Z}$.

✎(51) morphisme de groupes de $(\mathbb{C},+)$ dans $(C^*,\times)$.

Propriété 7

L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ définit une bijection continue de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ dont l'application réciproque $u \mapsto \operatorname{Arg} u$ est continue. ✎(52)

Pour $u = x + iy$ avec $x^2 + y^2 = 1$ et $x \neq -1$, on a :

$$\operatorname{Arg} u = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{1+x}\right).$$

✎(52) Rappelons que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des complexes de module égal à 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \setminus |z| = 1\}$.

☞ Notons f l'application définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $-1 < \cos\theta \leqslant 1$ donc $f\big(]-\pi, \pi[\big) \subset \mathbb{U} \setminus \{-1\}\big\}$ **(1).**

Montrons maintenant que tout élément $u = x + iy$ de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ a un antécédent θ et un seul par f dans $]-\pi, \pi[$.

<u>Analyse</u> : Si $\theta \in]-\pi, \pi[$ vérifie $f(\theta) = u$, on a $\cos\theta = x$ et $\sin\theta = y$.

Puisque $x \neq -1$, on en déduit $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{y}{1+x}$, donc $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y}{1+x}$ ce qui, compte tenu de $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, donne $\frac{\theta}{2} = \operatorname{Arctan}\frac{y}{1+x}$. ✎(53)

✎(53) À ce niveau, on voit que u a au plus un antécédent par f.

<u>Synthèse</u> : Avec $\theta = 2\operatorname{Arctan}\frac{y}{1+x}$, on a $-\pi < \theta < \pi$ et le calcul donne : ✎(54)

✎(54) en utilisant $y^2 = 1 - x^2$.

$$\cos\theta = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{(1+x)^2 - y^2}{(1+x)^2 + y^2} = \frac{2x(1+x)}{2(1+x)} = x$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2y(1+x)}{2(1+x)} = y$$

c'est-à-dire $\quad e^{i\theta} = u$ ou encore $f(\theta) = u$.

On a ainsi prouvé que tout élément de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ a un antécédent et un seul dans $]-\pi, \pi[$.

Compte tenu de **(1)**, on en déduit que $f\big(]-\pi, \pi[\big) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ et que f est une bijection de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$. La bijection réciproque f^{-1} est définie par :

$$f^{-1} \; : \mathbb{U} \setminus \{-1\} \to]-\pi, \pi[, \quad x + iy \mapsto 2\operatorname{Arctan}\frac{y}{1+x}.$$

Corollaire 1

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left(\mathbb{R}_- \times \{0\}\right)$, il existe (r, θ) unique, $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in]-\pi, \pi[$, tel que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et on a :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \ , \ \theta = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

☞ On applique la propriété 7 à $z = \dfrac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Corollaire 2

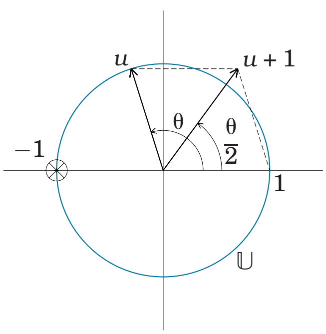
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, tout point M situé en dehors de la demi-droite $Ox^- = \left\{(x, 0) \setminus x \in \mathbb{R}_-\right\}$ admet un et un seul couple (r, θ) de coordonnées polaires tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Si $M = O + x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, on a alors :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \ , \ \theta \in 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

☞ C'est la version géométrique du corollaire 1.

Remarques



1) La formule précédente exprime que : $\mathrm{Arg}\, u = 2\,\mathrm{Arg}(u+1)$.

2) Posons $\mathbb{U}^+ = \{u \in \mathbb{U} \ / \ \mathrm{Im}\, u > 0\}$ et $\mathbb{U}^- = \{u \in \mathbb{U} \ / \ \mathrm{Im}\, u < 0\}$.

Pour $u = x + iy \in \mathbb{U}^+$, on a $y = \sqrt{1-x^2}$ d'où :

$$f^{-1}(u) = 2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

et pour $u \in \mathbb{U}^-$, $y = -\sqrt{1-x^2}$ d'où :

$$f^{-1}(u) = -2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Il en résulte :

$$\lim_{\substack{u \to -1 \\ u \in \mathbb{U}^+}} f^{-1}(u) = \pi \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{u \to -1 \\ u \to \mathbb{U}^-}} f^{-1}(u) = -\pi,$$

donc f^{-1} ne se prolonge pas en une application continue sur $\mathbb{U}$.

2. Fonctions circulaires et hyperboliques complexes

Définition 9

Les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{llll}
\cos & : & z \mapsto \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
\sin & : & z \mapsto \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\mathrm{ch} & : & z \mapsto \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
\mathrm{sh} & : & z \mapsto \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{array}$$

sont respectivement appelées cosinus, sinus, cosinus hyberbolique et sinus hyperbolique. Ce sont des applications continues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui prolongent les fonctions réelles connues sous les mêmes dénominations.

Propriété 8

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{ch} iz = \cos z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$, $\sin iz = i \operatorname{sh} z$

Propriété 9

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = e^{z} \quad , \quad \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = e^{-z} \quad , \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$
$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \quad , \quad \cos z - i \sin z = e^{-iz} \quad , \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

En conséquence, toutes les formules de la trigonométrie circulaire ou hyperbolique, établies dans le champ réel, restent valables dans $\mathbb{C}$.

Remarque

La propriété 8 permet de passer des formules de la trigonométrie hyperbolique aux formules de la trigonométrie circulaire ou inversement.

Exemple

On sait que $\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z'$ donc :

$$\operatorname{ch}(z+z') = \cos(iz+iz') = \cos iz \cos iz' - \sin iz \sin iz' = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z'.$$

Propriété 10

Pour tout $(z, z_0) \in \mathbb{C}^2$, on a :

a) $\cos z = \cos z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi$ ou $z = -z_0 + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$
b) $\sin z = \sin z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi$ ou $z = \pi - z_0 + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$
c) $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} z_0 \iff z = z_0 + 2ik\pi$ ou $z = -z_0 + 2ik\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$
d) $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} z_0 \iff z = z_0 + 2ik\pi$ ou $z = i\pi - z_0 + 2ik\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

☞ a) s'écrit $e^{iz} + e^{-iz} = e^{iz_0} + e^{-iz_0}$, soit en posant $X = e^{iz}$ et $X_0 = e^{iz_0}$:

$$X + \frac{1}{X} = X_0 + \frac{1}{X_0} \quad \text{ou encore} \quad X^2 - X\left(X_0 + \frac{1}{X_0}\right) + 1 = 0$$

Les racines de cette équation du second degré sont évidentes, il s'agit de X_0 et $\dfrac{1}{X_0}$.

Ainsi a) donne $e^{iz} = e^{iz_0}$ donc $z = z_0 + 2k\pi$ ou $e^{iz} = e^{-iz_0}$ donc $z = -z_0 + 2k\pi$.

b) s'écrit $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z_0\right)$ et la conclusion résulte alors du a).

c) s'écrit $\cos iz = \cos iz_0$ et on conclut avec le a).

d) s'écrit $\sin iz = \sin iz_0$ et on conclut avec le b).

Corollaire 1

Les fonctions cos et sin sont périodiques, l'ensemble de leurs périodes est $2\pi\mathbb{Z}$.

Corollaire 2

Les fonctions ch et sh sont périodiques, l'ensemble de leurs périodes est $2i\pi\mathbb{Z}$.

Corollaire 3

$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, $\sin z = 0 \iff z = 0 \pmod{\pi}$.

Corollaire 4

$\operatorname{ch} z = 0 \iff z = i\frac{\pi}{2} \pmod{i\pi}$, $\operatorname{sh} z = 0 \iff z = 0 \pmod{i\pi}$.

Exemple 11 Résoudre l'équation $\sin z = \sqrt{2}$, $(z \in \mathbb{C})$.

À $z \in \mathbb{C}$, associons $u = e^{iz}$, alors z est solution si et seulement si

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(u - \frac{1}{u}\right) = \sqrt{2} \quad , \quad u^2 - 2i\sqrt{2}u - 1 = 0 \quad \text{soit} \quad u \in \{i(\sqrt{2}+1), i(\sqrt{2}-1)\}$$

Compte tenu de la proriété 6 (résolution de $e^z = a$),

$$e^{iz} = i(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2}+1)e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ équivaut à } z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\,\ell n(\sqrt{2}+1) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

tandis que $e^{iz} = i(\sqrt{2}-1)$ équivaut à $z = \frac{\pi}{2} + 2h\pi - i\,\ell n(\sqrt{2}-1)$ avec $h \in \mathbb{Z}$.

En remarquant que $-\ell n(\sqrt{2}-1) = \ell n(\sqrt{2}+1)$, on voit que ces solutions sont conjuguées deux à deux.

Exemple 12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ l'équation $\sin^3 z + \cos^3 z = 1$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, écrivons :

$$1 - \sin^3 z - \cos^3 z = \sin^2 z - \sin^3 z + \cos^2 z - \cos^3 z$$

$$1 - \sin^3 z - \cos^3 z = (1 - \cos^2 z)(1 - \sin z) + (1 - \sin^2 z)(1 - \cos z)$$

$$1 - \sin^3 z - \cos^3 z = (1 - \cos z)(1 - \sin z)(2 + \sin z + \cos z)$$

Les solutions sont donc les complexes vérifiant :

$$\cos z = 1 \quad \text{ou} \quad \sin z = 1 \quad \text{ou} \quad 2 + \sin z + \cos z = 0$$

- $\cos z = 1$ équivaut à $z \in 2\pi\mathbb{Z}$;
- $\sin z = 1$ équivaut à $z \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$;
- $2 + \sin z + \cos z = 0$ s'écrit $\sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$,

et d'après l'exemple précédent, équivaut à :

$$z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi + i\,\ell n(\sqrt{2}+1),\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{3\pi}{4} + 2h\pi - i\,\ell n(\sqrt{2}+1),\ h \in \mathbb{Z}.$$

F. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 1$.

La notion d'exponentielle sur une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie a été introduite dans le chapitre 2 et, dans le suivant (voir l'exemple 2), nous avons démontré que la fonction $\exp$ est continue sur $\mathcal{A}$.

$\mathcal{L}(E)$ muni de la norme $\|\cdot\|$, subordonnée à la norme de E, est une algèbre normée de dimension finie.

$(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ étant une base fixée de E, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $u_A \in \mathcal{L}(E)$ unique tel que $A = \mathrm{mat}_{(e_i)}\, u_A$. En posant $\|A\| = \|u_A\|$, on définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une structure d'algèbre normée.

On dispose donc de la notion de fonction exponentielle sur $\mathcal{L}(E)$ et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notation

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), l'exponentielle de u (resp. de A) est aussi notée e^u (resp. e^A).

On a donc : $$e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \quad \text{et} \quad e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Les applications $u \mapsto e^u$ et $A \mapsto e^A$ ainsi définies sont continues sur $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement.

Exemples

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad e^{\lambda I_n} = e^{\lambda} I_n$ (en particulier $e^0 = I_n$).
- Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\exp\left[\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\right] = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}\right).$$

Propriété 11

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $u_A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = \operatorname{mat}_{(e_i)} u_A$. On a alors :

$$e^A = \operatorname{mat}_{(e_i)} e^u.$$

Il suffit d'observer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} = \operatorname{mat}_{(e_i)}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k!}\right)$$

et de faire tendre m vers $+\infty$ en notant que l'application $\operatorname{mat}_{(e_i)}$ est continue car c'est une application linéaire sur un espace de dimension finie. ✎ (55)

✎ (55) On peut aussi noter qu'avec le choix qui a été fait pour les normes de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cette application est une isométrie.

Théorème 19

Si u et v (resp. A et B) sont deux éléments permutables de $\mathcal{L}(E)$ (resp. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), on a :

$$e^{u+v} = e^u\, e^v \quad \text{(resp. } e^{A+B} = e^A\, e^B\text{)}. \text{ ✎ (56)}$$

✎ (56) On utilise ici des notations simplifiées en remplaçant, pour tous u, v de $\mathcal{L}(E)$, $u_0 v$ par uv. Ainsi $e^u e^v$ remplace $e^u \circ e^v$.

D'après les remarques préliminaires, il suffit de démontrer ce résultat pour deux éléments permutables d'une algèbre normée $\mathcal{A}$.

Montrons que $\quad D_m(u,v) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2m} \frac{(u+v)^k}{k!} - \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{u^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{v^j}{j!}\right) \quad$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, le théorème en résultera.

On a $\quad D_m(u,v) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2m} \frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!} - \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant m}} \frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!}.$ ✎ (57) Ainsi :

✎ (57) puisque $u\,v = v\,u$, la formule du binôme donne :

$$\sum_{k=0}^{2m} \frac{(u+v)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2m}\sum_{i=0}^{k} \frac{u^i}{i!}\frac{v^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2m} \frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!}$$

$$D_m(u,v) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{u^i}{i!} \sum_{j=m+1}^{2m-i} \frac{v^j}{j!} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{v^j}{j!} \sum_{i=m+1}^{2m-j} \frac{u^i}{i!}$$

et, compte tenu de $\| u^i \| \leqslant \| u \|^i$ et $\| v \|^j \leqslant \| v \|^j$ pour tout (i,j),

$$\| D_m(u,v) \| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\| u \|^i}{i!} \sum_{j=m+1}^{2m-i} \frac{\| v \|^j}{j!} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\| v \|^j}{j!} \sum_{i=m+1}^{2m-j} \frac{\| u \|^i}{i!}$$

c'est-à-dire $\| D_m(u,v) \| \leqslant \displaystyle\sum_{i=0}^{2m} \frac{\left(\| u \| + \| v \|\right)^k}{k!} - \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{\| u \|^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{\| v \|^j}{j!}\right).$

La conclusion résulte alors de :

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{2m} \frac{\left(\| u \| + \| v \|\right)^k}{k!} = e^{\| u \| + \| v \|} = e^{\| u \|}\, e^{\| v \|} = \lim_{m \to +\infty}\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{\| u \|^i}{i!}\right) \lim_{m \to +\infty}\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{\| v \|^j}{j!}\right) \text{ ✎ (58)}$$

✎ (58) On pourra mettre cette démonstration en parallèle avec celle du théorème 25 du chapitre 2 (produit de Cauchy de deux séries complexes absolument convergentes).

Remarque

Il faut bien prendre garde au fait que l'hypothèse de permutabilité de u et v (resp. A et B) est absolument indispensable.

Exemple : considérons les matrices $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

N_1 et N_2 sont non permutables :

$$N_1N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ N_2N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'autre part, elles sont nilpotentes d'indice 2 donc :

$$e^{N_1} = I_2 + N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } e^{N_2} = I_2 + N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer $e^{N_1+N_2}$, nous utilisons les résultats des chapitres 5 et 7 du tome d'algèbre.

La matrice $N_1 + N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans le groupe orthogonal $\mathbb{O}_2(\mathbb{R})$.

Ses valeurs propres étant 1 et -1, il existe deux matrices P_1 et P_2 de projections orthogonales telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left(N_1 + N_2\right)^k = P_1 + (-1)^k P_2\,.$$

Avec $I_2 = P_1 + P_2$ et $N_1 + N_2 = P_1 - P_2$, on obtient :

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

puis :

$$e^{N_1+N_2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(N_1+N_2\right)^k}{k!} = eP_1 + e^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 \\ \operatorname{sh} 1 & \operatorname{ch} 1 \end{bmatrix}.$$

Avec $e^{N_1}e^{N_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $e^{N_2}e^{N_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on vérifie donc que dans cet exemple on a :

$$e^{N_1+N_2} \neq e^{N_1}e^{N_2} \text{ et } e^{N_1+N_2} \neq e^{N_2}e^{N_1}.$$

Théorème 20

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) , e^u, (resp. e^A), est inversible avec :

$$(e^u)^{-1} = e^{-u} \quad \text{(resp. } (e^A)^{-1} = e^{-A}\text{)}.$$

☞ C'est un corollaire du théorème 19 avec $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (resp. $A^0 = I_n$).

Théorème 21

$u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) étant fixée, l'application $t \mapsto e^{tu}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$ (resp. $t \mapsto e^{tA}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$t \mapsto u \circ e^{tu} \quad \text{(resp. } t \mapsto Ae^{tA}\text{)}.$$

☞ Ici encore il suffit d'établir ce résultat dans $\mathcal{A}$ algèbre normée de dimension finie.

Pour $u \in \mathcal{A}$, considérons la série $\sum f_k$ avec $f_k : t \mapsto \dfrac{t^k u^k}{k!}$.

On a ici affaire à une série d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{A}$, convergente sur $\mathbb{R}$ dont toutes les séries dérivées sont normalement, donc uniformément, convergentes sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$. D'où la conclusion.

Remarques

1) $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (tu)^k \circ u = u \circ (tu)^k$, donc $\quad u \circ e^{tu} = e^{tu} \circ u$.
2) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $p^{\text{ème}}$ de $t \mapsto e^{tu}$ (resp. $t \mapsto e^{tA}$) est $t \mapsto u^p \circ e^{tu}$ (resp. $t \mapsto A^p e^{tA}$).

Calcul de exp A

On trouvera des exemples dans le tome d'algèbre, chapitre 5 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.

Méthodes

L'essentiel

I. Rayon de convergence

Pour toute série entière $\Sigma a_n z^n$, notons $\rho\left(\Sigma\, a_n z^n\right)$ son rayon de convergence.

✔ **Si l'on veut** montrer que $\rho\left(\Sigma\, a_n z^n\right) \geqslant R$, $R \in \mathbb{R}_+$,

- **on peut**
  - essayer d'exhiber $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| = R$ et «$\Sigma a_n z^n$ converge»
  - essayer d'exhiber $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| = R$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n z^n = 0$
  - prouver que pour tout $r \in [0, R[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n r^n = 0$ ou que, pour tout $r \in [0, R[$, $\Sigma a_n r^n$ converge .

    → Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2, 3

✔ **Si l'on veut** montrer que $R \geqslant \rho\left(\Sigma\, a_n z^n\right)$, $R \in \mathbb{R}_+$,

- **on peut**
  - essayer d'exhiber $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| = R$ et «$\Sigma a_n z^n$ diverge»
  - essayer d'exhiber $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| = R$ et $(a_n z^n)_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0
  - prouver que pour tout $r \in]R, +\infty[$, $\left(a_n r^n\right)_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 ou que, pour tout $r \in]R, +\infty[$, $\Sigma a_n r^n$ diverge.

    → Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2

✔ **Si l'on veut** montrer que $\rho\left(\Sigma\, a_n z^n\right) = \rho\left(\Sigma\, b_n z^n\right)$,

- **on peut**
  - montrer les deux implications :

    (1) $|z| < \rho\left(\Sigma\, a_n z^n\right) \Rightarrow \Sigma b_n z^n$ converge

    (2) $|z| < \rho\left(\Sigma\, b_n z^n\right) \Rightarrow \Sigma a_n z^n$ converge
  - montrer les deux implications :

    (1) $|z| < \rho\left(\Sigma\, a_n z^n\right) \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} b_n z^n = 0$

    (2) $|z| < \rho\left(\Sigma\, b_n z^n\right) \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n z^n = 0$

    → Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

II. Développement en série entière

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une fonction est développable en série entière,

- **on peut**
  - penser à évaluer le reste d'ordre n de la série de Taylor au moyen de la formule de Taylor avec reste intégral.

    → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

  - En présence d'une série double, observer si une permutation des sommations (qu'il faut évidemment justifier) fait apparaître une série entière.

    → Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

✔ **Si l'on veut** calculer le développement en série entière d'une fonction f,

▪ **on peut**

▪ essayer d'écrire f comme combinaison linéaire (ou éventuellement produit) de fonctions dont les développements sont connus. Un cas favorable est celui des fractions rationnelles pour lesquelles une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ permet d'atteindre ce but.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7

▪ Examiner si la dérivée (ou une dérivée d'ordre supérieur) est facilement développable. Ce sera, en particulier, le cas si cette dérivée est une fraction rationnelle.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 8, 9

▪ en ultime recours, utiliser la méthode de l'équation différentielle.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 10

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

▪ **on peut** essayer de trouver une série entière dont la somme coïncide avec f sur I.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 11

III. Sommation des séries entières

✔ **Si l'on veut** après avoir vérifié que le rayon de convergence ρ est non nul, calculer une somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

▪ **on peut**

▪ essayer de retrouver des développements usuels au besoin en effectuant quelques manipulations sur le coefficient a_n et la variable x :

▪ observer que a_n est

– le coefficient d'ordre n d'un développement connu,

– combinaison linéaire des coefficients d'ordre n de développements connus,

– le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy de développements connus,

▪ factoriser une puissance de x

▪ effectuer un changement de variable du type $x = t^p$ avec $p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2$;

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 12

▪ en utilisant une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$, trouver une équation différentielle dont S est solution sur $]-\rho, \rho[$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 13

✔ **Si l'on veut** sachant qu'elle est convergente, calculer la somme d'une série numérique Σb_n

▪ **on peut** penser à introduire une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ pour laquelle il existe x_0 appartenant au domaine de convergence tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ b_n = a_n x_0^n$

▪ si $|x_0| < \rho$, on conclut en calculant la fonction somme S sur $]-\rho, \rho[$: $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = S(x_0)$

▪ si $|x_0| = \rho$, dans le cas où x_0 est réel, on montre que la série entière est uniformément convergente sur $[0, x_0]$. Alors le calcul de $S(x)$ pour $|x| < \rho$ permet de conclure au prix d'un passage à la limite : $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{x \to x_0} S(x)$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 14

Mise en œuvre

I. Rayon de convergence

Ex. 1

On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon $\rho > 0$.

Montrer que $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Indications

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, écrire $\left|\frac{a_n z^n}{n!}\right|$ en fonction de $|a_n| \left(\frac{\rho}{2}\right)^n$.

Solution

Posons $R = \frac{\rho}{2}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| R^n = 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $r = |z|$, écrivons $\left|\frac{a_n z^n}{n!}\right| = |a_n| R^n \frac{r^n}{R^n n!}$.

Puisque $\frac{r^n}{R^n n!}$ est, d'après la règle de d'Alembert, le terme général d'une série convergente, il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{r^n}{R^n n!} = 0$ et en conséquence :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n z^n}{n!} = 0.$$

Le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est donc $+\infty$.

Commentaires

Remarquer que $\rho > 0$ donne $R < \rho$.

C'est le terme général du développement de $e^{\frac{r}{R}}$.

On peut aussi écrire que :

$$\frac{a_n}{n!} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^n n!}\right)$$

et conclure avec le corollaire du théorème 4.

Ex. 2

Soit $(a_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$.

Soit ρ, ρ_1, ρ_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma\, \alpha_n x^n$, et $\Sigma\, \beta_n x^n$.

Montrer que $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$.

Indications

Montrer que $r < \min(\rho_1, \rho_2) \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n r^n = 0$,

et que $r < \rho \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n r^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n r^n = 0$.

Solution

Supposons $\min(\rho_1, \rho_2) > 0$.

Pour $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < \min(\rho_1, \rho_2)$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n r^n = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \beta_n r^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} a_n r^n = 0.$$

Il en résulte que $r \leqslant \rho$.

Commentaires

$\rho = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ / \lim a_n r^n = 0\}$.

On a ainsi prouvé que $\left[0, \min\left(\rho_1, \rho_2\right)\right[\subset \left[0, \rho\right]$ donc que :

$$\min\left(\rho_1, \rho_2\right) \leqslant \rho. \qquad \textbf{(1)}$$

Remarquons enfin que cette inégalité reste vraie dans le cas où :
$$\min\left(\rho_1, \rho_2\right) = 0.$$

Supposons maintenant que $\rho > 0$.
Pour $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < \rho$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n r^n = 0$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n r^n = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \beta_n r^n = 0.$$

On en déduit $r \leqslant \rho_1$ et $r \leqslant \rho_2$ donc $r \leqslant \min\left(\rho_1, \rho_2\right)$.
On a ainsi prouvé que $\left[0, \rho\right[\subset \left[0, \min\left(\rho_1, \rho_2\right)\right]$, donc que :

$$\rho \leqslant \min\left(\rho_1, \rho_2\right). \qquad \textbf{(2)}$$

Comme précédemment cette inégalité reste vraie lorsque $\rho = 0$.

Finalement **(1)** et **(2)** donnent $\rho = \min\left(\rho_1, \rho_2\right)$.

On considère les parties réelle et imaginaire de $a_n r^n$.

Ex. 3

Étant donnés une suite complexe $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ et un réel α, montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n e^{\ln^\alpha n} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Indications

Montrer que les rayons de convergence ρ_1 et ρ_2 vérifient $\rho_1 \leqslant \rho_2$ et $\rho_2 \leqslant \rho_1$.

Solution

Notons ρ_1 le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et
ρ_2 celui de $\sum a_n e^{\ln^\alpha n} z^n$.

L'inégalité $|a_n| \leqslant |a_n|\, e^{\ln^\alpha n}$ donne $\rho_1 \geqslant \rho_2$. **(1)**

Remarquons que si $\rho_1 = 0$, d'après **(1)** on a $\rho_2 = \rho_1 = 0$.

Supposons maintenant $\rho_1 > 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho_1$. il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|z| < \lambda < \rho_1$.

Écrivons alors $|a_n|\, e^{\ln^\alpha n} |z|^n = |a_n|\, \lambda^n \bullet e^{\ln^\alpha n} \left(\dfrac{|z|}{\lambda}\right)^n$ et posons :

$$v_n = e^{\ln^\alpha n} \left|\frac{z}{\lambda}\right|^n.$$

Avec $\left|\dfrac{z}{\lambda}\right| < 1$ et :

$$n^2 v_n = e^{n \ln\left|\frac{z}{\lambda}\right| + \ln^\alpha n + 2 \ln n} = e^{n \ln\left|\frac{z}{\lambda}\right| + o(n)},$$

on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 v_n = 0$, donc la série numérique $\sum v_n$ converge d'après la règle de Riemann et son terme général tend vers 0.
Puisque $\lambda < \rho_1$, on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \lambda^n = 0$ et finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n|\, e^{\ln^\alpha n} |z|^n = 0 \text{ donc } |z| \leqslant \rho_2.$$

On a ainsi prouvé que $|z| < \rho_1 \;\Rightarrow\; |z| \leqslant \rho_2$ donc $\rho_1 \leqslant \rho_2$. **(2)**

En conclusion, les inégalités **(1)** et **(2)** donnent $\rho_1 = \rho_2$.

Commentaires

C'est le corollaire du théorème 4.

La convergence de $\sum v_n$ peut aussi s'obtenir avec la règle de d'Alembert. En effet, un développement limité donne :
$\ln^\alpha(n+1) - \ln^\alpha n = \dfrac{\alpha \ln^{\alpha-1} n}{n} + o\left(\dfrac{\ln^{\alpha-1} n}{n}\right)$,
donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left|\dfrac{z}{\lambda}\right| \exp\left(\dfrac{\alpha \ln^{\alpha-1} n}{n} + o\left(\dfrac{\ln^{\alpha-1} n}{n}\right)\right)$
tend vers $\left|\dfrac{z}{\lambda}\right| < 1$ quand n tend vers $+\infty$.

II. Développement en série entière

Ex. 4

Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1) Montrer que s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-a,a[, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| a^n \leqslant b\, n!$$

alors f est développable en série entière à l'origine.

2) Montrer que si f et toutes ses dérivées sont positives, f est développable en série entière de rayon de convergence infini.

Indications

1) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0,x]$ pour $x \in]-a,a[$.

2) Pour tout $a > 0$ et tout $x \in]-a,a[$, utiliser la formule de Taylor avec reste intégral sur $[x, x+a]$.

Solution

1) D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

donc, pour $x \in]-a,a[$, on obtient :

$$|R_n(x)| \leqslant b \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} \mathrm{d}t \right|$$

c'est-à-dire
$$|R_n(x)| \leqslant b \left|\frac{x}{a}\right|^{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{x}{a}\right|^{n+1} = 0$, on en déduit que f coïncide sur $]-a,a[$ avec la somme de sa série de Mac-Laurin.

2) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et x réel quelconque, écrivons la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x+a) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} a^k + \int_x^{a+x} \frac{(a+x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Puisque f est positive sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes ses dérivées, il en résulte :

$$f(x+a) \geqslant \frac{f^{(n)}(x)}{n!} a^n.$$

Alors, en posant $b = \| f \|_{\infty}^{[0,2a]}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-a,a[, \quad 0 \leqslant f^{(n)}(x) a^n \leqslant b\, n!\,.$$

La première question montre que f coïncide sur sur $]-a,a[$ avec la somme de sa série de Mac-Laurin donc, puisque a est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$, le rayon de convergence de ce développement en série entière est infini.

Commentaires

La fonction $t \mapsto (x-t)^n$ étant de signe constant sur $[0,x]$, on a : $\left| \int_0^x |x-t|^n \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^x (x-t)^n \mathrm{d}t \right|$.

ce qui a un sens puisque f est continue sur le compact $[0,2a]$.

Ex. 5

Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développable en série entière à l'origine et telle que $u(0) = 0$.

1) Montrer que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \dfrac{1}{1 - u(z)}$ est développable en série entière à l'origine.

2) En déduire que $x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ est développable en série entière.

Indications

$f(z)$ est la somme d'une série double sommable.

Solution

1) On a $u(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p z^p$ série de rayon $R > 0$.

L'hypothèse $u(0) = 0$ donne $a_0 = 0$.

Pour $r \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant r < R$, posons $v(r) = \sum_{p=1}^{+\infty} |a_p|\, r^p$.

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in D_R, \quad u(z)^n = \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_p z^p\right)^n = \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha_{p,n} z^p$$

La propriété est connue pour $n = 2$ et on vérifie qu'elle est récurrente.
$D_R = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < R\}$.

avec $\alpha_{p,n} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=p \\ k_i \geqslant 1}} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_n}$ donc $\alpha_{p,n} = 0$ si $p < n$.

Pour $|u(z)| < 1$, on a $f(z) = \dfrac{1}{1 - u(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u(z)^n$.

La continuité de v en 0 donne l'existence de $\rho \in]0, R[$ tel que $v(r) < 1$ dès que $0 < r < \rho$; et alors $|z| < \rho$ donne $|u(z)| \leqslant v\left(|z|\right) < 1$ donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha_{p,n} z^p.$$

Remarquons maintenant que pour $|z| < \rho < R$, la série $\sum_p \alpha_{p,n} z^p$ est absolument convergente et que, de plus, on a :

Car il s'agit d'un produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

$$|\alpha_{p,n}| \leqslant \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} \left|a_{k_1}\right| \left|a_{k_2}\right| \cdots \left|a_{k_n}\right|$$

donc $$w_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \left|\alpha_{p,n} z^p\right| \leqslant \left(\sum_{p=1}^{+\infty} |a_p|\ |z|^p\right)^n = v\left(|z|\right)^n$$

puis, comme $0 \leqslant v\left(|z|\right) < 1$, la série $\sum v\left(|z|\right)^n$ converge et il en est de même pour $\sum w_n$.

Ces conditions assurent que la suite double $\left(\alpha_{p,n}\, z^p\right)$ est sommable, on peut donc intervertir les sommations pour obtenir :

C'est le théorème de Fubini, voir chapitre 2, théorème 26.

$$f(z) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} z^p \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{p,n}\right)$$

On a ainsi prouvé que f est développable en série entière de rayon $R' \geqslant \rho$.

2) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{1}{1 - u(x)}$ avec $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$.

En posant $f(0) = 1$, cette formule est valable pour tout x réel.

Alors, le 1) donne que f est développable en série entière à l'origine.

Avec $v(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{r}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} - r\right) = \frac{\operatorname{sh} r - r}{r}$,

on obtient que la condition $v(r) < 1$ équivaut à $\frac{\operatorname{sh} r}{r} < 2$.

Donc le rayon de convergence ρ du développement de f vérifie $\rho \geqslant r_0$ où r_0 est l'unique racine strictement positive de l'équation $\frac{\operatorname{sh} r}{r} = 2$.

Un calcul numérique donne : $2{,}1773 < r_0 < 2{,}1774$.

On conserve les notations du 1).

La fonction $\varphi : r \mapsto \frac{\operatorname{sh} r}{r}$, prolongée en 0 par $\varphi(0) = 1$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ avec $\varphi\left([0,+\infty[\right) = [1,+\infty[$.

Ex. 6

Déterminer le développement en série entière à l'origine de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ell n\left(1 + x - 2x^2\right)$.

Indications

Factoriser $1 + x - 2x^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution

On a $1 + x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$, donc f est définie sur $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[= I$

et, $\forall x \in I,\quad f(x) = \ell n(1-x) + \ell n(1+2x)$.

Du développement connu de $x \mapsto \ell n(1+x)$, on déduit :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \ell n(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[,\quad \ell n(1+2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n} \quad \left(\rho = \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{donc } \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[,\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n - 1}{n} x^n \quad \left(\rho = \frac{1}{2}\right)$$

Commentaires

Noter que le rayon de la série somme est ici $\frac{1}{2} = \inf\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ car les deux séries initiales ont des rayons différents : $\frac{1}{2}$ et 1.

Ex. 7

Déterminer le développement en série entière à l'origine de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$.

Indications

Décomposer f en somme d'exponentielles.

Solution

Pour tout x réel, on a $f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\right)$.

Sachant que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(1+i)^n + (1-i)^n + (-1)^n(1-i)^n + (-1)^n(1+i)^n\right] \frac{x^n}{n!}.$$

$$\text{D'où } 4f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}} \left(e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}} + (-1)^n e^{-in\frac{\pi}{4}} + (-1)^n e^{in\frac{\pi}{4}}\right) \frac{x^n}{n!},$$

$$\text{puis } 2f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[2^n e^{in\frac{\pi}{2}} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 2^n e^{-in\frac{\pi}{2}} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right].$$

Commentaires

Une autre possibilité consiste à écrire $\operatorname{ch} x = \cos ix$ ce qui donne $f(x) = \frac{1}{2}\left[\cos(1+i)x + \cos(1-i)x\right]$.

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Finalement il vient $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{4n}}{(4n)!}$.

Ce calcul étant valable quel que soit le réel x, le rayon de convergence est $+\infty$.

$\frac{1}{2}\left(e^{in\frac{\pi}{2}} + e^{-in\frac{\pi}{2}}\right) = \cos n\frac{\pi}{2}$
$= 0$ si $n = 2p+1$
$= (-1)^p$ si $n = 2p$.

Ex. 8

Déterminer le développement en série entière en 2 de la fonction $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{Arctan} \dfrac{2(x+1)}{x-4}$.

Indications

Considérer la fonction $g\ :\ t \mapsto f(t+2)$ dont la dérivée est une fraction rationnelle.

Solution

Posons $g(t) = f(t+2) = \operatorname{Arctan} \dfrac{2(t+3)}{t-2}$.

Cette fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $g'(t) = \dfrac{-2}{(t+2)^2 + 4}$.

Une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ donne :

$$g'(t) = \frac{-i/2}{t + 2(1+i)} + \frac{i/2}{t + 2(1-i)}$$

donc
$$g'(t) = \frac{1}{4i\sqrt{2}} \left[\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1 + \dfrac{t}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}} - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{1 + \dfrac{t}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}} \right].$$

On en déduit que pour tout t réel tel que $|t| < 2\sqrt{2}$,
$g'(t) =$
$$\frac{1}{4i\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^{\frac{3n}{2}}} e^{-in\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4i\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^{\frac{3n}{2}}} e^{in\frac{\pi}{4}}$$

donc $\displaystyle g'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} t^n 2^{-\frac{3(n+1)}{2}} \sin(n+1)\frac{\pi}{4}$.

Remarquons que, puisque l'on a additionné deux séries entières de même rayon de convergence égal à $2\sqrt{2}$, le rayon ρ du développement de g' est a priori supérieur ou égal à $2\sqrt{2}$.
En notant de plus que, pour $t = 2\sqrt{2}$, la série est grossièrement divergente, on obtient $\rho \leqslant 2\sqrt{2}$ et finalement $\rho = 2\sqrt{2}$.
Le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière donne ensuite :
$\forall t \in]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$,
$$g(t) = f(2) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{n+1} 2^{-\frac{3(n+1)}{2}} \sin(n+1)\frac{\pi}{4},$$
donc $\forall x \in]2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}[$,
$$f(x) = -\operatorname{Arctan} 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n} 2^{-\frac{3n}{2}} \sin n\frac{\pi}{4}.$$

Commentaires

$2(1+i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
$2(1-i) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Les factorisations ont pour but de faire apparaître des sommes de séries géométriques.

On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a : $\displaystyle \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$.

$\dfrac{e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}} - e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}}}{2i} = \sin(n+1)\frac{\pi}{4}$.

On sait que lors d'une intégration le rayon de convergence est inchangé.

Ex. 9

Déterminer le développement en série entière à l'origine de $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.

Indications

Le développement de la dérivée se déduit de celui de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Solution

Le développement de $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$ s'écrit :

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times 2n-1}{2^n} \frac{u^n}{n!}$$

ou encore $\quad \forall u \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n.$

série entière de rayon de convergence $\rho = 1$.

On en déduit $\quad \forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$

Par application du théorème d'intégration terme à terme des série entières, on en déduit :

et on sait que le rayon de convergence est encore $\rho = 1$.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ex. 10

Déterminer le développement en série entière à l'origine de $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto (\operatorname{Arcsin} x)^2$.

Indications

Développer f' par la méthode de l'équation différentielle puis en déduire le développement de f au moyen d'une intégration.

Solution

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$:

On remarque tout d'abord que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

$$f'(x) = 2g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nous allons développer g par la méthode de l'équation différentielle.

On a $\quad \forall x \in]-1,1[, \quad g'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x}{1-x^2} \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}.$

Donc g est l'unique solution sur $]-1,1[$ de :

$$(E) \;:\; \left(1-x^2\right)y' - xy = 1,$$

vérifiant la condition $y(0) = 0$.

On a vu en première année que puisque les coefficients $a : x \mapsto 1-x^2$, $b : x \mapsto -x$ et $c : x \mapsto 1$, sont continus sur $]-1,1[$ et que a ne s'annule pas sur cet intervalle, pour tout $(x_0, y_0) \in]-1,1[\times \mathbb{R}$, il existe une solution et une seule de (E) sur I vérifiant la condition $y(x_0) = y_0$.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$ et de somme S.
Pour que S soit solution de (E) sur $]-\rho,\rho]$ et vérifie $S(0) = 0$, il faut et il suffit que :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\rho,\rho[, \quad (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1,$$

c'est-à-dire $\quad a_0 = 0 \quad$ et :

$$\forall x \in]-\rho,\rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n x^{n+1} = 1,$$

soit aussi $a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 1, (n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0$.
La relation $\quad \forall n \geqslant 1, \quad (n+1)a_{n+1} = na_{n-1}$:

- avec $a_0 = 0$ donne $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0$
- avec $a_1 = 1$ donne :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = \frac{2 \times \ldots \times 2p}{3 \times 5 \times \ldots \times 2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

- enfin, donne $\dfrac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = \dfrac{2p}{2p+1}$ donc $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = 1$

et le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ est $\rho = 1$.

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle.

Ainsi, il existe une série entière et une seule de rayon non nul et dont la somme vérifie $S(0) = 0$ et est solution de (E) sur l'intervalle ouvert de convergence.

Dès que l'on a vérifié que ρ est non nul, les équivalences précédentes montrent que la série obtenue est bien solution du problème.

Il s'agit de $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1} \quad (\rho = 1)$.

On en déduit alors $\quad \forall x \in]-1, 1[, \quad g(x) = S(x) \quad$ et par intégration :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (\operatorname{Arcsin} x)^2 = 2 \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+2)!} x^{2p+2} \quad (\rho = 1)$$

Ex. 11

Soit $f :]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2) Soit g ce prolongement, montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$.

Indications

Montrer que g s'écrit comme le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\pi, \pi[$.

Solution

1) Au voisinage de 0, $\quad f(x) \sim \dfrac{x}{6}$, on pose donc $g(0) = 0$.

Commentaires : $x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{6}$ et $x \sin x \sim x^2$.

2)
- Soit u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \frac{x - \sin x}{x^2} \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } u(0) = 0.$$

En divisant numérateur et dénominateur par x^2, on fait apparaître un nouveau dénominateur qui ne s'annule plus sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$.
D'autre part, ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisque développables en séries entières.

u est développable en série entière de rayon $\rho = +\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!},$$

elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Soit v définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad v(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad$ pour $x \neq 0$ et $v(0) = 1$.

v est développable en série entière de rayon $\rho = +\infty$:

$\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a $\quad v(x) \neq 0$, donc $g = \dfrac{u}{v}$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$.

III. Sommation des séries entières

Ex. 12

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n+4}\frac{x^n}{n!}$.

Indications

La fraction $\dfrac{x^n}{(n+4)n!}$ est la dérivée troisième de $\dfrac{x^{n+3}}{(n+4)!}$.

Solution

Pour $n \geqslant 1$, posons $\quad a_n = \dfrac{n^2+4n-1}{(n+4)n!}$ et $u_n(x) = a_n x^n$.

Quand n tend vers $+\infty$, on a $a_n \sim \dfrac{1}{(n-1)!}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ et le rayon de convergence est $\quad \rho = +\infty$.

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!} - \frac{x^n}{(n+4)n!} = \frac{x^n}{(n-1)!} - \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{x^{n+3}}{(n+4)!}\right).$$

On en déduit :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n+4}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+4)!}\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = x\,e^x.$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+4)!} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}\right)$$

$$= \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24}$$

d'où $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+3}}{(n+4)!}\right) = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right) + \frac{6}{x^4} - \frac{1}{4}.$

Finalement $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ S(x) = e^x\left(x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} + \dfrac{6}{x^4}\right) - \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{1}{4}$

et, d'autre part, $\quad S(0) = 0$.

Commentaires

Même si ce n'est pas demandé explicitement dans l'énoncé, il faut commencer par préciser le rayon de convergence.

Toutes les séries écrites ont un rayon de convergence infini.

Dérivation «terme à terme» sur l'intervalle ouvert de convergence.

Avec un développement limité d'ordre 4 de $x \mapsto e^x$, on vérifie que S est continue en 0.

Ex. 13

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière de la variable réelle x :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Montrer que la fonction somme f est solution d'une équation différentielle du premier ordre. En déduire une expression explicite de f.

Indications

Déduire l'équation différentielle de la relation de récurrence liant deux coefficients consécutifs de la série.

Solution

Posons $a_n = \dfrac{n!}{1\bullet 3\bullet \ \ldots \ (2n+1)}$.

De $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2n+3}$ on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}}\right| = \dfrac{x^2}{2}$ et $\rho = \sqrt{2}$.

Pour $x\in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \quad \text{et} \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n},$$

et la relation $(2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n, \quad n \geqslant 0$, donne successivement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+3)a_{n+1}x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^{2n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} = \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} + \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

$$f'(x) - 1 = \frac{x^2}{2}f'(x) + \frac{x}{2}f(x)$$

d'où : $$\left(x^2-2\right)f'(x) + xf(x) + 2 = 0.$$

f apparaît comme l'unique solution sur $I =]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad (x^2-2)y' + xy + 2 = 0 \quad \text{vérifiant } y(0) = 0.$$

La méthode de variation de la constante conduit à la solution générale sur I :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\left[2\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \mu\right]$$

et la condition $f(0) = 0$ donne :

$$\forall x\in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[, \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Commentaires

Attention ! la série est lacunaire (pas de termes pairs), le théorème 5 ne s'applique pas. Dans cette situation, on revient à l'utilisation directe du critère de d'Alembert.

L'équation homogène associée :

$(H) \quad (x^2-2)y'+xy=0$

a pour solution générale sur I :

$x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}}$.

Ex. 14

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Indications

Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ et montrer que la fonction S ainsi introduite est continue au point 1.

Solution

On a affaire à une série alternée convergente d'après le critère de Leibniz

- Introduisons la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

On établit facilement avec le critère de d'Alembert que son rayon est $\rho = 1$.

Commentaires

La suite $\left(\frac{1}{4n+1}\right)$ decroît et tend vers 0.

Avec $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$,

on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=x^4$.

Pour tout $x \in [0,1]$, $\sum u_n(x)$ est une série alternée vérifiant le critère de Leibniz. En posant $R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$, on sait que, dans ces conditions, on a :
$$|R_n(x)| \leqslant |u_n(x)|.$$
Il en résulte $\| R_n \|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{4n+1}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \| R_n \|_\infty^{[0,1]} = 0$ et cette série converge uniformément sur $[0,1]$.

La somme S est donc continue sur $[0,1]$ et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} S(x).$$

Ceci reste vrai sur $[-1,0]$, mais ce n'est pas utile dans le contexte.

- Pour $x \in]-1,1[$, on a :
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{4n} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{4n} \mathrm{d}t$$

L'application du théorème 10 nécessite $|x|<1$.

donc $S(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et ainsi :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

- La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1+t^4}$ s'écrit :
$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

En posant $t=-u$, on obtient

Cette remarque permet de réduire le calcul à une seule primitivation.

$$\int_0^1 \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\mathrm{d}t = \int_0^{-1} \frac{u+\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}\mathrm{d}u, \text{ d'où :}$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\mathrm{d}t$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}}$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\ell n\left(t^2+t\sqrt{2}+1\right)\right]_{-1}^1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\mathrm{Arctan}(t\sqrt{2}+1)\right]_{-1}^1$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ell n \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}+1) + \mathrm{Arctan}(\sqrt{2}-1)\right]$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ell n(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

On a utilisé $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ qui donne aussi :
$\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}+1) + \mathrm{Arctan}(\sqrt{2}-1) = \dfrac{\pi}{2}$.

D'où, finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ell n(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$

Exercices

Niveau 1

Rayon de convergence

Ex. 1

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière de la variable réelle $\Sigma a_n x^n$ puis étudier le comportement de cette série aux bornes de l'intervalle de convergence :

1) $a_n = \operatorname{Arctan} n^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$;

2) $a_n = \ell n \dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geqslant 2$;

3) $a_n = \dfrac{1}{\ell n\, n!}$;

4) a_n est le nombre de diviseurs de n, $\quad n \geqslant 1$;

5) $a_n = \dfrac{\cos n}{n^\alpha}$.

Ex. 2

Montrer que $\sum a_n z_n$ et $\sum a_n \dfrac{nz^n}{n^2+n-2}$ ont même rayon de convergence.

Ex. 3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Que peut-on dire du rayon de convergence ρ' de la série entière $\sum a_n^\alpha z^n$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) ?

Ex. 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$,

que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum S_n z^n$?

Développement en série entière

Ex. 5

Développer en série entière à l'origine la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la donnée de $f(x)$:

1) $f(x) = \ell n \left(1 + \dfrac{x^2}{1+x}\right)$;

2) $f(x) = \ell n \left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)$;

3) $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ex. 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière de rayon $R > 1$ à l'origine et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Montrer que f est nulle sur $]-R, R[$.

Ex. 7

Calculer, à 10^{-6} près, $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^5}}$.

Ex. 8

Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t - x\sin t)}\mathrm{d}t$ est à valeurs réelles.

Développer f en série entière à l'origine.

Sommation des séries entières

Ex. 9

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, puis exprimer $f(x)$ au moyen des fonctions usuelles.

1) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$;

2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$;

3) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$;

4) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$;

5) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \operatorname{ch} 1 + \operatorname{ch} 2 + \ldots + \operatorname{ch} n) x^n$.

Ex. 10

Établir l'existence et calculer la somme S :

1) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+2)2^n}$;

2) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$;

3) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Ex. 11

Pour x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2n-1} x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

2) Au moyen d'une équation différentielle, calculer f sur l'intervalle ouvert de convergence

Ex. 12

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}.$$

Montrer que $AB = BA$.

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 13

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ avec :

$$a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x.$$

2) Étudier la nature de cette série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Ex. 14

Deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Que peut-on dire du rayon de convergence R de la série $\sum a_n b_n z^n$?

Ex. 15

Soit $a \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. La série de fonctions de terme général :

$$u_n : x \mapsto \sin(a^n x)$$

est-elle uniformément convergente sur cet ensemble ?

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

Ex. 16

On considère la suite $(a_n)_\mathbb{N}$ définie par :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) Étudier les séries numériques :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n.$$

2) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

Ex. 17

On considère la suite réelle $(a_n)_\mathbb{N}$ définie par :

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1 \quad \text{et}$$

$$\forall n \geqslant 2, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)} \qquad (\mathcal{R}).$$

1) Étudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$?

2) Trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction f somme de la série entière. En déduire f.

Ex. 18

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\,.$$

Calculer u_n en fonction de n.

Avec éléments de solution

Ex. 19

Développer en série entière à l'origine la fonction :

$$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Ex. 20

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{Arcsin} x\right)$.

1) Développer f en série entière à l'origine.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{3n}^{n}\left(\frac{2}{27}\right)^n$.

Ex. 21

Développer en série entière à l'origine la fonction :

$$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2xt+xt^2}\,.$$

Ex. 22

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ avec :

$$|q| < 1,\quad \text{et}\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = (1-qx)f(qx).$$

Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

Ex. 23

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2 ix}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que le développement en série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence nul.

Ex. 24

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2,+\infty[$.

3) Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

Ex. 25

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

On considère la série entière $\sum u_n x^n,\ \ x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que son rayon de convergence R est minoré par $\dfrac{1}{2}$.

2) Calculer sa somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et en déduire une expression de u_n.

Ex. 26

Un dérangement de $\mathcal{S}_n,\ \ (n \in \mathbb{N}^*)$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ qui n'a aucun point fixe.

1) Pour $n \geqslant 1$, soit a_n le nombre de dérangements de $\mathcal{S}_n$ et par convention $a_0 = 1$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad n! = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, a_{n-k}\,.$$

2) Calculer a_n en considérant la série entière $\displaystyle\sum a_n \frac{x^n}{n!}$.

Ex. 27

1) Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1},\ \ n \geqslant 0$.

2) Mêmes questions pour la série de terme général

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\,.$$

Ex. 28

Établir la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(8n+1)(8n+5)}$.

Ex. 29

1) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$:

$$\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9} \leqslant (1+x)^{\frac{2}{3}} - 1 \leqslant \frac{2}{3}x.$$

2) Calculer la partie entière de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{10^7-1}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.

Ex. 30

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ell n\, n$.

Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Ex. 31

Existe-t-il $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*,\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\quad e^{f(z)} = z\ ?$$

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 32

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[,\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a,a[, f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Montrer que :

$$\forall x \in]-a,a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Ex. 33

1) Montrer que la fonction :

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$$

est l'unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$.

2) En déduire que f est développable en série entière à l'origine.

Ex. 34

Soit $(b_n)_\mathbb{N}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\sum b_n$ diverge et telle que la série entière de la variable réelle x, $\sum b_n x^n$ ait 1 pour rayon de convergence.

Soit $(a_n)_\mathbb{N}$ une suite réelle telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = S \in \mathbb{R}.$$

1) On note :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = S$.

2) Application : soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer l'existence dans $\mathbb{R}_+^*$ de :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x)^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n.$$

Ex. 35

On note R_n le nombre de relations d'équivalence que l'on peut définir sur un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $R_0 = 1$.

1) Montrer que $R_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k R_k$.

2) À l'aide des séries entières, en déduire une expression de R_n.

Avec éléments de solution

Ex. 36

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 - \operatorname{sh} x}$.

Montrer que f est développable en série entière autour de l'origine et préciser le rayon de convergence.

Ex. 37

Soit q réel tel que $-1 < q < 1$ et (E) l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = e^x f(qx), f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

1) Montrer que toute solution de (E) est développable en série entière.

2) Résoudre (E).

Ex. 38

On donne l'équation fonctionnelle :

$$(E) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, f'(2x) = -2 \sin x f(x).$$

1) Trouver une solution particulière.

2) Calculer $f^k(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3) Trouver toutes les solutions de (E).

Ex. 39

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

1) Trouver l'ensemble de définition D_f de f.

2) Montrer que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

3) Étudier le comportement de $f(x)$ quand x tend vers 1 (limite et équivalent).

Indications

Ex. 13

Un encadrement de $|a_n|$ donne le rayon de convergence mais aussi la décroissance de $(|a_n|)_{\mathbb{N}}$.

Ex. 14

Tout $r < R_1R_2$ s'écrit $r = r_1r_2$ avec $r_1 < R_1$ et $r_2 < R_2$.

Ex. 15

3) Première solution : écrire $f(x)$ comme somme d'une série double.

Deuxième solution : majorer $\left|f^{(n+1)}\right|$ pour en déduire que le reste intégral de la formule de Taylor tend vers 0.

Ex. 16

1) Pour tous réels a et b, $a^2 + b^2 \geqslant 2\,|ab|$.

2) Justifier l'intégration terme à terme.

Ex. 17

1) Opérer par récurrence.

Ex. 18

Introduire $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Montrer que $f(x)$ est solution d'une équation du second degré.

Ex. 19

Méthode de l'équation différentielle.

Ex. 20

Méthode de l'équation différentielle.

Ex. 21

Développer l'intégrande en série puis justifier l'intégration terme à terme.

Ex. 22

Montrer que quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe une solution et une seule de **(1)** telle que $f(0) = \lambda$, puis rechercher une série entière dont la somme S vérifie **(1)** et $S(0) = f(0)$.

Observer l'analogie avec la méthode de l'équation différentielle.

Ex. 23

Minorer $\left|f^{(p)}(0)\right|$ par le terme de rang p de la série dont ce réel est la somme.

Ex. 24

Écrire $f(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} + g(x)$ puis majorer les dérivées de g sur $]-2, +\infty[$ pour en déduire, au moyen d'une formule de Taylor, que g est développable en série entière de rayon de convergence $R \geqslant 2$.

Ex. 25

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$, puis que la somme est une fonction rationnelle.

Ex. 26

1) Dénombrer les permutations ayant k points fixes donnés puis celles qui ont k points fixes quelconques.

2) Reconnaître un produit de Cauchy.

Ex. 27

1) Introduire la série entière $\Sigma u_n x^{2n+1}$.

2) Observer que Σv_n est un produit de Cauchy mais que le théorème donnant la somme de la série produit ne s'applique pas.

Introduire alors la série entière $\sum v_n x^{2(n+1)}$.

Ex. 28

Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$ puis introduire la série entière $\sum \dfrac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$.

Ex. 29

1) Utiliser un développement en série entière.

2) Déduire du 1) un encadrement de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$, additionner ces inégalités membre à membre puis majorer $\sum_{k=1}^{10^7-1} \dfrac{1}{k^{\frac{4}{3}}}$ au moyen d'une intégrale.

Ex. 30

Observer que $(x-1)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ell n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)x^n$ et que, pour $n \geqslant 2$, $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ell n\,\dfrac{n-1}{n} \leqslant -\dfrac{1}{n}$.

Ex. 31

Si f est solution, considérer $f(\mathbb{U})$ où :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Ex. 32

Écrire la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Pour $x \in]0, a[$, la suite $\big(S_n(x)\big)$ est croissante majorée. Établir alors que pour $0 < x < y < a$:

$0 \leqslant \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \dfrac{R_n(y)}{y^{n+1}}$, puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$

Ex. 33

Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la série de Mac-Laurin de f est à termes positifs.

Vérifier que la somme de cette série est solution de :

$$y' = 1 + y^2 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ex. 34

1) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = +\infty$

2) Développer en série entière $x \mapsto (1 - x)^{-\alpha}$ et appliquer le 1).

Ex. 35

1) R_n est l'ensemble des partitions de E,

$$\operatorname{Card} E = n.$$

a étant fixé dans E de cardinal $n + 1$, pour $K \subset E \setminus \{a\}$, introduire l'ensemble $\mathcal{P}_{E,K}$ des partitions de E telles que la partie contenant a soit $K \cup \{a\}$ et remarquer que, pour $\operatorname{Card} K = k$, on a : $\operatorname{Card} \mathcal{P}_{E,K} = R_{n-k}$.

2) Poser $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R_n}{n!} x^n$.

Montrer, par récurrence sur n, que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\left(\dfrac{R_n}{n!} r^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Ex. 36

Utiliser le résultat vu en *Méthodes – Mise en œuvre*, exercice **5**.

Ex. 37

Introduire la fonction g telle que $f(x) = e^{\frac{x}{1-q}} g(x)$ et majorer $\| g^{(n)} \|_\infty^{[-x,x]}$ pour en déduire, au moyen d'une formule de Taylor, que g est développable en série entière.

Ex. 38

1) Une solution particulière est $x \mapsto \cos x$.

2) Utiliser la formule de Leibniz.

3) Majorer $\| f^{(n)} \|_\infty^{[-a,a]}$ par récurrence pour en déduire, au moyen d'une formule de Taylor, que toute solution de (E) est développable en série entière.

Ex. 39

2) Écrire $f(x)$ comme somme d'une série double sommable.

3) Former $(1 - x)f(x)$.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) ■ Rayon de convergence

Pour $\alpha \geqslant 0$, on a $\frac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{Arctan} n^\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc $a_n = \mathcal{O}(1)$ et $1 = \mathcal{O}(a_n)$.

Sachant que le rayon de convergence de $\sum x^n$ est égal à 1, le corollaire du théorème 4 donne alors $\rho \geqslant 1$ et $1 \geqslant \rho$.

Donc, lorsque $\alpha \geqslant 0$, on obtient $\rho = 1$.

Pour $\alpha < 0$, $\operatorname{Arctan} n^\alpha \sim n^\alpha$, donc les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n^\alpha x^n$ ont même rayon de convergence et on a encore $\rho = 1$.

■ Étude aux bornes

Posons $u_n(x) = \left(\operatorname{Arctan} n^\alpha\right) x^n$.

Pour $|x| = 1$, la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente lorsque $\alpha \geqslant 0$ et absolument convergente lorsque $\alpha < -1$ car on a alors $|u_n(x)| \sim n^\alpha$ et $\sum n^\alpha$ est une série de Riemann convergente.

Lorsque $\alpha \in [-1, 0[$, la série $\sum u_n(1)$ est à termes positifs divergente car $u_n(1) \sim n^\alpha$ et $\sum u_n(-1)$ est alternée convergente d'après le critère de Leibniz car $\operatorname{Arctan} n^\alpha$ tend vers 0 en décroissant.

Conclusion. L'ensemble de convergence de $\sum \left(\operatorname{Arctan} n^\alpha\right) x^n$ est : $\begin{cases}]1-,1[& \text{si} \quad \alpha \geqslant 0 \\ [-1,1[& \text{si} \quad -1 \leqslant \alpha < 0 \\ [-1,1] & \text{si} \quad \alpha < -1 \end{cases}$

2) ■ Rayon de convergence

De $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, on déduit $\rho \geqslant 1$.

Effectuons alors un développement de a_n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$a_n = \ell n\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ell n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit $a_n(-1)^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum a_n(-1)^n$ diverge ce qui donne $\rho \leqslant 1$. Finalement on a $\rho = 1$.

■ Étude aux bornes

Il reste à étudier $\sum a_n$.

Le développement précédent donne $a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ donc, d'après le critère des équivalents pour les séries de signe constant à partir d'un certain rang, $\sum \left(a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

Or la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère de Leibniz donc $\sum a_n$ est de même nature que $\sum \left(a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ c'est-à-dire divergente.

Conclusion. L'ensemble de convergence de $\sum \left(\ell n \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) x^n$ est $]-1, 1[$.

3) ■ Rayon de convergence

Remarquons que, pour tout $n \geqslant 2$, $\ell n\, n \leqslant \ell n\, n! \leqslant n\, \ell n\, n$ donc $\frac{1}{n\, \ell n\, n} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\ell n\, n}$ ce qui donne :

$$a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell n\, n}\right) \text{ et } \frac{1}{n\, \ell n\, n} = \mathcal{O}(a_n).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell n\, n}{\ell n(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\,\ell n\, n}{(n+1)\,\ell n(n+1)} = 1$, les séries entières $\sum \dfrac{x^n}{\ell n\, n}$ et $\sum \dfrac{x^n}{n\,\ell n\, n}$ ont le même rayon de convergence égal à 1. Alors avec le corollaire du théorème 4, $a_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\ell n\, n}\right)$ donne $\rho \geqslant 1$ et $\dfrac{1}{n\,\ell n\, n} = \mathcal{O}\left(a_n\right)$ donne $1 \geqslant \rho$. Finalement on a $\rho = 1$.

- Étude aux bornes

La série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n\,\ell n\, n}$ est divergente (cf. chapitre 2), donc $a_n \geqslant \dfrac{1}{n\,\ell n\, n}$ montre que $\sum a_n$ diverge.

La suite de terme général $\dfrac{1}{\ell n\, n!}$ est visiblement décroissante et de limite nulle donc $\sum(-1)^n a_n$ converge d'après le critère de Leibniz.

Conclusion. L'ensemble de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{\ell n\, n!}$ est $[-1, 1[$.

4) - Rayon de convergence

Il est clair que pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant a_n \leqslant n$. De $a_n \leqslant n$ on déduit que pour $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$ ce qui donne $\rho \geqslant 1$. De même de $1 \leqslant a_n$, on déduit que pour $|x| \geqslant 1$, $a_n x^n$ ne tend pas vers 0 ce qui donne $\rho \leqslant 1$. D'où finalement $\rho = 1$.

Remarque : en montrant que le rayon de convergence de $\sum n x^n$ est égal à 1, on peut aussi conclure avec le corollaire du théorème 4.

- Étude aux bornes

Pour $n = p!$, on a $a_n \geqslant p$. Il en résulte que la suite $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ est non bornée et donc que les séries $\sum a_n$ et $\sum(-1)^n a_n$ sont grossièrement divergentes.

Conclusion. L'ensemble de convergence de $\sum a_n x^n$ est $]-1, 1[$.

5) - Rayon de convergence

Remarquons que $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$. D'autre part, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, si $|x| < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n^\alpha} = 0$. Donc pour $|x| < 1$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n$ ce qui donne $\rho \geqslant 1$. Sachant que la suite $(\cos n)_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et que pour $|x| > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^n}{n^\alpha} = +\infty$, il vient que pour $|x| > 1$, $a_n x^n$ ne tend pas vers 0. Ceci prouve que $\rho \leqslant 1$. Finalement on a $\rho = 1$.

- Étude aux bornes

Si $\alpha > 1$, les séries $\sum a_n$ et $\sum(-1)^n a_n$ sont absolument convergentes, et si $\alpha \leqslant 0$ elles sont grossièrement divergentes, enfin pour $0 < \alpha \leqslant 1$ elles sont semi-convergentes (voir chapitre 2, Exercice 47.)

Ex. 2

Notons ρ_1 et ρ_2 les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n x^n$ et $\sum \dfrac{n a_n x^n}{n^2+n-2}$.

Pour $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{n}{n^2+n-2} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$ donc, d'après le corollaire du théorème **4**, il vient $\rho_2 \geqslant \rho_1$. **(1)**

Lorsque $\rho_2 = 0$, l'inégalité précédente donne $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Supposons maintenant $\rho_2 > 0$.

Pour tout réel $r \in [0, \rho_2[$, il existe λ tel que $r < \lambda < \rho_2$. Écrivons alors $a_n r^n = \dfrac{n a_n \lambda^n}{n^2+n-2} \times \dfrac{n^2+n-2}{n}\left(\dfrac{r}{\lambda}\right)^n$.

En posant $u_n = \dfrac{n^2+n-2}{n}\left(\dfrac{r}{\lambda}\right)^n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{r}{\lambda} < 1$ donc la série $\sum u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert et en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Puisque $\lambda < \rho_2$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n a_n \lambda^n}{n^2+n-2} = 0$ d'où finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$ et $r \leqslant \rho_1$.

On a ainsi montré $\left[0, \rho_2\right[\subset \left[0, \rho_1\right]$ donc $\rho_2 \leqslant \rho_1$. **(2)**

Avec **(1)** et **(2)** on conclut que $\rho_1 = \rho_2$.

Ex. 3

- Cas où $\alpha > 0$

Pour $r \in \mathbb{R}$, tel que $0 < r < \rho^{\alpha}$, on a $0 < r^{\frac{1}{\alpha}} < \rho$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^{\frac{n}{\alpha}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{\alpha} r^n = 0$.

Ceci montre que $\rho' = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ / \lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{\alpha} r^n = 0\right\} \geqslant \rho^{\alpha}$.

Pour $r > \rho^{\alpha}$, la suite $\left(a_n r^{\frac{n}{\alpha}}\right)_{\mathbb{N}}$ ne tend pas vers zéro, la suite $\left(a_n^{\alpha} r^n\right)_{\mathbb{N}}$ non plus. Donc $\rho' \leqslant \rho^{\alpha}$.

Finalement, $\rho' = \rho^{\alpha}$. Noter que ce résultat est valable pour $\rho = 0$: $\rho' = 0$ et pour $\rho = +\infty$: $\rho' = +\infty$.

- Cas où $\alpha < 0$

Supposons $\rho > 0$.

Pour $r \in \mathbb{R}$ tel que $r > \rho^{\alpha}$, on a $r^{\frac{1}{\alpha}} < \rho$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^{\frac{n}{\alpha}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{\alpha} r^n = +\infty$.

Ceci montre que $\rho' \leqslant \rho^{\alpha}$. Voyons sur un exemple que l'inégalité peut être stricte :

$$a_{2n} = 2^{2n} \quad , \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} \quad \text{donne} \quad \rho = \frac{1}{2}, \rho^{\alpha} = 2^{-\alpha}, \rho' = 2^{\alpha} < \rho^{\alpha}.$$

Le résultat précédent n'est évidemment pas valable pour $\rho = 0$ (0^{α} n'a pas de sens). Dans ce cas, tout est possible ; exemples :

$$a_{2n} = (2n)^{2n} \quad , \quad a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}} \quad \text{donne} \quad \rho = \rho' = 0,$$

$$a_n = n^n \quad \text{donne} \quad \rho = 0, \quad \rho' = +\infty,$$

$$a_{2n} = (2n)^{2n} \quad , \quad a_{2n+1} = 1 \quad \text{donne} \quad \rho = 0, \quad \rho' = 1.$$

Ex. 4

Notons ρ' le rayon de convergence de $\sum S_n z^n$ et supposons $\rho' > 0$.

Soit alors $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho'$: $\sum\limits_{n\geqslant 0} S_n z^n$ est convergente ainsi que $\sum\limits_{n\geqslant 1} S_{n-1} z^n = z \sum\limits_{n\geqslant 0} S_n z^n$, donc, en notant que $\forall n \geqslant 1, a_n z^n = S_n z^n - S_{n-1} z^n$, on conclut que $\sum a_n z^n$ converge.

Ceci montre que $\rho \geqslant \rho'$, ce qui est bien sûr encore valable si $\rho' = 0$.

D'après ce qui précède, $\rho = 0$ exige $\rho' = 0$. Supposons maintenant $\rho > 0$.

En observant que $\sum S_n z^n$ n'est autre que le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum z^n$, de rayons respectifs ρ et 1, on obtient $\rho' \geqslant \inf(1, \rho)$ (cf. théorème 6).

En conclusion : on a dans tous les cas $\inf(1, \rho) \leqslant \rho' \leqslant \rho$.

Remarques

1) pour $\rho \leqslant 1$: la formule précédente donne $\rho' = \rho$.

2) pour $\rho > 1$:

- on peut avoir $\rho' = 1$.

Exemple : $a_n = \dfrac{1}{n!}$ alors $\rho = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e$ donc $\rho' = 1$.

- on peut avoir $\rho' = \rho$.

Exemple : $a_{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}}$, $a_{2n+1} = -\dfrac{1}{2^{2n}}$ alors $\rho = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, S_{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}}$, $S_{2n+1} = 0$ donc $\rho' = 2$.

Ex. 5

1) La fonction f est définie sur $]-1,+\infty[$ car $1+\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et :

$$\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\quad x^2+x+1>0.$$

Pour $|x|<1$, on a : $f(x)=\ell n\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)=\ell n\left(\dfrac{1-x^3}{1-x^2}\right)=\ell n\left(1-x^3\right)-\ell n\left(1-x^2\right)$.

Le développement usuel $\forall u\in]-1,1[\ \ \ell n(1-u)=-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n}$ donne :

$$\forall x\in]-1,1[\quad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n}.$$

Soit aussi :

$$\forall x\in]-1,1[\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{6n+2}}{3n+1}-\frac{x^{6n+3}}{2n+1}+\frac{x^{6n+4}}{3n+2}-\frac{x^{6n+6}}{6n+6}\right).$$

On a affaire à la somme de deux séries de même rayon de convergence égal à 1, le rayon de convergence de cette somme vérifie donc $R\geqslant 1$.

En notant $u_n(x)$ le terme général de la série obtenue, on a : $u_{6n+2}(x)=\dfrac{x^{6n+2}}{3n+1}$, donc, pour $x>1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_{6n+2}(x)=+\infty$, et il en résulte que la suite $\left(u_n(x)\right)_{n\geqslant 1}$ est non bornée et donc que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n(x)$ diverge. En conséquence, on a $R\leqslant 1$ et finalement $R=1$.

2) $x^2-x\sqrt{2}+1=\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x)=\dfrac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}$.

On décompose en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

$$P=X^2-X\sqrt{2}+1=\left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\frac{P'}{P}=\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}=\frac{1}{X-e^{i\frac{\pi}{4}}}+\frac{1}{X-e^{-i\frac{\pi}{4}}}.$$

On a donc $f'(x)=\dfrac{-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1-xe^{-i\frac{\pi}{4}}}+\dfrac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-xe^{i\frac{\pi}{4}}}$, et, pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<1$, on a :

$$\left|xe^{-i\frac{\pi}{4}}\right|<1\quad\text{et}\quad\left|xe^{i\frac{\pi}{4}}\right|<1$$

donc :

$$f'(x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n e^{-(n+1)i\frac{\pi}{4}}-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n e^{(n+1)i\frac{\pi}{4}}$$

$$f'(x)=-2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cos(n+1)\frac{\pi}{4}.$$

Le calcul qui précède montre que le développement de f' a un rayon de convergence R vérifiant $R\geqslant 1$, et puisque la série est visiblement divergente en $x=1$, ($\cos(n+1)\dfrac{\pi}{4}$ ne tend pas vers 0), on a en fait $R=1$.

Le théorème d'intégration d'une série entière donne alors, avec $f(0)=0$:

$$f(x)=-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\cos(n+1)\frac{\pi}{4}\quad\text{soit}\quad f(x)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

et le rayon de convergence est inchangé : $R=1$.

3) f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

Remarquons que $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a $f_{\alpha+2\pi} = f_\alpha$ et $f_{-\alpha} = -f_\alpha$.

On peut donc limiter l'étude à $\alpha \in [0, \pi[$. D'autre part, $f_0 = 0$: on se limite finalement à $\alpha \in]0, \pi[$.

Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a $\quad f_\alpha'(x) = \dfrac{\sin\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

Le développement de la fonction rationnelle f_α' va s'obtenir en décomposant en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

$$\begin{aligned} f_\alpha'(x) &= \frac{\sin\alpha}{\left(x - e^{i\alpha}\right)\left(x - e^{-i\alpha}\right)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - e^{i\alpha}} - \frac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right) \\ f_\alpha'(x) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} - \frac{e^{-i\alpha}}{1 - xe^{-i\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $\quad \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$:

$$f_\alpha'(x) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{(n+1)i\alpha} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)i\alpha}\right)$$

$$f_\alpha'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n+1)\,\alpha\,.$$

Comme somme de deux séries de rayon 1, cette série a un rayon $R \geqslant 1$.

Puisque $\alpha \in]0, \pi[$, la suite $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas 0, donc cette série diverge pour $x = 1$, et finalement, $R = 1$.

Par intégration, on obtient ensuite :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_\alpha(x) - f_\alpha(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin(n+1)\,\alpha \qquad (R = 1)$$

donc, avec $\alpha \in]0, \pi[$, $\forall x \in]-1, 1[$, $\quad f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin n\alpha$.

En effet, $\dfrac{\alpha}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donne $\quad f_\alpha(0) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$.

La formule reste valable pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha \in]-\pi, 0[$.

Pour $\alpha \in \left](2p-1)\pi, (2p+1)\pi\right[$, on a $f_\alpha = f_{\alpha - 2p\pi}$ avec $\alpha - 2p\pi \in]-\pi, \pi[$, donc :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{2} - p\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin n\,\alpha\,.$$

Ex. 6

Pour tout $x \in]-R, R[$, on a $f^2(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Posons $u_n : x \mapsto x^n f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Puisque $R > 1$, on a $[0, 1] \subset]-R, R[$ et la fonction f est continue sur $[0, 1]$. Elle est donc bornée sur ce segment et on obtient :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |u_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty^{[0,1]} \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}.$$

La condition $R > 1$ nous donne aussi que la série de terme général $\dfrac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}$ est convergente, donc la majoration précédente montre la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0, 1]$.

Avec le théorème d'intégration terme à terme (cf. chapitre 3), cette convergence uniforme donne :

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction f^2 étant continue et positive sur $[0,1]$, $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = 0$ donne $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 0$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0.$$

Alors le développement en série entière de f montre que $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = 0$.

Ex. 7

Écrivons le développement en série entière à l'origine de $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^5}}$:

$$f(x) = (1+x^5)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^{5n}}{n!} \qquad \text{(série de rayon de convergence } R = 1\text{)},$$

avec $a_n = (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n} = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}$.

On en déduit $\quad I = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{5n}\mathrm{d}x$, c'est-à-dire : $I = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{7n+1}(n!)^2(5n+1)}$.

L'intégration terme à terme de la série entière est légitimée par le fait que le segment d'intégration : $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence : $]-1, 1[$. (cf. théorème 10).

Posons $u_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{7n+1}(n!)^2(5n+1)}$. On a alors $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{2n+1}{2^6(n+1)} \cdot \dfrac{5n+1}{5n+6} < \dfrac{1}{2^5}$, donc la série $\sum u_n$ vérifie le théorème des séries alternées.

Dans ces conditions, on sait que la somme I est comprise entre deux sommes partielles consécutives S_n et S_{n+1}, et que le reste d'ordre n : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, est majoré en valeur absolue par $|u_n|$. On calcule donc les u_k jusqu'à ce que l'on atteigne un terme de valeur absolue inférieure à 10^{-6}, il vient successivement :

$$\begin{array}{lll} u_1 = -\dfrac{1}{6 \cdot 2^7} & & -0,00133021 < u_1 < -0,00133020 \\ u_2 = \dfrac{3}{2^{14} \cdot 11} & & 0,0000166 < u_2 < 0,0000167 \\ u_3 = -\dfrac{5}{2^{24}} & & -0,0000003 < u_3 < -0,0000002 \end{array}$$

Il en résulte $0,4987142 < S_3 < I < S_2 < 0,4987147$, et donc $I \simeq 0,498714$ à 10^{-6} près par défaut.

Remarque : Maple fournit $I = 0,4987142707$ à $5 \cdot 10^{-11}$ près.

Ex. 8

La fonction $t \mapsto \sin(t - x\sin t)$ étant impaire, il vient $\operatorname{Im} f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t - x\sin t)\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi f est à valeurs réelles et comme $t \mapsto \cos(t - x\sin t)$ est paire, on a plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^{\pi} \cos(t - x\sin t)\mathrm{d}t.$$

donc aussi $f(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \cos t \cos(x\sin t)\mathrm{d}t + 2\int_0^{\pi} \sin t \sin(x\sin t)\mathrm{d}t$.

En remarquant que la fonction $\varphi\ :\ t \mapsto \cos t \cos(x \sin t)$ vérifie $\varphi(\pi - t) = -\varphi(t)$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi \text{ donc } \int_0^{\pi} \varphi = 0, \text{ et il reste } f(x) = 2\int_0^{\pi} \sin t \sin(x \sin t)\mathrm{d}t.$$

De même, la fonction $\psi\ :\ t \mapsto \sin t \sin(x \sin t)$ vérifie $\psi(\pi - t) = \psi(t)$. On a donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \psi$ et enfin :

$$f(x) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin(x \sin t)\mathrm{d}t.$$

Le développement en série entière de la fonction $\sin$ nous donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{2n+2} t\mathrm{d}t.$$

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est convergente, donc $\displaystyle\sup_{t \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{2n+2} t \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

montre que la série de fonctions de terme général $t \mapsto (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{2n+2} t$ est normalement donc uniformément convergente sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Par application du théorème d'intégration terme à terme (cf. chapitre 3), il en résulte :

$$f(x) = 4\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} t\mathrm{d}t.$$

Le calcul de l'intégrale de Wallis $W_{2n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\mathrm{d}t$ est classique et donne $W_{2n} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ (cf. MPSI-Analyse, chapitre 9).

On obtient finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi\, x^{2n+1}}{2^{2n}(n+1)(n!)^2}$, et le rayon de convergence est $+\infty$.

Ex. 9

1) On trouve facilement (par exemple avec le critère de d'Alembert) que le rayon de convergence est égal à 1.
De plus la série diverge aux bornes de l'intervalle de convergence. L'ensemble de définition de f est donc $]-1, 1[$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^{4n-2}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} t^{4n-2}\mathrm{d}t$, donc :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}\mathrm{d}t.$$

Une décomposition en éléments simples donne :

$$f(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

donc :
$$f(x) = \frac{1}{4} \ell n \left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x.$$

Remarque : sur $]-1, 1[$, on peut aussi écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Argth} x - \operatorname{Arctan} x\right).$$

2) Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1 et la fonction somme f est définie sur $[-1,1]$ car :

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}.$$

La fonction f est continue sur $[-1,1]$, car la majoration $\sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)} \leqslant \frac{1}{n^3}$ montre que l'on a affaire à une série normalement convergente sur cet intervalle.

Une décomposition en éléments simples donne : $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$, on en déduit :

$$\forall x\in]-1,1[,\ \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

On reconnaît ainsi des développements usuels, et il vient :

$$f(x) = -x^2\,\ell n\left(1-x^2\right) - \ell n\left(1-x^2\right) - 2x\,\ell n\,\frac{1+x}{1-x} + 3x^2,$$

$$\text{soit encore}\quad f(x) = -(x-1)^2\,\ell n(1-x) - (x+1)^2\,\ell n(1+x) + 3x^2.$$

Enfin, comme f est continue sur $[-1,1]$, on a aussi $f(-1) = f(1) = -4\,\ell n\,2 + 3$.

3) On sait que pour tout $u\in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\,\ell n\,\frac{1+u}{1-u}$ (série entière de rayon de convergence égal à 1).

En remarquant que l'on a $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$ si et seulement si $x>0$, on en déduit que l'ensemble de définition de f est $]0,+\infty[$ avec :

$$f(x) = \ell n\,\frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} = \ell n\,x.$$

4) Posons $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$. On trouve facilement (par exemple avec le critère de d'Alembert) que le rayon de convergence est égal à 1.

D'autre part, puisque $\sup_{x\in[-1,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{4n^2-1}$, cette série entière est normalement donc uniformément convergente sur $[-1,1]$. Il en résulte que f est définie et continue sur ce segment.

Une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}.$$

Donc pour tout $x\in]-1,1[$, il vient :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x.
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x$ étant également continue sur $[-1,1]$, on a finalement :

$$\forall x\in[-1,1],\ \ f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x.$$

5) Posons $a_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch} k$, et notons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Remarquons que l'on a ici affaire au produit de Cauchy des deux séries entières $\sum x^n \operatorname{ch} n$ et $\sum x^n$.

On sait que le rayon de convergence de $\sum x^n$ est 1. D'autre part, avec $x^n \operatorname{ch} n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^n x^n}{2}$, on voit que le rayon de convergence de $\sum x^n \operatorname{ch} n$ est $\dfrac{1}{e}$. En conséquence, d'après le théorème 6, il vient $R \geqslant \dfrac{1}{e}$.

Pour $|x| = \dfrac{1}{e}$, on a $a_n |x|^n \geqslant e^{-n} \operatorname{ch} n > \dfrac{1}{2}$ donc la série $\sum a_n x^n$ diverge et il en résulte $R \leqslant \dfrac{1}{e}$.

En conclusion : $R = \dfrac{1}{e}$ et l'ensemble de définition de f est $\left] -\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[$.

Le théorème 7 donne :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{ch} n,$$

donc, puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{ch} n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(ex)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ex} + \frac{e}{e-x}\right)$, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2(1-x)}\left(\frac{1}{1-ex} + \frac{e}{e-x}\right).$$

Ex. 10

1) Puisque $0 < \dfrac{1}{(4n+2)2^n} < \dfrac{1}{2^n}$, le critère de domination pour les séries à termes positifs donne la convergence de la série proposée.

Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+2}$, f est la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1 (appliquer par exemple le critère de d'Alembert), d'où $S = \sqrt{2} f\left(2^{-\frac{1}{4}}\right)$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n+1} = \frac{x}{1-x^4}$ donc, avec $f(0) = 0$, il vient :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t^4}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{4}\ell n\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$

En conclusion $\quad S = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ell n(1+\sqrt{2})$.

2) Puisque $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$, la règle des équivalents pour les séries à termes positifs donne la convergence de la série proposée.

Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}$, f est la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1 et normalement convergente sur $[-1, 1]$ car $\forall x \in [-1, 1]$, $\left|\dfrac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La fonction f est donc définie et continue sur $[-1, 1]$ ce qui donne $S = f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Calculons $f(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

La décomposition en éléments simples $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)} = \dfrac{-1}{n+1} + \dfrac{2}{2n+1}$ donne :

$$f(x) = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{x}\ell n\left(1-x^2\right) + \ell n\,\frac{1+x}{1-x}$$

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ell n(1+x) + \left(\frac{1}{x}-1\right)\ell n(1-x)$$

Sachant que $\lim\limits_{u \to 0} u \ln u = 0$, on en déduit $S = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2\ln 2$.

3) La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ converge d'après le critère de Leibniz.

Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$, f est la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1. D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$, $\sum \dfrac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$ est une série alternée vérifiant le critère de Leibniz, on a donc $\forall x \in [0,1]$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3k+1}\right| \leqslant \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1} \leqslant \dfrac{1}{3n+1}$ et il en résulte que la série entière converge uniformément sur $[0,1]$. En conséquence, f est continue sur $[0,1]$ et $S = f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{3n}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{3n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Puisque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ est continue sur $]-1,+\infty[$, on obtient $S = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Le calcul de cette intégrale est classique. En écrivant $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{3(t+1)} + \dfrac{-t+2}{3(t^2-t+1)}$, il vient :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

D'où finalement $\qquad S = \dfrac{1}{3}\ln 2 + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Ex. 11

1) Posons $a_n = \dfrac{C_{2n}^n}{2n-1}$.

On obtient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2(2n-1)}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 4$ et le rayon de convergence est égal à $\dfrac{1}{4}$.

2) Pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n \quad \text{et} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Alors la relation $(n+1)a_{n+1} = 2(2n-1)a_n$ donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)a_{n+1}x^n = 4\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n x^n, \quad \text{d'où}$$

$(1+4x)f'(x) = 2f(x)$.

La solution générale de cette équation sur $\left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$ est $x \mapsto \lambda\sqrt{4x+1}$ donc, compte tenu de $f(0) = a_0 = -1$, il vient $f(x) = -\sqrt{4x+1}$.

Ex. 12

De $e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$, on déduit un développement limité à tout ordre de $t \mapsto e^{tA}$, et de même pour $t \mapsto e^{tB}$.

À l'ordre 2, on obtient :

$$e^{tA}e^{tB} = \left(I_n + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + o\left(t^2\right)\right)\left(I_n + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + o\left(t^2\right)\right)$$
$$= \left(I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + B^2 + 2AB) + o\left(t^2\right)\right)$$

$$e^{tB}e^{tA} = \left(I_n + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + o\left(t^2\right)\right)\left(I_n + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + o\left(t^2\right)\right)$$
$$= \left(I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2}\left(A^2 + B^2 + 2BA\right) + o\left(t^2\right)\right).$$

Puisque $e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$, l'unicité du développement limité à un ordre donné fournit $AB = BA$.

Niveau 2

Ex. 13

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les changements de variable définis par $u = x^2$ et $u = n\,\pi + t$ donnent :

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0,\pi]$, on a $0 \leqslant \dfrac{\sin t}{2\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant \dfrac{\sin t}{2\sqrt{t+n\pi}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$, d'où, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{(n+1)\pi}}\mathrm{d}t \leqslant |a_n| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{n\pi}}\mathrm{d}t \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant |a_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ est égal à 1. Alors, en notant ρ le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, avec le corollaire du théorème 4, $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$ donne $\rho \geqslant 1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant |a_n|$ donne $\rho \leqslant 1$, d'où finalement $\rho = 1$.

2) Avec $|a_n| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$, la divergence de la série de Riemann $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ donne celle de $\sum |a_n|$ c'est-à-dire de $\sum (-1)^n a_n$.

D'autre part, a_n est le terme général d'une série alternée et l'encadrement précédent donne :

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant |a_n|$$

donc la suite $\left(|a_n|\right)_{\mathbb{N}}$ est décroissante et puisqu'elle tend évidemment vers 0, la série $\sum a_n$ est convergente d'après le critère de Leibniz. En conclusion, l'ensemble de convergence de la série proposée est $]-1,1]$.

Ex. 14

On suppose d'abord R_1 et R_2 non nuls.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_1R_2$. Il existe r_1 et r_2 réels positifs tels que $|z| = r_1r_2$ avec $r_1 < R_1$, $r_2 < R_2$ (on peut prendre, par exemple $r_1 = \sqrt{|z|\,\dfrac{R_1}{R_2}}$ et $r_2 = \sqrt{|z|\,\dfrac{R_2}{R_1}}$).

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n r_1^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n r_2^n = 0$ donc $a_nb_n\,|z|^n = a_nr_1^n \cdot b_nr_2^n$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} a_nb_nz^n = 0$.

Ceci montre que $R \geqslant R_1R_2$. Si R_1 ou R_2 est nul en posant par convention $R_1R_2 = 0$ (pour éliminer le problème dû au cas où ce produit se présente sous la forme $0 \times \infty$), on a encore de façon évidente $R \geqslant R_1R_2$.

Remarque :

On peut avoir $R = R_1R_2$.

Par exemple avec $a_n = 2^n$, $b_n = 3^n$ donc $a_nb_n = 6^n$, on a $R_1 = \dfrac{1}{2}$, $R_2 = \dfrac{1}{3}$ et $R = \dfrac{1}{6} = R_1R_2$.

On peut aussi avoir $R > R_1R_2$.

Par exemple avec $a_{2n} = 1$, $a_{2n+1} = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = 1$ on a $R_1 = R_2 = 1$ et $a_nb_n = 0$ donc $R = +\infty$.

Autre exemple : avec $a_{2n} = 1$, $a_{2n+1} = 2^{2n+1}$, $b_{2n} = 2^{2n}$, $b_{2n+1} = 1$ on a $R_1 = R_2 = \dfrac{1}{2}$ et $R = \dfrac{1}{2}$ donc $R > R_1R_2$.

Ex. 15

1) D'après l'hypothèse $0 < a < 1$, la série géométrique $\sum a^n$ est convergente. En conséquence, la majoration $\left|\sin(a^n x)\right| \leqslant a^n |x|$ montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}$.

La même majoration donne pour tout $A > 0$ $\| u_n \|_{\infty}^{[-A,A]} \leqslant Aa^n$. La série $\sum u_n$ est donc normalement convergente sur tout segment $[-A, A]$. Cependant en remarquant que $u_n\left(\dfrac{\pi}{2a^n}\right) = 1$, il vient $\| u_n \|_{\infty}^{\mathbb{R}} \geqslant 1$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^{(p)}(x) = a^{np} \sin\left(a^n x + p\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $\| u_n^{(p)} \|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leqslant a^{np}$. Il en résulte que la série $\sum u_n^{(p)}$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, on sait que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

3) ■ Première solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin\left(a^n x\right) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{a^{n(2p+1)} x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}(x) \ \text{ avec } \ u_{n,p}(x) = (-1)^p \frac{a^{n(2p+1)} x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

On vérifie que $v_p = |u_{n,p}(x)| = \dfrac{a^{n(2p+1)} |x|^{2p+1}}{(2p+1)!}$ est le terme général d'une série convergente de somme :

$$s_n = \sum_{p=0}^{+\infty} v_p = \operatorname{sh}\left(a^n |x|\right)$$

puis, avec $s_n \sim a^n |x|$ que la série $\sum s_n$ est convergente. Il en résulte que la suite double $\left(u_{n,p}(x)\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et, d'après le théorème de Fubini, on a :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n(2p+1)}$$

soit aussi
$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{1 - a^{2p+1}} \cdot \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Ce calcul est valable pour tout x donc le rayon de convergence est $+\infty$.

■ Deuxième solution

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$f^{(2p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p a^{2pn} \sin\left(a^n x\right) \ \text{ et } \ f^{(2p+1)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p a^{(2p+1)n} \cos\left(a^n x\right),$$

donc $\quad f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p a^{(2p+1)n} = \frac{(-1)^p}{1 - a^{2p+1}}$.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{k}(0) \frac{x^k}{k!} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t,$$

or, le calcul précédent donne $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a^{k(n+1)} = \frac{1}{1 - a^{n+1}}$,

il en résulte : $\quad |R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!\left(1 - a^{n+1}\right)}$. Puisque $\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!\left(1 - a^{n+1}\right)}$ est le terme général d'une série convergente, on en déduit finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ ce qui montre que f est somme de sa série de Mac-Laurin sur $\mathbb{R}$. Le rayon de convergence est nécessairement infini.

Ex. 16

1) $\dfrac{1+t^2}{2} \geqslant t$ donne $a_n \geqslant \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant t^2 \leqslant t \leqslant 1$ donc $0 \leqslant a_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \mathrm{d}t$,

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{2}{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Pour $t \in [0,1]$, on a $0 < \dfrac{1+t^2}{2} \leqslant 1$ donc $0 < \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n$ et $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge d'après le critère de Leibniz (ou critère des séries alternées).

2) D'après le 1), le rayon de convergence est $R = 1$.

Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n \mathrm{d}t,\ x \in]-1,1[.$

Pour tout x fixé dans $]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |x|^n$ est convergente, donc, puisque :

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \left|\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n\right| < |x|^n$$

la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ de terme général $v_n : t \mapsto \left(x\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n$ est normalement convergente sur $[0,1]$ et on a :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(x\frac{1+t^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}(1+t^2)}$ d'où, si $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\frac{2}{x} - 1 - t^2}$.

Pour $x \in]0,1[$, on a $0 < \dfrac{x}{2-x} < 1$ et $f(x) = \dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\,\mathrm{Argth}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$, soit :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}}\mathrm{Argth}\sqrt{\frac{x}{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ell n\left(\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}\right).$$

Pour $x \in]-1,0[$, on a $\dfrac{2-x}{x} < 0$ alors :

$$f(x) = -\frac{2}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\frac{x-2}{x}+t^2} = -\frac{2}{x}\sqrt{\frac{x}{x-2}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

$$\text{soit} \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x-2}}.$$

Remarque. La série entière converge uniformément sur $[-1,0]$. En effet, sur cet intervalle, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est alternée convergente et vérifie le critère des séries alternées car :

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$$

donc pour le reste $R_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k$, on a $|R_n(x)| \leqslant |a_n x^n| \leqslant a_n$, ce qui prouve que (R_n) converge uniformément vers 0.

En conséquence, f est continue en -1 :

$$f(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2}{\sqrt{x(x-2)}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{x-2}},$$

$$f(-1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ex. 17

1) Considérons les premiers termes :

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1 \qquad a_3 = \frac{5}{6} \qquad a_4 = \frac{17}{24} \qquad a_5 = \frac{5}{8} \qquad a_6 = \frac{163}{288},$$

$$3a_3 = \frac{5}{2} \qquad 4a_4 = \frac{17}{6} \qquad 5a_5 = \frac{25}{8} \qquad 6a_6 = \frac{163}{48}.$$

On constate que $\quad a_3 > a_4 > a_5 > a_6$,
et $\quad 3a_3 < 4a_4 < 5a_5 < 6a_6$.
Posons alors l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{P}(n) \begin{cases} a_3 > a_4 > a_5 > \dots > a_{n-1} > a_n & \textbf{(1)} \\ 3a_3 < 4a_4 < 5a_5 < \dots < (n-1)a_{n-1} < n\,a_n & \textbf{(2)} \end{cases}$$

On vient de vérifier que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie avec n quelconque $n \geqslant 3$:

- alors **(2)** donne $a_{n-2} > 0$ et d'après la relation de récurrence : $(\mathcal{R}) : a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)}$, on en déduit $a_{n+1} < a_n$;
- toujours avec $(\mathcal{R})$, on obtient : $(n+1)a_{n+1} - na_n = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2}$.

Or **(2)** donne $\dfrac{a_{n-2}}{2} < \dfrac{n}{2(n-2)} a_n < a_n$ dès que $n - 4 > 0$, c'est-à-dire à partir de $n = 5$.
Donc, pour $n \geqslant 5$, on obtient $(n+1)a_{n+1} - na_n > 0$.
On a ainsi prouvé que si $n \geqslant 5$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, et la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie pour tout $n \in \{3, \dots, 5\}$, elle est vraie pour tout n.
Finalement $\big(a_n\big)_{n \geqslant 2}$ est strictement décroissante et $\big(na_n\big)_{n \geqslant 2}$ est strictement croissante.
On sait que le rayon de convergence R est défini par :

$$R = \sup \left\{ |x| \ / \ \big(a_n x^n\big)_{\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\},$$

or, $\big(a_n\big)_{\mathbb{N}}$ positive décroissante est convergente donc bornée, donc $R \geqslant 1$.
Le rayon de convergence peut être également défini par :

$$R = \sup ig\{|x| \ / \ \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n \text{ converge}\}$$

or $na_n > 2a_2$ donne $a_n > \dfrac{2}{n}$ et $\sum a_n$ diverge donc $R \leqslant 1$.
Finalement $\quad R = 1$.

2) La relation $\mathcal{R}$ donne, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n+1)a_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n = 0$$

donc $\displaystyle \sum_{n=3}^{+\infty} na_n x^{n-1} - x \sum_{n=2}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n + \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$

Avec $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, on déduit :

$$f'(x) - 1 - 2x - x\big(f'(x) - 1\big) - \big(f(x) - 1 - x\big) + \frac{x^2}{2} f(x) = 0 \text{ soit } 2(x-1)f'(x) = \big(x^2 - 2\big)f(x). \quad (E)$$

En écrivant $\dfrac{x^2-2}{2(x-1)}=\dfrac{1}{2}(x+1)-\dfrac{1}{2(x-1)}$, on voit que les primitives de $x\mapsto\dfrac{x^2-2}{2(x-1)}$ sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$ sont les fonctions :

$$x\mapsto\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{2}\ell n\,|x-1|\,.$$

Donc l'équation différentielle (E) donne : $\quad f(x)=\lambda\dfrac{e^{\frac{(x+1)^2}{4}}}{\sqrt{|x-1|}}$.

Avec $f(0)=1$ on conclut enfin que : $\quad\forall x\in]-1,1[\quad f(x)=\dfrac{e^{\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}$.

Ex. 18

1) Supposons que le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}u_nx^n$ soit non nul et posons :

$$\forall x\in]-\rho,\rho[,\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n.$$

On a alors $\forall x\in]-\rho,\rho[,\ \ f^2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}v_nx^n$ avec $v_n=\sum_{k=0}^{n}u_ku_{n-k}=u_{n+1}$ donc :

$$xf^2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+1}x^{n+1}=f(x)-u_0\quad\text{c'est-à-dire}\quad xf^2(x)-f(x)+1=0.$$

Ainsi, pour tout $x\in]-\rho,\rho[\setminus\{0\}$, $f(x)$ est racine réelle de l'équation du second degré en t : $xt^2-t+1=0$, et on en déduit que :

(1) $|x|<\rho\quad\Rightarrow\quad 1-4x\leqslant 0$ donc $\rho\leqslant\dfrac{1}{4}$

(2) pour tout $x\in]-\rho,\rho[\setminus\{0\}$, il existe $\varepsilon(x)\in\{-1,1\}$ tel que $\;f(x)=\dfrac{1-\varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Sur les intervalles $]-\rho,0[$ et $]0,\rho[$, f est continue et $\varepsilon(x)=\dfrac{1-2xf(x)}{\sqrt{1-4x}}$ montre que la fonction ε est également continue donc constante puisqu'à valeurs dans $\{-1,1\}$.

À ce niveau on sait qu'il existe $\varepsilon_1\in\{-1,1\}$ et $\varepsilon_2\in\{-1,1\}$ tels que :

$$f(x)=\frac{1-\varepsilon_1\sqrt{1-4x}}{2x}\text{ sur }]-\rho,0[\text{ et }f(x)=\frac{1-\varepsilon_2\sqrt{1-4x}}{2x}\text{ sur }]0,\rho[.$$

f devant être continue en 0 avec $f(0)=1$, la seule possibilité est $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$ donc :

$$\forall x\in]-\rho,\rho[\setminus\{0\},f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\quad,\quad f(0)=1.$$

2) Considérons donc la fonction f définie sur $\left]-\infty,\dfrac{1}{4}\right[$ par $\quad f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\quad$ si $x\neq 0\quad$ et $f(0)=1$.

On vérifie facilement que f est continue en 0.

- $x\mapsto\sqrt{1-4x}$ est développable en série entière de rayon $\rho=\dfrac{1}{4}$:

$$\sqrt{1-4x}=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\frac{x^n}{n!}\quad\text{d'où}\quad\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!x^n}{n!(n+1)!}.$$

- f vérifiant $\quad\forall x\in\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[,xf^2(x)-f(x)+1=0$, en posant $\quad a_n=\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, le calcul du 1) montre que : $\quad a_0=1\quad$ et $\quad\forall n\in\mathbb{N},a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\quad$ donc $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=a_n=\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Ex. 19

On montre que f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, de l'équation différentielle :

$$(E) \quad 4(1+x^2)y'' + 4xy' - y = 0.$$

Étant donnée une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R non nul, sa somme S est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ 4(n+1)(n+2)a_{n+2} = -(2n-1)(2n+1)a_n$. **(1)**

Alors, $S(0) = a_0 = 1$, donne pour tout $n \geqslant 1$, $a_{2n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (4n-3)}{(2n)!}$, donc

$$a_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{(4n-2)!}{2^{4n-1}(2n)!(2n-1)!}.$$

De même, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \frac{1 \times 3 \times 5 \dots \times (4n-1)}{(2n+1)!}$, donc :

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(4n)!}{2^{4n+1}(2n)!(2n+1)!}.$$

On remarque que cette deuxième formule reste vraie pour $n = 0$.

En déduisant de la relation de récurrence **(1)** que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1, on obtient que sa somme S est solution de (E) sur $]-1, 1[$ vérifiant $S(0) = 1$, $S'(0) = \frac{1}{2}$.

En conséquence,

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4n-2)!}{2^{4n-1}(2n)!(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(4n)!}{2^{4n+1}(2n)!(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Ex. 20

1) f est l'unique solution sur $]-1, 1[$, vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{3}$, de l'équation différentielle :

$$(E) \quad \left(1 - x^2\right)y'' - xy' + \frac{1}{9}y = 0.$$

Étant donnée une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R non nul, sa somme S est solution de (E) sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(n+2)a_{n+2} = \left(n^2 - \frac{1}{9}\right)a_n$. **(1)**

Alors, $S(0) = a_0 = 0$, donne pour tout $n \geqslant 0$, $a_{2n} = 0$.

De même, $a_1 = \frac{1}{3}$ donne pour tout $n \geqslant 0$, $a_{2n+1} = \frac{2^n}{3^{3n+1}} \cdot \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!}$.

En déduisant de la relation de récurrence **(1)** que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1, on obtient que sa somme S est solution de (E) sur $]-1, 1[$ vérifiant $S(0) = 0$, $S'(0) = \frac{1}{3}$.

En conséquence, $\quad \forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{3n+1}} \cdot \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} x^{2n+1}.$

2) Le développement précédent donne :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{3n+1}} C_{3n}^n x^{2n} \quad \text{donc} \quad f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{3n}^n \left(\frac{2}{27}\right)^n.$$

On en déduit $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} C_{3n}^n \left(\frac{2}{27}\right)^n = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$

Ex. 21

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant 2t - t^2 \leqslant 1$. On en déduit que la fonction $g \ : \ (x,t) \mapsto \dfrac{1}{1 - x(2t - t^2)}$ est continue sur $]-\infty, 1[\times[0,1]$ et donc que f est définie sur $]-\infty, 1[$. (Avec le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre – cf. chapitre 6 –, il en résulte aussi que f est continue sur $]-\infty, 1[$.)

On commence par développer en série la fonction intégrée :

$$\text{pour tout } (x,t) \in]-1,1[\times[0,1], \text{ on a } g(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (2t - t^2)^n.$$

Pour x fixé dans $]-1,1[$, en posant $u_n \ : \ t \mapsto x^n \left(2t - t^2\right)^n$, on obtient $\| u_n \|_\infty^{[0,1]} = |x|^n$. La série de fonctions $\sum u_n$ est donc normalement convergente sur $[0,1]$ et par application du théorème d'intégration terme à terme, il vient :

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(2t - t^2\right)^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^1 \left(2t - t^2\right)^n \mathrm{d}t.$$

Avec le changement de variable défini par $t = 1 - \cos u$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 (2t - t^2)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u \,\mathrm{d}u$.

Le calcul de l'intégrale de Wallis $W_{2n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u \,\mathrm{d}u$ conduit alors à : $\forall x \in]-1,1[, \ \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = 1$, le rayon de convergence est égal à 1.

Ex. 22

Remarquons que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie **(1)** $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) = (1 - qx) f(qx)$ avec $|q| < 1$, alors :

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N}, \ \ f(x) = (1 - qx)\left(1 - q^2 x\right) \ \cdots \ \left(1 - q^n x\right) f\left(q^n x\right).$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f\left(q^n x\right) = f(0)$, on en déduit $f(x) = f(0) \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - q^k x\right)$.

Réciproquement, on montre que la fonction $\varphi \ : x \mapsto \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - q^k x\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie **(1)**.

En conséquence, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et une seule vérifiant **(1)** et telle que $f(0) = \lambda$: il s'agit de $\lambda\varphi$. On recherche alors une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul dont la somme S vérifie **(1)** et $S(0) = f(0)$ c'est-à-dire telle que $a_0 = f(0)$ et $\forall x \in]-R, R[, \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1 - qx) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n$.

On obtient $a_0 = f(0), \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ a_n = f(0) \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{q^k}{q^k - 1}$ et $R = +\infty$.

D'après la remarque initiale il en résulte : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) = f(0) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \prod_{k=1}^{n} \frac{q^k}{q^k - 1}$.

Ex. 23

1) Soit $u_n \ : \ x \mapsto e^{-n + n^2 i x}$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ u_n^{(p)}(x) = \left(n^2 i\right)^p e^{-n + n^2 i x} \text{ d'où } \| u_n^{(p)} \|_\infty^{\mathbb{R}} = n^{2p} e^{-n}.$$

En conséquence chaque série $\sum u_n^{(p)}$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) Le calcul précédent donne $\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 i)^p e^{-n}$ donc $\left|f^{(p)}(0)\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2p} e^{-n}$.

Il en résulte $\frac{1}{p!}\left|f^{(p)}(0)\right| \geqslant \frac{p^{2p}e^{-p}}{p!} \geqslant p^p e^{-p}$. Donc quel que soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{r^p}{p!}\left|f^{(p)}(0)\right| = +\infty$ ce qui prouve que le rayon de convergence de la série $\sum f^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!}$ est nul.

Ex. 24

1) Soit $u_n\ :\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$. D'après le critère de Leibniz, la série de fonctions $\sum u_n$ converge sur $\mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{Z}, x \leqslant -2\}$.

2) $u_n^{(p)}(x) = \frac{p!(-1)^{n+p}}{(x+n)^{p+1}}$. Pour tout $a > -2$, et tout $p \geqslant 1$, avec $\| u_n^{(p)} \|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \frac{p!}{(n+a)^{p+1}}$, la série dérivée $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$ et f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2, +\infty[$.

3) $\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(p)}(x) = p! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{(x+n)^{p+1}},\ f^{(p)}(0) = p! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{n^{p+1}},\ \left|f^{(p)}(0)\right| \leqslant \frac{p!}{2^{p+1}}$ (théorème des séries alternées).

$\left|f^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{x}{2}\right|^p$: le rayon de convergence R de la série de Mac-Laurin de f vérifie $R \geqslant 2$.

Avec $g(x) = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, on a $f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + g(x)$.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-4, +\infty[$, donc sur $]-2, +\infty[$, avec pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$g^{(p)}(x) = p! \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{(x+n)^{p+1}} \text{ d'où } \left|g^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{(x+4)^{p+1}}.$$

Pour tout $x \in]-2, 2[$ notons $R_p(x)$ le reste intégral d'ordre p de la formule de Taylor appliquée à g sur $[0, x]$. Avec la majoration précédente, il vient :

$$|R_p(x)| \leqslant \left|\int_0^x (p+1)\frac{|x-t|^p}{2^{p+1}}\mathrm{d}t\right| = \frac{|x|^{p+1}}{2^{p+1}} \text{ et, } \quad |x| < 2 \text{ donne } \lim_{p\to+\infty} R_p(x) = 0.$$

Ainsi g est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence supérieur ou égal à 2.

Sachant que $h\ :\ x \mapsto \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$ est développable en série entière à l'origine (de rayon 2), on conclut finalement qu'il en est de même pour $f = h + g$. Le rayon de convergence R de ce développement est a priori tel que $R \geqslant 2$, mais puisque $\lim_{\substack{x\to-2 \\ x>-2}} f(x) = +\infty$, on a aussi $R \leqslant 2$ et finalement $R = 2$.

Ex. 25

1) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.

Il en résulte $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n x^n\right| \leqslant 2^{n+1}|x|^n$ et donc $R \geqslant \frac{1}{2}$.

2) La relation de récurrence donne :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+2},$$

d'où $(1 - x - 2x^2)S(x) = 1 + \frac{x^2}{1+x}$ puis $S(x) = \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$.

On décompose S en éléments simples, $S(x) = \frac{1}{3(1+x)^2} - \frac{1}{9(1+x)} + \frac{7}{9(1-2x)}$ pour en déduire son développement en série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$:

$$S(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n.$$

Par unicité de ce développement, il vient $u_n = \frac{7}{9}\cdot 2^n + \frac{(-1)^n}{3}(n+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{9}$.

Ex. 26

1) Dans $\mathcal{S}_n$, il y a a_{n-k} permutations admettant k points fixes donnés, il y a donc $C_n^k\, a_{n-k}$ permutations admettant k points fixes. La formule en résulte.

2) Avec $0 < \frac{a_n}{n!} \leqslant 1$, on voit que le rayon de convergence R de $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ est tel que $R \geqslant 1$.

Posons $b_n = \frac{a_n}{n!}$, la formule du 1) s'écrit $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} b_{n-k} = 1$ et on reconnaît un produit de Cauchy.

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}$,

puis de nouveau avec un produit de Cauchy : $b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ et $a_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Ex. 27

1) Pour tout $x \in [0,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctan} x$.

En posant $u_n\ :\ [0,1] \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, on constate que quel que soit $x \in [0,1]$, $\sum u_n(x)$ vérifie le critère de Leibniz. On en déduit, en posant $R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_n(x)$, que $\| R_n \|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{1}{2n+1}$ donc que la série entière converge uniformément sur $[0,1]$ puis que sa fonction somme est continue en 1.

En conséquence, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4}$.

2) De $|v_n| \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell n\, n$, on déduit $\lim_{n\to+\infty} |v_n| = 0$.

D'autre part $|v_{n+1}| - |v_n| = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{n+2}\times\frac{1}{2n+3}$ donne $|v_{n+1}| - |v_n| \leqslant 0$. Donc $\sum v_n$ converge d'après le critère de Leibniz.

En notant que $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$, on reconnaît un produit de Cauchy. Cependant le théorème vu dans le chapitre 2 concernant la somme d'un tel produit ne s'applique pas ici car la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. On introduit alors la série entière $\sum v_n x^{2(n+1)}$ de rayon de convergence égal à 1. Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{2(n+1)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n+1}\right)^2 = \left(\operatorname{Arctan} x\right)^2.$$

En montrant, comme en 1) que la série entière $\Sigma v_n x^{2(n+1)}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$, il vient finalement $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\operatorname{Arctan} x\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$.

Ex. 28

La convergence peut se déduire de $0 < \dfrac{1}{(8n+1)(8n+5)} < \dfrac{1}{n^2}$.

En remarquant que $u_n = \dfrac{1}{(8n+1)(8n+5)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{8n+1} - \dfrac{1}{8n+5}\right)$, on obtient :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} \quad \text{donc} \quad S = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 t^{4n}\mathrm{d}t.$$

On montre alors que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{4n}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

Par exemple, en introduisant la série entière $\sum(-1)^n \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ de rayon de convergence égal à 1, on remarque que pour tout $x \in [0,1]$, celle-ci converge d'après le critère des séries alternées. Comme dans l'exercice précédent, il en résulte que cette série entière converge uniformément sur $[0,1]$ et on a donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$. Or pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{4n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

Remarque : on dispose d'autres méthodes pour arriver à ce résultat.

Par exemple la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k+1} = \int_0^1 \frac{1-(-t^4)^{n+1}}{1+t^4}\mathrm{d}t$ permet de calculer la limite des sommes partielles.

En décomposant en éléments simples, on obtient :

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{4}\left(\frac{t\sqrt{2}+2}{t^2+t\sqrt{2}+1} - \frac{t\sqrt{2}-2}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right), \text{ puis } \quad S = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ell n(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{16\sqrt{2}}.$$

Ex. 29

1) Un développement en série entière donne :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ (1+x)^{\frac{2}{3}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{avec } a_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{2}{3}-n+1\right)\cdot\frac{1}{n!}.$$

En observant que cette série vérifie pour tout $x \in [0,1[$, le théorème des série alternées on obtient l'encadrement souhaité.

2) En appliquant le 1) au point $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient $\quad \dfrac{3}{2}\left[(n+1)^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}\right] \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \leqslant \dfrac{3}{2}\left[(n+1)^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}\right] + \dfrac{1}{6n^{\frac{4}{3}}}$,

puis en sommant ces inégalités : $\quad \dfrac{3}{2}\left[10^{\frac{14}{3}} - 1\right] \leqslant S \leqslant \dfrac{3}{2}\left[10^{\frac{14}{3}} - 1\right] + \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{10^7-1} \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}$.

Une calculatrice donne $69\,622 < \dfrac{3}{2}\left[10^{\frac{14}{3}} - 1\right] < 69\,622,333$. Et, avec $\dfrac{1}{k^{\frac{4}{3}}} < \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{4}{3}}}$ pour $k \geqslant 2$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{10^7-1} \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}} < 1 + \int_1^{10^7-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{4}{3}}} < 1 + 3\left(1 - 10^{-\frac{7}{3}}\right) < 4, \ \text{donc} \ \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10^7-1} \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}} < \frac{2}{3} < 0,667.$$

On a finalement $69\,622 < S < 69\,623$ c'est-à-dire $\quad E(S) = 69\,622$.

Ex. 30

Il s'agit ici d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1 et, pour $|x| < 1$, on a :

$$(x-1)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ell n\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^n.$$

En remarquant que pour tout $n \geqslant 2$, $-\dfrac{1}{n-1} \leqslant \ell n \dfrac{n-1}{n} \leqslant -\dfrac{1}{n}$, on obtient :

$$-\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \ell n \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n \leqslant -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

c'est-à-dire $\quad x\,\ell n(1-x) \leqslant (x-1)f(x) \leqslant x + \ell n(1-x)$, et en conclusion on a $\quad f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{\ell n(1-x)}{x-1}$.

Ex. 31

Si f existe on obtient pout tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\; e^{f(e^{i\theta}) - i\theta} = 1$ donc $f(e^{i\theta}) - i\theta = 2i\pi\, k(\theta)$ avec $k(\theta) \in \mathbb{Z}$. La continuité de f donne alors que la fonction k est constante. On constate ensuite que f n'est pas bornée sur le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$ ce qui est une contradiction puisque f est continue et $\mathbb{U}$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Niveau 3

Ex. 32

La formule étant vraie pour $x = 0$, on se limte dans ce qui suit à $x \neq 0$.

Pour tout $x \in]-a, a[\setminus\{0\}$, la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) \quad \text{avec} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

De l'hypothèse $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \forall t \in]-a, a[, \quad f^{(n)}(t) \geqslant 0$, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \forall x \in]0, a[, \quad R_n(x) \geqslant 0 \quad \text{d'où} \quad S_n(x) \leqslant f(x).$$

Pour tout $x \in]0, a[$, la suite $\big(S_n(x)\big)_{\mathbb{N}}$ est donc convergente car croissante et majorée par $f(x)$; il en résulte que $\big(R_n(x)\big)_{\mathbb{N}}$ est également convergente.

On a d'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-a, a[$, $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\mathrm{d}u$; or la fonction $f^{(n+1)}$ est croissante car $f^{(n+2)}$ est positive, on en déduit donc que :

$$x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\mathrm{d}u \quad \text{est croissante sur }]-a, a[\setminus\{0\}.$$

Pour tout $x \in]0, a[$, fixons y tel que $0 < x < y < a$, on a alors : $0 \leqslant \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \dfrac{R_n(y)}{y^{n+1}}$ donc $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $R_n(y)$ admet une limite et $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1}$ tend vers 0 donc $R_n(x)$ tend vers 0 et :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Pour tout $x \in]-a, 0[$, on a : $\quad |R_n(x)| = \dfrac{|x|^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\mathrm{d}u \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(0) \int_0^1 (1-u)^n \mathrm{d}u$

ainsi $\quad |R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, car on vient de voir que, pour tout $t \in]0, a[$, la série de terme général $\dfrac{t^n}{n!} f^{(n)}(0)$ est convergente. Finalement $\quad \forall x \in]-a, a[, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$.

Ex. 33

1) Il est clair que f est solution sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle $\quad (E) : y' = 1 + y^2$.

Inversement, si φ est solution de (E) sur I, on a $\dfrac{\varphi'}{1+\varphi^2} = 1$ donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \operatorname{Arctan} \varphi(x) = x - x_0\,.$$

La fonction Arctan prenant ses valeurs dans $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il vient :

$$\forall x \in I, x - x_0 \in I \quad \text{d'où} \quad x_0 = 0\text{ ; puis } \varphi(x) = \tan x.$$

On en déduit que f est l'unique solution de (E) sur I.

2) Avec la formule de Leibniz, $f' = 1 + f^2$ donne pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k f^{(k)} f^{(p-k)}$. **(1)**

Puis, une récurrence immédiate fournit $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(x) \geqslant 0$.

En écrivant la formule de Mac Laurin avec reste intégral : $f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$,

on obtient $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \leqslant f(x)$, ce qui assure la convergence de la série de terme général positif $\frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$. Ainsi la série de Mac Laurin de f a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$, et on peut définir la fonction $\Phi : I \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

3) Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, on a $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et d'après **(1)** :

$$\forall p \geqslant 1, f^{(p+1)}(0) = (p+1)! a_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \, k! a_k (p-k)! a_{p-k} \quad \text{donc} \quad \forall p \geqslant 1, (p+1) a_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} a_k a_{p-k}.$$

De $\forall x \in I$, $\Phi(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$, $\Phi'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p x^{p-1}$, $\Phi^2(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} a_k a_{p-k} \right) x^p$, on déduit alors :

$$\forall x \in I, \Phi'(x) = 1 + \Phi^2(x). \text{ Ainsi } \Phi = f \text{ d'après 1).}$$

4) Le raisonnement précédent montre que le rayon de convergence ρ de la série de Mac Laurin de f est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Si on avait $\rho > \frac{\pi}{2}$, la fonction somme de cette série serait continue en $\frac{\pi}{2}$ et f admettrait une limite finie en $\frac{\pi}{2}$. Ceci étant exclu, on a $\rho \leqslant \frac{\pi}{2}$ et finalement $\rho = \frac{\pi}{2}$.

Ex. 34

1) ▪ Montrons d'abord que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} g(x) = +\infty$ **(1).**

Par hypothèse sur $\sum b_n$, à tout $A > 0$, on peut associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n_0} b_k \geqslant 2A$.

Puisque $\lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{n_0} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n_0} b_k \geqslant 2A$, il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in]1-\eta, 1[, \sum_{k=0}^{n_0} b_k x^k \geqslant A, \text{ et donc } \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k > \sum_{k=0}^{n_0} b_k x^k \geqslant A.$$

Finalement $\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]1-\eta, 1[, g(x) \geqslant A$: c'est **(1)**.

▪ Montrons ensuite que le rayon de convergence ρ de $\sum a_n x^n$ vérifie $\rho \geqslant 1$ **(2)** ;

$\sum b_n x^n$ ayant 1 pour rayon de convergence, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} b_n x^n = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} a_n x^n = 0$ $\left(a_n x^n = \frac{a_n}{b_n} b_n x^n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = S \right)$ **(2)** en résulte.

- Supposons $S = 0$ et montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ donc, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|a_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} b_n$.

En écrivant $|f(x)| = \left| \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n \right| \leqslant A_{n_0} + \dfrac{\varepsilon}{2} g(x)$ avec $A_{n_0} = \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} |a_n|$, on obtient :

$$\forall x \in]0,1[, \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n x^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} g(x), \quad \text{puis} \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leqslant \frac{A_{n_0}}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après **(1)**, il existe $\eta \in]0,1[$ tel que $\forall x \in]1-\eta, 1[, 0 \leqslant \dfrac{A_{n_0}}{g(x)} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Finalement $(\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)\,(\exists\ \eta \in \mathbb{R}_+^*)\,(\forall x \in]1-\eta, 1[,\ \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

- Cas général, montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = S$.

Posons $a'_n = a_n - S b_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a'_n}{b_n} = 0$ donc puisque $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a'_n x^n = f(x) - S g(x)$, il vient :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x) - S g(x)}{g(x)} = 0 \text{ c'est-à-dire } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)}{g(x)} = S.$$

2) Application

On a $(1-x)^{-\alpha} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!} x^n$ série de rayon de convergence $\rho = 1$.

Posons $b_n = n^{\alpha-1} > 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ diverge car $1 - \alpha < 1$ et la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n x^n$ a pour rayon de convergence 1, (utiliser le critère de d'Alembert).

En posant $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}$, on a $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{n^\alpha} \prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1 + \dfrac{\alpha}{k}\right)$.

Puis avec $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1 + \dfrac{\alpha}{k}\right)$, il vient $\ell n\, u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ell n \left(1 + \dfrac{\alpha}{k}\right)$.

- Au voisinage de 0, on a $\ell n(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$, donc $\ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n = \ell n \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right) = \dfrac{\alpha}{n} + \mathcal{O}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

puis $\ell n \dfrac{u_{n+1}}{(n+1)^\alpha} - \ell n \dfrac{u_n}{n^\alpha} = \ell n \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right) - \alpha\, \ell n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On en déduit que la série de terme général $\ell n \dfrac{u_{n+1}}{(n+1)^\alpha} - \ell n \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ est convergente donc que la suite $\left(\ell n \dfrac{u_n}{n^\alpha}\right)_{\mathbb{N}}$ est convergente. (Cf. chapitre 2, relation entre suites et séries.)

En posant $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell n \dfrac{u_n}{n^\alpha}$, et $\mu = e^\lambda$, il vient ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n^\alpha} = \mu$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu n^\alpha$ avec $\mu > 0$,

et finalement :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha\mu.$$

D'après le 1), on a alors $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^\alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n = \dfrac{1}{\alpha\,\mu} \in \mathbb{R}_+^*$, c'est la conclusion.

Ex. 35

1) R_n est le nombre de partitions de E. Soit E de cardinal $n+1$ et $a \in E$, fixé.

Notons $\mathcal{P}_E$ l'ensemble des partitions de E et, pour $K \subset E \setminus \{a\}$, $\mathcal{P}_{E,K}$ l'ensemble des partitions de E telles que la partie contenant a soit $K \cup \{a\}$.

On a clairement $\mathcal{P}_E = \bigcup_{K \subset E \setminus \{a\}} \mathcal{P}_{E,K}$ et si $K \neq K'$, $\mathcal{P}_{E,K} \cap \mathcal{P}_{E,K'} = \varnothing$ donc :

$$R_{n+1} = \sum_{K \subset E \setminus \{a\}} \operatorname{Card} \mathcal{P}_{E,K} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{K \subset E \setminus \{a\} \\ \operatorname{Card} K = k}} \operatorname{Card} \mathcal{P}_{E,K}$$

Pour K fixé tel que $\operatorname{Card} K = k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\operatorname{Card} \mathcal{P}_{E,K} = R_{n-k}$ et il y a C_n^k parties de $E \setminus \{a\}$ de cardinal k, donc :

$$R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k R_{n-k} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p R_p. \qquad \textbf{(1)}$$

2) Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R_n}{n!} x^n$.

- Commençons par évaluer le rayon de convergence de cette série entière.

Soit $r > 0$, posons $A_n = \displaystyle\sup_{0 \leqslant p \leqslant n} \frac{R_p}{p!} r^p$.

La relation **(1)** donne $\displaystyle\frac{R_{n+1}}{(n+1)!} r^{n+1} = \frac{r}{n+1} \sum_{p=0}^{n} R_p \frac{r^p}{p!} \cdot \frac{r^{n-p}}{(n-p)!}$ d'où :

$$0 < \frac{R_{n+1}}{(n+1)!} r^{n+1} \leqslant \frac{r}{n+1} A_n \sum_{p=0}^{n} \frac{r^{n-p}}{(n-p)!} \leqslant A_n \frac{re^r}{n+1}.$$

Ainsi pour $n \geqslant re^r$, on a $A_{n+1} \leqslant A_n$ ce qui prouve que la suite $\left(\dfrac{R_n}{n!} r^n\right)_{\mathbb{N}}$ est bornée et donc que le rayon de convergence ρ vérifie $\rho \geqslant r$.

Ceci étant vrai quel que soit r, on a $\rho = +\infty$.

- Calculons maintenant $f(x)$.

La relation **(1)** donne : $\quad \displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{R_p}{p!} x^p \cdot \frac{x^{n-p}}{(n-p)!}, \quad$ donc $\quad f'(x) = e^x f(x)$.

Il en résulte $f(x) = \lambda e^{e^x}$ et donc, avec $\lambda = \dfrac{f(0)}{e} = \dfrac{1}{e}$, $f(x) = e^{e^x - 1}$.

- Pour en déduire R_n il suffit alors de calculer le développement en série entière de f à l'origine.

On a pour tout x :

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{px}}{p!} = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n x^n}{p!\, n!}.$$

L'interversion des sommations est justifiée par l'absolue convergence des séries $\displaystyle\sum_n \frac{p^n x^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_p \frac{e^{p|x|}}{p!}$, et on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{n!}.$$

Par unicité du développement en série entière, il vient :

$$R_n = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{n!}.$$

Ex. 36

Appliquons le résultat vu en *Mise en œuvre*, exercice 5. La fonction sh est développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$, et la condition $|\operatorname{sh} x| < 1$ équivaut à $|x| < \ell n(1+\sqrt{2})$, donc f est développable à l'origine en série entière de rayon de convergence $R \geqslant \ell n(1+\sqrt{2})$.

Si on avait $R > \ell n(1+\sqrt{2})$ la fonction f serait continue en $\ell n(1+\sqrt{2})$ ce qui est faux. En conséquence, $R = \ell n(1+\sqrt{2})$.

Ex. 37

1) Soit f une solution de (E). On montre par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Donc toute solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Introduisons maintenant la fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{\frac{x}{1-q}} g(x)$, cette fonction g vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{1}{1-q} g(x) + g'(x) = g(qx). \qquad (E_1)$$

Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, g est continue sur $[-x,x]$ ce qui assure l'existence de :

$$M_x = \| g \|_\infty^{[-x,x]}.$$

et avec (E_1), on établit par récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \| g^{(n)} \|_\infty^{[-x,x]} \leqslant a^n M_x \quad \text{avec} \quad a = \frac{2}{1-|q|}.$$

On en déduit une majoration du reste $R_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t$ de la formule de Taylor :

$$|R_n| \leqslant a^n M_x \left| \int_0^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t \right| \quad \text{donc} \quad |R_n| \leqslant \frac{|ax|^n}{n!} M_x.$$

Pour tout réel x, $\dfrac{|ax|^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de d'Alembert, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ ce qui assure que g est somme sur $\mathbb{R}$ de sa série de Mac Laurin.

Ainsi f est développable en série entière en tant que produit de deux fonctions développables.

2) On note d'abord que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_1).

À partir de (E_1), on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g^{(n)}(0) = \left(q^{n-1} - \dfrac{1}{1-q}\right) g^{(n-1)}(0)$, d'où en posant $g(0) = \lambda$:

$$g^{(n)}(0) = \lambda \prod_{k=1}^{n} \left(q^{k-1} - \frac{1}{1-q}\right).$$

On en déduit $\quad g(x) = \lambda \left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(q^{k-1} - \frac{1}{1-q}\right)\right)$ puis $f(x) = e^{\frac{x}{1-q}} g(x)$.

Ex. 38

Une récurrence immédiate donne que toute solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1) Une solution particulière évidente est $x \mapsto \cos x$.

2) Posons $f(0) = \lambda$.

D'après (E), on a immédiatement $f'(0) = 0$.

Avec la formule de Leibniz, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n+1)}(0) = -2^{1-n} \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k+1} (-1)^k f^{(n-2k-1)}(0).$$

Alors, de $f'(0) = 0$, on déduit par récurrence $\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p+1)}(0) = 0$.

De même, avec $f(0) = \lambda$, on obtient par récurrence $\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p)}(0) = (-1)^p \lambda$.

Remarque : pour ce second calcul, le résultat classique $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \mathrm{C}_n^k = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k+1} = 2^{n-1}$ est utile.

3) D'après le 2), si f est solution de (E), sa série de Mac- Laurin est $\lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, série dont la fonction somme est $x \mapsto \lambda \cos x$.

Montrons donc que, si f est solution de (E), f est développable en série entière à l'origine.
Pour tout $a > 0$, f est continue sur $[-a, a]$ ce qui assure l'existence de $M_a = \| f \|_\infty^{[-a,a]}$.
Alors, en utilisant (E), et la formule de Leibniz, on obtient par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\| f^{(n)} \|_\infty^{[-a,a]} \leqslant 2^n M_a.$$

Avec la formule de Taylor avec reste intégral ou l'inégalité de Taylor-Lagrange, on en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| f(x) - \lambda \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{|2x|^{2n+1}}{(2n+1)!} M_x$$

et, puisque $\dfrac{|2x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est le terme général d'une série convergente, il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(f(x) - \lambda \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est somme de sa série de Mac Laurin, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda \cos x.$$

En tenant compte du 1), l'ensemble des solutions de (E) est constitué des fonctions :

$$x \mapsto \lambda \cos x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ex. 39

1) $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ tend vers 0 si et seulement si $|x| < 1$ et alors $\dfrac{x^n}{1+x^n} \underset{+\infty}{\sim} x^n$, d'où $D_f =]-1, 1[$.

2) Pour $|x| < 1$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} x^{np}$. **(1)**

La suite double $\left((-1)^{p-1} x^{np} \right)_{(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable car les séries $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} |x|^{np}$ et $\displaystyle\sum \frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ sont convergentes. On peut donc transformer l'expression **(1)** par permutation des sommations et il vient :

$$f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{1-x^p}. \qquad \textbf{(2)}$$

3) Pour $x \in [0, 1[$, la définition de f donne : $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ soit $f(x) \geqslant \dfrac{x}{2(1-x)}$. On a donc $\displaystyle\lim_{x \to 1, x<1} f(x) = +\infty$.

Avec **(2)**, on obtient $\quad (1-x)f(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1} x^p}{1 + x + \cdots + x^{p-1}}$.

Posons $u_p(x) = \dfrac{(-1)^{p-1} x^p}{1 + x + \cdots + x^{p-1}}$. Pour tout $x \in [0, 1]$ la série $\sum u_p(x)$ vérifie le critère des séries alternées, on dispose donc de la majoration $|R_p(x)| \leqslant |u_p(x)|$ où $R_p(x)$ est le reste d'ordre p : $R_p(x) = \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} u_k(x)$.

En remarquant que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $|u_p(x)| \leqslant \dfrac{x^p}{px^{p-1}} \leqslant \dfrac{1}{p}$, on obtient $\| R_p \|_\infty^{[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{p}$ et la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum u_p$ en résulte.

On en déduit $\displaystyle\lim_{x \to 1, x<1} (1-x)f(x) = \ell n\, 2$ et donc $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{\ell n\, 2}{1-x}$.

CHAPITRE

6

Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A. Fonctions continues par morceaux positives intégrables

1. Définition

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point.

Notation 1

Soit f une fonction réelle continue par morceaux et positive sur I.

On note $\mathcal{S}_I$ l'ensemble des segments inclus dans I et $A_I^f = \left\{ \int_J f \,,\, J \in \mathcal{S}_I \right\}$.

Remarque

Dans le cas où I est un segment : $I = [a, b]$, $a \leqslant b$, la notion d'intégrale de f sur I est connue. De plus, f étant positive, il est clair que :

$$\int_I f = \sup_{J \in \mathcal{S}_I} \int_J f \quad ✎ (1)$$

✎ (1) On a en effet $I \in \mathcal{S}_I$ donc $\int_I f \in A_I^f$, et pour tout $J \in \mathcal{S}_I$, $J \subset I$ avec f positive donne $\int_J f \leqslant \int_I f$, ainsi $\int_I f$ est le plus grand élément de A_I^f.

Définition 1

On dit que f est **intégrable** (ou **sommable**) sur I lorsque l'ensemble A_I^f est majoré.

La borne supérieure de A_I^f est alors appelée **intégrale** ✎ (2) de f sur I et elle est notée $\int_I f$.

✎ (2) D'après la remarque précédente, les notions d'intégrabilité et d'intégrale d'une fonction continue par morceaux positive sur un intervalle quelconque sont des **prolongements** des notions correspondantes sur un segment.

Rappelons que toute partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, admet une borne supérieure, ce qui confirme l'existence de $\sup A_I^f$.

Propriété 1

Si f, continue par morceaux positive, est intégrable sur I on a : $\int_I f \geqslant 0$.

☞ A_I^f est en effet inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Propriété 2

Soit f, continue par morceaux, positive et intégrable sur l'intervalle I.

Pour tout sous-intervalle I_1 de I, f est intégrable sur I_1 avec $\int_{I_1} f \leqslant \int_I f$.

☞ On a clairement $\mathcal{S}_{I_1} \subset \mathcal{S}_I$ donc $A_{I_1}^f \subset A_I^f$. Ainsi A_I^f étant majoré, il en est de même pour $A_{I_1}^f$ et on a $\sup A_{I_1}^f \leqslant \sup A_I^f$.

Propriété 3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f \;:\; [a, b] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux et positive sur $[a, b]$, alors elle est intégrable sur chacun des quatre intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ et les intégrales correspondantes sont égales.

☞ f étant continue par morceaux positive sur $[a, b]$, elle est intégrable sur $[a, b]$ et puisque les trois autres intervalles sont inclus dans $[a, b]$, la propriété 2 montre que f est intégrable sur chacun de ces intervalles avec de plus :

$$\int_{]a,b[} f \leqslant \int_{[a,b[} f \leqslant \int_{[a,b]} f \ \textbf{(1)} \quad \text{et} \quad \int_{]a,b[} f \leqslant \int_{]a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} f \ \textbf{(2)}.$$

D'autre part, on sait que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{\substack{x\to a, x>a\\ y\to b, y<b}} \int_x^y f = \lim_{\substack{x\to a, y\to b\\ [x,y]\in\mathcal{S}_{]a,b[}}} \int_{[x,y]} f$ ✎(3)

donc $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \sup_{[x,y]\in\mathcal{S}_{]a,b[}} \int_{[x,y]} f$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{]a,b[} f$ **(3)**.

De **(1)**, **(2)** et **(3)**, on déduit $\displaystyle\int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f = \int_{[a,b]} f.$

✎(3) Voir chapitre 3 : f étant continue par morceaux sur I, pour tout $a\in I$ les fonctions :
$x\mapsto \displaystyle\int_a^x f$ et $y\mapsto \displaystyle\int_y^a f$
sont continues sur I (et même de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux).

Notation 2

L'usage courant amène à noter $\displaystyle\int_a^b f$ aussi bien pour $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ que pour $\displaystyle\int_{]a,b[} f$, ou pour $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ ou encore pour $\displaystyle\int_{]a,b]} f$. En présence du symbole $\displaystyle\int_a^b f$, c'est l'étude de la continuité de f qui permet de dire laquelle des quatre intégrales précédentes est concernée.

2. Conditions d'intégrabilité et opérations sur les fonctions

Théorème 1

Condition suffisante d'intégrabilité : le critère de domination

Soit f et g des fonctions continues par morceaux et positives sur I, telles que $f \leqslant g$. Alors :

a) «g est intégrable sur I» implique «f est intégrable sur I». Et dans ce cas, $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$.

b) «f est non intégrable sur I» implique «g est non intégrable sur I».

☞ a) Pour tout $J\in\mathcal{S}_I$ on a $\displaystyle\int_J f \leqslant \int_J g$. Avec $\displaystyle\int_J g \leqslant \int_I g$, il vient $\displaystyle\int_J f \leqslant \int_I g$.

L'ensemble A_I^f est donc majoré par $\displaystyle\int_I g$ et f est intégrable sur I avec $\displaystyle\int_I f = \sup A_I^f \leqslant \int_I g$.

b) Si g était intégrable sur I, d'après a), il en serait de même pour f.

Théorème 2

Condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité

Soit f une fonction continue par morceaux positive sur un intervalle I et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante ✎(4) de segments inclus dans I telle que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f est intégrable sur I ;

(2) la suite $\left(\displaystyle\int_{J_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ;

(3) la suite $\left(\displaystyle\int_{J_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Lorsque f est intégrable, on a $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$.

✎(4) La croissance de $(J_n)_{\mathbb{N}}$ s'exprime par : $\forall n\in\mathbb{N},\ J_n\subset J_{n+1}$.

☞ ▪ Montrons que **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{J_n} f$ est élément de A_I^f, donc $\displaystyle\int_{J_n} f \leqslant \sup A_I^f$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_{J_n} f \leqslant \int_I f$.

- Montrons que **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**.

La condition $J_n \subset J_{n+1}$ avec la positivité de f donne $\displaystyle\int_{J_{n+1}} f \geqslant \int_{J_n} f$. Ainsi la suite réelle $\left(\displaystyle\int_{J_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et puisqu'elle est majorée, elle converge.

- Montrons que **(3)** $\Rightarrow$ **(1)**.

Posons $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$. Puisque $\left(\displaystyle\int_{J_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $L = \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f$. ✎[5]

✎[5] C'est une propriété connue des suites monotones.

Considérons un segment $J = [a, b]$ inclus dans I. Puisque $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a \in J_p$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $b \in J_q$. Or la croissance de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $J_p \subset J_{p+q}$ et $J_q \subset J_{p+q}$ donc a et b sont dans J_{p+q} et $[a, b] \subset J_{p+q}$.

La positivité de f donne de nouveau $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{J_{p+q}} f$, et on a donc pour tout segment $J \in \mathcal{S}_I$, $\displaystyle\int_J f \leqslant L$ ce qui prouve que f est intégrable sur I avec de plus : $\displaystyle\int_I f \leqslant L$.

- On suppose maintenant f intégrable sur I, **(1)**, **(2)** et **(3)** sont donc vérifiées.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{J_n} f \leqslant \int_I f$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f \leqslant \int_I f$.

De plus, on a vu que $\displaystyle\int_I f \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$, d'où l'égalité.

Notation 3

Dans les développements suivants, une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de segments inclus dans I, telle que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$, sera appelée **suite exhaustive** de $\mathcal{S}_I$.

Propriété 4

Si f et g sont continues par morceaux, positives et intégrables sur I, alors $f + g$ est intégrable sur I.

On a de plus $\displaystyle\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

☞ Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de $\mathcal{S}_I$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{J_n} (f+g) = \int_{J_n} f + \int_{J_n} g$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

Ainsi, d'après le théorème 2 ✎[6], $f + g$ est intégrable sur I avec $\displaystyle\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

✎[6] Il est clair que $f+g$ est continue par morceaux et positive sur I.

Propriété 5

Soit f une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur I et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors λf est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

☞ Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de $\mathcal{S}_I$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{J_n} \lambda f = \lambda \int_{J_n} f$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} \lambda f = \lambda \int_I f$.

La fonction λf étant continue par morceaux et positive ✎[7], on en déduit avec le théorème 2 qu'elle est intégrable sur I avec $\displaystyle\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

✎[7] Noter l'utilité de l'hypothèse $\lambda \geqslant 0$.

3. Partition de l'intervalle d'intégration

I désigne toujours un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux et positive sur I

Propriété 6

Étant donné un élément a de I, f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $I_1 = I \cap [a, +\infty[$ et sur $I_2 = I \cap]-\infty, a]$ et, dans ce cas :

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

☞ I_1 et I_2 étant des sous-intervalles de I, l'intégrabilité de f sur I implique celle sur I_1 et sur I_2 (propriété 2).

Supposons f continue par morceaux, positive et intégrable sur I_1 et sur I_2.

Soit $\left(J_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de $\mathcal{S}_I$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $a \in J_p$. En posant $K_n = J_{n+p}$, la suite (K_n) est croissante et :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = I$$

Soit $K'_n = K_n \cap [a, +\infty[$ et $K''_n = K_n \cap]-\infty, a]$; $\left(K'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(K''_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites croissantes de $\mathcal{S}_{I_1}$ et $\mathcal{S}_{I_2}$ respectivement telles que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K'_n = I_1 \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K''_n = I_2 \text{ ✎}^{(8)}$$

✎(8) $\left(K'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(K''_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc des suites exhaustives de $\mathcal{S}_{I_1}$ et $\mathcal{S}_{I_2}$ respectivement.

En utilisant $\displaystyle\int_{K_n} f = \int_{K'_n} f + \int_{K''_n} f$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{K'_n} f = \int_{I_1} f$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{K''_n} f = \int_{I_2} f$

il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{K_n} f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$ ce qui montre, en utilisant le théorème 2, que f est intégrable sur I avec $\displaystyle\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$.

Corollaire 1

Dans le cas où $I =]a, b[$, avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $a < b$, étant donné c quelconque dans $]a, b[$, f est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si elle est intégrable sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$. ✎(9)

✎(9) On est ainsi ramené à n'étudier que des intégrabilités sur des intervalles semi-ouverts.

Corollaire 2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$. Dans le cas où $I = [a, b[$, $a < b$ (resp. $I =]b, a]$, $b < a$), étant donné c quelconque dans I, f est intégrable sur $[a, b[$ (resp. $]b, a]$) si et seulement si elle est intégrable sur $[c, b[$ (resp. $]b, c]$). ✎(10)

✎(10) Le point c pouvant être pris aussi proche que l'on veut de b, il apparait que l'intégrabilité de f sur $[a,b[$(resp. $]b,a]$) ne dépend que du comportement de f au voisinage de b : on dit que c'est une propriété **asymptotique**.

Corollaire 3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$. Dans le cas où $I = [a, b[$, $a < b$ (resp. $I =]b, a]$, $b < a$), si f est intégrable sur I, alors elle est intégrable sur $]a, b[$ (resp. $]b, a[$) avec de plus :

$$\int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f \quad \text{resp.} \quad \left(\int_{]b,a[} f = \int_{]b,a]} f\right). \text{ ✎}^{(11)}$$

✎(11) Dans la pratique le symbole $\displaystyle\int_a^b f$ désignera indifféremment : $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ ou $\displaystyle\int_{]a,b[} f$.

☞ En fixant c quelconque dans $]a, b[$, on a :

$$\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f \text{ et } \int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f,$$

et on sait d'après la propriété 3 que $\displaystyle\int_{[a,c]} f = \int_{]a,c]} f$.

Corollaire 4

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n éléments de I tels que $\forall i \in [1, n-1]$, $a_i < a_{i+1}$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $I_0 = I \cap \left]-\infty, a_1\right]$ et sur $I_n = I \cap \left[a_n, +\infty\right[$ et, dans ce cas, en posant $\forall i \in [1, n-1]$, $I_i = \left[a_i, a_{i+1}\right]$, on a : ✎[12]

$$\int_I f = \sum_{i=0}^{n} \int_{I_i} f.$$

✎[12] C'est là une simple généralisation de la propriété 6.

Corollaire 5

Pour tout sous-intervalle I_1 de I, f est intégrable sur I_1 et en notant χ_{I_1} la fonction caractéristique de I_1, ✎[13] on a :

$$\int_{I_1} f = \int_I \chi_{I_1} f.$$

✎[13] Rappelons que la fonction caractéristique de I_1 est définie par :

$$\chi_{I_1} : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I_1 \\ 0 \text{ si } x \notin I_1 \end{cases}$$

☞ On a clairement $0 \leqslant \chi_{I_1} f \leqslant f$ ce qui prouve l'intégrabilité de $\chi_{I_1} f$ sur I.

Si les bornes de I_1 sont distinctes de celles de I, ✎[14] avec les notations du corollaire précédent, on obtient :

$$\int_I \chi_{I_1} f = \int_{I_0} \chi_{I_1} f + \int_{I_1} \chi_{I_1} f + \int_{I_2} \chi_{I_1} f.$$

Or χ_{I_1} étant nulle sur $I \setminus I_1$, il vient : $\displaystyle\int_{I_0} \chi_{I_1} f = \int_{I_2} \chi_{I_2} f = 0$ d'où la conclusion.

✎[14] Si I_1 a une borne commune avec I, on procède de même en utilisant la décomposition de la propriété 6.

4. Intégrale et primitive

Théorème 3

Soit $I = [a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $b > a$.

Une fonction f, continue par morceaux, positive sur $[a, b[$, est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ ✎[15] admet une limite réelle en b, donc si et seulement si elle est majorée.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$

✎[15] Lorsque f est continue, F est la primitive de f sur I qui s'annule en a. Voir chapitre 4.

☞ a) Puisque f est positive sur I, la fonction F est croissante sur I.

Elle admet donc une limite réelle en b si et seulement si elle est majorée. ✎[16]

Supposons f intégrable sur I.

Avec $[a, x] \subset [a, b[$, on a $F(x) = \displaystyle\int_{[a,x]} f \leqslant \int_{[a,b[} f$ donc F est majorée.

Supposons F majorée par M sur I.

Pour tout segment $J \subset I$, en posant $c = \sup J$, on a $J \subset [a, c]$ et la positivité de f donne :

$$\int_J f \leqslant \int_{[a,c]} f = F(c) \leqslant M$$

Ainsi A_I^f est majoré ce qui montre que f est intégrable sur I.

b) Soit (b_n) une suite d'éléments de $[a, b[$, croissante et de limite b, et soit L la limite de F en b.

On a alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F(b_n) = L.$ ✎[17]

✎[16] Théorème de la limite monotone.

✎[17] Par le théorème de composition des limites.

La suite $\left(\left[a, b_n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[a, b_n\right] = [a, b[$, ✎[18] c'est donc une suite exhaustive de $\mathcal{S}_{[a,b[}$.

On a $F(b_n) = \displaystyle\int_{[a,b_n]} f$ et, par application du théorème **2**, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b_n]} f = \int_{[a,b[} f$.

Il s'ensuit :

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{n\to+\infty} F(b_n) = L = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

✎[18] Puisque $b = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$, pour tout $x\in[a,b[$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $b_n > x$ et donc $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a,b_n]$.
Ceci prouve que $[a,b[\subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a,b_n]$.

Théorème 4

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, avec $c<a$. Une fonction f, continue par morceaux, positive sur $]c, a]$, est intégrable sur $]c, a]$ si et seulement si la fonction G définie sur $]c, a]$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite en c, ✎[19] donc si et seulement si elle est majorée.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_{]c,a]} f = \lim_{x\to c}\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$.

✎[19] G est décroissante, elle admet une limite en c si et seulement si elle est majorée. Noter que, dans ce cas, si f est continue, G est une primitive de $-f$.

La démonstration de la propriété précédente s'adapte immédiatement.

Exemple 1 Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$; existence et calcul.

$f\ :\ x\mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. ✎[20]

✎[20] On étudie donc en fait l'intégrale : $\displaystyle\int_{[0,+\infty[}\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

La décomposition en éléments simples de f donne :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$$

c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{1}{6}\,\dfrac{2x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

Une primitive de f sur $[0,+\infty[$ est donc :

$$F\ :\ x\mapsto \frac{1}{6}\,\ell n\,\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

On obtient aisément $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Avec $F(0) = -\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$, il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exemple 2

a) Étudier, suivant les valeurs du réel α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x}\left(\ell n\,\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\mathrm{d}x$.

b) Même question pour l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x}(\ell n\,x)^{\alpha}\,\mathrm{d}x$.

a) La fonction $f_\alpha\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{x}\left(\ell n\,\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}$ est continue et positive sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$. ✎[21]

En posant $u(x) = \ell n\,\dfrac{1}{x}$, on a $f_\alpha(x) = -u'(x)\left[u(x)\right]^{\alpha}$.

- Si $\alpha = -1$, une primitive de f_{-1} est $F_{-1}\ :\ x\mapsto -\ell n\,u(x)$, ✎[22]

c'est-à-dire $F_{-1}(x) = -\,\ell n\left(\ell n\,\dfrac{1}{x}\right)$. Il vient alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} F_{-1}(x) = -\infty$.

✎[21] Le symbole $\displaystyle\int_0^{1/e}\frac{1}{x}\left(\ell n\,\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\mathrm{d}x$ représente donc, si elle a un sens l'intégrale, $\displaystyle\int_{]0,1/e]} f_\alpha$.

✎[22] Noter que u est strictement positive sur $]0,1/e]$.

- Si $\alpha \neq -1$, une primitive de f_α est $F_\alpha : x \mapsto -\dfrac{1}{\alpha+1}\left(u(x)\right)^{\alpha+1}$ c'est-à-dire :
$$F_\alpha(x) = -\frac{1}{\alpha+1}\left(\ell n\,\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}.$$
On en déduit que F_α admet une limite en 0 si et seulement si $\alpha + 1 < 0$ et que cette limite est alors 0.
- En conclusion, d'après le théorème 4, f_α est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$ si et seulement si $\alpha < -1$ et, dans ce cas, $\displaystyle\int_{]0,1/e]} f_\alpha = F\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{\alpha+1}$.

b) La fonction $g_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{x}(\ell n\,x)^\alpha$ est continue et positive sur $[e, +\infty[$. ✎[23]

- Si $\alpha = -1$, une primitive de g_{-1} est $G_{-1} : x \mapsto \ell n(\ell n\,x)$ et on a alors :
$$\lim_{x\to+\infty} G_{-1}(x) = +\infty.$$
- Si $\alpha \neq -1$, une primitive de g_α est $G_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}(\ell n\,x)^{\alpha+1}$.
G_α admet une limite réelle en $+\infty$ si et seulement si $\alpha + 1 < 0$.
- En conclusion, g_α est intégrable sur $[e, +\infty[$ si et seulement si $\alpha + 1 < 0$.

✎[23] Le symbole $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x}(\ell n\,x)^\alpha \mathrm{d}x$ représente si elle a un sens l'intégrale $\displaystyle\int_{[e,+\infty[} g_\alpha$.

5. Fonctions de référence

Propriété 7

La fonction ϕ définie par $\phi(x) = e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \phi = 1$.

☞ On a $\displaystyle\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc, d'après le théorème 3, ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et son intégrale est 1.

Propriété 8

Soit $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on considère $\psi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

(1) ψ_α est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$;

(2) ψ_α est intégrable sur $]0, a]$ si et seulement si $\alpha > -1$. ✎[24]

☞ Pour $\alpha \neq -1$, $\Psi_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ admet une limite réelle en $+\infty$ si et seulement si $\alpha < -1$ et admet une limite réelle en 0 si et seulement si $\alpha > -1$.
Pour $\alpha = -1$, la fonction ℓn n'admet de limite réelle ni en 0 ni en $+\infty$. ✎[25]

✎[24] De manière analogue pour tout réel a : $x \mapsto (x-a)^\alpha$ est intégrable sur $]a, a+1]$ si et seulement si $\alpha > -1$; $x \mapsto (a-x)^\alpha$ est intégrable sur $[a-1, a[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

✎[25] Si $\alpha \neq -1$, une primitive de ψ_α sur $]0,+\infty[$ est Ψ_α.
Une primitive de ψ_{-1} sur $]0,+\infty[$ est ℓn.

Exemple 3 Montrons que $|\ell n|$ est intégrable sur $]0, 1]$ mais non intégrable sur $[1, +\infty[$.

La fonction ℓn est continue sur $]0, +\infty[$ et admet pour primitive $x \mapsto x\,\ell n\,x - x$. ✎[26]
$$\int_1^x \ell n\,t\mathrm{d}t = x\,\ell n\,x - x + 1.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to0}(x\,\ell n\,x - x + 1) = 1$ donne que $|\ell n|$ est intégrable sur $]0, 1]$ avec $\displaystyle\int_0^1 |\ell n\,t|\,\mathrm{d}t = 1$;
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x\,\ell n\,x - x + 1) = +\infty$ donne que $|\ell n|$ est non intégrable sur $[1, +\infty[$.

✎[26] Sur $]0,1]$, $|\ell n| = -\ell n$ sur $[1,+\infty[$, $|\ell n| = \ell n$.

6. Règles usuelles de comparaison

La notation $u(x) = o_b\big(v(x)\big)$ (resp. $u(x) = \mathcal{O}_b\big(v(x)\big)$) exprime que la fonction u est négligeable devant (resp. dominée par) la fonction v au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

La notation $u(x) \underset{b}{\sim} v(x)$ exprime que la fonction u est équivalente à la fonction v au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Propriété 9

Soit f et g deux fonctions réelles continues par morceaux et positives sur $[a, b[$, $a < b$ (resp. $]b, a]$, $b < a$).

a) Si $f = \mathcal{O}_b(g)$ ou $f = o_b(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$ (resp. $]b, a]$), alors f est intégrable sur $[a, b[$ (resp. $]b, a]$).

b) Si $g = \mathcal{O}_b(f)$ ou $g = o_b(f)$ et si g n'est pas intégrable sur $[a, b[$ (resp. $]b, a]$), alors f n'est pas intégrable sur $[a, b[$ (resp. $]b, a]$).

☞ a) Il existe $\lambda > 0$ et $c \in [a, b[$ tel que $\forall x \in [c, b[,\ \ 0 \leqslant f(x) \leqslant \lambda g(x)$.

b) Il existe $\lambda > 0$ et $c \in [a, b[$ tel que $\forall x \in [c, b[,\ \ 0 \leqslant \dfrac{1}{\lambda} g(x) \leqslant f(x)$.

Dans les deux cas, on conclut avec le théorème 1, la propriété 5, et le corollaire 2 de la propriété 6. ✎(27)

✎(27) Noter que les hypothèses $f = \mathcal{O}_b(g)$ ou $g = \mathcal{O}_b(f)$ conduisent à des majorations locales qui permettent de conclure grâce au caractère local de la notion d'intégrabilité.

6.1 – Règles de Riemann

Théorème 5

Soit f une fonction réelle continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et positive.

a) Si il existe $\alpha > 1$ tel que $f(x) = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ ou $f(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

b) Si il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{x^\alpha} = \mathcal{O}_{+\infty}\big(f(x)\big)$ ou $\dfrac{1}{x^\alpha} = o_{+\infty}\big(f(x)\big)$

alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

☞ On applique la propriété 9 avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ sachant que $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 4 Étudions l'existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ell n\, x)^\beta}$ avec $a > 1$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. ✎(28)

Ces intégrales sont appelées intégrales de Bertrand.

✎(28) Le symbole $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ell n\, x)^\beta}$ représente, si elle a un sens, l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,+\infty[} f.$

Le cas $\alpha = 1$ correspond à l'exemple **2** - b), on n'étudie ici que le cas où $\alpha \neq 1$.

$f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha (\ell n\, x)^\beta}$ est continue et positive sur $[a, +\infty[$.

- $\alpha > 1$.

Soit γ vérifiant $1 < \gamma < \alpha$, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\gamma f(x) = 0$, donc :

$$f(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^\gamma}\right) \quad \text{et} \quad f \text{ est intégrable sur } [a, +\infty[.$$

- $\alpha < 1$.

Dans ce cas, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = +\infty$, donc :

$$\frac{1}{x} = o_{+\infty}\big(f(x)\big) \quad \text{et} \quad f \text{ n'est pas intégrable sur } [a, +\infty[.$$

Remarque

Une hypothèse : $f(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ (resp. $f(x) = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$) se traduit par :

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0 \text{ (resp. } x \mapsto x^\alpha f(x) \text{ est bornée au voisinage de } +\infty).$$

Ces règles sont aussi appelées «règles $x^\alpha f(x)$».

Théorème 6

Soit f une fonction réelle, continue par morceaux, et positive sur $]0,a]$, $a>0$. ✎(29)

a) Si il existe $\alpha < 1$ tel que $f(x) = \mathcal{O}_0\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ ou $f(x) = o_0\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

alors f est intégrable sur $]0,a]$.

b) Si il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{x^\alpha} = \mathcal{O}_0\big(f(x)\big)$ ou $\dfrac{1}{x^\alpha} = o_0\big(f(x)\big)$

alors f n'est pas intégrable sur $]0,a]$.

✎(29) On obtient un énoncé analogue sur $[a,0[$, $a<0$, en remplaçant $\frac{1}{x^\alpha}$ par $\frac{1}{|x|^\alpha}$.

☞ On applique la propriété 9 avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ qui est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple 5 Étudions l'existence de $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\,|\ell n\, x|^\beta}$ avec $0<a<1$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Ces intégrales sont encore appelées intégrales de Bertrand.

Le cas $\alpha = 1$ correspond à l'exemple 2 - a), on se limite à nouveau au cas $\alpha \neq 1$.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha\,|\ell n\, x|^\beta}$ est continue et positive sur $]0,a]$. ✎(30)

✎(30) Il s'agit donc ici d'étudier l'intégrale $\displaystyle\int_{]0,a]} f$.

- $\alpha < 1$.

Pour $\gamma \in]\alpha,1[$, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^\gamma f(x) = 0$.

Ainsi $f(x) = o_0\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$ et f est intégrable sur $]0,a]$.

- $\alpha > 1$.

Nous avons $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,f(x) = +\infty$.

Il s'ensuit $\dfrac{1}{x} = o_0\big(f(x)\big)$ et f n'est pas intégrable sur $]0,a]$.

6.2 – Règle des équivalents

Théorème 7

Soit f et g deux fonctions réelles continues par morceaux positives sur $[a,b[$, $a<b$, (resp. $]b,a]$, $b<a$) équivalentes au voisinage de b.

Alors f et g sont toutes deux intégrables ou bien toutes deux non intégrables sur $[a,b[$ (resp. $]b,a]$).

☞ $f \underset{b}{\sim} g$ donne $f = \mathcal{O}_b(g)$ et $g = \mathcal{O}_b(f)$: on conclut avec la propriété 9.

Exemple 6 Étudions la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ell n(1+x^\alpha)}{x^\beta}\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$f : x \mapsto \dfrac{\ell n(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. ✎(31)

✎(31) Il s'agit ici d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0,+\infty[$ et d'après le corollaire 1 de la propriété 6, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si elle l'est sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

- Étude de l'intégrabilité de f sur $]0,1]$.

Déterminons un équivalent de f au voisinage de 0, pour appliquer le théorème 7.

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} = 0$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$.

Alors f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

Si $\alpha = 0$, $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ell n\, 2}{x^{\beta}}$ et f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\beta < 1$.

Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} = +\infty$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\alpha\, \ell n\, x}{x^{\beta}}$.

Alors f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\beta < 1$ (voir l'exemple 5).

■ Étude de l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$.

Déterminons de même un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha\, \ell n\, x}{x^{\beta}}$.

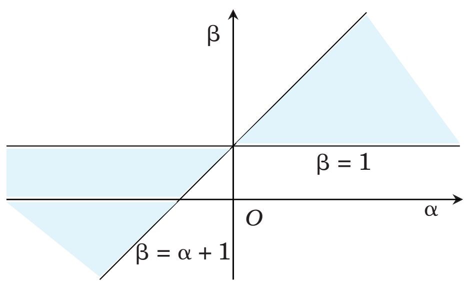
Alors f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$ (voir l'exemple 4).

Si $\alpha = 0$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell n\, 2}{x^{\beta}}$ et f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$.

Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = 0$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$.

Alors f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\beta - \alpha > 1$.

■ f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $(\beta-1)(\beta-\alpha-1) < 0$ c'est-à-dire graphiquement, si et seulement si (α,β) appartient à la région marquée en bleu.



6.3 – Comparaison avec une série

Théorème 8

Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux positive sur $[a,+\infty[$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $[a,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f$ est convergente.

☞ Notons d'abord que f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si elle l'est sur $[x_0,+\infty[$.

Posons $I = [x_0,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = [x_0, x_n]$. (J_n) est une suite croissante de segments inclus dans $[x_0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = [x_0,+\infty[$: c'est une suite exhaustive de $\mathcal{S}_I$.

D'après le théorème 2, f est intégrable sur $[x_0,+\infty[$ si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_{J_n} f$ est convergente.

Or, avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_{x_0}^{x_n} f$ ✎(32), on voit que $\left(\displaystyle\int_{J_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ et la conclusion en résulte.

✎(32) C'est la relation de Chasles

Remarque

Dans la pratique, le résultat précédent permet de ramener l'étude de l'intégrabilité de certaines fonctions positives à celle la convergence de séries à termes positifs.

Exemple 7 Étudier l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$ de $f : x \mapsto xe^{-x^3|\sin x|}$.

La fonction f est continue et positive sur $[0,+\infty[$, d'après le théorème 8, elle est donc intégrable sur cet intervalle si et seulement si la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f$, est convergente.

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant (n+1)\,\pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n^3\pi^3|\sin x|}\mathrm{d}x$.

D'autre part, la fonction $x \mapsto |\sin x|$ étant π-périodique, on a :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n^3\pi^3|\sin x|}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} e^{-n^3\pi^3\sin x}\mathrm{d}x,$$

puis $\sin(\pi - x) = \sin x$, donne :

$$\int_0^{\pi} e^{-n^3\pi^3\sin x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n^3\pi^3\sin x}\mathrm{d}x,$$

enfin compte tenu de $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$, il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n^3\pi^3\sin x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2n^3\pi^2 x}\mathrm{d}x.$$

D'où finalement $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{(n+1)}{\pi\, n^3}\left[1 - e^{-n^3\pi^3}\right] \leqslant \dfrac{(n+1)}{\pi\, n^3}$.

La série $\sum \dfrac{(n+1)}{\pi\, n^3}$ étant convergente car, lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{(n+1)}{\pi\, n^3} \sim \dfrac{1}{\pi\, n^2}$, la série $\sum u_n$ (à termes positifs) converge également et f est intégrable sur $[0,+\infty[$. ✎(33)

✎(33) La suite (x_n) choisie ici correspond aux zéros de $\sin x$.
En chacun de ces points, on a $f(x_n) = x_n$ c'est-à-dire $f(n\pi) = n\pi$.
On remarquera que cet exemple met en évidence qu'une fonction réelle continue positive peut être intégrable sur $[a,+\infty[$ sans être bornée au voisinage de $+\infty$ donc a fortiori sans tendre vers 0 en $+\infty$.

B. Fonctions continues par morceaux réelles ou complexes intégrables

1. Intégrabilité

Définition 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On dit qu'elle est **intégrable** (ou **sommable**) sur I si la fonction $|f|$ est intégrable sur I. ✎(34)

✎(34) La fonction $|f|$ est continue par morceaux et positive sur I. Son intégrabilité est définie dans la partie A.

Propriété 10

Critère de domination

Soit f réelle ou complexe et g réelle, continues par morceaux sur I.

Si $|f| \leqslant g$ et si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

☞ Le théorème 1 montre que $|f|$ est intégrable sur I. La définition de l'intégrabilité de f permet de conclure.

Propriété 11

Soit f réelle ou complexe continue par morceaux sur I.
Si f est bornée ✎[35] sur I et si l'intervalle I est borné, alors f est intégrable sur I.

✎[35] Ce résultat s'applique en particulier lorsque f est prolongeable par continuité aux bornes de I.

☞ Soit $M = \sup_{x\in I} |f(x)|$, la fonction constante M est intégrable sur le segment S de mêmes bornes que I, donc intégrable sur I et l'inégalité $|f| \leqslant M$ donne la conclusion.

Exemple 8 Intégrabilité sur $]0, 1]$ des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ et $g : x \mapsto \sin(\ell n\, x)$.

L'intervalle est bien sûr borné et les deux fonctions proposées sont continues sur $]0, 1]$.
f est bornée sur $]0, 1]$ car elle est prolongeable par continuité en 0, et pour g ont a clairement :

$$\forall x \in]0, 1], \quad |g(x)| \leqslant 1.$$

Propriété 12

Étant donné f et g réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I, la fonction $f + g$ est intégrable sur I.

☞ $|f + g| \leqslant |f| + |g|$. Comme $|f|$ et $|g|$ sont intégrables, il en est de même pour $|f| + |g|$ (propriété 4).
On en déduit que $|f + g|$ est intégrable (théorème 1) donc que $f + g$ est intégrable.

Propriété 13

Étant donné f réelle ou complexe, continue par morceaux et intégrable sur I, et λ réel ou complexe, la fonction λf est intégrable sur I.

☞ $|\lambda f| = |\lambda|\ |f|$. Avec $|f|$ intégrable et $|\lambda| \geqslant 0$, on a $|\lambda|\ |f|$ intégrable (propriété 5).
Enfin $|\lambda f|$ intégrable donne λf intégrable.

Notation 4

Rappelons que $\mathcal{M}(I, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Nous noterons $L_1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et intégrables sur I.

Propriété 14

$L_1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(I, \mathbb{K})$.

C'est un corollaire des propriétés 12 et 13.

Théorème 9

Intégrabilité d'une fonction complexe

On considère une fonction f, continue par morceaux sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de parties réelle et imaginaire u et v : $f = u + iv$. ✎[36]
f est intégrable sur I si et seulement si u et v le sont.

✎[36] $f \in \mathcal{M}(I,\mathbb{C})$
u et v sont réelles continues par morceaux sur I : $u \in \mathcal{M}(I,\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{M}(I,\mathbb{R})$.

☞ Supposons f intégrable sur I, c'est-à-dire $|f|$ intégrable sur I.
Avec $|u| \leqslant |f|$ et $|v| \leqslant |f|$, le théorème 1 montre que u et v sont intégrables sur I.
Supposons u et v intégrables sur I, c'est-à-dire $|u|$ et $|v|$ intégrables sur I.
La propriété 4 montre que $|u| + |v|$ est intégrable sur I.
Avec $|f| \leqslant |u| + |v|$, il vient que $|f|$, et donc f, est intégrable sur I.

2. Intégrale d'une fonction intégrable

2.1 – Parties positive et négative d'une fonction réelle

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

✎(37)
$f^+ : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 \quad \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$
$f^- : x \mapsto \begin{cases} 0 \quad \text{si } f(x) > 0 \\ -f(x) \text{ si } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$

Définition 3

La partie positive de f est $f^+ = \dfrac{1}{2}\big(|f| + f\big)$, la partie négative de f est $f^- = \dfrac{1}{2}\big(|f| - f\big)$.

f^+ et f^- sont positives sur I. Pour tout $x \in I$,

$$f^+(x) = \sup\{0, f(x)\} \quad , \quad f^-(x) = \sup\{0, -f(x)\}.$$ ✎(37)

Propriété 15

Étant donné f définie sur I, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.
f est continue par morceaux sur I si et seulement si f^+ et f^- le sont.

☞ Si f est continue par morceaux sur I, il en est de même pour $|f|$ et donc pour :

$$\frac{1}{2}\big(|f| + f\big) \text{ et } \frac{1}{2}\big(|f| - f\big).$$

Si f^+ et f^- sont continues par morceaux sur I, il en est de même pour $f^+ - f^-$.

Propriété 16

Pour $\lambda \geqslant 0$, on a $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ et $(\lambda f)^- = \lambda f^-$.
Pour $\lambda \leqslant 0$, on a $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$ et $(\lambda f)^- = -\lambda f^+$.

☞ On a : $$(\lambda f)^+ = \frac{1}{2}\big(|\lambda f| + \lambda f\big) = \frac{1}{2}\big(|\lambda|\,|f| + \lambda f\big)$$

et : $$(\lambda f)^- = \frac{1}{2}\big(|\lambda f| - \lambda f\big) = \frac{1}{2}\big(|\lambda|\,|f| - \lambda f\big).$$

Pour $\lambda \geqslant 0$:

$$(\lambda f)^+ = \frac{1}{2}\big(\lambda\,|f| + \lambda f\big) = \lambda f^+ \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = \frac{1}{2}\big(\lambda\,|f| - \lambda f\big) = \lambda f^-.$$

Pour $\lambda \leqslant 0$:

$$(\lambda f)^+ = \frac{1}{2}\big(-\lambda\,|f| + \lambda f\big) = -\lambda f^- \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = \frac{1}{2}\big(-\lambda\,|f| - \lambda f\big) = -\lambda f^+.$$

Propriété 17

Soit f une fonction réelle continue par morceaux sur I.
f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- le sont.

☞ Supposons f intégrable sur I. Par définition, il en est de même pour $|f|$.
Avec $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$, les fonctions f^+ et f^- sont intégrables sur I (théorème 1).
Supposons f^+ et f^- intégrables sur I. La propriété 4 montre que $|f| = f^+ + f^-$ est intégrable sur I et donc que f est intégrable.

2.2 – Intégrale d'une fonction réelle ou complexe

Définition 4

Soit f une fonction réelle continue par morceaux intégrable sur I. L'intégrale de f sur I est :

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

Définition 5

Soit f une fonction complexe continue par morceaux intégrable sur I. En notant u et v les parties réelle et imaginaire de f, l'intégrale de f sur I est :

$$\int_I f = \int_I (u + iv) = \int_I u + i \int_I v.$$

Remarque

Il y a lieu ici de s'assurer de la cohérence de cette définition avec la notion antérieure d'intégrale sur un segment. Pour cela, on remarque que, avec les définitions du chapitre 4, si f, réelle ou complexe, est continue par morceaux sur $I = [a, b]$ alors elle est intégrable (au sens de la définition 2 précédente) sur $[a, b]$, puis par les propriétés de l'intégrale sur un segment, on obtient :

- si f est réelle, $f \in \mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$, on a : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f^+ - \int_{[a,b]} f^-$;
- si f est complexe, $f \in \mathcal{M}([a, b], \mathbb{C})$, $f = u + iv$, on a : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} u + i \int_{[a,b]} v.$

En outre, dans cette situation f est intégrable sur chacun des quatre intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ et les intégrales associées sont égales. ✎(38)

✎(38) Si f est réelle, on a vu (propiété 3) que ce résultat est vrai pour les fonctions positives donc pour f^+ et f^-. Alors si f est complexe, la propriété est vraie pour $u=\mathrm{Re}\, f$ et $v=\mathrm{Im}\, f$ donc aussi pour $f=u+iv$.

Propriété 18

Soit f réelle ou complexe, continue par morceaux et intégrable sur un intervalle I : $f \in L_1(I, \mathbb{K})$. Alors, pour toute suite croissante $(J_n)_{\mathbb{N}}$ de segments, inclus dans I, dont la réunion est égale à I, la suite $\left(\displaystyle\int_{J_n} f\right)_{\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite est l'intégrale de f sur I :

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$$

☞ Si f est réelle, d'après le théorème 2, la propriété est vraie pour f^+ et f^- qui sont réelles positives. On a donc : ✎(39)

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^- = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f^+ - \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f^- = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{J_n} f^+ - \int_{J_n} f^-\right),$$

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} \left(f^+ - f^-\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f.$$

Si f est complexe, la propriété est vraie pour $u = \mathrm{Re}\, f$ et $v = \mathrm{Im}\, f$ qui sont réelles. On a donc :

$$\int_I f = \int_I u + i \int_I v = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} u + i \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} v,$$

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{J_n} u + i \int_{J_n} v\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f.$$

✎(39) On utilise les propriétés des limites de suites réelles ou complexes et la linéarité de l'intégrale sur un segment.

Propriété 19

Pour toute fonction f réelle ou complexe, continue par morceaux et intégrable sur un intervalle I, on a :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

☞ Avec les notations de la propriété 18, sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\displaystyle\int_{J_n} f\right| \leqslant \int_{J_n} |f|$, il reste à passer à la limite.

Propriété 20

Linéarité de l'intégrale

L'application $f \mapsto \int_I f$ de $L_1(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est linéaire :

$$\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g.$$

☞ Avec les notations de la propriété 18 dans l'égalité connue : $\int_{J_n} (f + \lambda g) = \int_{J_n} f + \lambda \int_{J_n} g$, on fait tendre n vers $+\infty$.

Propriété 21

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, croissance de l'intégrale

Soit f et g des éléments de $L_1(I, \mathbb{R})$. Si $f \leqslant g$ alors $\int_I f \leqslant \int_I g$.

☞ La propriété 20 donne $\int_I (g - f) = \int_I g - \int_I f$ et, $g - f$ étant positive, son intégrale $\int_I (g - f)$ est positive.

Propriété 22

Soit $f \in L_1(I, \mathbb{K})$.
Pour tout intervalle J inclus dans I, f est intégrable sur J et on a :

$$\int_J f = \int_I \chi_J f \quad \text{où } \chi_J \text{ est la fonction caractéristique de } J.$$

☞ On sait que $|f|$ intégrable sur I donne $|f|$ intégrable sur J.

On sait aussi que l'égalité $\int_J f = \int_I \chi_J f$ est vraie lorsque f est réelle positive. ✎[40]

✎[40] C'est le corollaire 5 de la propriété 6.

Si f est réelle, on a donc :

$$\int_J f^+ = \int_I \chi_J f^+ \quad , \quad \int_J f^- = \int_I \chi_J f^-$$

d'où par linéarité de l'intégrale :

$$\int_J f = \int_J \left(f^+ - f^-\right) = \int_I \chi_J \left(f^+ - f^-\right) = \int_I \chi_J f.$$

Si f est complexe, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$, l'égalité est vraie pour u et v, elle le reste donc pour f par linéarité de l'intégrale.

Propriété 23

Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration

On considère un intervalle I, un élément $a \in I$ et f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur I : $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{K})$.
f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $I_1 = I \cap [a, +\infty[$ et sur $I_2 = I \cap]-\infty, a]$ et, dans ce cas :

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$$

☞ D'après la propriété 6, f est intégrable sur I si et seulement si elle l'est sur I_1 et sur I_2.

Posons $I_2' = I \cap]-\infty, a[$. On sait que $\int_{I_2} f = \int_{I_2'} f$, et d'après la propriété 22, on a :

$$\int_I \chi_{I_1} f = \int_{I_1} f \quad \text{et} \quad \int_I \chi_{I_2'} f = \int_{I_2'} f$$

donc par linéarité $\int_I \left(\chi_{I_1} + \chi_{I_2'}\right) f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$, c'est-à-dire $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$.

2.3 – Extension de la définition

Définition 6

Soit a, b des éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et I l'un des quatre intervalles de bornes a et b. ✎(41)

Pour toute fonction f réelle ou complexe, continue par morceaux et intégrable sur I, on pose :

■ $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_I f$ si $a < b$; ■ $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_I f$ si $b < a$.

✎(41) Si $a<b$, $I=[a,b]$ ou $]a,b[$ ou $[a,b[$ ou $]a,b]$.
Si $a>b$, $I=[b,a]$ ou $]b,a[$ ou $[b,a[$ ou $]b,a]$.
Comme on l'a déjà vu en début de chapitre, c'est l'étude de la continuité de la fonction f qui permet, en présence de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, de savoir quel est précisément l'intervalle I concerné.

Remarque

Le cas $b = a$ donne $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ avec la définition 11 du chapitre 4. ✎(42)

✎(42) Si $a=b$, seul subsiste l'intervalle $I=[a,a]$, les trois autres sont vides.

Propriété 24

Relation de Chasles

Soit a, b, c des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et I le plus grand des intervalles ouverts dont les bornes appartiennent à $\{a, b, c\}$ tel que f réelle ou complexe, continue par morceaux, soit intégrable sur I. On a alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

2.4 – Intégration des relations de comparaison

MP*

Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ si $a < b$ ou $]b, a]$ si $a > b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$. ✎(43)

✎(43) La définition 6 permet de limiter l'étude au cas $a<b$, et les résultats sont valables dans tous les cas.

Théorème 10

On suppose g positive sur $[a, b[$ $(a < b)$ et $f(x) = o_b(g(x))$.

a) Si g est intégrable sur $[a, b[$, f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f = o_b\left(\int_x^b g\right)$.

b) Si g est non intégrable sur $[a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^x f = o_b\left(\int_a^x g\right)$.

☞ a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in [a, b[$ tel que $|f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$ pour tout $x \in [c, b[$.
L'intégrabilité de g sur $[a, b[$ entraîne donc celle de f.

Pour tout $x \in [c, b[$, on a alors $\displaystyle\left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant \varepsilon \int_x^b g$. D'où $\displaystyle\int_x^b f = o_b\left(\int_x^b g\right)$.

b) g étant non intégrable et positive, on a $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x g = +\infty$.

Pour tout $x \in [c, b[$, $\displaystyle\left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f| = \int_a^c |f| + \int_c^x |f| \leqslant \int_a^c |f| + \varepsilon\int_c^x g$.

Il s'ensuit $\displaystyle\left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^c |f| + \varepsilon\int_a^x g$.

Avec $\displaystyle\lim_{x\to b}\frac{\int_a^c |f|}{\int_a^x g} = 0$, il existe $d \in [a, b[$ tel que, pour tout $x \in [d, b[$,

$\displaystyle\int_a^c |f| \leqslant \varepsilon\int_a^x g$ et ainsi, pour tout $x \geqslant \sup\{c, d\}$, $\displaystyle\left|\int_a^x f\right| \leqslant 2\,\varepsilon\int_a^x g$.

Ce qui montre que $\displaystyle\int_a^x f = o_b\left(\int_a^x g\right)$.

Théorème 11

On suppose f et g <u>positives</u> sur $[a, b[$ et $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$.

Alors, f et g sont simultanément intégrables ou non sur $[a, b[$:

a) si elles sont intégrables, $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{\sim} \int_x^b g$,

b) si elles sont non intégrables, $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g$.

a) Dans le cas de l'intégrabilité, avec $f - g = o_b(g)$, le théorème précédent donne :

$$\int_x^b (f-g) = o_b\left(\int_x^b g\right)$$

d'où $\displaystyle\int_x^b f - \int_x^b g = o_b\left(\int_x^b g\right)$ et $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{\sim} \int_x^b g$.

b) Dans le cas de la non intégrabilité, avec encore $f - g = o_b(g)$, le même théorème donne :

$$\int_a^x (f-g) = o_b\left(\int_a^x g\right)$$

d'où $\displaystyle\int_a^x f - \int_a^x g = o_b\left(\int_a^x g\right)$ et $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g$.

<u>Remarque</u>

Ces résultats restent vrais avec g de signe constant au voisinage de b.

Exemple 9 Montrer que, au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

De $0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ sur $[1, +\infty[$, on déduit que $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

La dérivée de $x \mapsto \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$ étant $x \mapsto -e^{-x^2}\left(1 + \dfrac{1}{2x^2}\right)$, il vient :

$$\frac{e^{-x^2}}{2x} = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\left(1 + \frac{1}{2t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

L'équivalence en $+\infty$ des fonctions $f\ :\ x \mapsto e^{-x^2}$ et $g\ :\ x \mapsto e^{-x^2}\left(1 + \dfrac{1}{2x^2}\right)$ donne le résultat avec le théorème 11.

Exemple 10 Montrer que $\displaystyle\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$ en $+\infty$.

En remarquant que $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{\ln t}$ sur $]1, +\infty[$, la non intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[e, +\infty[$ donne celle de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$.

La dérivée de $x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{\ln^2 x}$, on en déduit :

$$\forall x \geqslant e,\ \frac{x}{\ln x} = e + \int_e^x \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{\ln^2 t}\right)\mathrm{d}t.$$

Les fonctions $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ et $g\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{\ln^2 x}$ sont continues et positives sur $[e, +\infty[$ et $f(x) \sim g(x)$ en $+\infty$. Donc, par application du théorème 11, il vient :

$$\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x} - e \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{en } +\infty.$$

C. Calcul d'intégrales

1. Intégrale et primitive – Notion d'intégrale impropre

Théorème 12

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $I = [a, b[$ si $a < b$, $I =]b, a]$ si $a > b$, $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{K})$, et F la fonction définie sur I par :

$$F \ : \ x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Alors si f est intégrable sur $I = [a, b[$ (resp. sur $]b, a]$), la fonction F admet une limite en b, et dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to b \\ x \in I}} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad ✎^{(44)}$$

✎(44) Lorsque f est réelle positive, l'existence de : $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in I}} F(x)$ est nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable sur I. C'est l'objet des théorèmes 3 et 4.

☞ La propriété est vraie pour les fonctions réelles positives, il reste à l'étendre successivement aux fonctions réelles puis complexes.

Cas d'une fonction réelle.

Si f est intégrable, f^+ et f^- le sont aussi et on a : ✎(45)

✎(45) f^+ et f^- sont réelles positives.

$$\int_a^b f^+ = \lim_{\substack{x \to b \\ x \in I}} \int_a^x f^+ \quad , \quad \int_a^b f^- = \lim_{\substack{x \to b \\ x \in I}} \int_a^x f^-$$

donc $$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- = \lim_{\substack{x \to b \\ x \in I}} \left(\int_a^x f^+ - \int_a^x f^- \right),$$

$$\int_a^b f = \lim_{\substack{x \to b \\ x \in I}} \int_a^x (f^+ - f^-) = \lim_{\substack{x \to b \\ x \in I}} \int_a^x f.$$

Pour une fonction complexe, on fait de même avec $f = u + iv$ en utilisant que la propriété est vraie pour les fonctions réelles u et v.

Définition 7

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $I = [a, b[$ si $a < b$, $I =]b, a]$ si $a > b$ et $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{K})$.

Il peut se produire que f ne soit pas intégrable sur I mais que la fonction $F \ : \ x \mapsto \int_a^x f$ admette une limite au point b, cette limite est encore notée de manière impropre $\int_a^b f$.

Dans ces conditions, on dit que $\int_a^b f$ est une **intégrale impropre convergente**. ✎(46)

Soit maintenant $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $I =]a, b[$ si $a < b$, $I =]b, a[$ si $a > b$, et $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{K})$. Si, étant donné $c \in]a, b[$, les deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ existent, l'une des deux (au moins) étant impropre convergente, on dit encore que $\int_a^b f$ est impropre convergente et on pose : ✎(47)

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

✎(46) Lorsque F n'a pas de limite en b, l'expression $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ n'a pas de sens (et ne devrait pas être écrite !). On parle parfois d'**intégrale divergente**.

✎(47) Il y a lieu de vérifier que cette valeur est indépendante de c.

Exemple 11 Soit $f : [\pi, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

a) Montrons que f est non intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

b) Montrons que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est une intégrale impropre convergente.

a) La fonction f est continue sur $[\pi, +\infty[$. Par définition, elle serait intégrable sur $[\pi, +\infty[$ si et seulement si $|f|$ l'était ; donc, d'après le théorème 8, si et seulement si la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ $(n \geqslant 1)$ était convergente.

On a facilement :

$$u_n \geqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(n+1)\pi}\mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad u_n \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}.$$ ✎ (48)

✎ (48) La fonction $|\sin|$ étant π-périodique, on a : $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 2$

Il en résulte que la série $\sum u_n$ diverge et donc que f est non intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

b) Posons $F(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, une intégration par parties donne :

$$F(x) = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_{\pi}^{x} - \int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Sachant que $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$, la majoration $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ montre que $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ ce qui assure l'existence de :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

D'autre part, $\left|\dfrac{\cos x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$ donne $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et finalement $F(x)$ admet une limite réelle en $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$

On a ainsi prouvé que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} f$ est impropre convergente avec :

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Remarque

Dans la pratique, dire que le symbole $\displaystyle\int_a^b f$ a un sens peut refléter l'une ou l'autre des deux situations suivantes :

a) soit f est intégrable sur l'un des intervalles de bornes a et b,

b) soit f n'est intégrable sur aucun de ces intervalles mais on a affaire à une intégrale impropre au sens de la définition 7.

Dans le cas des fonctions positives, seule la situation a) subsiste.

2. Changement de variable

Théorème 13

Soit $[a, b[$ et $[\alpha, \beta[$ des intervalles de $\mathbb{R}$, avec $(b, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b[$ sur $[\alpha, \beta[$, avec $\beta = \lim\limits_{x \to b} \varphi(x)$.

φ est un **changement de variable bijectif** de $[a, b[$ sur $[\alpha, \beta[$.

Étant donné $f \in \mathcal{M}\big([\alpha, \beta[, \mathbb{K}\big)$:

a) f est intégrable sur $[\alpha, \beta[$ si et seulement si $(f \circ \varphi)\varphi'$ l'est sur $[a, b[$.

$\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ est impropre convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$ est impropre convergente. ✎ (49)

b) Quand ces intégrales ont un sens, elles sont égales : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f = \int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$.

✎ (49) On traduit cette propriété en disant que les intégrales : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ et $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$ sont de même nature.

☞ On sait que pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x (f \circ \varphi)\varphi' = \int_\alpha^{\varphi(x)} f$ (cf. chapitre 4, théorème 7), et puisque φ' est de signe constant ✎ (50) , on a aussi $\displaystyle\int_a^x \left|(f \circ \varphi)\varphi'\right| = \varepsilon \int_\alpha^{\varphi(x)} |f|$ avec $\varepsilon = 1$ si φ est croissante, $\varepsilon = -1$ si φ est décroissante.

✎ (50) φ est strictement monotone.

Puisque $\lim\limits_{x \to b} \varphi(x) = \beta$, l'existence de $\lim\limits_{y \to \beta} \displaystyle\int_\alpha^y |f|$ implique celle de $\lim\limits_{x \to b} \displaystyle\int_a^x \left|(f \circ \varphi)\varphi'\right|$ donc l'intégrabilité de f sur $[\alpha, \beta[$ implique celle de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur $[a, b[$.

Inversement, on a aussi ✎ (51) pour tout $y \in [\alpha, \beta[$, $\displaystyle\int_\alpha^y |f| = \varepsilon \int_a^{\varphi^{-1}(y)} \left|(f \circ \varphi)\varphi'\right|$.

✎ (51) φ est un homéomorphisme de $[a,b[$ sur $[\alpha,\beta[$.

Donc puisque $\lim\limits_{y \to \beta} \varphi^{-1}(y) = b$, l'existence de $\lim\limits_{x \to b} \displaystyle\int_a^x \left|(f \circ \varphi)\varphi'\right|$ implique celle de $\lim\limits_{y \to \beta} \displaystyle\int_\alpha^y |f|$, c'est-à-dire que l'intégrabilité de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur $[a, b[$ implique celle que f sur $[\alpha, \beta[$.

On a ainsi prouvé l'équivalence entre l'intégrabilité de f sur $[\alpha, \beta[$ et celle de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur $[a, b[$.

Dans le cas de la non intégrabilité, le même raisonnement fait à partir de $\displaystyle\int_a^x (f \circ \varphi)\varphi' = \int_\alpha^{\varphi(x)} f$ montre que $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$ est impropre convergente si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ est impropre convergente et que de plus ces intégrales sont égales.

Corollaire

Étant donné des intervalles $]a, b[$ et $]\alpha, \beta[$, avec a, b, α et β dans $\overline{\mathbb{R}}$, soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]a, b[$ sur $]\alpha, \beta[$, avec $\alpha = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x \to b} \varphi(x)$.

Si f est continue par morceaux sur $]\alpha, \beta[$, les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ et $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$ sont de même nature ✎ (52) et, si elles ont un sens, elles sont égales.

✎ (52) f est intégrable sur $]\alpha,\beta[$ si et seulement si $(f\circ\varphi)\varphi'$ est intégrable sur $]a,b[$.
$\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ est impropre convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$ est impropre convergente.

Applications pratiques

1) Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et f continue par morceaux sur $]-a, a[$ paire ou impaire.
Alors f est intégrable sur $]-a, a[$ si et seulement si elle l'est sur $[0, a[$. Dans ce cas :

- pour f paire, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$;
- pour f impaire, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$.

☞ Il suffit d'appliquer le théorème 13 avec le changement de variable $\varphi\ :\ t \mapsto -t$.

2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f continue par morceaux sur $]a, b]$ si $a < b$ (resp. $[b, a[$ si $b < a$), alors f est intégrable sur $]a, b]$ (resp. $[b, a[$) si et seulement si la fonction g définie par $g(t) = f(a+t)$ (resp. $g(t) = f(a-t)$) est intégrable sur $]0, b-a]$ (resp. $]0, a-b]$). ✎[53]

✎[53] Ainsi tout problème d'intégrabilité «au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$» se ramène à un problème d'intégrabilité en 0.

Exemple 12 Calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.

La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$ est continue donc intégrable sur $[0, \pi]$, donc aussi sur ✎[54] $[0, \pi[$. $\varphi\ :\ t \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}\, t$ est un changement de variable bijectif de $[0, +\infty[$ sur $[0, \pi[$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{3+t^2}$.

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{3+t^2}$ étant $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{t}{\sqrt{3}}$, il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2dt}{3+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

✎[54] $\displaystyle\int_0^{\pi} f = \int_{[0,\pi]} f = \int_{[0,\pi[} f$

D'après le théorème 13, $t \mapsto \frac{2}{3+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ ce qui se vérifie directement très facilement : $\frac{2}{3+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{t^2}$.

3. Intégration par parties

Théorème 14

Soit f, g des fonctions réelles ou complexes, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$. ✎[55]

a) **Si $f(x)g(x)$ admet une limite réelle en** b, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b fg'$ a un sens si et seulement si et $\displaystyle\int_a^b f'g$ a un sens ;

b) lorsqu'elles existent : $\displaystyle\int_a^b fg' = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$

✎[55] Remarque : les intégrales ne sont pas nécessairement de même nature en ce sens que l'on peut avoir affaire à une intégrale de fonction intégrable pour l'une, et une intégrale impropre convergente pour l'autre.

☞ Pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x fg' = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'g$ (chapitre 4, théorème 6).
Les deux propositions résultent donc du fait que $f(x)g(x)$ admet une limite réelle en b.

Corollaire

Soit f et g des fonctions réelles ou complexes, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$, telles que $f(x)g(x)$ admette des limites réelles en a et en b.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b fg'$ a un sens si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f'g$ a un sens et lorsqu'elles existent :

$$\int_a^b fg' = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - \lim_{x\to a} f(x)g(x) - \int_a^b f'g.$$

Exemple 13 Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

✎(56) $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. ✎(56) Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, on déduit l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Remarquons qu'il s'agit encore d'une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ car $\displaystyle\frac{t^2}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$.

Avec $\displaystyle\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

D. Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\mathring{I} \neq \varnothing$.

1. Norme de la convergence en moyenne

Définition 8

Soit E_1 l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, intégrables sur I :

$$E_1 = \mathcal{C}(I,\mathbb{K}) \cap L_1(I,\mathbb{K}).$$

L'application $N_1 \ : \ E_1 \to \mathbb{R},\ f \mapsto \displaystyle\int_I |f|$ est une norme sur E appelée **norme de la convergence en moyenne**.

☞ N_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

- Soit $f \in E_1$ telle que $N_1(f) = 0$. Pour tout segment $[a,b] \subset I$, $a < b$, on a :

$$0 \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant \int_I |f| \quad \text{donc ici} \quad \int_{[a,b]} |f| = 0$$

et puisque $|f|$ est continue positive, il en résulte $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$. Finalement $f = 0$.

- $N_1(\lambda f) = |\lambda|\, N_1(f)$ par linéarité de l'intégrale.
- $N_1(f+g) \leqslant N_1(f) + N_1(g)$ car $\displaystyle\int_I |f+g| \leqslant \int_I |f| + \int_I |g|$.

Propriété 25

Si l'intervalle I est **borné**, pour toute fonction f bornée appartenant à E_1 on a :

$$N_1(f) \leqslant k\|f\|_\infty$$

où $k > 0$ désigne la longueur de I, et $\|\bullet\|_\infty$ la norme uniforme sur I. ✎(57)

✎(57) $\overset{\circ}{I} \neq \varnothing$ donne $k > 0$.

Propriété 26

On suppose l'intervalle I borné.

Soit (f_n) une suite de E_1 convergeant uniformément vers f sur I. Alors f appartient à E_1 et elle est limite de (f_n) au sens de la norme N_1.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_I \lim f_n = \lim \int_I f_n$.

☞ On sait que f est continue sur I comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Pour tout segment $J \subset I$ on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_J |f| \leqslant \int_J |f - f_n| + |f_n| \leqslant \ell(J)\|f - f_n\|_\infty^I + \int_I |f_n|$$ ✎(58)

✎(58) $\ell(J)$ désigne la longueur de J.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_{n_0}\|_\infty^I \leqslant 1$ et on a $\ell(J) \leqslant k = \ell(I)$, donc :

$$\int_J |f| \leqslant M = k + \int_I |f_{n_0}|$$

ce qui prouve que f est intégrable sur I, donc que $f \in E_1$.

Alors $N_1(f - f_n) \leqslant k\|f - f_n\|_\infty$ donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} N_1(f - f_n) = 0$ et

$$\left|\int_I f - \int_I f_n\right| = \left|\int_I (f - f_n)\right| \leqslant \int_I |f - f_n| = N_1(f - f_n) \text{ donne } \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

2. Norme de la convergence en moyenne quadratique

Définition 9

Une fonction $f \in \mathcal{M}(I, \mathbb{K})$ est dite de **carré intégrable** sur I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I. L'ensemble de ces fonctions, noté $L_2(I, \mathbb{K})$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(I, \mathbb{K})$.

☞ Il suffit de noter que $|f + g|^2 \leqslant 2\left(|f|^2 + |g|^2\right)$.

Définition 10

Soit E_2 l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, de carré intégrable sur I :

$$E_2 = \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \cap L_2(I, \mathbb{K}).$$

L'application $\varphi : E_2^2 \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_I fg$ (resp. $\displaystyle\int_I \overline{f}g$) est un produit scalaire euclidien (resp. hermitien) sur E_2.

La norme euclidienne (resp. hermitienne) associée $N_2 : f \mapsto \left(\displaystyle\int_I |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est appelée norme de la **convergence en moyenne quadratique**.

☞ Comme pour la définition 8, on vérifie que $\varphi(f, f) = 0$ donne $f = 0$, les autres vérifications (voir Algèbre – Géométrie, chapitre 7) sont sans difficulté.

Propriété 27

a) Avec les notations usuelles du produit scalaire, on a :
$$\forall (f,g) \in E_2^2,\quad \left|\langle f \mid g\rangle\right| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)\, N_2(g).$$

b) Le produit scalaire $\varphi\ :\ (f,g) \mapsto \langle f \mid g\rangle$ est une application continue sur E_2^2.

☞ a) Inégalité de Cauchy – Schwarz.

b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a :
$$\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{4}\left[N_2(f+g)^2 - N_2(f-g)^2 - i\,N_2(f+ig)^2 + i\,N_2(f-ig)^2\right]$$
et N_2 est une application continue de E_2 dans $\mathbb{C}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle f \mid g\rangle = \dfrac{1}{4}\left[N_2(f+g)^2 - N_2(f-g)^2\right]$ donne la même conclusion.

E. Convergence dominée

Les démonstrations des théorèmes de cette section sont non exigibles.

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\overset{\circ}{I} \neq \varnothing$.

1. Permutation d'une limite simple et d'une intégrale

✎ (59) La démonstration de ce théorème est hors programme.

Théorème 15

Convergence dominée pour les suites de fonctions ✎ (59)

Soit $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}(I,\mathbb{C})$ telle que :

(1) $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux : $f \in \mathcal{M}(I,\mathbb{C})$,

(2) il existe φ positive, continue par morceaux sur I, intégrable sur I : $\varphi \in L_1(I,\mathbb{R}_+)$ telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x).$

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I et la suite $\left(\int_I f_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f$:
$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n\,.$$

On dit que **(2)** est l'hypothèse de **domination**.

Exemple 14 Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$

- Soit $f_n\ :\ x \mapsto \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$

f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et au voisinage de $+\infty$, ou $-\infty$, $f_n(x) \sim \dfrac{n^n}{x^{2n}}$.

L'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}}$ sur $[1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1]$ donne celle de f sur ces intervalles et donc sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a lorsque n tend vers $+\infty$, $f_n(x) = e^{-n\,\ell n\left(1+\frac{x^2}{n}\right)} = e^{-x^2+o(1)}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$: la suite $\left(f_n\right)$ converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

Cette fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, soit $\varphi_x \ : \ t \mapsto t\,\ell n\left(1+\dfrac{x^2}{t}\right)$, $t>0$, le calcul donne :

$$\varphi_x'(t) = \ell n\left(\frac{t+x^2}{t}\right) - \frac{x^2}{t+x^2} \quad , \quad \varphi_x''(t) = \frac{-x^4}{t(t+x^2)^2}$$

donc φ_x' est décroissante et avec $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_x' = 0$, on en déduit $\varphi_x'(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Finalement, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \left(1+\dfrac{x^2}{t}\right)^{-t}$ est décroissante et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$. Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de convergence dominée s'applique et on obtient la formule annoncée.

Remarque

On peut ainsi retrouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

En effet, le changement de variable défini par $x = \sqrt{n}\tan\theta$, $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donne :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{n}W_{2n-2}$$

où W_n est l'intégrale de Wallis : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Sachant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, ✎(60) il vient $I_n \sim \sqrt{\pi}$.

✎(60) Voir par exemple la démonstration de la formule de Stirling dans le chapitre 2.

2. Intégration terme à terme d'une série

2.1 – Cas des séries à termes de signe constant

Théorème 16

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathcal{M}(I,\mathbb{R})$ telle que :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, (ou $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$),

(2) la série $\sum u_n$ converge simplement sur I, et sa fonction somme f est continue par morceaux sur I et intégrable sur I.

Alors la série de terme général $\displaystyle\int_I u_n$ est convergente et on a :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n\,.$$

☞ On considère la suite $(F_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Dans le cas où les u_n sont positifs, $(F_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite croissante donc majorée par sa fonction limite f.

D'autre part, les fonctions F_n sont positives sur I. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |F_n(x)| \leqslant f(x).\ ✎(61)$$

f étant continue par morceaux et intégrable sur I, le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions donne que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I F_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} F_n = \int_I f.$$

✎(61) Remarquer que l'on a aussi pour tout n $\forall x \in I,\ 0 \leqslant u_n(x) \leqslant f(x)$ ce qui assure l'intégrabilité de u_n .

Puisque $\int_I F_n = \sum_{k=0}^{n} \int_I u_n$, ceci nous montre que la série de terme général $\int_I u_n$ est convergente et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$ est $\int_I f$ c'est-à-dire $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Dans le cas où les u_n sont négatifs, on revient à la situation précédente en considérant la série $\sum -u_n$ de somme $-f$.

Exemple 15 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Posons $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$. f est continue sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0 : $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc f est intégrable sur $]0, 1]$.

Au voisinage de $+\infty$: $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $t > 0$, on a $e^{-t} < 1$ donc $\dfrac{1}{e^t - 1} = \dfrac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ puis :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad u_n(t) = \sqrt{t}e^{-nt}.$$ ✎(62)

✎(62) $\int_0^{+\infty} f$ signifie ici $\int_{]0,+\infty[} f$.

Montrons que $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du théorème 16.

(1) il est clair que $u_n \geqslant 0$,

(2) la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, sa fonction somme est f qui est continue sur $]0,+\infty[$ et on a déjà vérifié que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc le théorème 16 donne :

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t.$$

En posant $x = \sqrt{t}$ puis en intégrant par parties, il vient :

$$v_n = \int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-nx^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\mathrm{d}x.$$

On pose alors $y = x\sqrt{n}$ et on obtient :

$$v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y \quad \text{c'est-à-dire} \quad v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ ✎(63)

✎(63) D'après la remarque suivant l'exemple précédent.

La formule en résulte.

2.2 – Cas général

Théorème 17

Convergence dominée pour les séries ✎(64)

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathcal{M}(I, \mathbb{C})$ telle que :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est intégrable sur I : $u_n \in L_1(I, \mathbb{C})$,

(2) la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa fonction somme f est continue par morceaux sur I,

(3) la série numérique $\sum \int_I |u_n|$ converge.

Alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$.

✎(64) La démonstration est hors programme.

(3) est l'hypothèse de domination. On notera la présence des valeurs absolues dans celle-ci.

Exemple 16 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Soit $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$, f est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0, 1]$.

En $+\infty$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{e^x - 1}$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Finalement, f est intégrable sur $[0, +\infty[$. ✎(65)

✎(65) Il n'est pas indispensable de vérifier l'intégrabilité de f puisque celle-ci nous est donnée par l'application du théorème 17. Cependant l'objectif essentiel étant de justifier l'intégration terme à terme, il est préférable pour clarifier la présentation de commencer par cette vérification.

- Pour $x > 0$, on a $\dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ d'où :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sin x \mathrm{d}x.$$

Posons $f_n\ :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ \ x \mapsto e^{-nx} \sin x$; ce sont des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ et intégrables sur $]0, +\infty[$ car $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx}$ et $x \mapsto e^{-nx}$ avec $n \geqslant 1$ est intégrable.
La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, sa somme est f.

Il reste à montrer que la série numérique de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n|$ est convergente.

En écrivant $I_n = \displaystyle\int_0^1 |\sin x|\, e^{-nx}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} |\sin x|\, e^{-nx}\mathrm{d}x$ ✎(66) il vient :

✎(66) Au voisinage de 0, la majoration de $|\sin x|$ par 1 est «trop brutale», d'où le découpage.

$$I_n \leqslant \int_0^1 x\, e^{-nx}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x \quad \text{donc} \quad I_n \leqslant \frac{1}{n^2}\left(1 - e^{-n}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Le théorème de convergence dominée pour les séries s'applique et on a donc :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sin x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin x \mathrm{d}x.$$

Le calcul de $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin x \mathrm{d}x$ est classique :

$$J_n = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+i)x}\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{(-n+i)x}}{-n+i}\right]_0^{+\infty} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{n-i}\right) = \frac{1}{n^2+1}.$$

D'où la conclusion.

F. Fonctions de la forme $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\overset{\circ}{I} \neq \varnothing$.

1. Continuité sous le signe somme

A désigne ici une partie de $\mathbb{R}^m$.

Théorème 18

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$ et telle que :

(1) pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ; ✎(67)

(2) pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ; ✎(68)

(3) il existe $\varphi \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})$, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in A \times I \quad |f(x, t)| \leqslant \varphi(t) \quad ✎(69)$$

Alors pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et la fonction $F\ :\ A \to \mathbb{K},\ \ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

✎(67) f est continue par rapport à la première variable.

✎(68) f est continue par morceaux par rapport à la deuxième.

✎(69) On dit que **(3)** est l'hypothèse de domination.

Pour que F soit continue en $x \in A$, il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ de points de A convergeant vers x, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)$. ✎(70)

✎(70) Cf. chapitre 1, propriété 19.

La donnée d'une telle suite $(x_n)_{\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ introduit une suite de fonctions $(\psi_n)_{\mathbb{N}}$:

$$\psi_n \ : \ I \to \mathbb{K}, \quad t \mapsto f(x_n, t).$$

D'après l'hypothèse **(2)**, $(\psi_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur I et, d'après l'hypothèse **(1)**, elle converge simplement sur I vers la fonction $\psi \ : \ t \mapsto f(x,t)$ qui est également continue par morceaux sur I.

L'hypothèse **(3)** donne alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in I, \quad |\psi_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ avec φ continue par morceaux et intégrable sur I, c'est l'hypothèse de domination qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(\psi_n)_{\mathbb{N}}$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I \psi_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)$.

Théorème 19

Continuité sous le signe somme : extension

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$ telle que :

(1) pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

(2) pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(3') pour tout compact $Q \subset A$, il existe $\varphi_Q \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})$ positive, intégrable sur I, telle que :

$$\forall (x,t) \in Q \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_Q(t). \ ✎(71)$$

Alors pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et la fonction :

$$F \ : \ A \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

est continue sur A.

✎(71) Cela revient à dire que le théorème 18 reste valable lorsque l'on remplace l'hypothèse de domination globale (sur A) par une hypothèse de domination locale (sur tout compact inclus dans A).

Pour tout x de A et toute suite $(x_n)_{\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, $X = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact inclus dans A.

En reprenant la démonstration du théorème 18, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |\psi_n(t)| \leqslant \varphi_X(t).$$

La conclusion est la même.

Corollaire 1

Cas où l'intervalle d'intégration est compact : $I = [a,b]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Si $f : A \times [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue sur $A \times [a,b]$, la fonction :

$$F : A \to \mathbb{K}, x \mapsto \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$$

est continue sur A.

Il est clair que f vérifie alors les hypothèses **(1)** et **(2)** du théorème 19.

Pour tout compact $Q \subset A$, le produit $Q \times [a,b]$ est un compact de $A \times \mathbb{R}$ et, f étant continue, elle est bornée sur ce compact.

Ainsi il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x,t) \in Q \times [a,b], |f(x,t)| \leqslant M.$$

Ceci réalise l'hypothèse de domination locale avec la fonction constante égale à M qui est évidemment continue et intégrable sur $[a,b]$.

En conclusion, la continuité de F sur A résulte du théorème 19. ✎(72)

✎(72) L'hypothèse de continuité est plus forte que dans les théorèmes 18 et 19 et, avec la compacité de I, elle assure la domination locale.

2. Dérivation sous le signe somme

J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\overset{\circ}{J} \neq \varnothing$.

Théorème 20

Formule de Leibniz

Soit f une fonction de $J \times I$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

(1) quel que soit $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

(2) il existe une fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue par rapport à la première variable et continue par morceaux par rapport à la seconde ; ✎(73)

(3) il existe $\psi \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})$, positive et intégrable sur I, telle que :

$$\forall (x,t) \in J \times I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t).$$

Alors la fonction $F \ : \ J \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J avec :

$$\forall x \in J, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

✎(73) Hypothèses **(1)** et **(2)** des théorèmes 18 et 19.

☞ Il s'agit d'abord de prouver que pour tout $x \in J$, on a :

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \int_I \frac{f(y,t) - f(x,t)}{y - x}\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Considérons donc une suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$ de points de $J \setminus \{x\}$ convergeant vers x et associons-lui la suite de fonctions :

$$\left(\psi_n\right)_{\mathbb{N}} \text{ avec } \psi_n \ : \ I \to \mathbb{K}, t \mapsto \frac{f(x_n,t) - f(x,t)}{x_n - x}.$$

ψ_n est une suite de fonctions continues sur I et elle converge simplement vers la fonction :

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t).$$

En écrivant :

$$\psi_n(t) = \frac{1}{x_n - x}\int_x^{x_n} \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta \quad ✎(74)$$

✎(74) ce qui est justifié par la continuité de $\zeta \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta, t)$.

l'hypothèse de domination pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ donne :

$$|\psi_n(t)| \leqslant \psi(t).$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $\left(\psi_n\right)_{\mathbb{N}}$ pour obtenir :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F\left(x_n\right) - F(x)}{x_n - x} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai quelle que soit la suite $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$, on a finalement :

$$F'(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Le théorème 18 donne ensuite la continuité de F'.

Théorème 21

Extension du théorème de Leibniz

Soit f une fonction de $J \times I$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

(1) quel que soit $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

(2) il existe une fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue par rapport à la première variable et continue par morceaux par rapport à la seconde ;

(3') pour tout segment S inclus dans J, il existe $\psi_S \in \mathcal{M}(I, \mathbb{R})$, positive et intégrable sur I, telle que :

$$\forall (x,t) \in S \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \psi_S(t)$$ ✎ (75)

Alors la fonction $F : J \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J avec :

$$\forall x \in J, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

✎ (75) Le théorème 20 reste valable lorsque l'on remplace l'hypothèse **(3)** de domination globale par une hypothèse de domination locale : **(3')**.
En effet en appliquant ce théorème 20, on obtient que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment S inclus dans J donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
Remarquer que l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $J \times I$ donne que pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J.

Corollaire 1

Cas où l'intervalle d'intégration est compact : $I = [a,b]$, $a < b$

Soit f une fonction de $J \times [a,b]$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

(1) quel que soit $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[a,b]$;

(2) il existe une fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a,b]$.

Alors la fonction $F : J \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J avec :

$$\forall x \in J, \; F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

☞ Pour tout segment $S \subset J$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $S \times [a,b]$ est bornée sur ce compact : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x,t) \in S \times [a,b], \; \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant M.$$

La fonction constante égale à M est continue et intégrable sur $[a,b]$ donc le théorème 21 donne la conclusion. ✎ (76)

✎ (76) L'hypothèse de continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ est plus forte que dans les théorèmes 20 et 21, et, avec la compacité de I, elle assure la domination locale.

Corollaire 2

Soit f une fonction de $J \times [a,b]$ dans $\mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$ sur $J \times [a,b]$.

Alors la fonction $F : J \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est également de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

☞ Pour $k = 1$, le corollaire 1 donne la conclusion : propriété $\mathcal{P}(1)$.
Pour $k \geqslant 2$, une application itérée de $\mathcal{P}(1)$ donne le résultat.

Exemple 17 Étude de la fonction Gamma ✎ (77)

On appelle fonction Gamma la fonction définie par : $\Gamma \; : \; x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t.$

a) Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

✎ (77) Bien que présentée sous forme d'exemple, cette étude est explicitement au programme.

c) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0,+\infty[$ avec :
$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ell n\, t)^k e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

d) Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$. En déduire $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$

e) Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

f) Montrer que Γ est convexe et étudier ses variations.

a) Soit $f\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\ (x,t)\mapsto e^{-t}t^{x-1}$
et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_x\ :\ \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\ t\mapsto f(x,t)$.
Quel que soit $x\in\mathbb{R}$, f_x est continue, positive sur $]0,+\infty[$ donc $\Gamma(x)$ est définie lorsque f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.

En 0, $f_x(t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $x>0$.

En $+\infty$, $f_x(t)=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Finalement, $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x\in]0,+\infty[$.

✎(78) Ce qui assure les hypothèses **(1)** et **(2)** du théorème 19.

b) f est continue sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ ✎(78) et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f_x\ :\ t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Montrons alors que f satisfait à l'hypothèse de domination pour x décrivant $[a,b]$, $a<b$, intervalle compact quelconque inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $0<t\leqslant 1$, $x\mapsto t^{x-1}$ est décroissante donc pour $x\in[a,b]$, on a $0<f(x,t)\leqslant t^{a-1}$.
Pour $t\geqslant 1$, $x\mapsto t^{x-1}$ est croissante, et alors $x\in[a,b]$ donne $0<f(x,t)\leqslant e^{-t}t^{b-1}$.
Soit alors $\varphi\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ telle que :
$$\varphi(t)=t^{a-1}\text{ si }t\in]0,1]\quad,\quad\varphi(t)=e^{-t}t^{b-1}\text{ si }t\in]1,+\infty[$$
φ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ et :
$$\forall(x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[,\quad 0<f(x,t)\leqslant\varphi(t).$$
Ainsi Γ est continue sur $]0,+\infty[$ d'après l'extension du théorème de continuité sous le signe somme.

c) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ avec :
$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+^{*2},\quad\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=(\ell n\, t)^k e^{-t}t^{x-1}.$$
Considérons de nouveau un intervalle compact $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ et soit $\psi_k\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall t\in]0,+\infty[,\quad\psi_k(t)=|\ell n\, t|^k\,\varphi(t).$$ ✎(79)

✎(79) φ est la fonction définie en b).

Au voisinage de 0, on a $\psi_k(t)=o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ et en $+\infty$ on a encore $\psi_k(t)=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc ψ_k est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
Par construction, on a :
$$\forall(x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[,\quad\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\psi_k(t).$$
Montrons par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ell n\, t)^k e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.\qquad\mathcal{P}(k)$$
La classe $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ et l'étude de la définition de Γ assurent les hypothèses **(1)** et **(2)** de l'extension du théorème de Leibniz et les ✎(80) fonctions ψ_1 donnent l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$.

✎(80) Il y a une fonction ψ_1 pour chaque segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, par application de ce théorème, Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}(\ell n\, t)e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$
c'est-à-dire que la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Montrons maintenant que si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\Gamma^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La classe $\mathcal{C}^{k+1}$ de f sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ donne la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ et $\Gamma^{(k)}$ étant définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, les hypothèses **(1)** et **(2)** de l'extension du théorème de Leibniz sont vérifiées par la fonction $g = \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$. D'autre part, les fonctions ψ_{k+1} montrent que $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}$ satisfait à l'hypothèse de domination sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $\Gamma^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire que Γ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ell n\, t)^{k+1} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

La propriété $\mathcal{P}(k)$ est donc héréditaire, ce qui achève d'établir que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ donc que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

d) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ s'obtient en intégrant par parties.

$\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$ et la formule précédente donne par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

e) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ d'où en posant $u = \sqrt{t}$: $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u.$

Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (exemple 14), ✎[81] il vient $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

✎[81] Il existe de nombreuses démonstrations de cette relation, elles ne sont cependant pas exigibles des étudiants.

f) $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ell n\, t)^2 e^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$, Γ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc Γ est convexe.

Il en résulte que Γ' est strictement croissante et s'annule donc au plus une fois.

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ montre avec le théorème de Rolle que Γ' s'annule au moins une fois sur $]1, 2[$.

Finalement Γ' s'annule une fois et une seule en un point $\alpha \in]1, 2[$.

La relation $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ avec la continuité de Γ en 1 donne :

$$\lim_{x\to 0} x\,\Gamma(x) = \Gamma(1) = 1 \ \text{ donc } \ \Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

La croissance de Γ sur $[2, +\infty[\subset [\alpha, +\infty[$ donne pour tout $x \geqslant 2$:

$$\Gamma(x) \geqslant \Gamma\big(E(x)\big) = \big(E(x) - 1\big)!$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$ et d'après la formule de Stirling pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$x^\gamma \underset{+\infty}{=} o\big(\Gamma(x)\big).$$

Tableau de variations et de valeurs :

x	0	1	α	2	$+\infty$
Γ'	‖	$-$	0	$+$	
Γ	‖ $+\infty$	1 ↘		↗ 1	$+\infty$

Méthodes

L'essentiel

I. Plan d'étude de l'existence d'une intégrale $\int_a^b f$

Il s'agit de déterminer :

- si la fonction f est intégrable sur I avec $I =]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]b, a]$ ou $[a, b]$;

ou

- si, f n'étant intégrable sur aucun de ces intervalles, $\int_a^b f$ est impropre convergente.

1) Étudier la continuité de f et localiser les problèmes

a) La continuité (par morceaux) permet de préciser l'intervalle I. Dans le cas où $I = [a, b]$, f est intégrable sur I et tant que fonction continue (par morceaux) sur un segment.

b) $I = [a, b[$, $\int_a^b f$ a un sens si et seulement si $\int_c^b f$ a un sens avec c quelconque dans I aussi proche que l'on veut de b. Il y alors un seul problème à étudier : en b.

Si $I =]a, b[$, $\int_a^b f$ a un sens si et seulement si $\int_a^c f$ et $\int_d^b f$ ont toutes deux un sens avec c et d quelconques dans I, aussi proches que l'on veut de a et b respectivement. Il y a alors deux problèmes à étudier : en a et en b.

2) Étude de chaque problème

La localisation précédente ramène à l'étude d'intégrales du type $\int_{[a,b[} f$ (ou $\int_{]a,b]} f$).

a) Si f est réelle

a.1 Étudier le signe de f au voisinage de b.

On peut remarquer qu'un équivalent simple de f au voisinage de b permet cette étude.

a.2 Si f est positive au voisinage de f

L'existence de $\int_{[a,b[} f$ équivaut à l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ qui peut se prouver par :

(i) le critère de domination
(ii) le critère de Riemann
(iii) la règle des équivalents
(iv) la combinaison de (i) et (iii) ou de (ii) et (iii)
(iv) la comparaison avec une série
(v) l'existence de $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6

a.3 Si f est négative au voisinage de b

$\int_{[a,b[} f$ existe si et seulement si $\int_{[a,b[} -f$ existe : on est ramené au cas précédent.

a.4 Si f n'est pas de signe constant au voisinage de b

On étudie l'intégrabilité de f en appliquant les méthodes du 1. b) à $\int_{[a,b[} |f|$.

- Si f est intégrable sur $[a, b[$, $\int_{[a,b[} f$ a un sens.

- Si f est non intégrable sur $[a, b[$, on peut avoir affaire à une intégrale impropre convergente. On cherche donc $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f$ en pensant qu'une intégration par parties judicieuse peut faire apparaître une intégrale $\int_a^x g$ avec g intégrable sur $[a, b[$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7

b) Si f est complexe

b.1 On peut procéder comme en a.4).

b.2 On peut aussi, en considérant les parties réelle et imaginaire u et v de f, se ramener à l'étude de $\int_{[a,b[} u$ et $\int_{[a,b[} v$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 8

II. Convergence dominée

✔ **Si l'on veut** étudier la limite d'une suite $\int_{I_n} f_n$ où l'intervalle d'intégration dépend de n.

- **on peut** dans le but d'utiliser le théorème de convergence dominée, introduire $I = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f_n}$ définie par :

$$\widetilde{f_n}(x) = f_n(x) \text{ si } x \in I_n \text{ et } \widetilde{f_n}(x) = 0 \text{ si } x \in I \setminus I_n.$$

On a alors $\int_{I_n} f_n = \int_I \widetilde{f_n}$.

✔ **Si l'on veut** étudier la limite d'une suite $\int_I f_n$, alors que le théorème de convergence dominée ne semble pas applicable

- **on peut** penser à rechercher un changement de variable transformant $\int_I f_n$ en une intégrale $\int_J g_n$ pour laquelle ce théorème est applicable.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 9

III. Intégrales dépendant d'un paramètre

✔ **Si l'on veut** calculer explicitement une intégrale $\int_I f(x, t)\mathrm{d}t$

- **on peut** penser à étudier la classe de la fonction $F \; : x \mapsto \int_I f(x, t)\mathrm{d}t$ et former ses dérivées. Signalons deux cas favorables au bon déroulement de cette méthode :
  - il est possible d'expliciter $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\mathrm{d}t$. Une simple primitivation peut permettre de conclure.
  - F est solution d'une équation différentielle simple. La résolution de cette équation donnera le résultat.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 10, 11, 12

Mise en œuvre

I. Intégrabilité de fonctions positives

Ex. 1

Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right)^{\alpha}\mathrm{d}x$ a-t-elle un sens ?

Indications

Trouver un équivalent simple de la fonction intégrée en $+\infty$.

Solution

$f\ :\ x\mapsto\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right)^{\alpha}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ a un sens si et seulement si f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

En écrivant :

$$\sqrt{x^2+2x+2}-x-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}+x+1}$$

on obtient $\displaystyle f(x)\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\alpha}$.

On sait que f est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si elle l'est sur $[1,+\infty[$ et d'après la règle des équivalents, f intégrable sur $[1,+\infty[$ équivaut à $x\mapsto\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ intégrable sur $[1,+\infty[$ c'est-à-dire à $\alpha>1$.

Commentaires

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>(x+1)^2$.

On peut aussi utiliser un développement limité : avec $u=x+1$

$$\sqrt{u^2+1}=u\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}=u+\frac{1}{2u}+o\left(\frac{1}{u}\right)$$

donc

$$\sqrt{u^2+1}-u\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2u}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}.$$

Ex. 2

Étudier, suivant les valeurs du réel α, l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\operatorname{th}x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$.

Indications

Trouver des équivalents simples de la fonction intégrée en 0 et en $+\infty$.

Solution

$f\ :\ x\mapsto\dfrac{1-\operatorname{th}x}{x^{\alpha}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale proposée a un sens si et seulement si f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Au voisinage de 0, $f(x)\sim\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ et donc, d'après la règle des équivalents, f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha<1$.

- Au voisinage de $+\infty$, $1-\operatorname{th}x=\dfrac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\sim 2e^{-2x}$.

Par ailleurs, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $\dfrac{e^{-x}}{x^{\alpha}}=o(1)$ en $+\infty$ donc $f(x)=o\left(e^{-x}\right)$ en $+\infty$ et, puisque $x\mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est de même pour f.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha<1$.

Commentaires

On sait que $\forall x\in\mathbb{R},\ |\operatorname{th}x|<1$.

f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si elle est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

f est dominée par $g:x\mapsto e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 3

Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$

Indications

Écrire l'intégrande sous la forme $\exp\left[u(x)\right]$ et développer $u(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution

$f \ : \ x \mapsto \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ a un sens si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Développons $\sqrt[3]{x+1}$ au voisinage de $+\infty$, il vient :

$$\sqrt[3]{x+1} = x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(1 + o(1)\right)$$

$$\ell n\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) = -\frac{2}{3}\,\ell n\, x - \ell n\, 3 + o(1)$$

$$f(x) = \exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{x}\,\ell n\, x + o\left(\sqrt{x}\,\ell n\, x\right)\right).$$

Formons alors :

$$x^2 f(x) = \exp\left(2\,\ell n\, x - \frac{2}{3}\sqrt{x}\,\ell n\, x + o\left(\sqrt{x}\,\ell n\, x\right)\right).$$

Avec $\ell n\, x = \underset{+\infty}{o}\left(\sqrt{x}\,\ell n\, x\right)$, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = 0 \ \text{ c'est-à-dire } \ f(x) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La règle de Riemann permet donc de conclure à l'intégrabilité de f.

Commentaires

$f(x) = \exp\left[\sqrt{x}\,\ell n\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)\right]$.

Le but est de trouver un équivalent simple de f ou à défaut une expression plus simple.

Cette expression de $f(x)$ ne permet pas de donner un équivalent plus simple mais en elle-même elle rend possible l'utilisation de la règle de Riemann.

Ex. 4

Étudier, suivant les valeurs du réel α, l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x\,\ell n^{\alpha} x} \mathrm{d}x.$

Indications

Écrire l'intégrande sous la forme $\exp\left[u(x)\right]$ et développer $u(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution

$f \ : \ x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x\,\ell n^{\alpha} x}$ est continue sur $]1, +\infty[$ et positive donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ a un sens si et seulement si f est intégrable sur $]1, 2]$ et sur $[2, +\infty[$.

- Étude sur $[2, +\infty[$

Avec un développement limité au sens fort on obtient :

$$\ell n\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ell n\left(1 + \frac{2}{x}\right) = -\frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\ell n\left(f(x)\right) = -\,\ell n^{\alpha}\, x + \mathcal{O}\left(\frac{\ell n^{\alpha}\, x}{x}\right)$$

$$f(x) = e^{-\,\ell n^{\alpha} x} + o(1).$$

Commentaires

Le sens fort à l'ordre 1, conduit à un développement de $\ell n\left(f(x)\right)$ dont le reste tend vers 0, ce qui permet de donner un équivalent assez simple de $f(x) = \exp\left(\ell n(f(x))\right)$. Le sens strict au même ordre n'est pas suffisant pour obtenir cette conclusion.

Il en résulte $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-\ell n^\alpha x}$ donc, d'après la règle des équivalents, f est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $g : x \mapsto e^{-\ell n^\alpha x}$ l'est également.
Si $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ donc g est non intégrable.

Si $\alpha = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{1}{e}$ donc g est non intégrable.

Si $0 < \alpha \leqslant 1$, on a $g(x) \geqslant \dfrac{1}{x}$ pour $x \geqslant e$, donc g est non intégrable.

Si $\alpha > 1$, on a $x^2 g(x) = e^{2\,\ell n\, x - \ell n^\alpha x} = e^{-\ell n^\alpha x + o\left(\ell n^\alpha x\right)}$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 g(x) = 0$ et g est intégrable d'après la règle de Riemann.

- Étude sur $]1,2]$

Remarquons maintenant que pour $\alpha \geqslant 0$, f est prolongeable par continuité en 1 et elle est donc intégrable sur $]1,2]$.

- En conclusion, f est intégrable sur $]1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

L'intégrabilité ou non intégrabilité de f sur $]1,2]$ dans le cas où $\alpha \leqslant 0$ est sans importance puisque dans ce cas la non intégrabilité sur $[2,+\infty[$ donne la non intégrabilité sur $]1,+\infty[$.

Ex. 5

Étudier, suivant les valeurs du réel α, l'existence de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \left(\cos \frac{1}{\ell n\, x}\right)^{2\,\ell n^\alpha x} \mathrm{d}x$.

Indications

Écrire l'intégrande sous la forme $\exp\left[u(x)\right]$ et développer $u(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution

$f : x \mapsto \left(\cos \dfrac{1}{\ell n\, x}\right)^{2\,\ell n^\alpha x}$ est continue sur $[e,+\infty[$ et positive donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} f$ a un sens si et seulement si f est intégrable sur $[e,+\infty[$.

Effectuons un développement de $\ell n\, f$ au voisinage de $+\infty$:

$$\ell n\, f(x) = 2\,\ell n^\alpha x\ \ell n \left(1 - \frac{1}{2\,\ell n^2 x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell n^4 x}\right)\right)$$
$$= -\ell n^{\alpha-2} x + \mathcal{O}\left(\ell n^{\alpha-4} x\right).$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ si $\alpha < 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{e}$ si $\alpha = 2$. Dans ces deux cas f est donc non intégrable sur $[e,+\infty[$.

Pour $\alpha > 2$, formons $x^\beta f(x) = e^{\beta\,\ell n\, x - \ell n^{\alpha-2} x + \mathcal{O}(\ell n^{\alpha-4} x)}$, on voit alors que quel que soit β non nul, $x^\beta f(x) = e^{\beta\,\ell n\, x + o(\ell n\, x)}$ si $\alpha - 2 < 1$ et $x^\beta f(x) = e^{-\ell n^{\alpha-2} x + o(\ell n^{\alpha-2} x)}$ si $\alpha - 2 > 1$.

En conséquence : pour $\alpha < 3$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = +\infty$ et f est non intégrable d'après la règle de Riemann, tandis que pour $\alpha > 3$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f(x) = 0$ donc f est intégrable d'après la même règle.

Lorsque $\alpha = 3$, en reprenant le développement de $\ell n\, f(x)$, on obtient maintenant $f(x) = e^{-\ell n\, x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell n\, x}\right)}$, donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et f est non intégrable d'après la règle des équivalents.

Commentaires

Noter l'utilisation des développements limités au sens fort qui à un ordre donné donnent plus de précision avec les mêmes calculs que pour un développement au sens strict.

Le problème est de découvrir la valeur critique de α, on forme donc a priori $x^\beta f(x)$ que l'on exprime en exploitant le développement précédent.

Dans le premier cas on choisi $\beta = 1$ et dans le deuxième $\beta = 2$.

Noter que le gain de précision apporté par les développements au sens fort a permis de traiter le cas limite sans calculs supplémentaires.

Ex. 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ donné et $f_\alpha \ : \ x \mapsto \dfrac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x}$. Étudier l'intégrabilité de f_α sur $[0, +\infty[$.

Indications

Comparer à une série.

Solution

f_α est visiblement positive et continue sur $[0, +\infty[$, elle est donc intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f_\alpha$ converge.

En posant $n\pi = a_n$ on a $u_n = \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x} \mathrm{d}x$ donc :

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{a_n}{1 + a_{n+1}^\alpha \sin^2 x} \mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{1 + a_n^\alpha \sin^2 x} \mathrm{d}x.$$

Les fonctions intégrées étant π-périodiques, il vient :

$$a_n \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_{n+1}^\alpha \sin^2 x} \leqslant u_n \leqslant a_{n+1} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_n^\alpha \sin^2 x}$$

et puisque $\sin x = \sin(\pi - x)$:

$$2a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_{n+1}^\alpha \sin^2 x} \leqslant u_n \leqslant 2a_{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_n^\alpha \sin^2 x}.$$

Enfin, la concavité de la fonction sin sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donne :

$$2a_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a_{n+1}^\alpha x^2} \leqslant u_n \leqslant 2a_{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \dfrac{4a_n^\alpha}{\pi^2} x^2}.$$

On transforme alors les deux intégrales par changement de variable, il vient :

$$2a_n a_{n+1}^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2} a_{n+1}^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} \leqslant u_n \leqslant \ \pi a_{n+1} a_n^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{a_n^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}.$$

Sachant que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2} a_{n+1}^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{a_n^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}$

et que $a_n a_{n+1}^{-\frac{\alpha}{2}} \sim a_{n+1} a_n^{-\frac{\alpha}{2}} \sim (n\pi)^{1-\frac{\alpha}{2}}$ on obtient :

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \quad \text{avec} \quad v_n \sim \pi(n\pi)^{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad w_n \sim \frac{\pi^2}{2}(n\pi)^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Il en résulte que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ et finalement f_α est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\dfrac{\alpha}{2} - 1 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 4$.

Commentaires

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_\alpha(n\pi) = n\pi$. Cette particularité rend impossible toute majoration globale au moyen d'une fonction usuelle intégrable et amène naturellement à introduire la série de terme général u_n.

On a pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x.$

Poser $t = x\, a_{n+1}^{\frac{\alpha}{2}}$ dans l'une

et, $t = \frac{2x}{\pi} a_n^{\frac{\alpha}{2}}$ dans l'autre.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$,

On a en fait montré $u_n = \mathcal{O}\left(n^{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$ et $n^{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathcal{O}(u_n)$.

II. Intégrabilité de fonctions réelles ou complexes

Ex. 7

Étudier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ell n(1+x)}\mathrm{d}x.$

Indications

Au voisinage de 0, majorer $|f(x)|$. Au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ est de signe constant.

Solution

$f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ell n(1+x)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, positive sur $[1,+\infty[$, de signe non constant au voisinage de 0.

- Sur $]0,1]$ on a $|f(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{\ell n(1+x)}$, et au voisinage de 0 :
$$\frac{\sqrt{x}}{\ell n(1+x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Donc $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\ell n(1+x)}$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après la règle des équivalents et il en est de même pour f par domination.

- Au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}\,\ell n\, x}$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ et f est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après la règle de Riemann.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui assure l'existence de :
$$\int_0^{+\infty} f.$$

Commentaires

Sur tout intervalle $]0,a]$, $\sin\frac{1}{x^2}$ change de signe une infinité de fois.

L'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$ est une condition nécessaire et suffisante d'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$, alors que l'intégrabilité de f sur $]0,1]$ n'est qu'une condition suffisante d'existence de $\displaystyle\int_0^1 f$.

Ex. 8

Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \dfrac{e^{ix}}{x^\alpha}$.

1) Étudier l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$.

2) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour $0 < \alpha \leqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est impropre convergente.

Solution

1) f est continue sur $[1,+\infty[$ et pour tout $x \in [1,+\infty[$, $|f(x)| = \dfrac{1}{x^\alpha}$, donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Pour $\alpha \leqslant 1$, $|f|\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est non intégrable sur $[1,+\infty[$, il reste à montrer que pour $0 < \alpha \leqslant 1$, $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^{it}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ a une limite en $+\infty$.

Commentaires

$|f|: x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est une fonction de référence.

Une intégration par parties donne :

$$F(x) = \left[-\frac{i\,e^{it}}{t^{\alpha}}\right]_1^x - i\,\alpha\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$$

$$\text{soit} \quad F(x) = i\,e^{i} - i\frac{e^{ix}}{x^{\alpha}} - i\,\alpha\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$$

La fonction $g\ :\ t\mapsto \dfrac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}$ est telle que $|g(t)| = \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ et compte tenu de $\alpha>0$, on voit que g est intégrable sur $[1,+\infty[$ ce qui assure l'existence de :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

D'autre part, $\left|\dfrac{e^{ix}}{x^{\alpha}}\right| = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ avec $\alpha>0$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{ix}}{x^{\alpha}} = 0$ et finalement F a une limite dans $\mathbb{C}$ en $+\infty$, ce qui prouve que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ est impropre convergente.

L'intégration par parties est effectuée de façon à faire apparaître une intégrale $\displaystyle\int_1^x g$ avec g intégrable sur $[1,+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

III. Convergence dominée

Ex. 9

Étudier les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathrm{d}x\,;$

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\,;$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x}\mathrm{d}x.$

Indications

1) Appliquer le théorème de convergence dominée.

2) Prolonger la fonction intégrée sur $[0,+\infty[$ au moyen de la fonction nulle sur $]n,+\infty[$.

3) Commencer par effectuer le changement de variable défini par $x = t\sqrt{n}$ puis appliquer la méthode du 2).

Solution

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n\ :\ x\mapsto\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ est continue, positive sur $[0,+\infty[$ et intégrable d'après la règle de Riemann.

Avec $f_n(x) = e^{n\,\ell n\left(1+\frac{x}{n}\right)-2x}$ et $\ell n\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{x}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on obtient pour tout $x\in[0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x) = e^{-x}$.

La concavité sur $]0,+\infty[$ de la fonction ℓn donne pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,+\infty[$, $f_n(x)\leqslant e^{-x}$.

Commentaires

Quand x tend vers $+\infty$, on a $f_n(x)\sim\lambda x^n e^{-2x}$ avec $\lambda = n^{-n}$.

Donc $x^2 f_n(x)\sim\lambda x^{n+2}e^{-2x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 f_n(x)=0$.

La suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f:x\mapsto e^{-x}$.

Pour tout $x>-1$, on a $\ell n(1+x)\leqslant x$ donc $f_n(x)\leqslant e^{n\frac{x}{n}-2x}$.

Donc, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$, le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1.$$

2) Considérons les fonctions $g_n,\ \ n\in\mathbb{N}^*$ définies par :

$$g_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \text{ si } 0\leqslant x\leqslant n \text{ et } g_n(x) = 0 \text{ si } x\geqslant n.$$

g_n est positive, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

Pour tout $x\in[0,+\infty[$, dès que $n>x$, on a $g_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = e^{-\frac{x}{2}}$.

$g_n(x) = e^{\frac{x}{2}-n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$.

Comme dans le 1), la concavité de ℓn donne pour tout $x\in[0,n[$ $0\leqslant g(x)\leqslant e^{-\frac{x}{2}}$ et cette majoration reste vraie sur $[n,+\infty[$ car on a alors $g_n(x)=0$.

$\ell n\left(1-\frac{x}{n}\right)\leqslant -\frac{x}{n}$.

La fonction $x\mapsto e^{-\frac{x}{2}}$, étant également intégrable sur $[0,+\infty[$, le théorème de convergence dominée donne encore :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} = 2.$$

3) Avec le changement de variable défini par $x = t\sqrt{n}$, il vient

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^x\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{t\sqrt{n}}\mathrm{d}t.$$

Comme dans le 2), introduisons les fonctions $h_n,\ \ n\in\mathbb{N}^*$ définies par :

$$h_n(t) = \left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{t\sqrt{n}} \text{ si } 0\leqslant t\leqslant\sqrt{n} \text{ et } h_n(x) = 0 \text{ si } t>\sqrt{n}.$$

h_n est positive continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n = \int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{t\sqrt{n}}\mathrm{d}t.$

Pour tout $t\in[0,+\infty[$, dès que $n>t^2$, on a $h_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{t\sqrt{n}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$h_n(t) = e^{n\,\ell n\left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)+t\sqrt{n}}$
$= e^{n\left(-\frac{t}{\sqrt{n}}-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+t\sqrt{n}}$

Pour tout $x\in[0,1[$ on a $\ell n(1-x)\leqslant -x-\dfrac{x^2}{2}$.

On peut justifier cette affirmation en considérant le développement en série entière $\displaystyle \ell n(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, $|x|<1$.

Il en résulte pour tout $t\in[0,\sqrt{n}[$, $\ell n\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\leqslant -\dfrac{t}{\sqrt{n}}-\dfrac{t^2}{2n}$

et donc $0\leqslant h_n(t)\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}}$

Puisque $h_n(t)=0$ pour $t\geqslant\sqrt{n}$, on a en fait :

$$\forall t\in[0,+\infty[,\quad 0\leqslant h_n(t)\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Enfin, sachant que la fonction $t\mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, on peut de nouveau invoquer le théorème de convergence dominée pour conclure à $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} h_n = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$, d'où finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^x\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$e^{-\frac{t^2}{2}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
Le changement de variable défini par $t=\sqrt{2u}$ donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

IV. Intégrales dépendant d'un paramètre

Ex. 10

Définition et calcul de : $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ell n\, t}\mathrm{d}t.$

Indications

Montrer que f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

Solution

■ **Définition**

L'application $\varphi\ :\ ]0,1[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ (t,x) \mapsto \dfrac{t^x - 1}{\ell n\, t}$ est continue, et pour x fixé, $\varphi(t,x)$ est de signe constant sur $]0,1[$ donc $f(x)$ existe si et seulement si $\psi\ :\ t \mapsto \varphi(t,x)$ est intégrable sur $]0,1[$.

Il est clair que $f(0) = 0$, on suppose donc $x \neq 0$.

Lorsque t tend vers 0, nous avons :

$$\varphi(t,x) \sim \frac{-1}{\ell n\, t} \text{ si } x > 0 \quad , \quad \varphi(t,x) \sim \frac{t^x}{\ell n\, t} \text{ si } x < 0$$

et lorsque t tend vers 1 : $\quad \varphi(t,x) \sim x.$

Donc $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ell n\, t}\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $x > -1$.

■ **Calcul de f**

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[\times]-1,+\infty[$ avec :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ :\ (t,x) \mapsto e^{x\,\ell n\, t}.$$

Soit alors a et b réels fixés tels que $-1 < a < 0 < b$, pour tout $x \in [a,b]$, on a $\forall t \in]0,1[,\ \ 0 < \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) \leqslant t^a$ et la fonction $\Phi\ :\ t \mapsto t^a$ est intégrable sur $]0,1[$ (car $a > -1$). D'après cette hypothèse de domination, on peut affirmer, avec le théorème de dérivation sous le signe somme, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x \mathrm{d}t.$$

On a donc aussi $\ f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, et compte tenu de $f(0) = 0$, il vient :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ f(x) = \ell n(x+1).$$

Commentaires

Pour $x<0$, $\forall t \in]0,1[$, $\varphi(t,x) < 0$,
pour $x > 0$, $\forall t \in]0,1[$, $\varphi(t,x) > 0$,
pour $x = 0$, $\forall t \in]0,1[$, $\varphi(t,0) = 0$.

Si $x>0$, ψ est prolongeable par continuité en 0, donc est intégrable sur $]0,\frac{1}{2}]$.
Si $x<0$, ψ est intégrable sur $]0,\frac{1}{2}]$ si et seulement si $t \mapsto \dfrac{t^x}{\ell n\, t}$ l'est, donc si et seulement si $x > -1$ d'après l'étude des intégrales de Bertrand (cf. Exemple 5 du cours).
Quel que soit x, ψ est prolongeable par continuité en 1, donc est intégrable sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$.

On applique le théorème de Leibniz avec domination locale.

Ex. 11

Soit $f\ :\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C},\ \ x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it}}{t^2 + x^2}\mathrm{d}t.$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Calculer $f(x)$ en formant $xf'(x) + f(x)$.

Indications

1) Utiliser deux fois le théorème de dérivation sous le signe somme.

2) Pour une fonction $G \ : \ x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x,t)\mathrm{d}t$, si l'intégrale est impropre convergente les théorème généraux ne permettent pas de justifier la dérivation sous le signe somme. On peut néammoins essayer de s'y ramener en considérant une fonction $G - \lambda \ : \ x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \big(g(x,t) - h(t)\big)\mathrm{d}t$ où la constante $\lambda = \int_{\mathbb{R}} h(t)\mathrm{d}t$ est telle que $h(t) \sim g(x,t)$ en $+\infty$ ou $-\infty$.

Solution

1) Soit $\varphi \ : \ (x,t) \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^2+x^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction partielle $\varphi_x \ : \ t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $|\varphi_x(t)| = \dfrac{1}{t^2+x^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

Remarquons maintenant que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $t \mapsto \varphi(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ on a $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b}{\left(t^2+a^2\right)^2} \quad , \quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{10}{\left(t^2+a^2\right)^2}$$

et la fonction continue $\Phi \ : \ t \mapsto \dfrac{1}{\left(t^2+a^2\right)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions le théorème de dérivation sous le signe somme, avec domination locale, donne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$f'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

puis que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire f de classe $\mathcal{C}^2$, avec :

$$f''(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t.$$

2) On a donc $xf'(x) + f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}e^{it}\mathrm{d}t$, et une intégration par parties donne :

$$xf'(x) + f(x) = \left[\frac{-te^{it}}{t^2+x^2}\right]_0^{+\infty} + i\int_{\mathbb{R}} \frac{te^{it}}{t^2+x^2}\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire $\qquad xf'(x) + f(x) = i\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{te^{it}}{t^2+x^2}\mathrm{d}t \qquad$ **(1)**

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il est acquis d'après **(1)** que $g \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{te^{it}}{t^2+x^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Cependant, l'intégrale définissant cette fonction étant impropre convergente, les théorèmes généraux ne permettent pas de dire que $g'(x)$ s'obtient par dérivation sous le signe somme.

Pour contourner la difficulté, nous allons montrer qu'en retranchant à g une constante bien choisie, on fait apparaître une fonction dont la dérivée s'écrit avec la formule de Leibniz.

Commentaires

φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est sur $[1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1]$.
Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur chacun de ces intervalles, d'où la conclusion.

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2xe^{it}}{(t^2+x^2)^2}$

$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{8x^2e^{it}}{(t^2+x^2)^3} - \dfrac{2e^{it}}{(t^2+x^2)^2}$.

Avec $a < b$.

Avec $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{-te^{it}}{t^2+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-te^{it}}{t^2+x^2} = 0$, puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}e^{it}\mathrm{d}t$ existe, on sait, d'après le corollaire du théorème 14, que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{te^{it}}{t^2+x^2}\mathrm{d}t$ a un sens éventuellement en tant qu'intégrale impropre convergente, et on peut vérifier directement que c'est ici le cas.

En effet un développement limité donne, quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$: $\dfrac{t}{t^2+x^2} = \dfrac{1}{t} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc $\dfrac{te^{it}}{t^2+x^2} = \dfrac{e^{it}}{t} + u(t)$ avec $u(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Ainsi u est intégrable sur $\mathbb{R}$ et puisque, d'après l'exemple 8, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\mathrm{d}t$ et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{it}}{t}\mathrm{d}t$ sont impropres convergentes, il en résulte que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{te^{it}}{t^2+x^2}\mathrm{d}t$$

est également impropre convergente.

Formons $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{te^{it}}{t^2+x^2}\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} \frac{te^{it}}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \frac{t\left(1-x^2\right)e^{it}}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+x^2\right)}\mathrm{d}t.$

La fonction :

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{t(1-x^2)e^{it}}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+x^2\right)}\mathrm{d}t$$

satisfait aux hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme avec domination locale car :

- $\psi\ :\ (x,t) \mapsto \dfrac{t\left(1-x^2\right)e^{it}}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+x^2\right)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t) = \frac{-2tx}{\left(t^2+x^2\right)^2}e^{it}\ ;$$

- et pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $a<b$, on a $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{t^2+a^2} \text{ avec } t \mapsto \frac{1}{t^2+a^2} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{te^{it}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ est une constante, il en résulte que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g'(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{te^{it}}{t^2+x^2}\right)\mathrm{d}t.$

Le choix de cette constante repose sur le fait que, lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on a $\frac{t}{t^2+1} \sim \frac{t}{t^2+x^2}$.

En dérivant **(1)** membre à membre, on obtient alors :

$$xf''(x) + 2f'(x) = -2ix\int_{\mathbb{R}} \frac{te^{it}}{\left(t^2+x^2\right)^2}\mathrm{d}t.$$

Puis en intégrant par parties :

$$xf''(x) + 2f'(x) = ix\left[\frac{e^{it}}{t^2+x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + x\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it}}{t^2+x^2}\mathrm{d}t,$$

Intégration par parties justifiée par l'existence des limites de $\frac{e^{it}}{t^2+x^2}$ quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

c'est-à-dire $\qquad xf''(x) + 2f'(x) - xf(x) = 0 \qquad$ **(2)**

En posant $h(x) = xf(x)$, cette équation **(2)** s'écrit $h''(x) - h(x) = 0$ et on en déduit $xf(x) = Ae^x + Be^{-x}$ avec A et B réels.

Voir la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Avec le changement de variable défini par $t = ux$, on obtient :

$$xf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iux}}{u^2+1}\mathrm{d}u$$

d'où $$|xf(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \pi.$$

Ainsi $x \mapsto xf(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui exige $A = 0$

En remarquant enfin que $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iux}}{u^2+1}\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xf(x) = \pi \text{ et donc } B = \pi.$$

En conclusion $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f(x) = \dfrac{\pi}{x}e^{-x}$

Ex. 12

1) Calculer, pour $|x| \neq 1$, l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

2) En déduire $F(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ell n\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)\mathrm{d}\theta$.

Indications

1) Poser $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

2) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de $x \mapsto \ell n\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)$ est une fonction rationnelle en $\cos\theta$.

Solution

1) Notons d'abord qu'avec $|x| \neq 1$, $1 - 2x\cos\theta + x^2$ ne s'annule pas pour $\theta \in [0, \pi]$.

En effet, $1-2x\cos\theta+x^2 = (x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$ donc $1-2x\cos\theta+x^2 = 0$ exige $\sin\theta = 0$ et $x = \cos\theta$, donc $\theta \equiv 0(\pi)$ et $x = \pm 1$, ce qui est exclu.

Ainsi, pour tout $x \notin \{-1, 1\}$, $\theta \mapsto \dfrac{1}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ est continue sur $[0, \pi]$, ce qui assure l'existence de $I(x)$.

Pour le calcul, effectuons le changement de variable défini par :

$$t = \tan\frac{\theta}{2},\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{(donc } \theta = 2\operatorname{Arctan} t,\ \ t \in [0, +\infty[\text{)}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I(x) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1-x)^2 + t^2(1+x)^2} \\ &= \frac{2}{1-x^2}\left[\operatorname{Arctan}\left(t\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)\right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

d'où $I(x) = \dfrac{\pi}{1-x^2}$ si $|x| < 1$ et $I(x) = \dfrac{-\pi}{1-x^2}$ si $|x| > 1$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, la fonction :

$$\varphi_x : \theta \mapsto \ell n\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)$$

est continue sur $[0, \pi]$ ce qui assure l'existence de $F(x)$.

En tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Pour $x = 1$, on a $\varphi_1(\theta) = \ell n\left(2(1 - \cos\theta)\right) = 2\,\ell n\, 2 + 2\,\ell n\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

donc φ_1 est continue et intégrable sur $]0, \pi]$ car, au voisinage de 0 :

$$\varphi_1(\theta) \sim 2\,\ell n\,\theta \quad \text{donc} \quad \varphi_1(\theta) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right).$$

$\sin\frac{\theta}{2} \sim \frac{\theta}{2}$ donne $\ell n\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \sim \ell n\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\ell n\,\frac{\theta}{2} = \ell n\,\theta - \ell n\, 2 \sim \ell n\,\theta$.

De même, pour $x = -1$, on a :

$$\varphi_{-1}(\theta) = \ell n\left(2(1 + \cos\theta)\right) = 2\,\ell n\, 2 + 2\,\ell n\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

donc φ_{-1} est continue et intégrable sur $[0, \pi[$.

On peut se ramener au problème précédent en posant $\theta = \pi - t$.

Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}$ et, avec le changement de variable défini par $\theta = \pi - t$, on obtient :

$$F(x) = \int_0^\pi \ell n\left(1 + 2x\cos t + x^2\right)\mathrm{d}t = F(-x)$$

c'est-à-dire que F est paire.

Pour le calcul de $F(x)$ on peut donc se limiter à $x \geqslant 0$.

La fonction $\Phi : (x,\theta) \mapsto \ell n\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les pavés $]-1,1[\times[0,\pi]$, $]1,+\infty[\times[0,\pi]$ et $]-\infty,-1[\times[0,\pi]$, il en résulte que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des trois intervalles $]-1,1[$, $]1,+\infty[$ et $]-\infty,-1[$ avec :

Par application du corollaire du théorème 21 (cas où l'intervalle d'intégration est compact).

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ F'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\int_0^\pi \frac{x-\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Montrons maintenant que F est continue en 1.

Il suffit de montrer que F est continue sur $[0,2]$.

La fonction $\Phi : (x,\theta) \mapsto \ell n\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)$ est continue sur $[0,2]\times]0,\pi[$.

Pour tout $x \in [0,2]$ et $\theta \in]0,\pi[$, on a :

$$\sin^2\theta \leqslant (x-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta \leqslant 10$$

$|x-\cos\theta| \leqslant x + |\cos\theta| \leqslant 3$.

donc $$\left|\ell n\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)\right| \leqslant \max\left(\ell n\,10, 2\,|\ell n\sin\theta|\right)$$
$$\leqslant \ell n\,10 - 2\,\ell n\sin\theta.$$

car $\ell n\sin\theta \leqslant 0$.

La fonction $\Psi : \theta \mapsto \ell n\,10 - 2\,\ell n\sin\theta$ étant intégrable sur $]0,\pi[$, on dispose ainsi d'une domination qui montre, avec le théorème de continuité sous le signe somme, que F est continue sur $[0,2]$.

Comme au début du 2), on a $\Psi(\theta) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$ quand $\theta \to 0$ et $\Psi(\pi-\theta) = \Psi(\theta)$.

En conséquence, F est continue en 1 donc aussi en -1 et finalement, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Par parité.

Calculons maintenant $F'(x)$, $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-1,1\right\}$.

Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{2(x-u)}{1+x^2-2ux} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2-1}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2-2ux}$

donc $F'(x) = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{1}{x} + \frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2-2x\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta$ soit :

$$F'(x) = \frac{\pi}{x} + \frac{x^2-1}{x}\,I(x).$$

$I(x)$ est introduite dans le 1).

D'après le 1), on obtient $F'(x) = 0$ si $|x| < 1$ et $F'(x) = \dfrac{2\pi}{x}$ si $|x| > 1$.

Il en résulte l'existence de deux constantes k_0 et k_1 telles que :

Avec $F'(0) = -2\displaystyle\int_0^\pi \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$, ce résultat reste valable pour $x = 0$.

$$\begin{array}{ll} F(x) = k_0 & \text{pour } x \in]-1,1[\\ F(x) = k_1 + 2\,\pi\,\ell n|x| & \text{pour } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty]\,. \end{array}$$

En tenant compte de la parité de F et de $x \mapsto \ell n|x|$.

Enfin $F(0) = 0$ donne $k_0 = 0$, puis la continuité en 1 donne $k_1 = 0$, d'où finalement :

$$\begin{array}{ll} F(x) = 0 & \text{pour } |x| \leqslant 1 \\ F(x) = 2\,\pi\,\ell n|x| & \text{pour } |x| \geqslant 1. \end{array}$$

F est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Niveau 1

Intégrabilité-Calcul d'intégrales

Ex. 1

Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\operatorname{th}^\alpha x)\mathrm{d}x$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Ex. 2

Étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'existence de :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right)\mathrm{d}x.$$

Ex. 3

Étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ l'existence de :

$$\int_0^{+\infty}\left(1 + \ln\left(2\operatorname{sh} x^\alpha\right) - 2\operatorname{sh}\ln\left(1 + x^\alpha\right)\right)\mathrm{d}x.$$

Ex. 4

Prouver l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{ch}x\sin^2 x}$.

Ex. 5

Prouver l'existence puis calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Ex. 6

Prouver l'existence puis calculer l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Ex. 7

Prouver l'existence puis calculer l'intégrale :

$$\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Ex. 8

Soit $f : x \mapsto \ln\sin x$, et $g : x \mapsto \ln\cos x$.

1) Montrer que f et g sont intégrables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g$.

2) En considérant $I + J$, calculer I et J.

Intégration des relations de comparaison $\boxed{\text{MP}^*}$

Ex. 9

Soit $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*\right)$ telle qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{\lambda}{x} \quad (\lambda \in \mathbb{R}^*).$$

1) Étudier, suivant les valeurs de λ, l'intégrabilité de f sur $[0, +\infty[$.

2) Pour $\lambda < -1$, prouver l'équivalence :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x f(x)}{\lambda+1}.$$

Pour $\lambda > -1$, prouver l'équivalence :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{x f(x)}{\lambda+1}.$$

Ex. 10

1) Montrer que la fonction :

$$f : x \mapsto \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

2) Étudier suivant les valeurs du réel α, l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)\mathrm{d}x$.

Intégrales impropres

Ex. 11

1) Montrer que pour $\alpha \in]0, 1]$ l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

est impropre convergente.

2) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}\mathrm{d}x$ est impropre convergente.

Convergence dominée

Ex. 12

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, continue par morceaux et bornée. Étudier la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^{+\infty}\frac{n f(t)}{1+n^2t^2}\mathrm{d}t.$$

Ex. 13

Soit $x \in]-1,+\infty[$, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Ex. 14

Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^n}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

Ex. 15

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}.$$

Ex. 16

Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ell n(\operatorname{th} x)\mathrm{d}x=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$

Intégrales dépendant d'un paramètre

Ex. 17

1) Montrer que la fonction :

$$F\ :\ y\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)(1+ixy)}$$

est contine sur $\mathbb{R}$.

2) Expliciter $F(y)$.

Ex. 18

Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

et $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t.$

1) Exprimer f en fonction de g.

2) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t.$

Ex. 19

1) Montrer que : $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos xt\mathrm{d}t.$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

Ex. 20

Étant donné $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},E)$ on définit $g\ :\ \mathbb{R}\to E$ par :

$$g(0)=f'(0)\text{ et }g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}\text{ si }x\neq 0.$$

1) Exprimer $g(x)$ au moyen d'une intégrale dépendant du paramètre x. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $g^{(n)}(0)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 21

Prouver l'existence puis calculer l'intégrale :

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}.$$

Ex. 22

Prouver l'existence puis calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}3x-\operatorname{th}2x}{x}\mathrm{d}x.$$

Ex. 23

Soit $f\in\mathcal{M}\left([0,+\infty[,\mathbb{R}\right)$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

1) On suppose f positive, peut-on affirmer que f tend vers 0 en $+\infty$?

2) On suppose f décroissante. Montrer que :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0.$

(Considérer $\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^x f$).

3) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, avec f' bornée. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$

Ex. 24

Soit $f\ :\ ]0,1]\to\mathbb{R}^+$, croissante et continue par morceaux sur $]0,1]$.

Montrer que les propositions **(1)**, **(2)**, **(3)**, et **(4)** sont équivalentes :

(1) $t\mapsto f\left(e^{-t}\right)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$,

(2) $\sum f\left(e^{-n}\right)$ converge,

(3) $\sum nf\left(e^{-n^2}\right)$ converge,

(4) $\sum\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

Ex. 25

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur $\mathbb{R}$, $\alpha \in [1, +\infty[$ et :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Prouver l'existence de u_n.

2) Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Ex. 26

Soit p, q des réels strictement positifs.

1) Prouver l'existence de :

$$I_{p,q} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 + x^q} dx.$$

2) Exprimer $I_{p,q}$ sous forme d'une série.

3) En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Ex. 27

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ ait un sens éventuellement en tant qu'intégrale impropre.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt$.

Ex. 28

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Montrer que l'application

$F : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt$ est constante.

Avec éléments de solution

Ex. 29

Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}} - 1\right) dt.$$

Ex. 30

Étudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de $f : x \mapsto |\sin x|^x$.

Ex. 31

Prouver l'existence puis calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt\right) dx.$$

Ex. 32

Trouver un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de :

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^t \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)\sqrt{1 + u^4}} du\right) dt.$$

Ex. 33

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{x^2}{x+1}\right) dx$ a-t-elle un sens ?

Ex. 34

Étudier la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^n \frac{1}{1 + x^2} \left(\frac{n - x}{n}\right)^n e^{(1+\frac{1}{n})x} dx.$$

Ex. 35

Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{n^2 x^n}{(1 + x^n)^n + (1 - x^n)^n} dx.$

Ex. 36

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$, évaluer :

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-n^2 t^2} dt.$$

Ex. 37

Prouver l'existence pour tout x réel puis calculer les intégrales :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos xt dt,$$

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin xt dt.$$

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 38

Soit $f \in \mathcal{C}^0\left(]0,+\infty[,\ \mathbb{R}_+^*\right)$ de carré intégrable sur $]0,+\infty[$.

1) Montrer que pour $x > 0$, f est intégrable sur $]0, x]$.

On pose $\quad g(x) = \displaystyle\int_0^x f.$

2) Pour $0 < a < b$, on définit :

$$z = \left(\int_a^b \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \ \alpha = \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \frac{\left(g(a)\right)^2}{a}$$

Montrer que $\quad z^2 - 2\,\alpha\, z - \beta \leqslant 0.$

En déduire l'existence de :

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Trouver K réel tel que $I \leqslant K \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2.$

Ex. 39

Soit $F\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$

1) Quel est l'ensemble D de définition de F ?

2) Montrer que F est continue sur D.

3) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{D}$.

4) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Ex. 40

Prouver l'existence et calculer les intégrales :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ell n\left(1+t^2\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t,$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ell n\left(a^2+t^2\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t \ \ (a > 0).$

Ex. 41

Soit $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\mathrm{d}t$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.

2) Montrer que f satisfait à une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants sur $\mathbb{R}^*$.

3) En déduire une expression simplifiée de f.

Ex. 42

On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x,\ \ n \in \mathbb{N}.$

En transformant W_n avec le changement de variable défini par $t = \sin^n x$, montrer que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Indications

Ex. 21

Donner un équivalent de :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$$

au voisinage de 0 et au voisinage de 1 puis poser successivement :

$$x = \frac{1}{t} \ \text{ et } \ u = \sqrt[3]{t-1}.$$

Ex. 22

$$\int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{th} 3x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{3\alpha} \frac{\operatorname{th} x}{x}\mathrm{d}x.$$

Ex. 23

1) Voir l'exemple 7 du cours.

3) Pour $\ x \in \mathbb{R}\ $ et $\ a > 0,\ $ minorer $\ |f(t)|\ $ pour $t \in [x, x+a]$, puis minorer $\displaystyle\int_x^{x+a} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

Ex. 24

(1) $\iff$ (3) : considérer la série de terme général

$$\int_{n^2}^{(n+1)^2} f\left(e^{-t}\right)\mathrm{d}t.$$

(1) $\iff$ (4) : considérer la fonction $h\ :\ u \mapsto \dfrac{1}{u} f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ et la série de terme général $h(n)$.

Ex. 25

2) Théorème de convergence dominée.

Ex. 26

2) Développer $\dfrac{x^{p-1}}{1+x^q}$ en série et grouper les termes par paquets de deux pour appliquer le théorème de convergence dominée pour la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs.

Ex. 27

f n'est pas supposée de signe constant au voisinage de $+\infty$!

L'hypothèse, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, n'est donc pas équivalente à l'intégrabilité de f sur $[0,+\infty[$ mais à l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f$.

Intégrer par parties $\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ en posant :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Ex. 28

F' et F'' sont reliées par une relation simple.

Ex. 29

Sur $[1,+\infty[$, on se ramène à l'étude de l'intégrabilité de $t\ :\ \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^\alpha}$ que l'on peut effectuer par comparaison avec une série.

Ex. 30

Considérer la série de terme général :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x\,\mathrm{d}x.$$

Ex. 31

$f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$

Évaluer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f$ en intégrant par parties.

Ex. 32

Montrer que :

$$f(x) = -\int_0^x \left(\int_t^{+\infty} \frac{1-u^2}{\left(1+u^2\right)\sqrt{1+u^4}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

puis appliquer les théorèmes d'intégration des relations d'équivalence.

Ex. 33

Étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \cos\left(\frac{t^2}{t+1}\right)\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

Ex. 34

Utiliser le théorème de convergence dominée. Une majoration de $\ell n\left(1-\dfrac{x}{n}\right)$, $0 \leqslant x < n$ peut se déduire du développement en série entière de $x \mapsto \ell n(1-x)$.

Ex. 35

Effectuer le changement de variable défini par :

$$x = \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

puis utiliser le théorème de convergence dominée.

Ex. 36

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ avec :

$$v_n = \int_{-n}^{n} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

puis étudier cette deuxième limite au moyen du théorème de convergence dominée.

Ex. 37

Montrer que $h\ :\ x \mapsto f(x) + ig(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution d'une équation différentielle simple.

Ex. 38

1) Pour que $f \in \mathcal{M}(]a,b],\mathbb{R}_+)$ soit intégrable sur $]a,b]$ il faut et il suffit que $\displaystyle\int_x^b f$ soit majorée pour $x \in]a,b]$.

2) Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Ex. 39

1) $F(x)$ a un sens lorsque $t \mapsto e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

ou lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est impropre convergente.

Pour $x < 0$, si l'intégrale avait un sens on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = 0.$$

2) Pour la continuité en 0, introduire la série de fonctions de terme général :

$$u_n \ : \ x \mapsto \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

3) Théorème de Leibniz sur tout intervalle compact $[a, b] \in \mathbb{R}_+^*$.

Ex. 40

1) Effectuer le changement de variable défini par :

$$t = \tan x.$$

2) Montrer que $f \ : \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ell n\left(a^2+t^2\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex. 41

Au moyen du changement de variable défini par $u = xt$, écrire $f(x)$ sous la forme $xg(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

L'équation différentielle est : $y'' - y = 0$.

Pour exprimer les conditions initiales, on pourra déduire du calcul initial que $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\sin u}{u^2+x^2}\mathrm{d}u$

puis montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\sin u}{u^2+x^2}\mathrm{d}u$ est continue en 0 en suivant une méthode calquée sur celle vue dans l'exercice 39.

Ex. 42

Après le changement de variable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $f_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \operatorname{th}^\alpha x$ est continue, positive si $\alpha > 0$ et négative si $\alpha < 0$, l'intégrale proposée a un sens si et seulement si f_α est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Comme $f_0 = 0$, nous supposons α non nul.

- Étude de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0^+.

Si $\alpha > 0$: $f_\alpha(x) \sim 1$, si $\alpha < 0$: $f_\alpha(x) \sim -x^\alpha$.

D'après le critère des équivalents, f est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

- Étude de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

De $\operatorname{th} x = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ on déduit :

$$\operatorname{th} x = 1 - 2e^{-2x} + o\left(e^{-2x}\right) \ , \ \operatorname{th}^\alpha x = 1 - 2\,\alpha\, e^{-2x} + o\left(e^{-2x}\right) \text{pv et } 1 - \operatorname{th}^\alpha x \sim 2\,\alpha\, e^{-2x}$$

donc, d'après la règle des équivalents, quel que soit α, f_α est intégrable sur $[1,+\infty[$.

- En conclusion, f_α est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

Ex. 2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})$ est continue positive sur $]0,+\infty[$. Donc l'intégrale I_α a un sens si et seulement si f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Pour tout $x \geqslant e$, on a $f(x) \geqslant x^\alpha$. Il s'ensuit que si $\alpha \geqslant -1$, f est non intégrable sur $[1,+\infty[$ car $x \mapsto x^\alpha$ est alors non intégrable.

Pour $\alpha < -1$, au voisinage de $+\infty$ on a $f(x) \sim x^\alpha \ln x$. En conséquence, avec β vérifiant $\alpha < \beta < -1$, il vient $f(x) = o\left(x^\beta\right)$ et, d'après le critère de domination, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

- On se limite maintenant à $\alpha < -1$.

Au voisinage de 0, $x + e^{\alpha x} = 1 + (1+\alpha)x + o(x)$ et donc $\ln(x+e^{\alpha x}) \sim (1+\alpha)x$ puis : $f(x) \sim (1+\alpha)x^{1+\alpha}$.

On en déduit que f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha + 1 > -1$, c'est-à-dire $\alpha > -2$.

- En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ a un sens si et seulement si $-2 < \alpha < -1$.

Ex. 3

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \left(1 + \ln\left(2\operatorname{sh} x^\alpha\right) - 2\operatorname{sh} \ln\left(1+x^\alpha\right)\right) \mathrm{d}x \text{ est continue sur }]0,+\infty[.$$

- Au voisinage de 0, $f(x) \sim \alpha \ln x$, donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est intégrable sur $]0,1]$ d'après le critère de domination.
- Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(2\operatorname{sh} x^\alpha\right) &= \ln\left(e^{x^\alpha} - e^{-x^\alpha}\right) = \ln e^{x^\alpha} + \ln\left(1 - e^{-2x^\alpha}\right)\\ &= x^\alpha + \mathcal{O}\left(e^{-2x^\alpha}\right)\end{aligned}$$

et, avec $2\operatorname{sh}\ln\left(1+x^\alpha\right) = 1 + x^\alpha - \dfrac{1}{1+x^\alpha} = 1 + x^\alpha - \dfrac{1}{x^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$, compte tenu de $e^{-2x^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$, il vient $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$. On en déduit que f est de signe constant au voisinage de $+\infty$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ à un sens si et seulement si f est intégrable sur $[1,+\infty[$ soit, d'après la règle des équivalents, si et seulement si $\alpha > 1$.

Ex. 4

$f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1+\operatorname{ch} x \sin^2 x}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ a un sens si et seulement si f est intégrable sur $[0,+\infty[$ soit, d'après le théorème 8, si et seulement si la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f$ est convergente.

Sur $\left[n\pi,(n+1)\,\pi\right]$, on a $\operatorname{ch} x \geqslant \dfrac{e^{n\pi}}{2}$ donc :

$$u_n \leqslant 2e^{-n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2e^{-n\pi}+\sin^2 x}.$$

La fonction $\sin^2$ étant π-périodique et paire, on obtient :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2e^{-n\pi}+\sin^2 x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2e^{-n\pi}+\sin^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2e^{-n\pi}+\sin^2 x},$$

donc, puisque sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ la concavité de la fonction $\sin$ donne $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$, il vient finalement :

$$u_n \leqslant \pi^2 e^{-n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\pi^2}{2}e^{-n\pi}+x^2} \leqslant \pi^2 e^{-n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\pi^2}{2}e^{-n\pi}+x^2} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{n}{2}\pi}.$$

La série géométrique de terme général $e^{-\frac{n}{2}\pi}$ est convergente, il en est donc de même pour $\sum u_n$ ce qui achève la preuve.

Ex. 5

- La fonction $f\ :\ t \mapsto \ell n\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et positive sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0, $\quad f(t) \sim -2\,\ell n\, t \quad$ donc $f(t) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et f est intégrable sur $]0,1]$.

Au voisinage de $+\infty$, $\quad f(t) \sim \dfrac{1}{t^2} \quad$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ce qui montre que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Pour effectuer une intégration par parties, étudions la limite en $+\infty$ et en 0 de $tf(t)$.

Avec $\quad tf(t) = t\,\ell n(1+t^2) - 2t\,\ell n\, t \quad$ on a :

$$\lim_{t\to 0} tf(t) = 0.$$

Au voisinage de $+\infty$, $\quad tf(t) \sim \dfrac{1}{t} \quad$ et donc $\quad \displaystyle\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0$. Nous pouvons alors écrire :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \left[tf(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi.$

Ex. 6

La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$.

Au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ donc f est intégrable sur $[0,1[$.

La parité de f permet de conclure à l'existence de $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f$ avec $\displaystyle\int_{-1}^{1} f = 2\int_0^1 f.$

Le changement de variable défini par $x = \sin t$, avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donne $I = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2-\sin^2 t}$.

Le changement de variable défini par $t = \operatorname{Arctan} u$, avec $u \in [0, +\infty[$ donne alors :

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \sqrt{2}\left[\operatorname{Arctan} \frac{u}{\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ex. 7

- La fonction $f \;:\; x \mapsto \dfrac{\ell n\, x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et négative sur $]0, 1[$.

Au voisinage de 0, $f(x) \sim \ell n\, x$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

On a aussi $f(x) \underset{1}{\sim} -\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{2}}$ donc f est prolongeable par continuité en 1 et f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$

Finalement, f est intégrable sur $]0, 1[$.

- Remarquons que $\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$.

En posant $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ on a alors $\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = -\mathrm{d}u$.

Avec $x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ il vient $I = \displaystyle\int_0^1 \ell n\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u$. On a ensuite :

$$\int_0^1 \ell n(1+u)\mathrm{d}u = \int_1^2 \ell n\, u\mathrm{d}u = \left[u\,\ell n\, u - u\right]_1^2 = 2\,\ell n\, 2 - 1 \;,\; \int_0^1 \ell n(1-u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \ell n\, u\mathrm{d}u = \left[u\,\ell n\, u - u\right]_0^1 = -1$$

$$\int_0^1 \ell n(1+u^2)\mathrm{d}u = \left[u\,\ell n\left(1+u^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 \ell n(1+u^2)\mathrm{d}u = \ell n\, 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \ell n\, 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ et finalement, $I = \ell n\, 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

Ex. 8

1) f est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, lorsque x tend vers 0, on a $f(x) \sim \ell n\, x$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le changement de variable défini par $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme décroissant de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur lui-même et on a $f\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = g(t)$ donc g est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a $I = J$. (Cf. théorème 13.)

2) Avec $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, il vient $2I = I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell n \sin 2x\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\,\ell n\, 2$.

Le changement de variable défini par $t = 2x$, donne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell n \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ell n \sin x\mathrm{d}x$ et, puisque $\sin x = \sin(\pi - x)$, on obtient $\displaystyle\int_0^{\pi} \ell n \sin x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell n \sin x\mathrm{d}x = 2I$, d'où finalement :

$$I = J = -\frac{\pi}{2}\,\ell n\, 2.$$

Ex. 9

1) Le théorème d'intégration des équivalences de fonctions positives non intégrables sur $[1,+\infty[$ donne au voisinage de $+\infty$:

$$\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t \sim \int_1^x \frac{\lambda}{t}\mathrm{d}t \quad \text{d'où} \quad \ell n\, f(x) \sim \lambda\, \ell n\, x.$$

- Cas où $\lambda < -1$.

On choisit μ tel que $\lambda < \mu < -1$, alors : $\ell n\left(x^{-\mu}f(x)\right) = (\lambda - \mu)\,\ell n\, x + o(\ell n\, x)$, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\mu}f(x) = 0 \text{ ou encore } f(x) = o\left(x^{\mu}\right).$$

Puisque $\mu < -1$, il en résulte que f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

- Cas où $-1 < \lambda$.

On a alors : $\ell n\left(xf(x)\right) = (\lambda + 1)\,\ell n\, x + o(\ell n\, x)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$ ou encore : $\dfrac{1}{x} = o\big(f(x)\big)$.

Dans ce cas, f est non intégrable sur $[0,+\infty[$.

- Cas où $\lambda = -1$.

Dans ce cas on ne peut pas conclure comme le montre l'exemple suivant : $f(x) = \dfrac{\ell n^{\alpha}(x+2)}{x+2}$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{(x+2)\,\ell n(x+2)} - \frac{1}{x+2}, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{x}, \quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell n^{\alpha}\, x}{x}$$

f est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour $\alpha < -1$, non intégrable pour $\alpha \geqslant -1$, et dans les deux cas on a $\lambda = -1$.

2) Pour $\lambda \neq -1$, on a $\left(xf(x)\right)' = xf'(x) + f(x) = f(x)\left[\dfrac{xf'(x)}{f(x)} + 1\right] \sim_{+\infty} (\lambda+1)f(x)$.

- Cas où $\lambda < -1$.

Le théorème d'intégration des équivalences de fonctions positives intégrables donne :

$$\int_x^{+\infty} \left[tf'(t) + f(t)\right]\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} (\lambda + 1)\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{-xf(x)}{\lambda+1}$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$).

- Cas où $\lambda > -1$.

Le théorème d'intégration des équivalences de fonctions positives non intégrables donne :

$$\int_0^x \left[tf'(t) + f(t)\right]\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} (\lambda+1)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\lambda+1}.$$

Ex. 10 MP*

1) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ell n\, t}$ est clairement définie et continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Au voisinage de 0, $g(t) \sim -\dfrac{1}{\ell n\, t}$ donc $\lim\limits_{t\to0} g(t) = 0$.

Au voisinage de 1, $\ell n\, t = \ell n(1+t-1) \sim t-1$ donc $\lim\limits_{t\to1} g(t) = 1$.

Ainsi g est prolongeable par continuité sur $[0,+\infty[$, on appelle encore g ce prolongement : $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.
Il en résulte que $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ avec $f' = g$.

On peut aussi remarquer que g est positive sur $\mathbb{R}_+$ et qu'il en est donc de même pour f.

2) La fonction $h : x \mapsto x^{\alpha}f(x)$ étant positive, l'intégrale I existe si et seulement si cette fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Étude sur $[1,+\infty[$

Soit $a > 1$, il est clair que g est non intégrable sur $[a,+\infty[$ (car $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$).

D'autre part, au voisinage de $+\infty$, $g(t) \sim \dfrac{t}{\ell n\, t} \sim \dfrac{t}{\ell n\, t} - \dfrac{t}{2\,\ell n^2\, t}$, c'est-à-dire $g(t) \sim \left(\dfrac{t^2}{2\,\ell n\, t}\right)'$.

Alors le théorème d'intégration des équivalences de fonctions positives non intégrables donne :

$$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \int_a^x \left(\frac{t^2}{2\,\ell n\, t}\right)' \mathrm{d}t$$

c'est-à-dire $\quad f(x) - f(a) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2\,\ell n\, x} - \dfrac{a^2}{2\,\ell n\, a}$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2\,\ell n\, x}$.

On en déduit $h(x) = x^{\alpha} f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^{2+\alpha}}{2\,\ell n\, x}$.

D'après l'étude des intégrales de Bertrand, h est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $2 + \alpha < -1$ c'est-à-dire $\alpha < -3$ **(1)**.

- Étude sur $]0, 1]$

Soit $b \in]0, 1[$, g est intégrable sur $]0, b]$ puisque prolongeable par continuité en 0.

Au voisinage de 0, $g(t) \sim -\dfrac{1}{\ell n\, t} \sim -\left(\dfrac{1}{\ell n\, t} - \dfrac{1}{\ell n^2\, t}\right)$ donc : $g(t) \sim -\left(\dfrac{t}{\ell n\, t}\right)'$.

On applique le théorème d'intégration des équivalences de fonctions positives intégrables, il vient :

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t \underset{0}{\sim} -\int_0^x \left(\frac{t}{\ell n\, t}\right)' \mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x}{\ell n\, x}.$$

On en déduit $h(x) = x^{\alpha} f(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^{\alpha+1}}{\ell n\, x}$.

De nouveau d'après l'étude des intégrales de Bertrand, h est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha + 1 > -1$ c'est-à-dire $\alpha > -2$ **(2)**.

Les conditions **(1)** et **(2)** étant incompatibles, h est toujours non intégrable sur $]0, +\infty[$.

Ex. 11

1) Utilisons la même méthode que pour l'exemple 11 du cours.

La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ est divergente car $u_n \geqslant \dfrac{2}{(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha}}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ diverge pour $\alpha \leqslant 1$. Il en résulte que $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}$ est non intégrable sur $[1, +\infty[$.

D'autre part une intégration par parties donne $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x^{\alpha}} - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $\left|\dfrac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ et $\alpha + 1 > 1$) et, puisque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} = 0$, il existe $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ est impropre convergente.

2) Sur $[0, 1]$, on a $\sqrt{x} + \cos x \geqslant \cos x > 0$ et, sur $]1, +\infty[$, $\sqrt{x} + \cos x \geqslant \sqrt{x} - 1 > 0$, donc $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Avec $|f(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}$, on voit d'après le 1) que f est non intégrable sur $[0, +\infty[$.

Quand x tend vers $+\infty$, on a $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = o(1)$ donc, en utilisant un développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0, il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1 + \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \text{ puis } f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin 2x}{2\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right).$$

D'après le 1), il existe $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et il en est de même pour $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\sin 2t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

D'autre part, en posant $g(x) = f(x) - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin 2x}{2\sqrt{x}}$, le développement précédent montre qu'au voisinage de $+\infty$, $g(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$. Ainsi g est intégrable sur $[1,+\infty[$ ce qui assure l'existence de $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x g(t)\mathrm{d}t$ et donc celle de $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$. Finalement $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est impropre convergente.

Ex. 12

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n\ :\mathbb{R}_+\to\mathbb{C},\ \ t\mapsto \frac{nf(t)}{1+n^2t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Il est clair que $f_0 = 0$ et donc $u_0 = 0$. On suppose maintenant $n\geqslant 1$.

f étant bornée, il existe $M = \|f\|_\infty^{\mathbb{R}_+}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\forall t\in[0,+\infty[,\ \ |f_n(t)|\leqslant \frac{nM}{1+n^2t^2}$ et la fonction $t\mapsto \frac{nM}{1+n^2t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même pour f_n ce qui assure l'existence de u_n.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le changement de variable défini par $x = nt$ donne $u_n = \int_0^{+\infty}\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Posons alors $g_n\ :\ x\mapsto \frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}$. $\left(g_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ convergeant simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $g\ :x\mapsto\frac{f(0^+)}{1+x^2}$ où $f(0^+)$ désigne la limite à droite de f en 0.

Comme de plus on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in]0,+\infty[,\ \ |g_n(x)|\leqslant\frac{M}{1+x^2}$ avec $x\mapsto\frac{M}{1+x^2}$ intégrable sur $]0,+\infty[$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,+\infty[} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} g(x)\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_{]0,+\infty[}\frac{f(0^+)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0^+).$$

Ex. 13

Posons $\quad f_n\ :\ t\mapsto t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

- Pour tout $n\geqslant 1$, f_n est continue, positive sur $]0,n]$.

Au voisinage de 0, $f_n(t)\sim t^x$ et puisque, par hypothèse, on a $x>-1$, f_n est intégrable sur $]0,n]$.

- Sachant que pour tout $x>-1$, on a $\ell n(1+x)\leqslant x$ (inégalité de convexité), on obtient :

$$\forall n\in\ \mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ \ \forall t\in]0,n[,\ \ \ell n\left(1-\frac{t}{n}\right)\leqslant -\frac{t}{n}$$

donc $\quad 0 < f_n(t) = t^x e^{n\,\ell n\left(1-\frac{t}{n}\right)}\leqslant t^x e^{-t}$ et cette inégalité reste vraie pour $t = n$.

Définissons alors $g_n\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par $g_n(t) = f_n(t)$ si $t\in]0,n]$ et $g_n(t) = 0$ si $t>n$.

Il est clair que g_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ avec $\int_{]0,+\infty[} g_n = \int_{]0,n]} f_n$ et que $\forall t\in]0,+\infty[, 0 < g_n(t)\leqslant t^x e^{-t}$.

Enfin, la suite $\left(g_n\right)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f\ \ :\ \ t\mapsto t^x e^{-t}$ (car quel que soit $t>0$, pour $n>t$, on a $g_n(t) = t^x e^{n\,\ell n\left(1-\frac{t}{n}\right)} = t^x e^{-t+o(1)}$) et cette fonction étant continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ le théorème de convergence dominée s'applique et donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,+\infty[} g_n = \int_{]0,+\infty[} f \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(x+1).$$

Ex. 14

La fonction $f_n\ : x \mapsto \dfrac{e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^n}}{\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f continue par morceaux et définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ si } 0 < x < \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{e},\ f(x) = 0 \text{ si } x > \frac{1}{2}.$$

Pour tout $x \in \left]0,1\right]$, on a $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et pour $x \in \left[1,+\infty\right[$, $f_n(x) \leqslant e^{-x}$.

Considérons alors la fonction $g : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \left]0,1\right],\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ \text{ et }\ \forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ g(x) = e^{-x}.$$

Cette fonction est continue par morceaux, intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$, et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ 0 < f_n(x) \leqslant g(x).$$

Cela nous assure de l'intégrabilité de chaque f_n sur $\left]0,+\infty\right[$ et le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_{]0,+\infty[} f = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{2}.$$

Ex. 15

La fonction $f\ : x \mapsto e^{-x}\cos\sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et telle que $|f(x)| \leqslant e^{-x}$ donc, d'après le critère de domination, elle est intégrable sur cet intervalle.

Le développement en série entière de $\cos$ à l'origine donne :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n e^{-x}}{(2n)!},$$

donc f est somme sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions continues de terme général $u_n\ : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^n e^{-x}}{(2n)!}$. **(1)**

Chaque u_n est, d'après la règle de Riemann, intégrable sur $[0,+\infty[$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-x} = 0$. **(2)**

Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x = \Gamma(n+1) = n!$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{n!}{(2n)!}$ donc, pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$

ce qui prouve que la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n|$ est convergente. **(3)**

Avec **(1)**, **(2)**, **(3)**, le théorème de convergence dominée pour les séries donne :

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Ex. 16

Soit $f\ : x \mapsto \ell n(\operatorname{th} x)$, f est continue et négative sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0, on a $f(x) \sim \ell n\, x$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est intégrable sur $]0,1]$.

Au voisinage de $+\infty$, $\operatorname{th} x = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1 - 2e^{-2x} + o\left(e^{-2x}\right)$ donne $f(x) \sim -2e^{-2x}$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après la règle des équivalents.

Pour tout $x > 0$ on a $0 < e^{-2x} < 1$ donc le développement en série entière à l'origine de $x \mapsto \ell n(1+x)$ (de rayon de convergence égal à 1) donne :

$$\ell n(\operatorname{th} x) = \ell n\left(1-e^{-2x}\right) - \ell n\left(1+e^{-2x}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2nx}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-2nx}}{n} = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-2(2n+1)x}}{2n+1}.$$

Alors puisque f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est somme d'une série de fonctions de signe constant, le théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles de cette série (cf. théorème 16) donne :

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} -2\frac{e^{-2(2n+1)x}}{2n+1}\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ex. 17

1) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ (x,y) \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)(1+ixy)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Avec $|f(x,y)| = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2y^2}}$, on obtient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ donc, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on déduit du théorème de continuité sous le signe somme que $F : y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, posons $f_y : x \mapsto f(x,y)$, $u = \mathrm{Re}\left(f_y\right)$ et $v = \mathrm{Im}\left(f_y\right)$. Puisque f_y est intégrable sur $\mathbb{R}$, on sait qu'il en est de même pour u et v. De plus avec $f(x,y) = \dfrac{1-ixy}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$, on voit que u est paire et v impaire, il vient donc $F(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_y = 2\int_0^{+\infty} u = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$.

Il est maintenant clair que F est paire et on peut donc se limiter pour le calcul à $y \in [0,+\infty[$.

Pour $y \neq 1$, une décomposition en éléments simples donne :

$$u(x) = \frac{1}{1-y^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2}\right) \quad \text{donc} \quad F(y) = \frac{2}{1-y^2}\Big[\mathrm{Arctan}\, x - y\,\mathrm{Arctan}\, xy\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{1+y}.$$

Les fonctions F et $y \mapsto \dfrac{\pi}{1+y}$ étant continues en 1, cette formule reste vraie en ce point.

Finalement en tenant compte de la parité on obtient pour tout $y \in \mathbb{R},\ F(y) = \dfrac{\pi}{1+|y|}$.

Ex. 18

1) Posons $\varphi : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Il est clair que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ et, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (dans le cas d'une intégrale sur un segment), f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$$

donc, avec le changement de variable défini par $u = xt$, on obtient :

$$f'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = -2g'(x)g(x).$$

2) On déduit du 1) que $f + g^2$ est constante donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x)^2 = f(0) + g(0)^2 = f(0) = \frac{\pi}{4} \quad \text{c'est-à-dire} \quad g(x)^2 = \frac{\pi}{4} - f(x) \qquad \textbf{(1)}.$$

Puisque $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ et vérifie $\forall t \in [1,+\infty[,\ e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$, elle est intégrable sur cet intervalle et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} g(x)$. Or en remarquant que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $0 \leqslant \varphi(x,t) \leqslant \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}$, on obtient $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, en conséquence la relation **(1)** donne :

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} g^2(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et, en tenant compte de la positivité,} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ex. 19

1) $\varphi : (x,t) \mapsto e^{-t^2}\cos xt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue sur cet intervalle et pour tout $t \geqslant 1$, on a $|\varphi(x,t)| \leqslant e^{-t}$.

Avec $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -te^{-t^2}\sin(xt)$, on obtient : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant te^{-t^2}$. En conséquence, la fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$, le théorème de dérivation sous le signe somme donne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ avec pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$.

2) Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t^2}\sin(xt) = 0$, une intégration par parties donne :

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}f(x).$$

La solution générale de l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$ est $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ donc, compte tenu de $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir par exemple l'exercice précédent), il vient finalement $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Ex. 20

1) Si $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\Big[f(tx)\Big]_{t=0}^{t=1}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{x}f(tx)\right) = f'(tx)$ donc $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$.

La fonction $(t,x) \mapsto f'(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ donc, par application itérée du corollaire du théorème de Leibniz (cas où l'intervalle d'intégration est compact), pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$g^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(tx)\mathrm{d}t.$$

Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) D'après le 1), $g^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0)\displaystyle\int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

Niveau 2

Ex. 21

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

Au voisinage de 0, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2/3}}$ et au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{1}{(1-x)^{1/3}}$, donc f est intégrable sur $]0,1[$.

- $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]1,+\infty[$ sur $]0,1[$ donc, en posant $x = \dfrac{1}{t}$, il vient $I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[3]{t-1}}$.

De même $t \mapsto \sqrt[3]{t-1}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et, en posant $u = \sqrt[3]{t-1}$ on obtient :

$$I = 3\int_0^{+\infty}\frac{u\mathrm{d}u}{u^3+1}.$$

Enfin, posons $u = \dfrac{1}{v}$ pour avoir $I = 3\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}v}{1+v^3}$.

Avec les deux dernières expressions de I, il vient :

$$I = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u+1}{u^3+1}\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1} \quad \text{soit } I = \sqrt{3}\left[\operatorname{Arctan}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ex. 22

- La fonction $f\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \dfrac{\operatorname{th}3x-\operatorname{th}2x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et positive.

Quand x tend vers 0, $(\operatorname{th}3x-\operatorname{th}2x)\sim x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$: f est prolongeable par continuité en 0, elle est donc intégrable sur $]0,1]$.

En $+\infty$, $\operatorname{th}3x = 1-2e^{-6x}+o\left(e^{-6x}\right)$, $\operatorname{th}2x = 1-2e^{-4x}+o\left(e^{-4x}\right)$

et $e^{-6x}=o\left(e^{-4x}\right)$ donc $\operatorname{th}3x-\operatorname{th}2x = 2e^{-4x}+o\left(e^{-4x}\right)$ et $f(x)\sim\dfrac{2}{x}e^{-4x}$.

Il en résulte $f(x)=o\left(e^{-4x}\right)$ et f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Pour $\alpha>0$, on a $\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{\operatorname{th}\lambda x}{x}dx=\int_0^{\lambda\alpha}\frac{\operatorname{th}t}{t}dt$ d'où $\displaystyle I_\alpha=\int_0^{\alpha}\frac{\operatorname{th}3x-\operatorname{th}2x}{x}dx=\int_{2\alpha}^{3\alpha}\frac{\operatorname{th}t}{t}dt.$

La fonction th étant croissante : $\displaystyle\operatorname{th}2\alpha\int_{2\alpha}^{3\alpha}\frac{dt}{t}\leqslant I_\alpha\leqslant\operatorname{th}3\alpha\int_{2\alpha}^{3\alpha}\frac{dt}{t}$, $\displaystyle\operatorname{th}2\alpha\,\ell n\frac{3}{2}\leqslant I_\alpha\leqslant\operatorname{th}3\alpha\,\ell n\frac{3}{2}.$

On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}3x-\operatorname{th}2x}{x}dx=\lim_{\alpha\to+\infty}I_\alpha=\ell n\frac{3}{2}.$

Ex. 23

1) La réponse est négative. Par exemple, on a vu que la fonction $x\mapsto xe^{-x^3|\sin x|}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et non bornée au voisinage de $+\infty$ (cf. exemple 7 du cours).

2) ▪ f étant décroissante, le théorème de la limite monotone donne l'existence de $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ telle que :

$$\ell=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

En supposant $\ell\in\mathbb{R}^*$, on obtient $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ell$ donc d'après la règle des équivalents f est non intégrable sur $[0,+\infty[$ ce qui est contraire à l'hypothèse. De même si on suppose $\ell=-\infty$, il existe $a\geqslant 0$ tel que $\forall x\in[a,+\infty[,\ f(x)\leqslant -1$ et f est encore non intégrable sur $[0,+\infty[$.

Il reste donc une seule possibilité : $\ell=0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

▪ f étant intégrable sur $[0,+\infty[$ on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}f=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{\frac{x}{2}}^x f=0$. Avec $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, la décroissance de f donne pour tout $x\in[0,+\infty[,\ f(x)\geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^x f\geqslant\frac{x}{2}f(x)\geqslant 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

3) Posons $M=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+}\left|f'(x)\right|$. En écrivant pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+^2$, $\displaystyle f(t)-f(x)=\int_x^t f'(u)du$, il vient :

$$|f(t)-f(x)|\leqslant M\,|t-x|\ \text{ donc }\ |f(x)|-M\,|t-x|\leqslant|f(t)|.$$

Ainsi pour tout $a>0$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_x^{x+a}|f(t)|\,dt\geqslant a\,|f(x)|-M\int_x^{x+a}(t-x)dt\quad\text{et donc}\quad|f(x)|\leqslant\frac{1}{a}\int_x^{x+a}|f(t)|\,dt+M\frac{a}{2}.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, fixons $a=\dfrac{\varepsilon}{M}$. L'inégalité précédente donne alors $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\displaystyle|f(x)|\leqslant\frac{1}{a}\int_x^{x+a}|f(t)|\,dt+\frac{\varepsilon}{2}.$

Comme précédemment, l'intégrabilité de f (donc de $|f|$) sur $[0,+\infty[$ donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}|f(t)|\,dt=0.$

Donc il existe $A\geqslant 0$ tel que pour tout $x\geqslant A$ on ait $\displaystyle\int_x^{x+a}|f(t)|\,dt\leqslant\frac{\varepsilon\,a}{2}.$

En conclusion, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $A\geqslant 0$ tel que $x\geqslant A\ \Rightarrow\ |f(x)|\leqslant\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Ex. 24

(1) $\iff$ **(2)**

$g\ :\ t \mapsto f\left(e^{-t}\right)$ est positive, continue par morceaux et décroissante sur $[0,+\infty[$ donc, d'après un théorème de comparaison de série et d'intégrale (cf. chapitre 2, théorème 9), $\sum g(n)$ converge si et seulement si g est intégrable sur $[0,+\infty[$.

(1) $\iff$ **(3)**

D'après le théorème 8 de ce chapitre, la fonction g étant positive sur $[0,+\infty[$, elle est intégrable sur cet intervalle si et seulement si la série de terme général $\displaystyle\int_{n^2}^{(n+1)^2} g(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

Or la croissance de f donne :

$$(2n+1)f\left(e^{-(n+1)^2}\right) \leqslant \int_{n^2}^{(n+1)^2} g(t)\mathrm{d}t = \int_{n^2}^{(n+1)^2} f\left(e^{-t}\right)\mathrm{d}t \leqslant (2n+1)f\left(e^{-n^2}\right).$$

Donc, puisque $(2n+1)f\left(e^{-n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2nf\left(e^{-n^2}\right)$ et $(2n+1)f\left(e^{-(n+1)^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2(n+1)f\left(e^{-(n+1)^2}\right)$, cet encadrement montre que les séries de termes généraux $\displaystyle\int_{n^2}^{(n+1)^2} g(t)\mathrm{d}t$ et $nf\left(e^{-n^2}\right)$ sont de même nature.

L'équivalence **(1)** $\iff$ **(3)** en résulte.

(1) $\iff$ **(4)**

L'application $t \mapsto e^t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$ donc $g\ :\ x \mapsto f\left(e^{-t}\right)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $h\ :\ u \mapsto \dfrac{1}{u}f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et alors les intégrales sont égales (cf. théorème 13).

Comme de plus h est décroissante (en tant que produit de deux fonctions positives décroissantes), elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si la série $\Sigma h(n)$ est convergente. L'équivalence **(1)** $\iff$ **(4)** en résulte.

Ex. 25

1) La fonction $F\ :\ x \mapsto n\,\ell n\left(1+\left(\dfrac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc I_n a un sens si et seulement si F est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour $f(x) \leqslant n$, on a $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{n} \leqslant 1$ donc $\left(\dfrac{f(x)}{n}\right)^{\alpha} \leqslant \dfrac{f(x)}{n}$ et alors $\ell n\left(1+\left(\dfrac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) \leqslant \left(\dfrac{f(x)}{n}\right)^{\alpha} \leqslant \dfrac{f(x)}{n}$.

Pour $f(x) > n$, on obtient $1 < \left(\dfrac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}$ donc $1+\left(\dfrac{f(x)}{n}\right)^{\alpha} \leqslant 2\left(\dfrac{f(x)}{n}\right)^{\alpha} \leqslant \left(\dfrac{2f(x)}{n}\right)^{\alpha}$ puis :

$$\ell n\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) \leqslant \alpha\,\ell n\left(\frac{2f(x)}{n}\right) \leqslant \frac{2\alpha}{n}f(x).$$

Dans tous les cas, on a $F(x) \leqslant 2\,\alpha\,f(x)$ ce qui, avec le critère de domination, assure l'intégrabilité de F.

2) Si $\alpha = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,\ell n\left(1+\frac{f(x)}{n}\right) = f(x)$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\,\ell n\left(1+\dfrac{f(x)}{n}\right) \leqslant f(x)$. Donc, compte tenu de l'intégrabilité de f, le théorème de convergence dominée donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{\mathbb{R}} f$.

Si $\alpha > 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,\ell n\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}f(x)^{\alpha} = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad n\,\ell n\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) \leqslant 2\,\alpha\,f(x).$$

Donc le théorème de convergence dominée donne maintenant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Ex. 26

1) $f\ :]0,1]\to\mathbb{R},\ \ x\mapsto\dfrac{x^{p-1}}{1+x^q}$ est continue, positive sur $]0,1]$ donc $I_{p,q}$ existe si et seulement si f est intégrable sur $]0,1]$. Au voisinage de 0, $f(x)\sim\dfrac{1}{x^{1-p}}$ donc f est intégrable sur $]0,1]$ car $1-p<1$.

2) Pour tout $x\in[0,1[$, $\dfrac{1}{1+x^q}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{nq}$ donc : $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{p-1+nq}\mathrm{d}x.$

Sous cette forme, on n'est pas en mesure d'utiliser le théorème de convergence dominée.

Avec $u_n=(-1)^n x^{p-1+nq}$, par regroupement des termes on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_{2n}+u_{2n+1}\right)$ d'où :

$$I_{p,q}=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-x^q\right)x^{p-1+2nq}\mathrm{d}x.$$

Posons $v_n\ :]0,1[\to\mathbb{R},\ \ x\mapsto(1-x^q)x^{p-1+2nq}$, on a affaire à une série de fonctions :

- continues, positives et intégrables sur $]0,1[$,
- de somme $f\ :\ x\mapsto\dfrac{x^{p-1}}{1+x^q}$ intégrable sur $]0,1[$ (d'après 1)).

On sait alors, d'après le théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles de cette série (théorème 16), que :

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 v_n \text{ est convergente avec } \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 v_n=\int_0^1 f,$$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 u_{2n}+\int_0^1 u_{2n+1}\right)$ ou aussi $\displaystyle I_{p,q}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq}.$

3) $p=q=1$ donne $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ell n\,2.$

$p=1,q=2$ donne $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$

Ex. 27

Posons, pour tout $x\geqslant 0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x f$. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

En intégrant par parties, nous avons $\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=xF(x)-\int_0^x F(t)\mathrm{d}t$, d'où :

$$\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=F(x)-\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\mathrm{d}t. \qquad \textbf{(1)}$$

Par hypothèse, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=I$, où on a posé $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}f.$

Premier cas : $I=0$.

$\forall\,\varepsilon>0,\exists a\geqslant 0,\forall x\geqslant 0,x>a\ \Rightarrow\ |F(x)|\leqslant\varepsilon$. Il s'ensuit, pour tout $x>a$:

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{x}\left|\int_0^a F(t)\mathrm{d}t\right|+\frac{x-a}{x}\varepsilon\leqslant\frac{1}{x}\left|\int_0^a F(t)\mathrm{d}t\right|+\varepsilon.$$

Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^a F(t)\mathrm{d}t=0$, donc il existe $b\geqslant a$ tel que, pour tout $x>b$:

$$\frac{1}{x}\left|\int_0^a F(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon.$$

En conclusion, $\forall\varepsilon>0,\exists b>0,\forall x\geqslant 0,x>b\ \Rightarrow\ |F(x)|\leqslant 2\varepsilon$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\mathrm{d}t=0.$

Deuxième cas : I réel quelconque.

En appliquant le résultat précédent à la fonction $t \mapsto F(t) - I$, il vient : **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x F(t)\mathrm{d}t = I.$

En conclusion, avec **(1)** et **(2)**, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = 0.$

Ex. 28

La fonction $(r,t)\mapsto f(r\cos t, r\sin t)$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, le théorème de dérivation sous le signe somme dans le cas particulier de l'intégration sur un segment s'applique deux fois pour donner :

$$F'(r) = \int_0^{2\pi} \left(\cos t\frac{\partial f}{\partial x} + \sin t\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}t \qquad \textbf{(1)}$$

$$F''(r) = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos t\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}t \qquad \textbf{(2)}$$

(chacune des dérivées est prise au point $(r\cos t, r\sin t)$)

En intégrant **(1)** par parties on obtient :

$$F'(r) = \left[\sin t\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0^{2\pi} - r\int_0^{2\pi}\left(-\sin^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin t\cos t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\mathrm{d}t$$

$$+\left[-\cos t\frac{\partial f}{\partial y}\right]_0^{2\pi} - r\int_0^{2\pi}\left(\cos t\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$F'(r) = r\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\sin t\cos t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\mathrm{d}t$$

Compte tenu de **(2)**, on en déduit $rF''(r) + F'(r) = 0$ donc $rF'(r) = \lambda$ où λ est une constante réelle.

Avec $r = 0$ on voit que $\lambda = 0$ et il vient ainsi $\forall r\in\mathbb{R},\ \ rF'(r) = 0$ donc, puisque F' est continue, $\forall r\in\mathbb{R},\ \ F'(r) = 0.$

En conclusion, F est constante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 29

$f\ : t\mapsto e^{\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}} - 1$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, l'intégrale a un sens si et seulement si f est intégrable sur cet intervalle.

- Au voisinage de 0 : $\dfrac{\sin^2 t}{t^\alpha} = t^{2-\alpha} + o\left(t^{2-\alpha}\right).$

Si $0<\alpha\leqslant 2$, f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.

Si $\alpha > 2$, $\lim\limits_{t\to 0} tf(t) = +\infty$, f est non intégrable sur $]0,1]$ (donc non intégrable sur $]0,+\infty[$).

- Au voisinage de $+\infty$: $f(t)\sim\dfrac{\sin^2 t}{t^\alpha}$. Pour que f soit intégrable sur $[1,+\infty[$, il faut et il suffit que $g\ : t\mapsto\dfrac{\sin^2 t}{t^\alpha}$

le soit, donc aussi que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ soit convergente.

Un encadrement de u_n s'écrit : $\dfrac{\pi^{1-\alpha}}{2(n+1)^\alpha}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{\pi^{1-\alpha}}{2n^\alpha}$. Donc Σu_n est convergente si et seulement si $\alpha>1$.

- Finalement f est intégrable si et seulement si $1<\alpha\leqslant 2$.

Ex. 30

f est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 ($\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$) et positive. Elle est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

En posant $p = E\big((n+1)\pi\big)$, on obtient $u_n \geqslant \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^{p+1}\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire :

$$u_n \geqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p+1} x\mathrm{d}x.$$

Sachant que l'intégrale de Wallis : $W_p = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\mathrm{d}x$ vérifie $W_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2p}}$ et que $E\big((n+1)\pi\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$,

on obtient $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p+1} x\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ donc Σu_n diverge et f est non intégrable.

Ex. 31

$f\ : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et positive sur $[0,+\infty[$.

Il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geqslant a$ on ait $e^{-x^2} \leqslant \dfrac{2}{x^3}$ et donc $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$: f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_0^x f = xf(x) + \frac{1}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2}$ d'où, avec la majoration de $f(x)$:

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f = \frac{1}{2}.$$

Ex. 32

Posons $\varphi(u) = \dfrac{1-u^2}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}$, φ est continue sur $\mathbb{R}$, $\varphi(u) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{u^2}$, elle est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

Le changement de variable défini par $v = \dfrac{1}{u}$ montre que :

$$\int_0^1 \varphi = -\int_1^{+\infty}\varphi \ \text{ donc } \int_0^{+\infty}\varphi = 0 \ \text{ et } \ f(x) = -\int_0^x\left(\int_t^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

Les théorèmes d'intégration des équivalences donnent :

$$\int_t^{+\infty} -\varphi(u)\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_t^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} \qquad \text{(cas des fonction intégrables positives).}$$

puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_1^x\left(\int_t^{+\infty} -\varphi(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell n\, x$ (cas des fonctions non intégrables).

Ex. 33

$f\ : x \mapsto \cos\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas de signe constant au voisinage de $+\infty$. Aucune majoration de $|f|$ ne semblant évidente, on commence par étudier si $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite quand x tend vers $+\infty$.

Une intégration par parties donne :

$$\int_1^x \cos\left(\frac{t^2}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{(t+1)^2}{t^2+2t}\sin\left(\frac{t^2}{t+1}\right)\right]_0^x + \int_0^x \frac{2t+2}{(t^2+2t)^2}\sin\left(\frac{t^2}{t+1}\right)\mathrm{d}t.$$

On remarquera que les fonctions $t \mapsto \dfrac{(t+1)^2}{t^2+2t}\sin\left(\dfrac{t^2}{t+1}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{2t+2}{(t^2+2t)^2}\sin\left(\dfrac{t^2}{t+1}\right)$ sont prolongeables par continuité en 0.

Avec $\left|\dfrac{2t+2}{(t^2+2t)^2}\sin\left(\dfrac{t^2}{t+1}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, on voit que :

$$t \mapsto \frac{2t+2}{(t^2+2t)^2}\sin\left(\frac{t^2}{t+1}\right)$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc sur $[0,+\infty[$ et il existe $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \frac{2t+2}{(t^2+2t)^2}\sin\left(\frac{t^2}{t+1}\right)\mathrm{d}t$.

D'autre part $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}\sin\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$ donc il en est de même pour $\displaystyle\int_0^x f$.

Ceci prouve que f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ et que l'on ne peut pas donner un sens à $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ même en tant qu'intégrale impropre.

Ex. 34

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ définissons les fonctions $f_n : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{n-x}{n}\right)^n e^{(1+\frac{1}{n})x} \text{ si } x\in[0,n[\text{ et } f_n(x)=0 \text{ si } x\geqslant n.$$

On a alors $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$. On a ainsi défini une suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ de fonctions positives continues sur $[0,+\infty[$ qui converge simplement sur cet intervalle vers la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

En considérant le développement en série entière à l'origine de $x\mapsto \ell n(1-x)$ on obtient que :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\quad 0\leqslant f_n(x)\leqslant \frac{1}{1+x^2}e^{\frac{1}{n}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}.$$

On en déduit que $\forall x\in[0,+\infty[,\quad 0\leqslant f_n(x)\leqslant F(x)$ avec $F : x\mapsto \dfrac{e}{1+x^2}$.

La fonction F étant intégrable sur $[0,+\infty[$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ex. 35

Les fonctions $f_n : x\mapsto \dfrac{n^2x^n}{\left(1+x^n\right)^n+\left(1-x^n\right)^n}$ sont continues sur le segment $[0,1]$ et on sait que l'on a :

$$u_n = \int_{[0,1]} f_n = \int_{]0,1]} f_n.$$

On se limite à $n\geqslant 1$. Puisque $t\mapsto\left(\dfrac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,n]$ sur $]0,1]$, le changement de variable défini par $x=\left(\dfrac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ donne :

$$u_n = \int_{]0,n]}\frac{n^{-\frac{1}{n}}t^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n+\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $u_n = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} g_n$ où g_n est définie par :

$$g_n(t) = \frac{n^{-\frac{1}{n}}t^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n+\left(1-\frac{t}{n}\right)^n} \text{ si } t\in]0,n] \text{ et } g_n(t)=0 \text{ si } x>n.$$

$(g_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $]0,+\infty[$ convergeant simplement sur cet intervalle vers :

$$g\ :t\mapsto \frac{1}{2\operatorname{ch} t}.$$

Pour trouver une domination, on peut d'abord remarquer que :

$$\forall t\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant g_n(t)\leqslant \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n},$$

puis la concavité de ℓn donne $\forall x\in[0,1],\quad \ell n(1+x)\geqslant x\,\ell n\,2$ et on en déduit :

$$\forall t\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant g_n(t)\leqslant e^{-t\,\ell n\,2}.$$

(En fait cette majoration est établie sur $]0,n]$ et elle reste valable sur $]n,+\infty[$ puisqu'alors $g_n(t)=0$.)

La fonction $t\mapsto e^{-t\,\ell n\,2}$ étant intégrable sur $]0,+\infty[$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch} t}=\frac{\pi}{4}.$$

Ex. 36

Avec le critère de domination, l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$ assure celle de $t\mapsto f(t)e^{-n^2t^2}$. On pose :

$$u_n=n\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-n^2t^2}\mathrm{d}t.$$

On se limite à $n\geqslant 1$. Le changement de variable défini par $t=\dfrac{x}{n}$ donne $u_n=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x.$

Dans le cas où f est bornée sur $\mathbb{R}$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|f\left(\dfrac{x}{n}\right)\right|e^{-x^2}\leqslant Me^{-x^2}$ avec $M=\|f\|_\infty^{\mathbb{R}}$ et le théorème de convergence dominée donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=f(0)\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\mathrm{d}x.$

Cependant on sait que l'intégrabilité n'impose pas que f soit bornée sur $\mathbb{R}$. La preuve n'est donc pas complète.

Dans le cas général, écrivons $u_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{-n} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-n}^{n} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{n}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x.$

Avec $\left|\displaystyle\int_n^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant n\int_1^{+\infty}|f(t)|\,e^{-n^2t^2}\mathrm{d}t\leqslant ne^{-n^2}\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x=0,\quad \text{et de même on a}\ \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{-n} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x=0.$$

Posons alors $v_n=\displaystyle\int_{-n}^{n} f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} f_n$ où on définit f_n par :

$$f_n(x)=f\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x^2}\ \text{si}\ x\in[-n,n]\quad\text{et}\quad f_n(x)=0\ \text{si}\ x\in\mathbb{R}\setminus[-n,n].$$

$(f_n)_{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux convergeant simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x\mapsto f(0)e^{-x^2}$ et, en posant $A=\|f\|_\infty^{[-1,1]}$, elle est dominée par la fonction $x\mapsto Ae^{-x^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=f(0)\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

En conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=f(0)\sqrt{\pi}.$

Ex. 37

La fonction $u\ :\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\quad (x,t)\mapsto\dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et telle que :

$$|u(x,t)|=\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Avec $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = o_{+\infty}\left(e^{-t}\right)$, on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ce qui assure l'existence de $h(x) = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} u(x,t)\mathrm{d}t$ et donc aussi de $f(x) = \operatorname{Re}\left(h(x)\right)$ et $g(x) = \operatorname{Im}\left(h(x)\right)$.

On a d'autre part $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{-t+ixt}$ donc $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}e^{-t}$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}e^{-t}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$, h est, d'après le théorème de Leibniz, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $h'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}\mathrm{d}t$.

Une intégration par parties fournit :

$$h'(x) = \left[\sqrt{t}e^{-t}\boldsymbol{\cdot}\frac{1}{x}e^{ixt}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-t+ixt} - \sqrt{t}e^{-t+ixt}\right)\mathrm{d}t$$

donc $\quad h'(x) = -\dfrac{1}{2x}h(x) + \dfrac{1}{ix}h'(x)$ puis $h'(x) + \dfrac{x-i}{2(x^2+1)}h(x) = 0.$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x-i}{2(x^2+1)}$ étant $A\ : x \mapsto \dfrac{1}{4}\ell n(x^2+1) - \dfrac{i}{2}\operatorname{Arctan} x$, l'équation précédente donne $\left(he^A\right)' = 0$ et on en déduit l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \lambda e^{-A(x)}.$$

Avec $h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on obtient finalement :

$$h(x) = \sqrt{\pi}e^{-A(x)}.$$

En conclusion, $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x\right),\quad g(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x\right).$

En utilisant $\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ et $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$, on peut enfin en déduire :

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}} \quad\text{et}\quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Niveau 3

Ex. 38

1) f étant positive, elle est intégrable sur $]0,x]$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^x f$ est majorée pour a décrivant $]0,x]$.

Or, d'après l'inégalité de Cauchy – Schwarz, on a :

$$\forall a \in]0,x],\ \left(\int_a^x f\right)^2 \leqslant \left(\int_a^x f^2\right)\left(\int_a^x 1\right) \leqslant x\int_0^x f^2$$

soit encore $\quad \forall\ a \in]0,x],\ 0 \leqslant \displaystyle\int_a^x f \leqslant \left(x\int_0^x f^2\right)^{\frac{1}{2}}.$

D'où la conclusion.

Remarquons qu'il résulte de ce calcul que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x}g^2(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x f^2.$

2) ▪ g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier sur $[a,b]$, et une intégration par parties donne :

$$z^2 = \int_a^b \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{g^2(a)}{a} - \frac{g^2(b)}{b} + 2\int_a^b \frac{g(x)f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Toujours d'après l'inégalité de Cauchy – Schwarz, f et g étant positives, on a :

$$0 \leqslant \int_a^b \frac{g(x)f(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \alpha z$$

d'où
$$z^2 - 2\,\alpha\, z - \frac{g^2(a)}{a} \leqslant -\frac{g^2(b)}{b} \leqslant 0.$$

C'est la conclusion souhaitée.

■ Pour que $x \mapsto \left(\dfrac{g(x)}{x}\right)^2$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$, il faut et il suffit que $\displaystyle\int_a^b \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$ soit majorée quand (a,b) décrit $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Les racines du trinôme $z^2 - 2\,\alpha\, z - \beta$ sont $\alpha - \sqrt{\alpha^2+\beta}$ et $\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta}$.

D'après l'inégalité précédente, on a donc, pour tout (a,b) tel que $0 < a < b$:

$$\left(\int_a^b \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta}.$$

Par ailleurs $\alpha = \left(\displaystyle\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et d'après la première question :

$$\beta = \frac{1}{a}g^2(a) \leqslant \int_0^a f^2 \quad \text{donc} \quad \alpha^2 + \beta \leqslant \int_0^a f^2 + \int_a^b f^2 = \int_0^b f^2 \leqslant \int_0^{+\infty} f^2.$$

Il vient donc
$$\left(\int_a^b \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On en conclut que $x \mapsto \left[\dfrac{g(x)}{x}\right]^2$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2.$

Ex. 39

1) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction g_x telle que $g_x(0) = 1$, $g_x(t) = e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Pour $x > 0$, $|g_x(t)| \leqslant e^{-xt}$ et $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc g_x est intégrable.

Pour $x = 0$, $g_0(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est impropre convergente (voir exemple 11 du cours).

Pour $x < 0$, si l'intégrale avait un sens il existerait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi} g_x$ et on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g_x = 0.$$

Or $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} g_x(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{e^{-2n\pi x}}{(2n+1)\pi}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin t\mathrm{d}t = \frac{2e^{-2n\pi x}}{(2n+1)\pi}$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} g_x = +\infty.$$

Ainsi $F(x)$ n'est pas défini pour $x < 0$. Finalement $D = \mathbb{R}_+$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,t) = e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$, $f(x,0) = 1$; f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions continues.

Pour $a > 0$ et $x \geqslant a$, on a $\forall t \in [0,+\infty[$, $|f(x,t)| \leqslant e^{-at}$ et la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Avec cette hypothèse de domination valable sur tout intervalle $[a,+\infty[$, $a > 0$, l'extension du théorème de continuité sous le signe somme donne que F est continue sur $]0,+\infty[$.

Continuité en 0

F est la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, $u_n : x \mapsto \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ car f l'est sur $\mathbb{R} \times \left[n\pi, (n+1)\pi\right]$ (théorème de continuité sous le signe somme dans le cas où l'intervalle d'intégration est compact).

On vérifie facilement que pour tout $x \geqslant 0$, $\sum u_n(x)$ est une série alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées ; on a donc :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_n(x)| \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}.$$

Ainsi, la suite (R_n) des restes $\left(R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right)$ est telle que $\| R_n \|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n}$, elle converge donc uniformément vers 0 ce qui prouve que $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$.

La continuité de F sur $[0, +\infty[$ en résulte.

3) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin t$.

Pour tout $a > 0$ et tout $x \geqslant a$, on a encore $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}$ donc par extension du théorème de Leibniz, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Pour $x > 0$, $F'(x) = \mathrm{Im}\int_0^{+\infty} -e^{(-x+i)t}\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{x-i}\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{x^2+1}$.

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $F(x) = \lambda - \mathrm{Arctan}\, x$.

F étant continue en 0, il vient $\lambda = F(0)$.

Enfin, $|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ donne $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et donc $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

En conclusion, $F(0) = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Ex. 40

1) Pour tout $a > 0$, $\varphi_a : t \mapsto \frac{\ell n(a^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et telle que $\varphi_a(t) = o_{+\infty}\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)$; elle est donc intégrable sur cet intervalle.

Posons pour tout $a > 0$, $f(a) = \int_0^{+\infty}\varphi_a(t)\mathrm{d}t$.

Calcul de $f(1)$: le changement de variable défini par $t = \tan x$ donne $f(1) = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell n \cos x \mathrm{d}x$.

Donc $f(1) = \pi\, \ell n\, 2$. (Cf. exercice 8.)

2) **Calcul de** $f(a)$: considérons $\Phi :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $(a,t)\mapsto\frac{\ell n\left(a^2+t^2\right)}{1+t^2}$.

Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Pour tout $a \in]0,+\infty[$, $t \mapsto \Phi(a,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout (A,B) tel que $0 < A < B$, on a $\forall (a,t) \in [A,B]\times]0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial a}(a,t)\right| \leqslant \frac{2B}{\left(A^2+t^2\right)\left(1+t^2\right)}$.

Donc, par extension du théorème de Leibniz, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec :

$$f'(a) = 2a\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(a^2+t^2\right)\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t.$$

Pour $a \neq 1$, on obtient $f'(a) = \dfrac{2a}{a^2-1}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{a^2+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{a+1}$.

Ce résultat reste valable en 1 par continuité de f', d'où :

$$\forall a \in]0,+\infty[,\ \ f(a) = f(1) + \int_1^a \frac{\pi}{x+1}\mathrm{d}x = \pi\,\ell n(a+1).$$

Remarque : on peut établir que f est définie et continue en 0 et le calcul précédent fournit :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ell n\, t}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0.$$

Ex. 41

1) Soit $\Phi\ :(x,t) \mapsto \dfrac{\cos xt}{1+t^2}$. Sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $\ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $|\Phi(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $\ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La parité de f permet de limiter ensuite l'étude à $x \in [0,+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, le changement de variable défini par $u = xt$ donne $f(x) = xg(x)$ avec $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2+x^2}\mathrm{d}u$.

Le théorème de Leibniz avec domination locale montre alors que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec :

$$g'(x) = -2xh(x)\ \text{ où }\ h(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{(u^2+x^2)^2}\mathrm{d}u.$$

De même h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $h'(x) = -4x\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{(u^2+x^2)^3}\mathrm{d}u$, et f est donc de classe $\mathcal{C}^2$

avec $f''(x) = -6xh(x) + 8x^3\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{(u^2+x^2)^3}\mathrm{d}u = 2x\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(u^2+x^2)^2} - \frac{4u^2}{(u^2+x^2)^3}\right)\cos u\,\mathrm{d}u$.

Deux intégrations par parties donnent ensuite :

$$f''(x) = 2x\left[\frac{u\cos u}{(u^2+x^2)^2}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty}\frac{2u}{(u^2+x^2)^2}\sin u\,\mathrm{d}u = x\int_0^{+\infty}\frac{2u}{(u^2+x^2)^2}\sin u\,\mathrm{d}u,$$

$$f''(x) = x\left[\frac{-\sin u}{u^2+x^2}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2+x^2}\mathrm{d}u = f(x).$$

Ainsi f est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - y = 0$, et il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ f(x) = \lambda\,\mathrm{ch}\,x + \mu\,\mathrm{sh}\,x$.

La continuité de f en 0 donne alors $\lambda = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Avec $f'(x) = g(x) - 2x^2h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{-1}{u^2+x^2} + \frac{2u^2}{(u^2+x^2)^2}\right)\cos u\,\mathrm{d}u$.

Une intégration par parties donne $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\sin u}{u^2+x^2}\mathrm{d}u$.

En considérant la série de fonction de terme général $v_n\ : x \mapsto \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{u\sin u}{u^2+x^2}\mathrm{d}u$, on montre que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\sin u}{u^2+x^2}\mathrm{d}u$ est continue en 0 (la méthode est analogue à celle utilisée dans l'exercice 39). En conséquence, on a $\mu = \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{2}$.

Finalement, compte tenu de la parité, $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-|x|}$.

Ex. 42

Le changement de variable annoncé donne $W_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1-t^{\frac{2}{n}}}}\mathrm{d}t$, donc :

$$\sqrt{n}W_n = \int_{]0,1[} f_n \text{ avec } f_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{n(t^{-\frac{2}{n}}-1)}}.$$

La suite (f_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-2\,\ell n\, t}}$.

La convexité de $x \mapsto e^x$ donne $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x \geqslant 1+x$, et on en déduit :

$$\forall t \in]0,1[,\ \ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{-2\,\ell n\, t}}.$$

On établit alors que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-2\,\ell n\, t}}$ est intégrable sur $]0,1[$, donc le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,1[} f_n = \int_{]0,1[} f \text{ c'est-à-dire } \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-2\,\ell n\, t}}.$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable défini par $u = \sqrt{-\,\ell n\, t}$, il vient :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-2\,\ell n\, t}} = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Finalement on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ d'où la conclusion.

CHAPITRE

7 Séries de Fourier

A. Fonctions régularisées Polynômes trigonométriques

1. L'espace préhilbertien D

Définition 1

On note D le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé de l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux ✎(1) vérifiant pour tout x réel :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right].$$

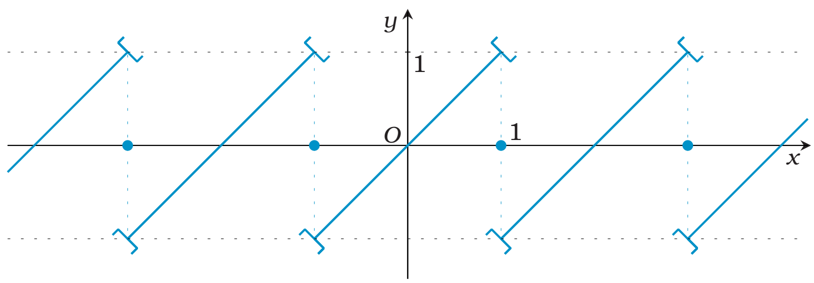
✎(1) Rappelons que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si f est continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, continue par morceaux admet en tout point x de $\mathbb{R}$ une limite à droite notée $f(x+0)$ et une limite à gauche notée $f(x-0)$. Une autre notation usuelle pour ces limites à droite et à gauche est $f(x^+)$, et $f(x^-)$.

☞ D est, par exemple, un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Exemple

On vérifie facilement que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$ et $f(x) = x - 2E\left(\frac{x+1}{2}\right)$ si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, appartient à l'espace D.

Donnons ci-après sa représentation graphique.



Propriété 1

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, alors f est continue par morceaux si et seulement si f est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$.

Dans ce cas, f n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[0, 2\pi]$.

Propriété 2

Toute fonction f de l'espace D est bornée et on a, quel que soit le réel a :

$$\|f\|_\infty^{\mathbb{R}} = \|f\|_\infty^{[0,2\pi]} = \|f\|_\infty^{[a,a+2\pi]}.$$

Définition 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

On lui associe une fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'espace D en posant, pour tout réel x :

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right].$$

Cette fonction $\widetilde{f}$ est appelée la **régularisée** de f. ✎(2)

✎(2) Sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, f et $\widetilde{f}$ ne diffèrent qu'en un nombre fini de points et il en résulte en particulier $\int_a^b f = \int_a^b \widetilde{f}$.

✎ (3) Cf. Algèbre-Géométrie, chapitre 6.

✎ (4) Les fonctions étant 2π-périodiques, on a pour tout a réel : $\int_0^{2\pi} \overline{f}g = \int_a^{a+2\pi} \overline{f}g.$

Définition 3

On définit un **produit scalaire** ✎ (3) sur D par :

$$D^2 \to \mathbb{C}, \quad (f,g) \mapsto \langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(x)\, g(x) \mathrm{d}x. \text{ ✎ (4)}$$

Muni de ce produit scalaire, D est un espace préhilbertien complexe, la norme d'une fonction f de D est notée $\| f \|_D$, elle est définie par :

$$\| f \|_D^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

✎ (5) Les autres conditions requises pour avoir affaire à un produit scalaire se vérifient sans difficulté : $f \mapsto \langle f \mid g \rangle$ est semi-linéaire, $g \mapsto \langle f \mid g \rangle$ est linéaire, $\langle f \mid g \rangle = \overline{\langle g \mid f \rangle}$ pour tout (f,g), $\langle f \mid f \rangle \geqslant 0$ pour tout f.

☞ Cette définition est justifiée par le fait que, si $f \in D$ vérifie $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0$, alors $f = 0$ (fonction nulle de D). ✎ (5)

En effet, il existe une subdivision $(t_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ de $[0, 2\pi]$ telle que la restriction de f à tout intervalle $]t_{k-1}, t_k[$, $1 \leqslant k \leqslant p$, admet un prolongement continu f_k sur $[t_{k-1}, t_k]$, donc tel que : $\quad f_k(t_{k-1}) = f(t_{k-1} + 0) \quad$ et $\quad f_k(t_k) = f(t_k - 0)$.

Comme $\int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f_k(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0$, la fonction continue f_k est nulle sur $[t_{k-1}, t_k]$, donc f est nulle sur $]t_{k-1}, t_k[$ et $f(t_{k-1} + 0) = f(t_k - 0) = 0$, $(1 \leqslant k \leqslant p)$.

Comme f est dans D : $\quad f(t_k) = \frac{1}{2}\left[f(t_k + 0) + f(t_k - 0)\right] = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant p - 1)$.

De plus, f étant 2π-périodique, $t_0 = 0$, $t_p = 2\pi$ donne $f(t_p + 0) = f(t_0 + 0)$ et :

$$f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}\left[f(t_p - 0) + f(t_0 + 0)\right] = 0.$$

Donc f est nulle sur $[0, 2\pi]$, et par 2π-périodicité f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1

La famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit une fonction e_n de D par $\quad e_n(x) = e^{inx}$.

Alors $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de l'espace préhilbertien D.

☞ Chaque fonction $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e_n(x) = e^{inx}$ est continue, 2π-périodique, et on a :

$$\langle e_p \mid e_q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(q-p)x} \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p = q, \\ 0 & \text{si} \quad p \neq q. \end{cases}$$

Théorème 2

Inégalité de Bessel

Pour toute fonction f de D et tout n de $\mathbb{N}$: $\quad \sum_{k=-n}^{n} |\langle e_k \mid f \rangle|^2 \leqslant \| f \|_D^2.$

✎ (6) Cf. Algèbre-Géométrie, chapitre 6.

✎ (7) Noter que $\langle e_k \mid f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x.$

☞ Le sous-espace $E_n = \mathrm{Vect}\,(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ étant de dimension finie, il admet dans D un supplémentaire orthogonal, ✎ (6) et puisque $(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n, la projection orthogonale de f sur E_n est $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k \mid f \rangle e_k$. ✎ (7)

La décomposition $f = S_n(f) + [f - S_n(f)]$ avec $S_n(f) \in E_n$, $[f - S_n(f)] \in E_n^{\perp}$ et le théorème de Pythagore donnent alors : $\quad \| f \|_D^2 = \| S_n(f) \|_D^2 + \| f - S_n(f) \|_D^2$, d'où :

$$\| S_n(f) \|_D^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle e_k \mid f \rangle|^2 \leqslant \| f \|_D^2 \quad \text{avec égalité si et seulement si } f \in E_n.$$

✎(8) Nous verrons plus loin que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle e_n \mid f\rangle^2 = \| f \|_D^2$.

Corollaire 1

Soit $f \in D$.

Les séries de termes généraux $\left|\left\langle e_n \middle| f\right\rangle\right|^2$ et $\left|\left\langle e_{-n} \middle| f\right\rangle\right|^2$ sont convergentes ✎(8) donc en particulier : $\lim_{n\to+\infty} \left\langle e_n \middle| f\right\rangle = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \left\langle e_{-n} \middle| f\right\rangle = 0.$

✎(9) On peut aussi noter que ce résultat se déduit du lemme de Lebesgue, cf. chapitre 4.

Corollaire 2

Soit $f\ :\ [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux. Alors les suites de termes généraux :

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x,\ \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x,\ \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ \int_0^{2\pi} \sin nx\mathrm{d}x \text{ ✎(9)}$$

convergent vers 0.

☞ Il existe $F\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, unique, 2π-périodique et, telle que $\forall x \in [0, 2\pi[,\ \ F(x) = f(x)$.
La régularisée $\widetilde{F}$ de F appartient à D et, sur $[0,2\pi]$, f et $\widetilde{F}$ ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \widetilde{F}(x)e^{inx}\mathrm{d}x.$

Il résulte donc du corollaire 1 que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = 0,$

puis avec $\cos nx = \dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ et $\sin nx = \dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$, on obtient les deux autres limites.

2. Polynômes trigonométriques

Définition 4

La famille $\left(e_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ engendre un sous-espace vectoriel de D dont les éléments sont appelés **polynômes trigonométriques**.

Propriété 3

Soit P une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(1) P est un polynôme trigonométrique.

(2) Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\left(c_k\right)_{-n\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tels que $P\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$.

(3) Il existe $n \in \mathbb{N}$, $\left(a_k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$, $\left(b_k\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que :

$$P\ :\ x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

✎(10) Pour $P=0$, **(1)**, **(2)**, **(3)** sont évidemment vérifiées.

✎(11) C'est la définition d'une combinaison linéaire. Le support I est défini par $I = \{k\in\mathbb{Z} / c_k \neq 0\}$.

☞ Supposons $P \neq 0$. ✎(10) P est un polynôme trigonométrique si et seulement si il existe une famille $\left(c_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ de support I fini telle que $P = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k = \sum_{k\in I} c_k e_k$. ✎(11)

En posant $n = \max\{|k|\ / k \in I\}$, on obtient $I \subset [\![-n, n]\!]$ et $P = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$.

Donc **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**.

La réciproque **(2)** $\Rightarrow$ **(1)** est évidente.

On obtient **(2)** $\Rightarrow$ **(3)** en posant $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = c_k + c_{-k}$ et $b_k = i\left(c_k - c_{-k}\right)$ (donc $b_0 = 0$) ; et enfin on obtient **(3)** $\Rightarrow$ **(2)** en posant :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},\ \text{ et } c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Théorème 3

Pour tout $f \in D$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe P polynôme trigonométrique tel que :

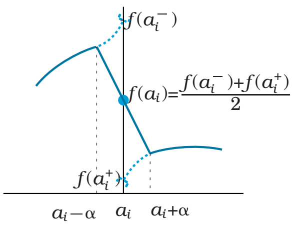
$$\| f - P \|_D \leqslant \varepsilon. \quad ✎^{(12)}$$

✎ (12) On peut énoncer cette propriété en disant que le sous-espace $E = \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans D.

☞ Montrons d'abord que pour tout $f \in D$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\| f - g \|_D \leqslant \varepsilon$.

Si f est continue, il suffit de prendre $g = f$.

Sinon, fixons $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit continue en a. Alors sur le segment $[a, a + 2\pi]$, f admet un nombre fini de points de discontinuité. Soit $a_1, a_2, \dots, a_p$ ces points avec $a < a_1 < a_2 < \dots < a_p < a + 2\pi$, $(p \geqslant 1)$, on obtient ainsi une subdivision σ de $[a, a + 2\pi]$: $\sigma = \big(a, a_1, a_2, \dots, a_p, a + 2\pi\big)$.



Posons $M = \| f \|_\infty^{\mathbb{R}}$, $\alpha = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{4Mp}, \dfrac{|\sigma|}{2}\right)$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, notons φ_i la fonction affine telle que $\varphi_i\big(a_i - \alpha\big) = f\big(a_i - \alpha\big)$, $\varphi_i\big(a_i + \alpha\big) = f\big(a_i + \alpha\big)$.

Puisque $\alpha \leqslant \dfrac{|\sigma|}{2}$, on a $a \leqslant a_1 - \alpha$, $a_p + \alpha \leqslant a + 2\pi$ et $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $a_i + \alpha \leqslant a_{i+1} - \alpha$.

Enfin soit g la fonction 2π-périodique définie par :

$$\begin{aligned}
&g(x) = f(x) \text{ sur } \big[a, a_1 - \alpha\big]\\
&g(x) = \varphi_1(x) \text{ sur } \big[a_1 - \alpha, a_1 + \alpha\big]\\
&g(x) = f(x) \text{ sur } \big[a_1 + \alpha, a_2 - \alpha\big]\\
&g(x) = \varphi_2(x) \text{ sur } \big[a_2 - \alpha, a_2 + \alpha\big]\\
&\dots\\
&g(x) = f(x) \text{ sur } \big[a_{p-1} + \alpha, a_p - \alpha\big]\\
&g(x) = \varphi_p(x) \text{ sur } \big[a_p - \alpha, a_p + \alpha\big]\\
&g(x) = f(x) \text{ sur } \big[a_p + \alpha, a + 2\pi\big].
\end{aligned}$$

Par construction g est continue sur $\mathbb{R}$. ✎ (13)

✎ (13) Une fonction 2π-périodique est entièrement définie par sa restriction à tout intervalle $[a, a+2\pi[$. Comme de plus on a ici $g|_{[a,a+2\pi]}$ continue sur $[a, a+2\pi]$ et $g(a) = g(a+2\pi)$, g est continue sur $\mathbb{R}$. Remarquer comment le choix de a (point où f est continue) facilite la construction de g.

On a alors $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} (f - g) = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_i-\alpha}^{a_i+\alpha} (f - g) \leqslant \sum_{i=1}^{p} 4M\alpha \leqslant \varepsilon.$

Le résultat précédent étant acquis, à $f \in D$, on associe g continue, 2π-périodique telle que $\| f - g \|_D \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et, d'après le deuxième théorème de Weierstrass, il existe P polynôme trigonométrique tel que $\| g - P \|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ ce qui implique $\| g - P \|_D \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, et finalement par inégalité triangulaire, il vient $\| f - P \|_D \leqslant \varepsilon$.

Exemple 1 Que peut-on dire des nombres réels ou complexes $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ tels que la fonction $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ soit constante ?

Dans l'espace préhilbertien D, $\big(e_n\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale, elle est donc libre. ✎ (14)

✎ (14) De ce fait, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de l'espace E des polynômes trigonométriques.

La fonction Q est un polynôme trigonométrique qui s'écrit :

$$Q(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \big(a_k - ib_k\big) e^{ikx} + \big(a_k + ib_k\big) e^{-ikx}.$$

Si Q est constante, on a $Q = \lambda e_0$ et donc $\lambda e_0 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(a_k - ib_k\big) e_k + \big(a_k + ib_k\big) e_{-k}$

d'où on tire $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k - ib_k = a_k + ib_k = 0$ et $\lambda = 0$.

Remarque : on vient en fait de montrer que la famille constituée par les fonctions $x \mapsto \cos kx$, $k \in \mathbb{N}$ et $x \mapsto \sin kx$, $k \in \mathbb{N}^*$, est libre. Comme de plus elle est génératrice de l'espace E des polynômes trigonométriques (d'après la propriété 3), elle en constitue une seconde base.

Conclusion : $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0$ et $Q = 0$.

B. Coefficients et séries de Fourier

Définition 5

Coefficients de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

On appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les nombres complexes :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

On appelle coefficients de Fourier trigonométriques les nombres complexes :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad , \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Remarques

- Si $\widetilde{f}$ est la régularisée de f (cf. définition 2), f et $\widetilde{f}$ ont les mêmes coefficients de Fourier. $c_n(f) = c_n(\widetilde{f}) = \left\langle e_n \,\middle|\, \widetilde{f}\right\rangle$ (avec les notations du A.).
- L'application $c_n \ : f \mapsto c_n(f)$ est linéaire, c'est-à-dire que pour f et g 2π-périodiques continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, on a $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$.

Définition 6

Série trigonométrique

On appelle série trigonométrique associée à une famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$, la série de fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dont le terme général u_n est défini par $u_0 = c_0$ (fonction constante) et :

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Définition 7

Série de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique associée à la famille $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f.

Elle est souvent notée $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$. ✎(15)

✎(15) Notation usuelle mais dangereuse car elle ne rend pas compte du terme général de la série qui est $x \mapsto c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}$ et non pas $x \mapsto c_n(f)e^{inx}$.

Remarque

Les séries de Fourier de f et de sa régularisée $\widetilde{f}$ sont identiques.

On considère une fonction $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

Propriété 4

Les coefficients de Fourier de f sont liés pour tout $n \in \mathbb{N}$ par les relations :

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad , \quad b_n(f) = i\big(c_n(f) - c_{-n}(f)\big)$$

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad , \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2i}$$

En particulier $a_0(f) = 2c_0(f)$ et $b_0(f) = 0$.

Propriété 5

Pour tout réel α, $\displaystyle c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$. ✎(16)

En particulier, $\displaystyle a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$

✎(16) $x \mapsto f(x)e^{-inx}$ étant 2π-périodique, l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$ est indépendante du réel α.

Propriété 6

Si f est une fonction réelle, alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels $(n \in \mathbb{N})$.

Si f est paire : $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad b_n(f) = 0.$

Si f est impaire : $a_n(f) = 0, \quad b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$ ✎(17)

✎(17) C'est un corollaire de la propriété précédente en notant que $x \mapsto f(x)\cos x$ est de même parité que f et que $x \mapsto f(x)\sin x$ est de parité contraire.

Propriété 7

Étant donné a réel, notons f_a l'application $x \mapsto f(a+x)$.
La fonction f_a est 2π-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$c_n\left(f_a\right) = e^{ina}c_n(f).$$

☞ Il suffit de remarquer que le changement de variable, défini par $t = a + x$, donne :

$$2\,\pi\, c_n\left(f_a\right) = \int_0^{2\pi} e^{-inx}f(a+x)\mathrm{d}x = e^{ina}\int_a^{a+2\pi} e^{-int}f(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 8

Le terme général de la série de Fourier de f s'écrit aussi :

$$u_n\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = a_n\cos nx + b_n \sin nx. \text{ ✎(18)}$$

En particulier $\quad u_0 = c_0 = \dfrac{a_0}{2}.$

✎(18) Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la fonction, les coefficients de Fourier sont plus simplement notés c_n, c_{-n}, a_n, b_n.

Propriété 9

Les quatre suites complexes $\left(c_n\right)_{\mathbb{N}}, \left(c_{-n}\right)_{\mathbb{N}}, \left(a_n\right)_{\mathbb{N}}, \left(b_n\right)_{\mathbb{N}}$ convergent vers 0. ✎(19)

✎(19) Voir le corollaire 2 du théorème 2.

Propriété 10

a) Si $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$: $\qquad c_n(f) = \dfrac{1}{in}c_n\left(f'\right).$

b) Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux $(p \in \mathbb{N}^*)$, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$: $\qquad c_n(f) = \dfrac{1}{(in)^p}c_n\left(f^{(p)}\right).$

☞ a) Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, il existe une subdivision $\left(a_k\right)_{0\leqslant k\leqslant q}$ de $\left[0, 2\pi\right]$ telle que chaque restriction $f_k = f_{|[a_k\,,a_{k+1}]}$ soit continue sur le segment $\left[a_k\,, a_{k+1}\right]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]a_k\,, a_{k+1}\right[$ et telle que f_k' admette une limite à droite en a_k et une limite à gauche en a_{k+1} :

$$f_k'\left(a_k+0\right) = f'\left(a_k+0\right)\ ,\ f_k'\left(a_{k+1}-0\right) = f'\left(a_{k+1}-0\right).$$

Dans ces conditions, on sait que f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[a_k\,, a_{k+1}\right]$ avec :

$$f_k'\left(a_k\right) = f'\left(a_k+0\right)\ ,\ f_k'\left(a_{k+1}\right) = f'\left(a_{k+1}-0\right).$$

On a alors :

$$2\,\pi\, c_n\left(f'\right) = \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{q-1}\int_{a\ k}^{a_{k+1}} f_k'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x. \text{ ✎(20)}$$

✎(20) Toutes les fonctions continues par morceaux sur $[0,2\pi]$ et coïncidant sur $[0,2\pi]\setminus\{a_0,\cdots,a_q\}$ avec $x \mapsto f'(x)e^{-inx}$ ont la même intégrale que l'on note $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$ (cf. chapitre 4, corollaire 2 de la propriété 24).

Avec f_k de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[a_k\,, a_{k+1}\right]$, on dispose de la formule d'intégration par parties qui donne :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = f_k\left(a_{k+1}\right)e^{-ina_{k+1}} - f_k\left(a_k\right)e^{-ina_k} + in\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

$$= f\left(a_{k+1}\right)e^{-ina_{k+1}} - f\left(a_k\right)e^{-ina_k} + in\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

✎(21) On a reconnu une somme télescopique.

✎(22) Le cas $p=1$ vient d'être traité en a).

✎(23) On aurait bien sûr pu justifier cette formule avec le a) mais il est intéressant de noter que lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ une seule intégration par parties sur $[0,2\pi]$ donne $c_n(f')=inc_n(f)$.

Avec $a_0=0$, $a_q=2\pi$ et $f(0)=f(2\pi)$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{q-1} f\left(a_{k+1}\right)e^{-ina_{k+1}} - f\left(a_k\right)e^{-ina_k} = f\left(a_q\right)e^{-ina_q} - f\left(a_0\right)e^{-ina_0} \quad ✎(21)$$

$$= f(2\pi) - f(0) = 0$$

donc $2\pi\, c_n\left(f'\right) = in\sum_{k=0}^{q-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = in\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$ c'est-à-dire :

$$2\pi\, c_n\left(f'\right) = 2\pi\, inc_n(f) \text{ ou encore } c_n\left(f'\right) = inc_n(f).$$

b) Pour f de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux, avec $p \geqslant 2$ ✎(22), la fonction $g=f^{(p-1)}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc, d'après le a), on a :

$$c_n\left(g'\right) = inc_n(g) \text{ donc } c_n\left(f^{(p)}\right) = inc_n\left(f^{(p-1)}\right). \qquad \textbf{(1)}$$

Or, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $f^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, 2\pi\right]$ et une intégration par parties donne :

$$c_n\left(f^{(k)}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(f^{(k-1)}(2\pi) - f^{(k-1)}(0)\right) + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k-1)}(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

soit $$c_n\left(f^{(k)}\right) = inc_n\left(f^{(k-1)}\right). \quad ✎(23) \qquad \textbf{(2)}$$

De **(2)**, on déduit :

$$c_n\left(f^{(p-1)}\right) = (in)^{p-1}c_n(f),$$

puis, avec **(1)** :

$$c_n\left(f^{(p)}\right) = (in)^{p}c_n(f).$$

Corollaire 1

Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n\left(f'\right) = nb_n(f), \quad b_n\left(f'\right) = -na_n(f).$$

Corollaire 2

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le terme général v_n de la série de Fourier de f' :

$$v_n : x \mapsto c_n\left(f'\right)e^{inx} + c_{-n}\left(f'\right)e^{-inx} = a_n\left(f'\right)\cos nx + b_n\left(f'\right)\sin nx$$

est la dérivée de u_n, terme général de la série de Fourier de f :

$$u_n : x \mapsto c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} = a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx.$$

Corollaire 3

Si f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux, on a :

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \text{ lorsque } |n| \to \infty.$$

Propriété 11

Soit A l'ensemble de convergence simple de la série de Fourier de f.

Sa fonction somme est définie par :

$$S : A \to \mathbb{C}, x \mapsto c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} \text{ ou } S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx.$$

On note aussi par convention $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$.

L'ensemble A est stable par toute translation $x \mapsto x + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, et S est 2π-périodique.

Théorème 4

On considère une série trigonométrique de terme général :

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) La série de terme général u_n est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(2) Les séries de termes généraux c_n et c_{-n} sont absolument convergentes.

(3) Les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes.

☞

(1) $\Rightarrow$ **(2)** car $c_n = \langle e_n | u_n |, \rangle$ donc $|c_n| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)|$.

(2) $\Rightarrow$ **(3)** car $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$,

donc $|a_n| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$ et $|b_n| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$.

(3) $\Rightarrow$ **(1)** car $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)| \leqslant |a_n| + |b_n|$.

Théorème 5

Si la série trigonométrique de terme général $u_n : x \mapsto c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors :

a) sa somme f est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$,

b) la famille des coefficients de Fourier exponentiels de f est $(c_n)_{\mathbb{Z}}$. ✎[24]

✎[24] La série considérée est donc identique à la série de Fourier de sa somme.

☞ a) C'est une application du théorème de continuité de la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues.

b) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la série de fonctions de terme général : $v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto u_n(x)e^{-ipx}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ car $\left| \sum_{n=N}^{+\infty} v_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right|$, d'où on déduit que la suite de ses restes d'ordre N converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$, puisqu'il en est ainsi par hypothèse pour la série de terme général u_n.

Le théorème d'intégration terme à terme ✎[25] s'applique :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ipx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)e^{-ipx} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_p \,|\, u_n \rangle = c_p.$$

✎[25] Cf. chapitre 3, théorème 13.

Exemple 2 Soit $f \in D$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n} c_n(f)$ est absolument convergente. Que peut-on dire des séries analogues $\sum \frac{1}{n} c_{-n}(f)$, $\sum \frac{1}{n} a_n(f)$, et $\sum \frac{1}{n} b_n(f)$?

Existe-t-il $f \in D$ telle que $a_n(f) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell n\, n}$?

L'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$ donne $\left| \frac{2}{n} c_n(f) \right| \leqslant \frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2$. La conclusion résulte donc de la convergence des séries de termes généraux $\frac{1}{n^2}$ et $|c_n(f)|^2$ (utiliser $c_n(f) = \langle e_n \,|\, f \rangle$ et le corollaire 1 du théorème 2).

De même, les séries $\sum \frac{1}{n} c_{-n}(f)$, $\sum \frac{1}{n} a_n(f)$ et $\sum \frac{1}{n} b_n(f)$ sont absolument convergentes.

L'équivalence $a_n(f) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell n\, n}$ donne que $\sum \frac{1}{n} a_n(f)$ diverge. ✎[26]

C'est contradictoire, il n'existe donc pas de telle fonction.

✎[26] Voir l'étude des séries de Bertrand dans le chapitre 2.

Exemple 3 Calcul des sommes de Fourier : le noyau de Dirichlet.

Soit $f \in D$, $(a_k)_{\mathbb{N}}$, $(b_k)_{\mathbb{N}}$ ses coefficients de Fourier.

a) Montrer que, pour tout x réel et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} [f(x+u) + f(x-u)] \mathrm{d}u$$

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \mathrm{d}u.$

a) À partir des expressions $\displaystyle a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \cos kt \mathrm{d}t$ et analogues pour b_k la somme partielle de la série de Fourier de f ; $\displaystyle S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ s'écrit :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \quad f(t) \mathrm{d}t, \right.$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku \right) f(x+u) \mathrm{d}u \quad \text{(avec } t = x+u\text{)}.$$

En découpant $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_0^{\pi}$ et en changeant u en $-u$ dans $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}$, on obtient :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku \right) \left[f(x+u) + f(x-u) \right] \mathrm{d}u.$$

Avec $\displaystyle 2 \sin \frac{u}{2} \cos ku = \sin(2k+1)\frac{u}{2} - \sin(2k-1)\frac{u}{2}$ la somme s'écrit :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad \text{pour tout } u \in]0, \pi], \text{ ✎(27)}$$

✎(27) L'application $u \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\pi \sin \frac{u}{2}}$ est appelée **noyau de Dirichlet**.

donc $\displaystyle S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} [f(x+u) + f(x-u)] \mathrm{d}u.$

b) Le choix de $f = 1$ donne $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \mathrm{d}u = \pi,$ ✎(28)

car, dans ce cas, tous les coefficients sont nuls excepté $a_0 = 2$.

✎(28) Ce résultat est connu sous le nom de **lemme de Dirichlet**.

C. Convergence des séries de Fourier

Comme dans le cas des séries entières, étant donnée une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, on se pose les questions suivantes :

1) quel est l'ensemble de définition de la fonction somme S de la série de Fourier de f ?

2) sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f coïncide-t-elle avec S ?

Définition 8

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, continue par morceaux est **développable en série de Fourier** si f est somme de sa série de Fourier.

1. Convergence simple

Théorème 6

Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos x + b_n \sin x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

En particulier en tout point où f est continue la somme de la série de Fourier de f est $f(x)$.

✎ (29) La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.

☞ ✎ (29) Ici a_n , b_n , c_n , c_{-n} sont les coefficients de Fourier de f et :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}.$$

a) Soit $S_n(x)$ la somme partielle d'ordre n au point x :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

D'après le calcul des sommes de Fourier effectué dans l'exemple 3, on a :

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\mathrm{d}u \ , \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u = 1.$$

Par différence, on obtient :

$$S_n(x) - \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left[f(x+u)-f(x+0)-f(x-u)-f(x-0)\right]\mathrm{d}u.$$

f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux donne l'existence des limites :

$$\alpha = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{1}{u}\left[f(x+u)-f(x+0)\right] \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{1}{u}\left[f(x-u)-f(x-0)\right].$$

La fonction $g : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $g(x) = \dfrac{f(x+u)-f(x+0)+f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}$ si $u \neq 0$

et $g(0) = \alpha + \beta$, est alors continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

Le lemme de Lebesgue (30) appliqué à :

$$S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(u)\sin\left[(2n+1)\frac{u}{2}\right]\mathrm{d}u$$

s'écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=0$. C'est le résultat souhaité.

(30) Étant donnés a, b réels ($a<b$) et $f\in\mathcal{M}([a,b],\mathbb{C})$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

Pour une démonstration, voir le chapitre 4.

2. Convergence normale

Théorème 7

Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Alors la série de Fourier de f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction f.

Le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que, dans ce cas, f est la somme de sa série de Fourier. (31)

Pour f continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, il existe une unique fonction de D vérifiant $h(x)=f'(x)$ en tout point où f est dérivable et :

$$h(x)=\frac{1}{2}\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{1}{u}\left[f(x+u)-f(x)+f(x-u)-f(x)\right]\ \text{sinon.}$$

D'après la propriété 10 on a alors : $c_n(f)=\dfrac{1}{in}c_n(h)$, ce qui est le terme général d'une série absolument convergente, (voir l'exemple 2).

La convergence normale de la série de Fourier en résulte d'après le théorème 4.

(31) On peut pouver ce résultat indépendamment du théorème de Dirichlet. En effet, ayant montré la convergence normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$, en appelant S la fonction somme, le théorème 5 donne que, quel que soit $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f)=c_n(S)$ donc

$$\int_0^{2\pi}(f(x)-S(x))e^{-inx}\mathrm{d}x=0,$$

et par application du deuxième théorème de Weierstrass il en résulte $f=S$ (cf. chapitre 3, exemple 5).

3. Convergence quadratique. Formule de Parseval

Théorème 8

Pour tout $f\in D$, la suite $S_n(f)$ des sommes partielles de sa série de Fourier, converge vers f dans $\left(D,\|\bullet\|_D\right)$. C'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-S_n(f)\|_D=0$.

Soit f un élément de D. Compte tenu de ce que $\left(e_k\right)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de $E_n=\operatorname{Vect}\left(e_k\right)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ et que $c_k(f)=\left\langle e_k\,|\,f\right\rangle$ pour tout $k\in[\![-n,n]\!]$:

$$S_n(f)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)e_k$$

est le projeté orthogonal de f sur E_n. (32)

D'après le théorème 3, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $P\in E$, espace des polynômes trigonométriques, tel que $\|f-P\|_D\leqslant\varepsilon$.

P étant élément de E, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $P\in E_{n_0}$ et alors, pour tout $n\geqslant n_0$, on a encore $P\in E_n$. (33)

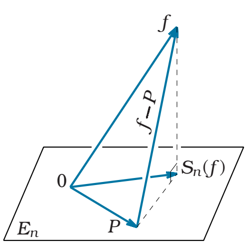
Puisque $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur E_n, on sait que :

$$\|f-S_n(f)\|_D=\min_{u\in E_n}\|f-u\|_D.$$

En conséquence, pour $n\geqslant n_0$, on obtient $\|f-S_n(f)\|_D\leqslant\|f-P\|_D\leqslant\varepsilon$, ce qui assure la conclusion.

(32) Cf. Algèbre-Géométrie, chapitre 7.

(33) Remarquer que quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $E_n\subset E_{n+1}$ et donc $E=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n$.



Remarque

On dit que la série de Fourier de f converge vers f en **moyenne quadratique** ou pour la norme de la moyenne quadratique.

Théorème 9

Égalité de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

Alors les séries de termes généraux $|a_n|^2$, $|b_n|^2$, $|c_n|^2$, $|c_{-n}|^2$ sont convergentes (34) et :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

(34) On le sait depuis le corollaire **1** du théorème **2** : inégalité de Bessel.

On conserve les notations du théorème précédent. Puisque $f - S_n(f)$ est orthogonal à E_n, le théorème de Pythagore donne :

$$\| f \|_D^2 = \| S_n(f) \|_D^2 + \| f - S_n(f) \|_D^2,$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \| f - S_n(f) \|_D = 0$ donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \| S_n(f) \|_D^2 = \| f \|_D^2$.

En remarquant que $\displaystyle\| S_n(f) \|_D^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$, on en déduit :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \| f \|_D^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

La deuxième formule résulte alors de $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i\big(c_n - c_{-n}\big)$, relations qui donnent :

$$|a_n|^2 = a_n\overline{a_n} = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 + c_n\overline{c_{-n}} + c_{-n}\overline{c_n}$$

$$\text{et} \quad |b_n|^2 = b_n\overline{b_n} = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 - c_n\overline{c_{-n}} - c_{-n}\overline{c_n}.$$

Corollaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Si la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$, f est somme de cette série.

Soit g la somme de la série de Fourier de f :

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx},$$

d'après le théorème 5 on a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = c_n(f)$, donc $c_n(g - f) = 0$.

Le théorème de Parseval donne alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} |g - f|^2 = 0$ donc, puisque $|g - f|^2$ est continue positive, il vient $\forall x \in [0, 2\pi]$, $g(x) = f(x)$, puis par périodicité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

4. Développement des fonctions T-périodiques

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique et continue par morceaux, la fonction $g : x \mapsto f\left(\dfrac{Tx}{2\pi}\right)$ est 2π-périodique et continue par morceaux.

Les coefficients de Fourier de f sont par définition ceux de g :

$$c_n(f) = c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(u)e^{-\frac{2i\pi}{T}nu}\mathrm{d}u,$$

$$a_n(f) = a_n(g) = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(u)\cos\frac{2\,\pi\,nu}{T}\mathrm{d}u,$$

$$b_n(f) = b_n(g) = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(u)\sin\frac{2\,\pi\,nu}{T}\mathrm{d}u.$$

Dans les conditions du théorème de Dirichlet, on obtient, pour tout x réel :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{\frac{2i\pi nx}{T}} \\ &= \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos\frac{2\,\pi\,nx}{T}+b_n(f)\sin\frac{2\,\pi\,nx}{T}.\end{aligned}$$

Exemple 4 Soit $f \in D$ définie par $\quad f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\quad$ sur $]0,2\,\pi\,[$.

a) Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

b) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

a) Montrons que f est impaire.

Si $x\in\mathbb{R}\setminus 2\,\pi\,\mathbb{Z}$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ et $y\in]0,2\,\pi\,[$ tels que $x=2k\,\pi+y$ donc :

$$f(x)=f(y)=\frac{\pi-y}{2}.$$

On a de plus, $-x=-2(k+1)\,\pi+2\,\pi-y\quad$ avec $\quad 2\,\pi-y\in]0,2\,\pi\,[$, donc :

$$f(-x)=f(2\,\pi-y)=-\frac{\pi-y}{2}.$$

Ainsi $\quad f(-x)=-f(x)\quad$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus 2\,\pi\,\mathbb{Z}$.

En conséquence, on a $f(0^+)=-f(0^-)$ donc $f(0)=\dfrac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=0$ et par périodicité $f(x)=0$ pour $x\in 2\,\pi\,\mathbb{Z}$.

- Comme f est impaire : $\quad a_n(f)=0\ \ (n\in\mathbb{N})\quad$ et $\quad b_n(f)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x.$

Une intégration par parties donne pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$b_n(f)=-\frac{1}{\pi}\left[(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\ \ ;\ \ b_n(f)=\frac{1}{n}.$$

La série de Fourier de f a donc pour terme général $\quad u_n\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\dfrac{\sin nx}{n}.$

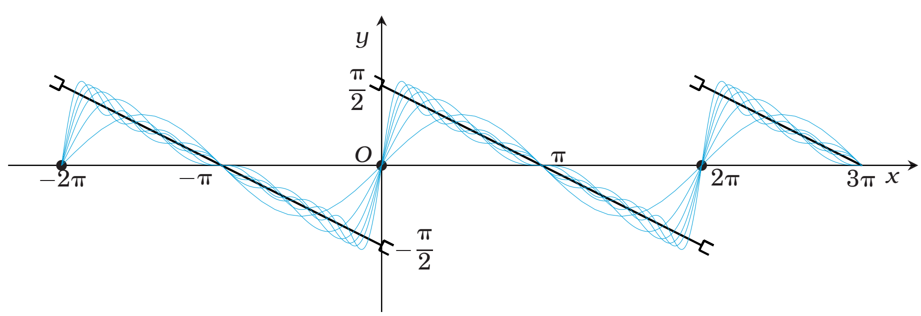
✎[35] pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\big(f(x^+)+f(x^-)\big)$.

b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et régularisée ✎[35] donc, d'après le théorème de Dirichlet elle est somme de sa série de Fourier.

En particulier on obtient :

$$\forall x\in]0,2\,\pi\,[,\qquad \frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Pour conclure donnons la représentation graphique sur $[-2\pi,3\pi]$ de f ainsi que des premières sommes partielles de sa série de Fourier.



Exemple 5 Soit $f \in D$ définie par $\quad f(x) = x(2\,\pi - x) \quad$ pour tout $x \in]0, 2\,\pi\,[$.

Développer f en série de Fourier. En déduire les sommes des séries :

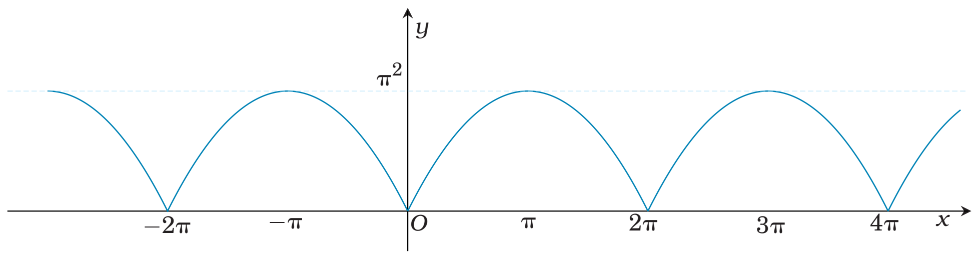
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\ ,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}\ ,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\ ,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\ ,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\,.$$

Une fonction de D est caractérisée par sa restriction à $]0, 2\,\pi\,[$.

Ici $\quad f(0) = f(0^+) = f(2\pi^-) = f(0^-) = 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

La restriction de f à $[0, 2\pi]$ est $\mathcal{C}^\infty$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.

La courbe représentative de f est formée d'arcs de paraboles :



- Calculons les coefficients trigonométriques de f.

f est paire, donc $b_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ $\quad$ et $\quad a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(2\,\pi - x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\pi x^2 - \frac{x^3}{3}\right. \qquad a_0 = \frac{4\pi^2}{3}\,,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(2\,\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\Big[x(2\,\pi - x)\sin nx\Big]_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi}\Big[(\pi - x)\cos nx\Big]_0^\pi + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx\mathrm{d}x \qquad a_n = -\frac{4}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

- Développement en série de Fourier de f

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet prouve que f est la somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\,.$$

La convergence normale sur $\mathbb{R}$ est évidente.

- Calcul des sommes de séries

Exploitons l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \qquad \text{donne} \qquad \frac{8\pi^4}{15} = \frac{4\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\,.$$

d'où :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Pour $p > 1$, nous utiliserons les égalités :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^p} + \frac{1}{(2k)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{2^p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$

pour obtenir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^p} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

Ainsi, avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

La somme de la série de Fourier de f au point $x = 0$ donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De même, $x = \pi$ donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Exemple 6 Déduire de l'exemple précédent les sommes de séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

La convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de Fourier de f permet, par intégration terme à terme, de définir une fonction g de D par :

$$g \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x \left(f(t) - \frac{2\pi^2}{3}\right) \mathrm{d}t = -4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

g est somme d'une série trigonométrique normalement convergente sur $\mathbb{R}$ qui fournit directement les coefficients de Fourier trigonométriques de g :

$$a_n(g) = 0\,,\ b_n(g) = -\frac{4}{n^3}\,, \text{ (cf. théorème 5).}$$

Le calcul donne l'expression de g sur $[0, 2\pi]$: $\quad g(x) = -\dfrac{1}{3}\left(x^3 - 3\,\pi\,x^2 + 2\,\pi^2\,x\right)$.

Le choix de $x = \dfrac{\pi}{2}$ donne $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi^3}{8} = -4 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} = -4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

d'où la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

L'égalité de Parseval appliquée à g s'écrit : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{1}^{+\infty} b_n^2(g)$.

Donc, avec $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{9}(x^3 - 3\,\pi\,x^2 + 2\,\pi^2\,x)^2\mathrm{d}x = \frac{16\pi^6}{9}\int_0^1 (2u^3 - 3u^2 + u)^2\mathrm{d}u$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{2\pi^6}{9}\int_0^1 (4u^6 - 12u^5 + 13u^4 - 6u^3 + u^2)\mathrm{d}u = \frac{2\pi^6}{9} \cdot \frac{1}{210}$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

L'essentiel

I. Développement en série de Fourier

✔ **Si l'on veut** prouver qu'une série trigonométrique est identique à la série de Fourier de sa somme,

- **on peut** penser à contrôler qu'elle est uniformément convergente pour conclure avec le théorème 5.

✔ **Si l'on veut** développer une fonction f en série de Fourier,

- **on peut** observer qu'un développement en série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $\rho > 1$ donne, lorsqu'on remplace z par $e^{i\theta}$, une série trigonométrique normalement convergente.
  Il faudra ensuite prouver, grâce à la remarque précédente, que cette série est bien la série de Fourier de f.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 1.

II. Application aux équations différentielles

✔ **Si l'on veut** trouver des solutions périodiques d'une équation différentielle (E),

- **on peut** penser à rechercher les solutions développables en séries de Fourier.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 2.

Méthodes

Mise en œuvre

I. Développement en série de Fourier

Ex. 1

Trouver le développement en série de Fourier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a}$ $(a > 0)$.

Indications

Écrire $\dfrac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a} = \dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\dfrac{e^{a}}{e^{ix}+e^{a}} - \dfrac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}}\right)$ et utiliser des développements en série entière pour obtenir f comme somme d'une série trigonométrique.
Il reste à prouver que c'est bien la série de Fourier de f.

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \dfrac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a} = \dfrac{2e^{ix}}{1 + 2e^{ix}\operatorname{ch} a + e^{2ix}}$.

Sachant que $\quad 1 + 2e^{ix}\operatorname{ch} a + e^{2ix} = \left(e^{ix}+e^{a}\right)\left(e^{ix}+e^{-a}\right)$,

on obtient : $\dfrac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a} = \dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\dfrac{e^{a}}{e^{ix}+e^{a}} - \dfrac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}}\right)$.

Pour tout x réel, on a : $\dfrac{e^{a}}{e^{ix}+e^{a}} = \dfrac{1}{1+e^{ix}\cdot e^{-a}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{nix}\cdot e^{-na}$.

De même $\quad \dfrac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}} = \dfrac{e^{-a}\cdot e^{-ix}}{1+e^{-a}\cdot e^{-ix}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} e^{-nix}\cdot e^{-na}$.

On en déduit

$$\frac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a} = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-na}\left(e^{nix}+e^{-nix}\right)\right.$$

$$\frac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a} = \frac{1}{\operatorname{sh} a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n e^{-na}}{\operatorname{sh} a}\cos nx.$$

Il reste à prouver que l'on a bien obtenu la série de Fourier de f.
Puisque f est paire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_p(f) = 0$ et :

$$a_p(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos px\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi \operatorname{sh} a}\int_0^{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-na}\cos nx\right)\cos px\mathrm{d}x.$$

Comme la série de terme général $u_n : x \mapsto (-1)^n e^{-na}\cos nx\cos px$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, l'intégration précédente s'effectue terme à terme et on obtient :

$a_p(f) =$

$$\frac{2}{\pi \operatorname{sh} a}\int_0^{\pi}\cos px\mathrm{d}x + \frac{4}{\pi \operatorname{sh} a}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-na}\int_0^{\pi}\cos nx\cos px\mathrm{d}x$$

donc $\quad a_p(f) = \dfrac{2}{\operatorname{sh} a}(-1)^p e^{-pa} \quad$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Commentaires

En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle : $\dfrac{2X}{1+2X\operatorname{ch} a+X^2}$.

Somme d'une série géométrique dont le module de la raison est : $\left|e^{ix-a}\right| = e^{-a} < 1$.

$\| u_n \|_\infty = e^{-na}$.

Ainsi, on a bien obtenu le développement de f en série de Fourier.

Remarquer que cette méthode donne les intégrales $\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{\cos x+\operatorname{ch} a}\mathrm{d}x= \frac{\pi}{\operatorname{sh} a}(-1)^n e^{-na}$ en conséquence du développement.

II. Application aux équations différentielles

Ex. 2

Montrer que $y'' + y\, e^{it} = 0$ (E) admet des solutions de période 2π. Préciser l'ensemble de ces solutions.

Indications

Toute solution 2π-périodique de (E) est développable en série de Fourier.

Solution

On sait que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. En conséquence, si f est une solution 2π-périodique de (E), elle est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ donc développable en série de Fourier ainsi que toutes ses dérivées, et de plus tous ces développements sont normalement convergents.
Dans cette situation, le développement de f'' se déduit de celui de f par dérivation terme à terme, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \ f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int},\ \ f''(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 c_n(f)e^{int}.$$

Alors f solution de (E) s'écrit :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \ \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(c_{n-1}(f)-n^2c_n(f)\right)e^{int}=0.$$

Ce dernier développement est encore normalement convergent donc ses coefficients sont les coefficients de Fourier de sa somme. Celle-ci étant la fonction nulle, on obtient : $\forall n\in\mathbb{Z},\ \ c_{n-1}(f)-n^2c_n(f)=0.$

On en déduit pour tout $n\geqslant 0$, $c_n(f)=\dfrac{c_0(f)}{(n!)^2}$, et pour tout $n<0$, $c_n(f)=0$, donc $f(t)=\lambda\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{int}}{(n!)^2}$ où on a posé $\lambda=c_0(f)$.

Réciproquement, posons $f_0\ :x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{int}}{(n!)^2}$.

Il s'agit là d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$, de terme général :

$$u_n\ :t\mapsto \frac{e^{int}}{(n!)^2}.$$

On a alors

$$\|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}}=\frac{1}{(n!)^2},\ \ \|u_n'\|_{\infty}^{\mathbb{R}}=\frac{1}{n!(n-1)!}\ \text{et}\ \|u_n''\|_{\infty}^{\mathbb{R}}=\frac{1}{\left((n-1)!\right)^2},$$

donc ces trois séries convergent normalement sur $\mathbb{R}$, ce qui assure que f_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $\forall t\in\mathbb{R},\ f_0''(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{e^{int}}{\left((n-1)!\right)^2}$ donc :

$$f_0''(t)=-f_0(t)e^{it}.$$

Ainsi f_0 est effectivement solution 2π-périodique de (E) et par linéarité, il en est de même pour toute fonction λf_0.
L'ensemble des solutions 2π-périodiques de (E) est la droite vectorielle dirigée par f_0.

Commentaires

Conférer à ce propos le chapitre 8 dans lequel on verra entre autre que puisque $t\mapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$, toute solution maximale de (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
D'autre part la relation $f''(t)=-f(t)e^{it}$ montre que si une solution f de (E) est de classe $\mathcal{C}^n$ alors elle est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, et on établit ainsi par récurrence la classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

C'est encore le théorème 5.

On a ainsi trouvé par conditions nécessaires les éventuelles solutions 2π-périodiques de (E).

La périodicité est évidente.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

On donne a réel non nul et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par $\forall x \in [0, 2\pi[, \ f(x) = e^{ax}$.

1) Étudier le développement de f en série de Fourier.

2) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$.

3) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex. 2

1) Développer en série de Fourier f et g :

$f(x) = e^{\cos x}\cos(\sin x)$, $g(x) = e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

2) En déduire $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(nt - \sin t)\mathrm{d}t$ et

$$J_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(nt + \sin t)\mathrm{d}t.$$

Ex. 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et 2π-périodique.

Montrer que si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls alors f est la fonction nulle.

Ex. 4

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 2π-périodique, telle que :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 5

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodiques pour lesquelles il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M\lambda^n.$$

Ex. 6

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \lambda\,|x - y|^\alpha.$$

Montrer que $c_n(f) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{|n|^\alpha}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Ex. 7

1) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f, dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est définie par $f(x) = x^4$.

2) En déduire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^8}$.

Ex. 8

Donner le développement en série de Fourier de la fonction $f : \theta \mapsto \dfrac{1}{5 + 4\cos\theta}$,

et en déduire la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{5 + 4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

Ex. 9

On donne l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ y'' + y = |\sin x|.$$

Trouver la solution qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

(On pourra utiliser le développement en série de Fourier de $x \mapsto |\sin x|$.)

Ex. 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, 2π-périodique.

1) Montrer que l'équation $(E) \ : y' - y = f$ a une unique solution bornée ϕ. La fonction ϕ est-elle périodique ?

2) La fonction ϕ est-elle développable en série de Fourier ? Déterminer les coefficients de Fourier de ϕ en fonction de ceux de f.

3) Montrer que si f est lipschitzienne, la famille $\left(n^2 c_n(\phi)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

Ex. 11

$\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Soit D l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π- périodiques telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$.

Soit $f \in D$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ la série de Fourier de f.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \int_0^x e^{int}\,\mathrm{d}t.$$

2) Établir $\forall x \in]0,\pi] : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos nx}{n^2} = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

3) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex. 12

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 2π-périodique.

1) Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(x+h)-f(x-h)\big)^2\mathrm{d}x$ en fonction des coefficients de Fourier $c_n(f)$ de f.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose :

$W(x) = \sup\left\{ |f(t+y)-f(t)| \,/\, t \in \mathbb{R}, |y| \leqslant x \right\}$.

Montrer que : $\displaystyle\sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2}W^2\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$.

3) On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > \frac{1}{2}$ tels que $\forall x \geqslant 0$, $W(x) \leqslant \lambda x^{\alpha}$. Montrer que f est somme de sa série de Fourier.

Avec éléments de solution

Ex. 13

Pour x réel, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^3 nx}{n!}$.

1) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) Expliciter S.

3) Développer S en série de Fourier.

Ex. 14

Soit $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leqslant 1$. Développer en série de Fourier la fonction : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{a\sin x}{1-a\cos x}\right)$.

Ex. 15

1) Calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique, telle que $g(x) = xf(1)$ sur $[0,1]$ et $g(x) = f(x)$ sur $[1,\pi]$.

En utilisant g, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}$.

Ex. 16

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 2π-périodiques telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2\sin x\, f'(x)$.

Niveau 3

Avec solution détaillée

Ex. 17

1) Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} e^{-ax}\mathrm{d}x.$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

2) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2+4n^2}$.

Ex. 18

Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x) = \cos\alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

En déduire :

1) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ **(1)**

2) $\forall x \in]-\pi,\pi[$, $\sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ **(2)**

Avec éléments de solution

Ex. 19

1) Vérifier $\forall t \in [-\pi, \pi]$,

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos nt}{n^2} \qquad \textbf{(1)}$$

et

$$\forall t \in]-\pi, \pi[,\ t = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n} \qquad \textbf{(2)}$$

2) Soit $a > 0$, montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos nt}{n^2 + a^2}.$$

Former une équation différentielle vérifiée par f. En déduire une expression de f.

3) Existence et calcul de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n \sin nt}{n^2 + a^2} \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

Ex. 20

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|x+2n\pi|}$.

1) Étudier l'ensemble de définition, la continuité et la périodicité de f.

2) Montrer que f est développable en série de Fourier.

3) Calculer les coefficients de Fourier de f sous forme réduite et écrire ce développement.

Ex. 21

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}}$ $(t > 0)$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est 1-périodique et développable en série de Fourier.

Calculer les coefficients de Fourier de f.

Indications

Ex. 5

Exprimer $c_p\left(f^{(n)}\right)$ en fonction de $c_p(f)$.

Ex. 6

Utiliser la propriété 7 pour exprimer $c_n(f)$ en fonction de $f(x) - f(x+h)$.

Ex. 7

Déduire du calcul des $a_n(f)$ une fonction h telle que $a_n(h) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ puis appliquer la formule de Parseval.

Ex. 8

Développer $f(\theta)$ en séries entières des variables $\dfrac{1}{2}e^{i\theta}$ et $\dfrac{1}{2}e^{-i\theta}$.

Ex. 9

Trouver une solution particulière g développable en série de Fourier et telle que g'' s'obtienne par dérivation terme à terme de la série de Fourier de g.

Ex. 10

1) Il y a une seule possibilité de solution bornée. On vérifie d'abord que cette solution est 2π-périodique.

3) Exprimer $c_n(f)$ en fonction de :

$$\int_0^{2\pi} e^{-int}\left[f(t+u) - f(t)\right]\mathrm{d}t$$

pour en déduire que $\left(n\, c_n(f)\right)_{\mathbb{Z}}$ est bornée.

Ex. 11

1) Considérer d'abord le cas où $x \in [0, 2\pi]$ et appliquer le théorème de convergence quadratique.

Ex. 12

1) Utiliser Parseval.

3) Majorer $\displaystyle\sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k} |c_n(f)|$ avec Cauchy-Schwarz.

Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13

Penser à linéariser $\sin^3 nx$.

Ex. 14

Éliminer les cas particuliers $a = 1$ et $a = -1$. Pour $-1 < a < 1$, développer $f'(x)$ en séries entières des variables ae^{ix} et ae^{-ix}.

Ex. 15

1) Rechercher f impaire, 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{1}{n}.$$

Ex. 16

Toute solution éventuelle est développable en série de Fourier. Prouver que les développements de $f(2x)$ et $2\sin x\, f'(x)$ s'identifient terme à terme.

Ex. 17

Remarquer que : $\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx}$.

En découpant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en :

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left[2p\pi, 2(p+1)\,\pi\right],$$

faire apparaître une série de Fourier.

Ex. 18

2) Pour $x \in]-\pi, \pi[$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ s'intègre terme à terme sur $[0, x]$.

Ex. 19

2) Considérer $f(t) - \left(\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{12}\right)$ pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 20

2) Considérer les restrictions aux intervalles :

$$\left[2k\pi, 2(k+1)\,\pi\right], \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ex. 21

Calculer $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2inxu}\mathrm{d}u$ au moyen d'une équation différentielle.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) La fonction f est clairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.
Comme de plus il existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = a$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi\\ x<2\pi}} f'(x) = ae^{2\pi a}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa fonction somme est la régularisée de f.

Remarquons que la condition $a \neq 0$ donne que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a - in \neq 0$. Les coefficients de Fourier s'écrivent donc : $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ax-inx}\mathrm{d}x = \dfrac{a+in}{2\pi\left(a^2+n^2\right)}\left(e^{2\pi a}-1\right)$.

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z},\ \ f(x) = \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi}\left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a\cos nx}{a^2+n^2} - \frac{2n\sin nx}{a^2+n^2}\right],$$

$$\forall x \in 2\pi\mathbb{Z},\ \ \frac{1+e^{2\pi a}}{2} = \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi}\left[\frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2}\right].$$

2) Pour $x = 0$, la formule précédente donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1} - \frac{1}{2a^2}$.

3) La série de fonctions de terme général $u_n\ : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+n^2}$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ (car $\| u_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n^2}$), sa fonction somme est donc continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{a\to 0}\frac{\pi a\left(e^{2\pi a}+1\right) - \left(e^{2\pi a}-1\right)}{2a^2\left(e^{2\pi a}-1\right)}.$$

Le développement limité $e^{2\pi a} = 1 + 2\pi a + 2\pi^2 a^2 + \dfrac{4\pi^3 a^3}{3} + o\left(a^3\right)$ donne alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex. 2

1) Formons $h(x) = f(x) + ig(x) = e^{\cos x + i\sin x} = e^{e^{ix}}$.

Sachant que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, il vient $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$, d'où :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n!},\qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n!}.$$

Posons $u_n\ : x \mapsto \dfrac{\cos nx}{n!}$ et $v_n\ : x \mapsto \dfrac{\sin nx}{n!}$, on obtient $\| u_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \| v_n \|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n!}$ donc les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$, et dans ces conditions, elles sont identiques aux séries de Fourier de leurs sommes (d'après le théorème 5).

On a donc ainsi obtenu les développements de f et g en séries de Fourier.

2) Écrivons maintenant les coefficients de Fourier de f et g.

Puisque f est paire et g impaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et $a_n(g) = 0$.

D'autre part :

$$2\,\pi\, a_n(f) = 2\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos nt\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\Big(\cos(nt+\sin t)+\cos(nt-\sin t)\Big)\mathrm{d}t,$$

donc $\quad a_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\big(I_n + J_n\big).$

De même :

$$2\,\pi\, b_n(f) = 2\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)\sin nt\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\Big(\cos(nt-\sin t)-\cos(nt+\sin t)\Big)\mathrm{d}t,$$

donc $\quad b_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\big(I_n - J_n\big).$

D'après le **1)**, il en résulte pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n + J_n = 2\,\pi\, a_n(f) = \frac{2\pi}{n!},$$

$$I_n - J_n = 2\,\pi\, b_n(f) = \frac{2\pi}{n!},$$

donc : $$I_n = \frac{2\pi}{n!},\quad J_n = 0.$$

D'autre part, $I_0 + J_0 = 4\pi$ et $I_0 - J_0 = 0$ donne $I_0 = J_0 = 2\pi$.

Ex. 3

Le théorème de Parseval donne $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{|a|_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2} = 0.$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive, cette égalité donne que f est nulle sur $[0, 2\pi]$ donc aussi sur $\mathbb{R}$ d'après la 2π-périodicité.

Ex. 4

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;a_n(f') = nb_n(f)$, $\;b_n(f') = -na_n(f)$ (voir le corollaire 1 de la propriété 9).

f et f' étant continues, l'égalité de Parseval donne :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[a_n^2(f)+b_n^2(f)\Big] \qquad \Big(\text{car } a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0\Big),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0^2(f')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[a_n^2(f')+b_n^2(f')\Big],$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\Big[a_n^2(f)+b_n^2(f)\Big], \quad \Big(\text{car } a_0(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\big(f(2\pi)-f(0)\big) = 0\Big).$$

Il est alors clair que $\quad \displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t.$

- **Cas d'égalité**

La relation $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(n^2-1)\Big[a_n^2(f)+b_n^2(f)\Big] = 0 \quad \text{donc} \quad \forall n \geqslant 2,\, a_n(f) = b_n(f) = 0.$$

f étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle est égale à la somme de sa série de Fourier et on a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\right],$$

soit $$f(x) = a_1(f)\cos x + b_1(f)\sin x.$$

Ainsi, l'égalité $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2 = \int_0^{2\pi} f'^2$ nécessite f de la forme $x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$.

La réciproque est évidente : on a alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2 = \pi\left(\lambda^2+\mu^2\right)$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'^2 = \pi\left(\lambda^2+\mu^2\right)$.

Finalement, l'égalité est obtenue si et seulement si f est de la forme $\lambda\cos + \mu\sin$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Niveau 2

Ex. 5

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse : si f est solution du problème, le théorème de Dirichlet donne pour tout x réel :

$$f(x) = \sum_{p=-+\infty}^{+\infty} c_p(f)e^{ipx} \text{ avec } c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t.$$

f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p(f^{(n)}) = (ip)^n c_p(f)$ (voir la propriété 10), c'est-à-dire $\quad (ip)^n c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^{(n)}(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t.$

Compte tenu de la condition imposée aux $f^{(n)}$, il en résulte $|p|^n\,|c_p(f)| \leqslant M\lambda^n$, donc $|c_p(f)| \leqslant M\left(\dfrac{\lambda}{|p|}\right)^n$.

Pour $|p| > \lambda$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{|p|}\right)^n = 0$ donc l'inégalité précédente donne $|c_p(f)| = 0$ et le développement de Fourier se réduit à $f(x) = \displaystyle\sum_{p=-p_0}^{p_0} c_p(f)e^{ipx}$ où on a posé $p_0 = E(\lambda)$.

On a ainsi prouvé que f est un polynôme trigonométrique.

Synthèse : tout polynôme trigonométrique f s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{p=-n_0}^{n_0} \alpha_p e^{ipx}$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{p=-n_0}^{n_0} (ip)^n\,\alpha_p\,e^{ipx}$ d'où $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n_0^n \displaystyle\sum_{p=-n_0}^{n_0} |\alpha_p|$ ce qui montre que f est solution du problème avec $\lambda = n_0$ et $M = \displaystyle\sum_{p=-n_0}^{n_0} |\alpha_p|$.

La condition annoncée est donc caractéristique des polynômes trigonométriques.

Ex. 6

Pour tout h réel on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-inx}f(x+h)\mathrm{d}x = e^{inh}\int_0^{2\pi} e^{-inx}f(x)\mathrm{d}x$ (voir la propiété 7), il en résulte :

$$\left(1 - e^{inh}\right)c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\left(f(x) - f(x+h)\right)\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de $|f(x) - f(x+h)| \leqslant M\,|h|^\alpha$, on en déduit $\left|1 - e^{inh}\right|\,|c_n(f)| \leqslant M\,|h|^\alpha$,

et donc, pour $e^{inh} \neq 1$, $|c_n(f)| \leqslant M\dfrac{|h|^\alpha}{\left|\sin\frac{nh}{2}\right|}$. Pour $h = \dfrac{\pi}{n}$, on obtient ainsi $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{M\pi^\alpha}{|n|^\alpha}$ d'où la conclusion.

Ex. 7

1) Puisque l'application $f|_{[-\pi,\pi]}$ est continue et que $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-\pi\\x>-\pi}} f(x) = \pi^4$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. De même $f|_{]-\pi,\pi[}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f'(x) = 4\pi^3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\pi\\x>-\pi}} f'(x) = -4\pi^3$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, il est clair que f est paire donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ b_n(f) = 0$.

Ainsi, le théorème de Dirichlet donne :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos nx$ où $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^4\cos nx\mathrm{d}x\ \ (n\in\mathbb{N})$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quatre intégrations par parties donnent successivement :

$$a_n(f) = \frac{8}{\pi\, n}\int_0^{\pi} -x^3\sin nx\mathrm{d}x \qquad \textbf{(1)}$$

$$a_n(f) = \frac{8\,\pi^2\,(-1)^n}{n^2} - \frac{24}{\pi\, n^2}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x \qquad \textbf{(2)}$$

$$a_n(f) = \frac{8\,\pi^2\,(-1)^n}{n^2} + \frac{48}{\pi\, n^3}\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x \qquad \textbf{(3)}$$

$$a_n(f) = \frac{8\,\pi^2\,(-1)^n}{n^2} - \frac{48(-1)^n}{n^4} \qquad \textbf{(4)}$$

D'autre part, on a directement $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^4\mathrm{d}x = \dfrac{2\pi^4}{5}$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8(-1)^n}{n^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right)\cos nx\,.$$

Comme pouvait le laisser prévoir le théorème 7, on vérifie aisément que ce développempnt est normalement convergent sur $\mathbb{R}$.

2) Introduisons la fonction g 2π-périodique dont la restriction à $[-\pi,\pi]$ est définie par $g(x) = x^2$. Cette fonction est paire et continue sur $\mathbb{R}$ et en comparant **(2)** et **(4)**, on obtient :

$$\frac{24}{\pi\, n^2}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = \frac{48(-1)^n}{n^4} \quad \text{donc} \quad a_n(g) = \frac{4(-1)^n}{n^2}\,.$$

Alors la relation **(4)** s'écrit $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ a_n(f) = 2\pi^2 a_n(g) - 48\dfrac{(-1)^n}{n^4}$, soit aussi $a_n\left(f - 2\pi^2 g\right) = 48\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ par linéarité de l'application $h \mapsto a_n(h)$ sur l'espace des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux.

La fonction $h = \dfrac{1}{48}\left(f - 2\,\pi^2\,g\right)$ est paire continue sur $\mathbb{R}$ et sa restriction à $[-\pi,\pi]$ est définie par :

$$h(x) = \frac{x^4 - 2\,\pi^2\,x^2}{48}\,.$$

Il reste à calculer $\ a_0(h) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{x^4 - 2\,\pi^2\,x^2}{48}\mathrm{d}x = -\dfrac{7\pi^4}{2^3\,.\,3^2\,.\,5} = -\dfrac{7\pi^4}{360}$,

puis on applique l'égalité de Parseval à h :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^8 - 4\,\pi^2\,x^6 + 4\,\pi^4\,x^4}{2^8\,.\,3^2}\mathrm{d}x = \frac{107\pi^8}{2^8\,.\,3^4\,.\,5\,.\,7} = \frac{107\pi^8}{725\,760}$$

$$= \frac{a_0^2(h)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(h) = \frac{7^2\pi^8}{2^8\,.\,3^4\,.\,5^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}\,.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7}(5\cdot 107-7^3)=\frac{192\pi^8}{2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7}=\frac{2^6\cdot 3\pi^8}{2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7}.$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7}=\frac{\pi^8}{9450}.$

Ex. 8

La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, dans ces conditions on sait que f est somme de sa série de Fourier, et que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a $\quad f(\theta)=\dfrac{1}{5+2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}=\dfrac{e^{i\theta}}{2e^{2i\theta}+5e^{i\theta}+2}$, donc avec $x=e^{i\theta}$:

$$f(\theta)=\frac{x}{2x^2+5x+2}=\frac{x}{(x+2)(2x+1)}.$$

La fraction précédente se décompose en éléments simples sous la forme :

$$\frac{x}{(x+2)(2x+1)}=\frac{\frac{2}{3}}{x+2}-\frac{\frac{1}{3}}{2x+1}$$

d'où

$$f(\theta)=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}e^{i\theta}}-\frac{\frac{1}{6}e^{-i\theta}}{1+\frac{1}{2}e^{-i\theta}}.$$

Avec, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, $\displaystyle\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$, on obtient :

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}e^{in\theta}-\frac{e^{-i\theta}}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}e^{-ni\theta}\\&=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{in\theta}}{2^n}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-(n+1)i\theta}}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\cos n\,\theta\qquad\textbf{(1)}\end{aligned}$$

La série précédente converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ car $\left|\dfrac{\cos n\theta}{2^{n-1}}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$, on en déduit que c'est la série de Fourier de f (cf. théorème 5).

Conséquence

Les coefficients de Fourier de f sont, puisque f est paire :

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}I_n,$$

donc	$a_0(f)=\dfrac{2}{3}$	donne	$I_0=\dfrac{\pi}{3}$	
et pour $n\geqslant 1$	$a_n(f)=\dfrac{(-1)^n}{3\times 2^{n-1}}$	donne	$I_n=\dfrac{(-1)^n\pi}{3\times 2^n}.$	

Ex. 9

■ La fonction $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto|\sin x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Cauchy – Lipschitz (cas linéaire), l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2 dont la direction est l'espace vectoriel des solutions de $(H)\ :\ y''+y=0$.

Si g est une solution particulière de (E), la solution générale est définie par :

$$x\mapsto\lambda\cos x+\mu\sin x+g(x).$$

- La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier (théorème de Dirichlet).
- Calcul des coefficients de Fourier de f.

f étant paire, on a : $$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$

d'où : $$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right]\mathrm{d}x.$$

Pour $n = 1,\ \ a_1(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x = 0.$

Pour $n \neq 1,\ \ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{n-1}\Big[\cos(n-1)x\Big]_0^{\pi} - \dfrac{1}{n+1}\Big[\cos(n+1)x\Big]_0^{\pi}\right],$

$$\begin{array}{lrcl} \text{d'où} & n = 2p+1 & : & a_{2p+1}(f) = 0 \\ & n = 2p & : & a_{2p}(f) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{-2}{2p-1} + \dfrac{2}{2p+1}\right) = \dfrac{4}{\pi\,(1-4p^2)}. \end{array}$$

Conséquence : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos 2nx}{1-4n^2}.$

- Recherche d'une solution particulière de (E)

Soit g une fonction 2π-périodique paire, développable en série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n \cos nx$$

deux fois dérivable et telle que g'' s'obtienne par dérivation terme à terme de la série de Fourier de g :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2\,\alpha_n \cos n(x).$$

On a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \ g''(x) + g(x) = \dfrac{\alpha_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1-n^2)\,\alpha_n\cos nx.$

Dans ces conditions, pour que g soit solution de (E), il *suffit* que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{2n} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-4n^2)^2}.$$

Considérons donc la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)^2}.$$

Avec $u_n(x) = \dfrac{\cos 2nx}{(1-4n^2)^2}$, on a $u_n'(x) = -\dfrac{2n\sin 2nx}{(1-4n^2)^2}$ et $u_n''(x) = \dfrac{-4n^2\cos 2nx}{(1-4n^2)^2}$

$$\| u_n \|_\infty = \frac{1}{(1-4n^2)^2}\ ,\ \| u_n' \|_\infty = \frac{2n}{(1-4n^2)^2} \text{ et } \| u_n'' \|_\infty = \frac{4n^2}{(1-4n^2)^2},$$

donc : $$\| u_n \|_\infty \sim \frac{1}{16n^4}\ ,\ \| u_n' \|_\infty \sim \frac{1}{8n^3} \text{ et } \| u_n'' \|_\infty \sim \frac{1}{4n^2}.$$

Ainsi les séries $\sum u_n$, $\sum u_n'$ et $\sum u_n''$ convergent normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et, compte tenu du fait que, pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^2$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2n\sin 2nx}{(1-4n^2)^2},$$

$$g''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-4n^2\cos 2nx}{(1-4n^2)^2},$$

et d'après le calcul préliminaire, g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

- Solution vérifiant $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Avec $y = \lambda \cos x + \mu \sin x + g(x)$:

$$\begin{array}{rclll} y(0) & = & 0 & \text{donne} & \lambda + g(0) = 0, \\ y'(0) & = & 0 & \text{donne} & \mu + g'(0) = 0. \end{array}$$

On a donc $\lambda = -\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(1-4n^2)^2}$.

Or la formule de Parseval avec le développement de $f : x \mapsto |\sin x|$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{8}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2x)\mathrm{d}x = 1 \end{aligned}$$

d'où
$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \lambda = -\frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, il est clair que $g'(0) = 0$.

Finalement, la solution cherchée est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -\frac{\pi}{4}\cos x + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)^2}.$$

Ex. 10

1) f étant continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$, il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(x_0) = y_0$ et la solution générale de (E) s'écrit : $y = e^x\left(\lambda + \displaystyle\int_0^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t\right)$. (Voir MPSI - Analyse, chapitre 2.)

Puisqu'elle est continue, périodique, la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$: posons $M = \|f\|_\infty^{\mathbb{R}}$. On a alors $\forall t \in \mathbb{R}, \left|e^{-t}f(t)\right| \leqslant M e^{-t}$ ce qui prouve que la fonction continue $t \mapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Posons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\mathrm{d}t$, si $\lambda + I \neq 0$, quand x tend vers $+\infty$ on a $y \sim (\lambda + I)e^x$ et y est non bornée. Donc y bornée exige $\lambda + I = 0$ et il y a une seule solution bornée possible, il s'agit de $\phi : x \mapsto -e^x\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\mathrm{d}t$.

Vérifions alors que cette fonction ϕ est 2π-périodique ; on forme :

$$\phi(x+2\pi) = -e^x\int_{x+2\pi}^{+\infty} e^{-(t-2\pi)}f(t)\mathrm{d}t = -e^x\int_x^{+\infty} e^{-u}f(u+2\pi)\mathrm{d}u,$$

donc, puisque f est 2π-périodique, il vient $\phi(x+2\pi) = \phi(x)$.

Ainsi ϕ étant continue et 2π-périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle est donc somme de sa série de Fourier.

La relation $\phi' - \phi = f$ donne $c_n(\phi') - c_n(\phi) = c_n(f)$, et puisque $c_n(\phi') = in\, c_n(\phi)$, il vient :v

$$c_n(\phi) = \frac{1}{in-1}c_n(f) = \frac{-1-in}{n^2+1}c_n(f).$$

3) Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.

Pour exploiter ce fait, on exprime $c_n(f)$ en faisant apparaître une différence du type $f(t+u) - f(t)$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $2\pi\, c_n(f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-int}f(t)\mathrm{d}t = \int_u^{u+2\pi} e^{-int}f(t)\mathrm{d}t$

donc $$2\,\pi\, c_n(f) = e^{-inu}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t+u)\mathrm{d}t$$

puis $$2\,\pi\left(e^{inu}-1\right)c_n(f) = \int_0^{2\pi} e^{-int}\left[f(t+u)-f(t)\right]\mathrm{d}t$$

et en majorant : $\left|e^{inu}-1\right|\ |c_n(f)| \leqslant k\,|u|$.

En conséquence, pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, on a $\left|\dfrac{e^{inu}-1}{u}\right|\ |c_n(f)| \leqslant k$,

donc en faisant tendre u vers 0, il vient : $|n\,c_n(f)| \leqslant k$.

D'après le 2), on a $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $|c_n(\phi)| \leqslant \dfrac{|n|+1}{n^2}\,|c_n(f)|$, d'où finalement :

$$n^2\,|c_n(\phi)| \leqslant k\frac{|n|+1}{|n|} \leqslant 2k.$$

Ex. 11

1) ■ Envisageons d'abord le cas où $x \in [0, 2\pi]$.

On sait (voir théorème **8**) que dans l'espace D muni de la norme de la moyenne quadratique la suite $(S_n)_{\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de Fourier de f, converge vers f :

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \|f - S_n\|_D = 0.$$

Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a les majorations successives :

$$\left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x S_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f(t)-S_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)-S_n(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{2\pi} |f(t)-S_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(2\,\pi\int_0^{2\pi} |f(t)-S_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

Donc $\left|\displaystyle\int_0^x f - \int_0^x S_n\right| \leqslant \sqrt{2\pi}\,\|f - S_n\|_D$ et il résulte du rappel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x S_n = \int_0^x f$.

Puisque $\displaystyle\int_0^x S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\int_0^x e^{ikt}\mathrm{d}t$, ce résultat se lit encore :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\int_0^x e^{int}\mathrm{d}t = \int_0^x f.$$

■ Soit maintenant x réel quelconque.

Alors avec $p = E\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$, $x = 2p\,\pi + x'$, où $x' \in [0, 2\,\pi\,[$. f étant 2π-périodique, on a :

$$\int_0^x f = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} + \int_{2p\pi}^{x} f = p\int_0^{2\pi} f + \int_0^{x'} f = 2p\,\pi\, c_0(f) + \int_0^{x'} f.$$

L'étude du premier cas donne $\displaystyle\int_0^{x'} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\int_0^{x'} e^{int}\mathrm{d}t$ donc :

$$\int_0^x f = 2p\,\pi\, c_0(f) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\int_0^{x'} e^{int}\mathrm{d}t.$$

En constatant que $\displaystyle\int_0^{x'} e^{int}\mathrm{d}t = \int_0^x e^{int}\mathrm{d}t$ pour $n \neq 0$

et que $\displaystyle 2p\pi + \int_0^{x'} \mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x,$

on conclut à $\displaystyle\int_0^x f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\int_0^x e^{int}\mathrm{d}t.$

Remarque : ce résultat reste vrai avec f 2π-périodique et continue par morceaux car la régularisée $\widetilde{f}$ est élément de D et on a $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ c_n(f) = c_n(\widetilde{f})$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x f = \int_0^x \widetilde{f}.$

2) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que : $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 2\pi[, f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, est élément de D et est somme de sa série de Fourier, d'après le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

En appliquant le résultat du 1), on obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{\sin nt}{n}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2}$$

donc, pour $x \in [0, 2\pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4}.$

3) La formule précédente au point $x = \pi$ donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, on en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Ex. 12

1) Soit $g : x \mapsto f(x+h) - f(x-h)$, g est continue, 2π-périodique donc le théorème de Parseval s'applique :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)^2\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(g)|^2.$$

Calculons les coefficients de Fourier de g :

$$2\pi\, c_n(g) = \int_{-h}^{2\pi-h} f(x+h)e^{-inx}\mathrm{d}x - \int_h^{2\pi+h} f(x-h)e^{-inx}\mathrm{d}x = 4i\pi\sin(nh)\,c_n(f)$$

d'où :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]^2\mathrm{d}x = 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2\sin^2 nh.$$

2) $W(x)$ existe en tant que borne supérieure d'une fonction continue sur le compact $[0, 2\pi] \times [-x, x]$.

Posons $h = \dfrac{\pi}{2^{k+1}}$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x+h) - f(x-h)| \leqslant W\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right).$

D'autre part, pour $2^{k-1} \leqslant |n| \leqslant 2^k$, on a $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi|n|}{2^{k+1}} = |n|\,h \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $\sin^2(nh) \geqslant \sin^2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}.$

D'après le 1), il vient alors :

$$W^2\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x+h)-f(x-h)\right]^2 \mathrm{d}x = 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2\sin^2(nh)$$
$$\geqslant 4\sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k}|c_n(f)|^2\sin^2(nh) \geqslant 2\sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k}|c_n(f)|^2$$

3) On montre que $\sum |c_n(f)|$ converge.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$u_k = \sum_{2^{k+1}<|n|\leqslant 2^k}|c_n(f)| \leqslant \left[\sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k} 1 \sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k}|c_n(f)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

le nombre de termes de chaque somme est $2\left(2^k - 2^{k-1}\right) = 2^k$, donc avec le 2) :

$$u_k = \sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k}|c_n(f)| \leqslant 2^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}\,W\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \leqslant A\,2^{-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)k} \qquad \left(A = \frac{\lambda\,\pi^\alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

Avec $\alpha > \dfrac{1}{2}$, la série $\sum 2^{-k\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}$ est convergente, donc la série de terme général u_k est convergente.

On en déduit que les séries $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ sont absolument convergentes, ce qui prouve la convergence normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de Fourier de f. Dans ces conditions on sait (voir corollaire du théorème de Parseval) que f est la somme de sa série de Fourier.

Ex. 13

1) Avec $u_n\ : x \mapsto \dfrac{\sin^3 nx}{n!}$, on a $u_n(x) = \dfrac{3\sin nx}{4n!} - \dfrac{\sin 3nx}{4n!}$ donc $u_n(x) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{3}{4}a_n(x) - \dfrac{1}{4}b_n(x)\right)$ où on a posé $a_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{n!}$ et $b_n(x) = \dfrac{e^{3inx}}{n!}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on établit que les séries $\Sigma a_n^{(p)}$ et $\Sigma b_n^{(p)}$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour $\Sigma u_n^{(p)}$ et la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) $S(x) = \dfrac{3}{4}\,\mathrm{Im}\left(e^{e^{ix}} - 1\right) - \dfrac{1}{4}\left(e^{e^{3ix}} - 1\right)$ **(1)**

$S(x) = \dfrac{3}{4}e^{\cos x}\sin\left(\sin x\right) - \dfrac{1}{4}e^{\cos 3x}\sin\left(\sin 3x\right)$ **(2)**

3) D'après **(1)**, $S(x) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n!} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 3nx}{n!}$.

Puisque ce développement est normalement donc uniformément convergent sur $\mathbb{R}$, il s'agit du développement de f en série de Fourier.

Ex. 14

- Si $a = 1$, f est définie sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, 2π-périodique, et impaire. En posant pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $f(2k\pi) = 0$, on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et régularisée, elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier.

Sur $]0, 2\pi[$, on a $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

- Si $a = -1$, f est définie sur $\mathbb{R}\setminus \pi+2\pi\mathbb{Z}$, 2π-périodique, et impaire. En posant pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $f\left((2k+1)\pi\right) = 0$, on obtient encore une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et régularisée, elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier.

Sur $]-\pi, \pi[$ on a $f(x) = \dfrac{x}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$.

- Si $|a| < 1$, f est 2π-périodique, impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier.

Sachant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \dfrac{1}{n} a_n(f')$.

Le calcul donne $f'(x) = \dfrac{a\cos x - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}$, puis en posant $u = e^{ix}$,

$$f'(x) = \frac{au^2 - 2a^2u + a}{2\left(-au^2 + u + a^2u - a\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-au)} + \frac{a}{2(u-a)}.$$

On en déduit, $f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n u^n + \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{n+1}}{u^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos nx$.

La convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général $v_n : x \mapsto a^n \cos nx \cos px$ justifie l'intégration terme à terme et il vient :

$$a_p(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos nx \cos px\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos px\mathrm{d}x = a^p \quad \text{donc} \quad b_p(f) = \frac{a^p}{p}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, on a finalement :

$$\text{si } |a| < 1,\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad \operatorname{Arctan}\frac{a\sin x}{1 - a\sin x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}\sin nx.$$

Ex. 15

1) Comme ce développement a déjà été rencontré à plusieurs reprises, une solution acceptable (un jour d'oral par exemple) consiste à dire, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ impaire et 2π-périodique telle que :

$$\forall x \in]0, 2\pi[,\quad f(x) = \frac{\pi - x}{2};$$

d'après le théorème de Dirichlet celle-ci est développable en série de Fourier et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Supposons maintenant ne pas connaître ce résultat a priori. Il est visible que la somme cherchée, si elle existe (ce qui n'est pas acquis tant que l'on n'a pas étudié la convergence de la série), est une fonction impaire. Recherchons alors f impaire, 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, dont la restriction à $]0, \pi[$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et prolongeable sur $[0, \pi]$ par une application de classe $\mathcal{C}^1$ également, et enfin telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad b_n(f) = \frac{1}{n}. \qquad \textbf{(1)}$$

Avec les contraintes imposées à f, on peut intégrer par parties, et la condition **(1)** devient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad (-1)^{n+1} f(\pi^-) + f(0^+) + \int_0^\pi f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^\pi \cos nx\mathrm{d}x = 0$, $(n \geqslant 1)$, une solution évidente est obtenue pour f' constante et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n+1} f(\pi^-) + f(0^+) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $f(\pi^-) = 0$ et $f(0^+) = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]0, \pi[$ puis, compte tenu de l'imparité et de la 2π-périodicité, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]0, 2\pi[$, $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Il reste alors à appliquer le théorème de Dirichlet à cette fonction f pour constater que la série proposée est bien convergente sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est f.

2) La fonction g est continue, affine par morceaux. le calcul donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(g) = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

Puis avec le théorème de Dirichlet, $g(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$. On obtient donc la formule annoncée avec $g(1) = f(1)$.

3) La formule de Parseval appliquée à g donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(g)^2 = \frac{(\pi - 1)^2}{6}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6}$.

Ex. 16

Si f est solution du problème, elle est développable en série de Fourier ainsi que sa dérivée f' et ces développements sont normalement convergents sur $\mathbb{R}$.

En posant $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, on a $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$,

$$\text{donc } 2\sin x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n\Big[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\Big] + na_n\Big[\cos(n+1)x - \cos(n-1)x\Big]$$

$$= -a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[(n-1)a_{n-1} - (n+1)a_{n+1}\Big]\cos nx + \Big[(n-1)b_{n-1} - (n+1)b_{n+1}\Big]\sin nx.$$

Si deux séries trigonométriques uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$ ont même somme, elles sont identiques car la série différence est uniformément convergente et a pour somme la fonction nulle donc, d'après le théorème **5**, c'est la série de Fourier de la fonction nulle.

En conséquence, de $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2\sin x f'(x)$, on déduit $a_1 = -\dfrac{a_0}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(2n-1)a_{2n-1} - (2n+1)a_{2n+1} = a_n$$
$$(2n-2)a_{2n-2} - 2na_{2n} = 0$$
$$(2n-1)b_{2n-1} - (2n+1)b_{2n+1} = b_n$$
$$(2n-2)b_{2n-2} - 2nb_{2n} = 0$$

puis, par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = 0$.

Ainsi en posant $\lambda = \dfrac{a_0}{2}$ et $\mu = b_1$, il reste $f(x) = \lambda(1 - \cos x) + \mu \sin x$.

Réciproquement, on vérifie que les fonctions $x \mapsto 1 - \cos x$, et $x \mapsto \sin x$ sont solutions du problème et donc que, par linéarité, il en est de même pour toute fonction $x \mapsto \lambda(1 - \cos x) + \mu \sin x$.

L'ensemble des solutions est donc le plan vectoriel engendré par les fonctions $1 - \cos$ et $\sin$.

Niveau 3

Ex. 17

1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a $\quad \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \dfrac{e^{i(2n+1)x} - e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx}$.

La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ est donc prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, π-périodique et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant 2n+1.$$

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}, \left|f_n(x)e^{-ax}\right| \leqslant (2n+1)e^{-ax}$ et donc que $x \mapsto f_n(x)e^{-ax}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui assure l'existence de I_n.

De plus, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx}e^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sum_{k=-n}^{n} e^{iku}e^{-\frac{au}{2}}\mathrm{d}u$.

Á ce stade, introduisons l'application g, 2π-périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $\quad g(u) = e^{-\frac{au}{2}}$ $\quad$ et découpons $[0, +\infty[$ en $\displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}} [2p\pi, 2(p+1)\pi]$ pour faire apparaître la série de Fourier de g.

On obtient ainsi :

$$I_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n}\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku-\frac{au}{2}}\right)\mathrm{d}u.$$

Le changement de variable $u = 2p\,\pi + v$ donne :

$$\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku-\frac{au}{2}}\,\mathrm{d}u = e^{-pa\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikv-\frac{av}{2}}\,\mathrm{d}v = 2\,\pi\,e^{-pa\pi}c_{-k}(g),$$

donc :

$$I_n = \pi S_n \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-pa\pi} = \frac{\pi\, S_n}{1-e^{-a\pi}} \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(g).$$

g étant $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{g(0^+)+g(0^-)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+e^{-a\pi}\right) \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}\coth\frac{a\pi}{2}.$$

2) L'expression $\quad I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{k=-n}^{n} e^{iku-\frac{au}{2}}\,\mathrm{d}u \quad$ donne :

$$I_n = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{ik-\dfrac{a}{2}}\left[e^{iku-\frac{au}{2}}\right]_0^{+\infty} = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{a-2ik}.$$

D'où en regroupant les termes conjugués $\quad I_n = \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2a}{a^2+4k^2}.$

Puisque $\dfrac{2a}{a^2+4k^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a}{2k^2}$, la série $\sum \dfrac{2a}{a^2+4k^2}$ converge et on a $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2a}{a^2+4k^2}.$

En comparant au résultat trouvé initialement, on en déduit :

$$\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2a}{a^2+4k^2} = \frac{\pi}{2}\coth\frac{a\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+4k^2} = \frac{\pi}{4a}\coth\frac{\pi\,a}{2} - \frac{1}{2a^2}.$$

Remarque

En observant que la série de fonctions de terme général $v_k : a \mapsto \dfrac{1}{a^2+k^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, on déduit de ce calcul que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{a}\coth\frac{\pi\,a}{2} - \frac{2}{a^2}\right)$$

et, avec un développement limité, on retrouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Ex. 18

f étant paire, nous avons : $\forall n\in\mathbb{N},\ \ b_n(f) = 0 \quad$ et $\quad \pi a_n(f) = 2\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{2\,\alpha\sin\pi\alpha}{\alpha^2-n^2}.$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc le théorème de Dirichlet s'applique et, puisque f est continue sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\,\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\,\alpha\sin\pi\alpha}{\pi\,(\alpha^2-n^2)}\cos nx. \tag{1.0}$$

1) Pour $x=\pi$, le développement **(1.0)** donne $\quad \cotan\pi\alpha = \dfrac{1}{\pi\,\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\pi\,(\alpha^2-n^2)},\quad$ d'où :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z},\ \ \cotan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2} \tag{1}$$

(pour $x=\pi\alpha,\quad \alpha\notin\mathbb{Z}\quad$ équivaut à $\quad x\notin\pi\mathbb{Z}$).

2) Pour tout $x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, la formule **(2)** se lit :

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Introduisons la fonction φ définie par $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$.

φ est continue sur $]-\pi,\pi[$ et, avec $\varphi(0) = 1$, on voit que la formule **(2)** équivaut à :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \varphi(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \qquad \textbf{(2')}$$

On remarque que :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ell n\,\varphi(x)\big) = \operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}$$

considérons donc la fonction ψ définie par $\psi(0) = 0$ et $\psi(x) = \operatorname{cotan} x - \dfrac{1}{x}$ pour $x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$. Un développement limité montre que ψ est continue en 0. Ainsi ψ est continue sur $]-\pi,\pi[$ et d'après le 1), on a :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

(car la somme de la série s'annule aussi en 0)

ψ apparaît donc comme somme, sur $]-\pi,\pi[$, de la série de fonctions de terme général $u_n : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$.

D'autre part, on voit facilement que cette série converge normalement donc uniformément sur $]-\pi,\pi[$, car

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \forall n \geqslant 2,\ |u_n(x)| \leqslant \frac{2\pi}{(n^2-1)\pi^2}.$$

En conséquence, on a :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \int_0^x \psi(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x u_n(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire
$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \ell n\,\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ell n\left(\frac{n^2\pi^2 - x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Il en résulte :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \ell n\,\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ell n\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\ell n\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

puis, par continuité de la fonction $\exp$:

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \text{ c'est-à-dire } \varphi(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ce qui achève la preuve.

Ex. 19

1) La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $\forall t \in [-\pi,\pi], g(t) = t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

De même, $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $\forall t \in]-\pi,\pi[, g(t) = t$, $g(\pi) = g(-\pi) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Par application du théorème de Dirichlet, avec g on obtient **(1)** et, avec g_1 on obtient **(2)**.

2) La série de terme général $u_n : t \mapsto (-1)^n\dfrac{\cos nt}{n^2 + a^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On déduit l'existence et la continuité de f.

Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, formons :

$$h(t) = f(t) - \frac{t^2}{4} + \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^2 \cos nt}{n^2 (n^2 + a^2)} \qquad \text{(d'après } \mathbf{(1)}\text{)}$$

et soit :

$$v_n : t \mapsto (-1)^n \frac{a^2 \cos nt}{n^2 (n^2 + a^2)}.$$

On vérifie que $\sum v_n$, $\sum v_n'$, $\sum v_n''$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ donc h et par conséquent f sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

On obtient $\quad f''(t) - \dfrac{1}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2 \cos nt}{n^2 + a^2} = a^2 f(t)$ donc f est solution de $y'' - a^2 y = \dfrac{1}{2}$,

On en déduit $f(t) = -\dfrac{1}{2a^2} + \lambda \operatorname{ch} at + \mu \operatorname{sh} at$, et f étant paire, il vient $\mu = 0$ donc $f(t) = -\dfrac{1}{2a^2} + \lambda \operatorname{ch} at$.

De $f'(t) = a\lambda \operatorname{sh} at = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2 \sin nt}{n(n^2 + a^2)} + \frac{t}{2}$, on déduit $f'(\pi) = a\lambda \operatorname{sh} a\pi = \dfrac{\pi}{2}$, d'où :

$$\lambda = \frac{\pi}{2a \operatorname{sh} \pi a} \quad \text{et enfin } f(t) = \frac{\pi \operatorname{ch} at}{2a \operatorname{sh} a\pi} - \frac{1}{2a^2}.$$

3) Le calcul précédent a donné, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$:

$$f'(t) = \frac{\pi \operatorname{sh} at}{2 \operatorname{sh} a\pi} = \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2 \sin nt}{n(n^2 + a^2)}$$

d'où, d'après **(2)** :

$$f'(t) = \frac{\pi \operatorname{sh} at}{2 \operatorname{sh} a\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n} \left[1 - \frac{a^2}{n^2 + a^2} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nt}{n^2 + a^2}.$$

Ex. 20

1) ▪ Posons $u_n(x) = e^{-|x + 2n\pi|}$. Les deux séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n(x)$ et $\displaystyle\sum_{n \leqslant 0} u_n(x)$ sont convergentes en tant que séries géométriques de raison $e^{-2\pi}$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}$.

▪ Pour tout $a > 0$ on a :

$$\forall x \in [-a, a], \quad |x + 2n\pi| \geqslant 2|n|\pi - |x| \geqslant 2|n|\pi - a.$$

Il en résulte que les deux séries précédentes convergent normalement sur tout segment $[-a, a]$ et donc que f est continue sur $\mathbb{R}$.

▪ En translatant l'indice de sommation, on montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

2) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $I_k = \big[2k\pi, 2(k+1)\pi\big]$.

Les restrictions $v_n = u_{n|I_k}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$v_n'(x) = -\varepsilon\, e^{-|x + 2n\pi|}, \text{ où } \varepsilon = 1 \text{ si } n \geqslant -k \;,\; \varepsilon = -1 \text{ si } n \leqslant -k - 1.$$

Comme en 1), on montre que les séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant -k} v_n'(x)$ et $\displaystyle\sum_{n \leqslant -k-1} v_n'(x)$ sont normalement convergentes sur I_k, il en résulte que la restriction $f_{|I_k}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Finalement f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est donc développable en série de Fourier d'après le théorème de Dirichlet.

3) Les séries de terme général $x \mapsto e^{-|x + 2k\pi| - inx}$, $(k \in \mathbb{Z}^+)$ et $(k \in \mathbb{Z}^-)$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$, on a donc :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|x + 2k\pi| - inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-|x + 2k\pi| - inx} \mathrm{d}x.$$

Pour $k \geqslant 0$, on obtient $\forall x \in [0, 2\pi]$, $x + 2k\pi \geqslant 0$ donc :

$$\int_0^{2\pi} e^{-|x+2k\pi|-inx}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{-x(1+in)-2k\pi}\mathrm{d}x = \frac{e^{-2k\pi}}{1+in}\left(1-e^{-2\pi}\right).$$

De même pour $k \leqslant -1$, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} e^{-|x+2k\pi|-inx}\mathrm{d}x = \frac{e^{2k\pi}}{1-in}\left(e^{2\pi}-1\right).$$

On en déduit :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+in}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-2k\pi}-e^{-2(k+1)\pi}\right) + \frac{1}{1-in}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-2(k-1)\pi}-e^{-2k\pi}\right)\right)$$

d'où :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+in}+\frac{1}{1-in}\right) = \frac{1}{\pi\,(n^2+1)}.$$

En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{\pi\,(n^2+1)} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}.$$

Ex. 21

1) Considérons la série de fonctions de terme général $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}}$.

Pour tout x réel fixé les séries de termes généraux $u_k(x)$ et $u_{-k}(x)$ sont convergentes d'après la règle de Riemann.

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto u_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(u_k(x)+u_{-k}(x)\right)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$. On écrira plus simplement :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}}.$$

On montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en établissant la convergence normale donc uniforme des séries de fonctions de termes généraux u'_k et u'_{-k} sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$.

2) De la relation $u_k(x+1) = u_{k-1}(x)$, on déduit $f(x+1) = f(x)$: f est 1-périodique.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x$.

La convergence normale donc uniforme sur $[0, 1]$ permet d'écrire :

$$c_n = \int_0^1\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}-2i\pi nx}\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}-2i\pi nx}\mathrm{d}x$$

d'où :

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{k-1}^{k} e^{-\frac{y^2}{2t}+2i\pi ny}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2t}+2i\pi ny}\mathrm{d}y$$

ou encore :

$$c_n = \sqrt{2t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2i\pi nu\sqrt{2t}}\mathrm{d}u.$$

Introduisons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2ixu}\mathrm{d}u$. On a ainsi :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,u)\mathrm{d}u \ \text{ avec } \ \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ (x,u) \mapsto e^{-u^2+2ixu}.$$

Cette fonction ψ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\psi(x,u)| = e^{-u^2}$ et $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $(x,u)\in\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,u)=2inue^{-u^2+2inxu}$ donc :

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,u)\right|=2n\,|u|\,e^{-u^2}\quad\text{et}\quad u\mapsto |u|\,e^{-u^2}\text{ est intégrable sur }\mathbb{R}.$$

D'après le théorème de Leibniz, il en résulte que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\varphi'\ :\ x\mapsto 2in\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-u^2+2inxu}\mathrm{d}u.$$

Une intégration par parties donne : $\varphi'(x)=-2n^2x\,\varphi(x)$, d'où on en déduit :

$$\varphi(x)=\varphi(0)e^{-n^2x^2}\quad\text{avec}\quad\varphi(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}.$$

Comme $c_n=\sqrt{2t}\,\varphi(\pi\sqrt{2t})$, on obtient les coefficients de Fourier de f :

$$c_n=\sqrt{2\pi\,t}\,e^{-2n^2\pi^2t}\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet s'applique :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-k)^2}{2t}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{2i\pi nx}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sqrt{2\pi\,t}\,e^{-2n^2\pi^2t+2i\pi nx}.$$

CHAPITRE

8 Équations différentielles

A. Équations linéaires

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Étude théorique

1.1 – Définitions

Définition 1

Aux applications continues $a : I \to \mathscr{L}(E)$, et $b : I \to E$ on associe l'équation différentielle, dite **linéaire du premier ordre**, $(L) : x' = a(t) \bullet x + b(t)$. ✎(1)

On appelle équation homogène associée à (L) l'équation différentielle :

$$(H) : x' = a(t) \bullet x.$$

Une solution de (L) est une application dérivable $f : I \to E$ telle que :

$$\forall t \in I,\ \ f'(t) = a(t) \bullet f(t) + b(t).$$

✎(1) L'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $a(t)$ est, ici, notée $a(t) \bullet x$.

Remarques

1) Le théorème suivant assure l'existence de solutions de (L) et de (H) sur l'intervalle I.
On note alors $\mathcal{S}(L)$ et $\mathcal{S}(H)$ l'ensemble des solutions sur I de (L) et (H) respectivement.

2) On constate que toute solution de (L) ou de (H) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

1.2 – Théorèmes

Théorème 1

Théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire ✎(2)

Pour tout $\left(t_0, x_0\right) \in I \times E$, l'équation (L) admet une unique solution f sur I vérifiant $f\left(t_0\right) = x_0$.

On dit qu'il y a unicité au **problème de Cauchy** en $\left(t_0, x_0\right)$.

✎(2) Ce théorème est admis et s'applique aussi à l'équation H.
Les solutions de (L) sur I sont maximales, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de solutions les prolongeant strictement.

Théorème 2

Structure de l'ensemble des solutions

a) L'ensemble $\mathcal{S}(H)$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$ isomorphe à E, donc de dimension n.

b) L'ensemble $\mathcal{S}(L)$ des solutions de (L) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$, de direction $\mathcal{S}(H)$.

☞ a) Il est clair que $\mathcal{S}(H)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}^1(I, E)$. Pour $t_0 \in I$ fixé, le théorème 1 indique que l'application linéaire $\Phi_{t_0} : x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(H)$ sur E.

b) L'existence de solutions de (L) sur I donne $\mathcal{S}(L) \neq \varnothing$, si f et g sont deux d'entre elles, on vérifie que $f - g \in \mathcal{S}(H)$.

Définition 2

Soit $\mathscr{H} = \left(h_1, h_2, \ldots, h_n\right)$ un système de n éléments de $\mathcal{C}^1(I, E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

Pour tout $t \in I$, $W(t) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\left(h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)\right)$ est appelée **matrice wronskienne** en t du système $\mathscr{H}$ par rapport à la base $\mathscr{B}$.

Le déterminant $w(t) = \det W(t)$ est le **wronskien** en t du système $\mathscr{H}$ par rapport à la base $\mathscr{B}$. ✎(3)

✎(3) Les applications $W : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $w : I \to \mathbb{K}$ sont appelées respectivement wronskienne et wronskien de $\mathscr{H}$ par rapport à $\mathscr{B}$.

Propriété 1

Bases de $S(H)$

Soit $\mathcal{H} = \big(h_1, \dots, h_n\big)$ un n-uplet de solutions de (H).

a) Pour tout $t \in I$, le rang du système $\mathcal{H}$ de $S(H)$ est égal au rang du système $\mathcal{H}(t) = \big(h_1(t), \dots, h_n(t)\big)$ de E.

b) Soit w le wronskien de $\mathcal{H}$ par rapport à une base fixée $\mathcal{B}$ de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathcal{H}$ est une base de E,

(2) il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$,

(3) pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$.

Une base de $S(H)$ est aussi appelée **système fondamental** de l'équation (H).

☞ a) $\mathcal{H}(t)$ étant l'image par l'isomorphisme Φ_t du système $\mathcal{H}$, on a $\mathrm{rg}\,\mathcal{H}(t) = \mathrm{rg}\,\mathcal{H}$.

b) Corollaire du a).

Propriété 2

Soit $\mathcal{H} = \big(h_1, \dots, h_n\big)$ un système fondamental de l'équation (H) et $k \in \{0, 1\}$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$, il existe n applications $u_1, \dots, u_n$ de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$, définies de manière unique par $\quad f = u_1 h_1 + \dots + u_n h_n$.

☞ Soit $\mathcal{B} = \big(e_j\big)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de E et W la wronskienne de $\mathcal{H}$ par rapport à $\mathcal{B}$.

D'après la propriété 1, pour tout $t \in I$, $\mathcal{H}(t) = \big(h_1(t), \dots, h_n(t)\big)$ est une base de E, et $W(t)$, matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{H}(t)$, est inversible.

On dispose ainsi d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$W \ : t \mapsto W(t) \quad \text{et} \quad W^{-1} \ : t \mapsto [W(t)]^{-1}.$$

Introduisons les applications coordonnées $f_1, f_2, \dots, f_n$ de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall t \in I,\ \ f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) e_j \quad , \quad \forall j \in [\![1, n]\!],\ \ f_j \in \mathcal{C}^k(I, E).$$

Pour tout $t \in I$ fixé, l'existence et l'unicité de $\big(u_1(t), \dots, u_n(t)\big)$ correspond à un changement de coordonnées, dont l'écriture matricielle est :

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = [W(t)]^{-1} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Les n-applications $u_1, \dots, u_n$ de I dans $\mathbb{K}$ ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème 3

Méthode de variation des constantes

Avec les notations de la propriété 2,

a) l'application $f = u_1 h_1 + \dots + u_n h_n$ est solution de l'équation (L) si et seulement si :

$$u_1' h_1 + \dots + u_n' h_n = b\,;$$

b) d'après la propriété 2, l'application $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ s'écrit de façon unique :

$$b = v_1 h_1 + \dots + v_n h_n \quad , \quad v_j \in \mathcal{C}^0(I, E)$$

La condition du a) s'exprime donc par : $\quad \forall j \in [\![1, n]\!],\ u_j' = v_j$.

La proposition b) est conséquence directe de ce qui précède et signifie que la connaissance d'une base de $S(H)$ ramène la résolution de l'équation (L) à des calculs de primitives.

☞ Sachant que $h_1, \dots, h_n$ sont solutions de (H), la dérivée de $f = u_1 h_1 + \dots + u_n h_n$ s'écrit $\quad \forall t \in I,\ \ f'(t) = u_1'(t) h_1(t) + \dots + u_n'(t) h_n(t) + a(t) \bullet f(t)$.

Donc la condition $\ \forall t \in I, f'(t) = a(t) \bullet f(t) + b(t)\ $ s'écrit $\ u_1' h_1 + \dots + u_n' h_n = b$.

1.3 – Système différentiel

Il s'agit de l'écriture matricielle de l'équation linéaire (L).

Étant donnée une base $\mathcal{B} = \left(e_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de E, aux applications a et b sont associées les applications $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, où, pour tout $t \in I$, $A(t)$ et $B(t)$ sont les matrices de $a(t)$ et $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle alors système différentiel l'équation différentielle notée : $X' = A(t)X + B(t)$ dont les fonctions inconnues X sont à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Inversement, à un tel système différentiel on associe canoniquement une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{K}^n$ au moyen de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. ✎(4)

Les théorèmes précédents s'appliquent (mutatis mutandis) aux systèmes différentiels.

✎(4) Usuellement, $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont identifiés au moyen de l'isomorphisme associant leurs bases canoniques.

Exemple 1 Résoudre le système différentiel : $(L) \begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos t \\ y' = x + 2ty + t\sin t \end{cases}$

(Effectuer dans le système homogène le changement de fonctions inconnues défini par :

$$u = xe^{-t^2} \quad , \quad v = ye^{-t^2}.)$$

Ici, $E = \mathbb{R}^2$ et $I = \mathbb{R}$.

Le système homogène associé est $(H) \begin{cases} x' = 2tx - y \\ y' = x + 2ty \end{cases}$ ✎(5) et le changement de fonctions indiqué donne :

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = u \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u'' + u = 0 \\ v = -u' \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} u = \lambda\cos + \mu\sin \\ v = \lambda\sin - \mu\cos \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

✎(5) On remarque que dans ce cas $\mathcal{S}(H) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Les deux solutions $\begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -\sin \\ \cos \end{bmatrix}$ de ce système fournissent les deux solutions h_1 et h_2 de (H) suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_1(t) = \begin{bmatrix} e^{t^2}\cos t \\ e^{t^2}\sin t \end{bmatrix} \quad , \quad h_2(t) = \begin{bmatrix} -e^{t^2}\sin t \\ e^{t^2}\cos t \end{bmatrix}.$$

Comme elles sont indépendantes, $\left(h_1, h_2\right)$ est une base de $\mathcal{S}(H)$.

La méthode de variation des constantes consiste à trouver deux applications w_1 et w_2 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f = w_1 h_1 + w_2 h_2$ soit solution du système (L).

On constate que $\begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{bmatrix} = te^{-t^2} h_1(t)$ et, par conséquent, $w_1'(t) = te^{-t^2}$, $w_2'(t) = 0$.

Donc $f \in \mathcal{S}(L)$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(t) = \left(\alpha - \frac{1}{2}e^{-t^2}\right) h_1(t) + \beta h_2(t) \qquad \begin{cases} x = (\alpha\cos t - \beta\sin t)e^{t^2} - \dfrac{1}{2}\cos t \\ y = (\alpha\sin t + \beta\cos t)e^{t^2} - \dfrac{1}{2}\sin t \end{cases}$$

Exemple 2 Retrouver le résultat de l'exemple précédent en utilisant la nouvelle fonction inconnue $z = x + iy$.

Le système devient, par le changement indiqué, l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(L) \quad z' = (2t + i)z + te^{it}.$$

Le nouveau changement de fonction inconnue défini par $z = ue^{it}$ transforme l'équation en :

$$u' = 2tu + t.$$

L'équation homogène a pour solution générale $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \lambda\, e^{t^2} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$.

Une solution particulière est $t \mapsto -\dfrac{1}{2}$. D'où la solution générale de (L) :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto \left(\lambda e^{t^2} - \frac{1}{2}\right) e^{it}.$$

Le couple formé des parties réelle et imaginaire donne la solution trouvée précédemment.

2. Équations linéaires à coefficients constants Étude théorique

✎(6) On rappelle que a et e^{ta} commutent, que l'application $\mathbb{R} \to \mathscr{L}(E), t \mapsto e^{ta}$ est dérivable, avec $\left(e^{ta}\right)' = a \circ e^{ta}$.
De plus, e^{ta} est inversible avec $\left(e^{ta}\right)^{-1} = e^{-ta}$.

✎(7) Pour simplifier l'écriture, on note u et u' au lieu de $u(t)$ et $u'(t)$.

✎(8) car $e^{t_0 a} \bullet u_0 = x_0$ donne $u_0 = (e^{t_0 a})^{-1} \bullet x_0$ c'est-à-dire $u_0 = e^{-t_0 a} \bullet x_0$.

✎(9) On sait que si I est un segment de $\mathbb{R}$, pour tout $f \in \mathscr{C}(I,E)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, on a $u\left(\int_I f\right) = \int_I u \circ f$. (Cf. chapitre 4, propriété 29.)

✎(10) (H) est le système homogène associé à (L).

Il s'agit des équations $(L)\ : x' = a \bullet x + b(t)$, $(H)\ : x' = a \bullet x$ où $a \in \mathscr{L}(E)$ **et** $b \in \mathcal{C}(I, E)$.

L'application exponentielle $\exp\ : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$, où E est un espace vectoriel normé de dimension finie, a été étudiée dans le chapitre 5. ✎(6)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note e^{ta} l'endomorphisme $\exp(ta)$.

Étude de $(H) \quad x' = a \bullet x$

- Soit u une solution de (H) sur $\mathbb{R}$; par dérivation il vient :

$$\left(e^{-ta} \bullet u\right)' = e^{-ta} \bullet u' - e^{-ta} \circ a \bullet u = 0 \quad ✎^{(7)}$$

Il existe donc $u_0 \in E$ tel que $\quad \forall t \in \mathbb{R}, e^{-ta} \bullet u = u_0$.

Ainsi, on a nécessairement $\quad u\ : \mathbb{R} \to E, t \mapsto e^{ta} \bullet u_0$.

Il convient alors de vérifier qu'il s'agit d'une solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $\left(t_0, x_0\right) \in \mathbb{R} \times E$, l'unique solution au problème de Cauchy en ce point est :

$$\mathbb{R} \to E, t \mapsto e^{(t-t_0)a} \bullet x_0 \quad ✎^{(8)}$$

Étude de $(L) \quad x' = a \bullet x + b(t)$

Soit u une solution de (L) sur I.

Introduisons l'application v définie par $v = e^{-ta} \bullet u$ soit aussi $u = e^{ta} \bullet v$. Elle est dérivable et :

$$v' = e^{-ta} \bullet u' - e^{-ta} \circ a \bullet u = e^{-ta} \bullet b(t).$$

Pour $t_0 \in I$, on obtient :

$$\forall t \in I, v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sa} \bullet b(s)\mathrm{d}s + v_0 \qquad (v_0 \in E, v_0 = v(t_0))$$

d'où :

$$u(t) = e^{ta} \bullet \left(v_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sa} \bullet b(s)\mathrm{d}s\right).$$

- Pour tout $\left(t_0, x_0\right) \in I \times E$, l'unique solution au problème de Cauchy en ce point est :

$$I \to E, \quad t \mapsto e^{(t-t_0)a} \bullet x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a} \bullet b(s)\mathrm{d}s. \quad ✎^{(9)}$$

3. Systèmes différentiels à coefficients constants Étude pratique

Il s'agit des systèmes : $\quad (L)\ :\ X' = AX + B(t) \quad , \quad (H)\ :\ X' = AX \quad$ ✎(10)

où $\quad A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad$ **et** $\quad B\ : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **est continue.**

3.1 – A est diagonalisable

Il existe alors $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $\quad P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$.

On effectue le changement de fonction inconnue défini par :

$$Y = P^{-1}X \iff X = PY$$

qui aboutit aux nouveaux systèmes différentiels :

$$\left(L_1\right)\ :\ Y' = DY + P^{-1}B(t) \quad , \quad \left(H_1\right)\ :\ Y' = DY.$$

Chaque ligne de $\left(L_1\right)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre $y_i' = \lambda_i y_i + c_i(t)$ dont la solution générale s'écrit : $\quad \forall t \in I, y_i = \beta_i e^{\lambda_i t} + \gamma_i(t)$.

La solution générale de (L) s'obtient par $X = PY$.

Remarques

1) En notant $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de P (ou vecteurs propres de A), la solution générale de (H) s'écrit :
$$t \mapsto \beta_1 e^{\lambda_1 t} C_1 + \beta_2 e^{\lambda_2 t} C_2 + \dots + \beta_n e^{\lambda_n t} C_n.$$
Une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(H)$ est donc constituée des n applications :
$$t \mapsto e^{\lambda_k t} C_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

2) Noter que la résolution du système (H) n'exige pas le calcul de P^{-1}.

3) Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si X est une solution de (L) à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, les applications $\mathrm{Re}(X)$ et $\mathrm{Im}(X)$ (obtenues en considérant les applications parties réelles et imaginaires de chaque ligne) sont solutions de (L) à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3.2 – Cas général

Si le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé (ce qui est le cas en considérant A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = T$ avec T triangulaire supérieure.
On effectue alors le changement de fonction inconnue défini par :
$$Z = P^{-1}X \iff X = PZ$$
qui aboutit aux nouveaux systèmes différentiels :
$$\begin{aligned} (L_2) &\quad : \quad Z' = TZ + P^{-1}B(t) \\ (H_2) &\quad : \quad Z' = TZ \end{aligned}$$
La dernière ligne de (L_2) est une équation différentielle linéaire du premier ordre
$$z_n' = \lambda_n z_n + c_n(t).$$
Une fois fixée une solution de cette équation, la ligne précédente devient une équation différentielle de fonction inconnue z_{n-1}. De proche en proche, chaque ligne apparaît comme une équation différentielle du premier ordre (une seule fonction inconnue pour chacune). On obtient ainsi la solution générale du système (L_2) (éventuellement l'unique solution au problème de Cauchy en un point arbitraire $(t_0, Z_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

3.3 – Exemples

Le calcul de e^{tA} donne une autre méthode de résolution de (H).

Exemple 3 Résoudre le système différentiel réel $\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2\sin t \end{cases}$

Le système s'écrit $\begin{cases} x' - y' = 2(x - y) + \cos t - 2\sin t \\ y' = x + y + 2\sin t \end{cases}$

La résolution de $u' = 2u + \cos t - 2\sin t$ (équation linéaire scalaire d'ordre 1) donne :
$$u = \lambda e^{2t} + \sin t.$$
Le système équivaut donc à $\begin{cases} x - y = \lambda e^{2t} + \sin t \\ y' = 2y + \lambda e^{2t} + 3\sin t \end{cases}$

La résolution de $y' = 2y + \lambda e^{2t} + 3\sin t$ donne :
$$y = (\lambda t + \mu)e^{2t} - \frac{3}{5}(\cos t + 2\sin t) \text{ d'où } x = (\lambda t + \mu + \lambda)e^{2t} - \frac{1}{5}(3\cos t + \sin t).$$
Moralité : il peut être utile de regarder le système proposé avant de se lancer dans les calculs.

Exemple 4 Résoudre le système différentiel réel $X' = AX$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Donnons deux méthodes de résolution.

a) Cherchons l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$, (il contient $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$). Le polynôme caractéristique de A est $(2 - T)\left[(T-1)^2 + 1\right]$.
Les valeurs propres complexes de A sont $2,\ 1 + i,\ 1 - i$.

Les vecteurs propres associés sont respectivement : $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}$, $C_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}$.

Posons $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{bmatrix}$. Nous avons $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(2, 1+i, 1-i)$.

Le changement de fonction inconnue défini par $X = PY$ donne le nouveau système :

$$Y' = DY \left\{ \begin{array}{l} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = (1+i)y_2 \\ y_3' = (1-i)y_3 \end{array} \right.$$

Il existe donc $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \beta_1 e^{2t} \\ y_2 = \beta_2 e^{(1+i)t} \\ y_3 = \beta_3 e^{(1-i)t} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{(1+i)t} + \beta_3 e^{(1-i)t} \\ \\ x_2 = \beta_1 e^{2t} + i\,\beta_2\, e^{(1+i)t} - i\,\beta_3\, e^{(1-i)}t \\ \\ x_3 = \beta_1 e^{2t} - i\,\beta_2\, e^{(1+i)t} + i\,\beta_3\, e^{(1-i)}t \end{array} \right.$$

En écrivant $X = \beta_1 e^{2t} C_1 + \beta_2 e^{(1+i)t} C_2 + \beta_3 e^{(1-i)t} C_3$, on constate qu'une base de $S_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, est (v_1, v_2, v_3) donnée par :

$$v_1(t) = e^{2t} C_1 \quad , \quad v_2(t) = e^{(1+i)t} C_2 \quad , \quad v_3(t) = e^{(1-i)t} C_3 = \overline{v_2(t)}.$$

Une autre base de $S_{\mathbb{C}}$ est (u_1, u_2, u_3) donnée par :

$$u_1(t) = e^{2t} C_1\,,\; u_2(t) = \mathrm{Re}\left(v_2(t)\right) = e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{bmatrix}\,,\; u_3(t) = \mathrm{Im}\left(v_2(t)\right) = e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{bmatrix}.$$

Les solutions étant à valeurs réelles, (u_1, u_2, u_3) est aussi une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}$.

La solution générale du système différentiel réel proposé est donc :

$$X = \alpha_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{bmatrix} + \alpha_3 e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{bmatrix} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3.$$

b) En utilisant les parties réelles et imaginaires des vecteurs c_2 et c_3, on obtient une base d'un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par A. Introduisons donc les matrices :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le changement de fonction inconnue défini par $X = QZ$ donne le nouveau système :

$$Z' = BZ \iff \left\{ \begin{array}{l} z_1' = 2z_1 \\ z_2' = z_2 + z_3 \\ z_3' = -z_2 + z_3 \end{array} \right.$$

La première ligne est une équation différentielle dont la solution générale est :

$$z_1 \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \alpha e^{2t}$$

L'application $w = z_2 + iz_3$ vérifie $w' = (1-i)w$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = \lambda e^{(1-i)t}$.

Avec $\lambda = \beta + i\gamma$, on obtient : $\left\{ \begin{array}{l} z_2 = \mathrm{Re}(w) = e^t(\beta \cos t + \gamma \sin t) \\ z_3 = \mathrm{Im}(w) = e^t(\gamma \cos t - \beta \sin t) \end{array} \right.$

La solution du système proposé s'obtient par $X = QZ$:

$$\begin{array}{l} x_1 = \alpha e^{2t} + e^t(\beta \cos t + \gamma \sin t) \\ x_2 = \alpha e^{2t} + e^t(-\,\beta \sin t + \gamma \cos t) \\ x_3 = \alpha e^{2t} + e^t(\beta \sin t - \gamma \cos t) \end{array}$$

On retrouve le résultat du a) : $X = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$.

Exemple 5 On considère le système différentiel réel $(H) : X' = AX$ où $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Résoudre (H) et en déduire $\exp(tA)$.

b) Calculer directement $\exp(tA)$ et en déduire une deuxième résolution de (H).

a) Le polynôme caractéristique de A est $-(T-1)(T-2)^2$.

On pose $B_1 = A - I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B_2 = A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Comme B_2 est de rang 2, la matrice A n'est pas diagonalisable mais elle est trigonalisable. Les sous-espaces propres respectivement associés aux valeurs propres 1 et 2 sont dirigés par $u_1 = (2,0,1)$ et $u_2 = (2,1,1)$.

En posant $u_3 = (1,0,0)$, on vérifie que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et a l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

La matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3) est : $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Formons alors $a(u_1) = -e_2 - e_3 = -u_2 + 2u_3$, on en déduit que :

$$\operatorname{mat}_{(u_i)} a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = T \text{ donc que } P^{-1}AP = T.$$

Le changement de fonction inconnue défini par $X = PY$ conduit ainsi au système :

$$Y' = TY \qquad \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 - y_3 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases}$$

On en déduit $\begin{cases} y_1 = ae^t \\ y_2 = be^{2t} - cte^{2t} \\ y_3 = ce^{2t} \end{cases}$ puis, avec $X = PY$, il vient :

$$\begin{cases} x_1 = 2ae^t + (2b + c - 2ct)e^{2t} \\ x_2 = (b - ct)e^{2t} \\ x_3 = ae^t + (b - ct)e^{2t} \end{cases}$$

On sait que cette solution s'écrit aussi $X = e^{tA}X(0)$.

Or, avec $X(0) = \begin{bmatrix} 2a + 2b + c \\ b \\ a + b \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, on obtient :

$$X = \begin{bmatrix} 2e^t & 2e^{2t} & (1-2t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & -te^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t & 2e^{2t} & (1-2t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & -te^{2t} \end{bmatrix} P^{-1}X(0),$$

donc, ceci étant vrai quel que soit (a,b,c), il en résulte :

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 2e^t & 2e^{2t} & (1-2t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & -te^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{2t} & 2e^{2t} - 2e^t & (4t-2)e^{2t} + 2e^t \\ -te^{2t} & e^{2t} & 2te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} - e^t & e^t + 2te^{2t} \end{bmatrix}.$$

b) La division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)^2$ s'écrit $X^n = (X-1)(X-2)^2Q(X) + R_n(X)$ avec $R_n(X) = \left(n2^{n-1} - 2^n + 1\right)X^2 + \left(4 \cdot 2^n - 3n2^{n-1} - 4\right)X + 4 - 3 \cdot 2^n + 2n2^{n-1}$.

D'où, avec le théorème de Cayley-Hamilton :

$A^n = \left(n2^{n-1} - 2^n + 1\right)A^2 + \left(4 . 2^n - 3n2^{n-1} - 4\right)A + \left(4 - 3 . 2^n + 2n2^{n-1}\right)I_3$

puis $e^{tA} = A^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n2^{n-1} - 2^n + 1\right)\frac{t^n}{n!} + A\sum_{n=0}^{+\infty}\left(4 . 2^n - 3n2^{n-1} - 4\right)\frac{t^n}{n!}$

$$+I_3 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(4 - 3 . 2^n + 2n2^{n-1}\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Avec $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n t^n}{n!} = e^{2t}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{2^{n-1}t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n t^{n+1}}{n!} = te^{2t}$,

on en déduit :

$$e^{tA} = \left[(t-1)e^{2t} + e^t\right]A^2 + \left[(4-3t)e^{2t} - 4e^t\right]A + \left[4e^t + (2t-3)e^{2t}\right]I_3.$$

En formant A^2 on retrouve alors la matrice écrite au a).

On conclut en disant que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \exp(tA) \bullet \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ représente la solution générale de (H).

4. Équations linéaires scalaires d'ordre 2 ✎(11)

✎(11) Le cas des équations linéaires scalaires d'ordre 1 a été traité en MPSI Analyse, chapitre 2, ainsi que le cas des équations scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Il s'agit des équations différentielles :

$$(L)\ :\ x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad , \quad (H)\ :\ x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

où a, b, c sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$, la fonction inconnue (de la variable t) étant à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une solution de (L) (resp. de (H)) sur I est une application $f : I \to \mathbb{K}$, deux fois dérivable, $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$, telle que :

$$\forall t \in I, f''(t) + a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t) \quad (\text{resp. } f''(t) + a(t)f'(t) + b(t)f(t) = 0).$$

On note encore $\mathcal{S}(L)$ (resp. $\mathcal{S}(H)$) l'ensemble des solutions de (L) (resp. de (H)) sur I et on a :

$$\mathcal{S}(L) \subset \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) \ ,\ \mathcal{S}(H) \subset \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}).$$

4.1 – Système différentiel d'ordre 1 associé

Avec $E = \mathbb{K}^2$, éventuellement identifié à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, on dispose de l'application linéaire injective :

$$\theta\ :\ \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) \to \mathcal{C}^1(I, E), \quad x \mapsto X = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}.$$

Aux équations différentielles (L) et (H) correspondent les systèmes différentiels :

$$\left(L_1\right)\ : X' = A(t)X + B(t) \quad , \quad \left(H_1\right)\ : X' = A(t)X$$

où $A\ : I \to \mathcal{L}(E), t \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \quad , \quad B\ : I \to E, t \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ c(t) \end{bmatrix}$

et on constate que θ induit une bijection ✎(12) de $\mathcal{S}(L)$ (resp. de $\mathcal{S}(H)$) sur $\mathcal{S}\left(L_1\right)$ (resp. $\mathcal{S}\left(H_1\right)$).

✎(12) que l'on note encore θ.

Théorème 4

Théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire

Pour tout $(t_0, x_0, x'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une solution unique de (L) (resp. de (H)) au problème de Cauchy en ce point, c'est-à-dire une solution f de (L) (resp de (H)) sur I vérifiant :

$$f(t_0) = x_0 \text{ et } f'\left(t_0\right) = x'_0.$$

☞ Le théorème 1 assure l'existence et l'unicité d'une solution F de $\left(L_1\right)$ ou de $\left(H_1\right)$: $F \in \mathcal{C}^1(I, E)$ vérifiant $F(t_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix}$.

Par la bijection réciproque de θ, on obtient l'existence et l'unicité d'une solution f de (L) ou de (H) : $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ vérifiant $f(t_0) = x_0, f'(t_0) = x'_0$.

Théorème 5

Structure des solutions de (L) et de (H)

$\mathcal{S}(H)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.

$\mathcal{S}(L)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}(H)$.

☞ Conséquence du théorème 2. ✎(13)

✎(13) On obtient une démonstration directe de ce résultat en observant que, d'après le théorème **4**, pour tout t fixé dans I, l'application $\Phi : \mathcal{S}(H) \to \mathbb{K}^2$, $f \mapsto \big(f(t), f'(t)\big)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(H)$ sur $\mathbb{K}^2$.

4.2 – Méthode de variation des constantes

Des théorèmes précédents, on déduit :

- Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\Phi_t \ : h \mapsto \Big(h\big(t_0\big), h'\big(t_0\big)\Big)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(H)$ sur $\mathbb{K}^2$.
- Soit h_1 et h_2 deux solutions de (H), pour tout $t \in I$, le rang de (h_1, h_2) est égal au rang de la matrice : $\quad W(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ✎(14)

✎(14) $W(t)$ et $\det W(t)$ sont encore appelés **matrice wronskienne** et **wronskien** du système (h_1,h_2) en t.

- Soit $\big(h_1, h_2\big)$ une base de (H) : pour tout $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, il existe un unique couple $\big(u_1, u_2\big)$ d'applications de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ tel que : $\quad f = u_1 h_1 + u_2 h_2 \quad , \quad f' = u_1 h_1' + u_2 h_2'$ **(1).**
Ce qui fournit $\quad u_1' h_1 + u_2' h_2 = 0$.
- Avec les notations et les hypothèses précédentes, on peut énoncer :
$f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ est une solution de (L) si et seulement si le couple $\big(u_1, u_2\big)$ qui vient de lui être associé par **(1)** vérifie : $\quad u_1' h_1 + u_2' h_2 = 0 \quad u_1' h_1' + u_2' h_2' = c$ **(2).**
Les deux dernières équations forment un système linéaire aux inconnues u_1', u_2' dont la solution est $\quad u_1' = -\dfrac{h_2 c}{w} \quad , \quad u_2' = \dfrac{h_1 c}{w} \quad$ où $\quad w = \det \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}$.
La solution générale de (L) s'écrit :
$$t \mapsto \alpha h_1(t) + \beta h_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{c(u)}{w(u)} \Big(h_1(u) h_2(t) - h_2(u) h_1(t)\Big)\, \mathrm{d}u \ , \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.$$

Exemple 6 a) Trouver les solutions de l'équation différentielle (H) : $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$ de la forme $t \mapsto |t|^{\alpha}$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

b) En déduire la résolution de (L) : $t^2 x'' - 2tx' + 2x = t^4 \cos t - 1$.

a) (H) est une équation d'Euler. Elle vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

On trouve que sur chacun de ces intervalles, les solutions de la forme suggérée par l'énoncé sont $t \mapsto |t|$ et $t \mapsto |t|^2$. On en déduit que les fonctions $h_1 \ : t \mapsto t$ et $h_2 \ : t \mapsto t^2$ sont solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ (et a fortiori sur I_1 et I_2).

b) La méthode de superposition des solutions, (voir MPSI–Analyse, chapitre 2, propriété 6), peut s'appliquer avec pour seconds membres $c_1 = -1$ et $c_2 = t^4 \cos t$.

L'équation $\big(L_1\big)$ associée à c_1 admet sur $\mathbb{R}$ la solution $t \mapsto -\dfrac{1}{2}$.

Pour l'équation $\big(L_2\big)$ associée à c_2, appliquons la méthode de variation des constantes.

On trouve $\begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{vmatrix} = t^2$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^2\big(I_k, \mathbb{R}\big)$, $k = 1$ ou 2, il existe un unique couple $(u, v) \in \mathcal{C}^1\big(I_k, \mathbb{R}\big)$ tel que $f = u h_1 + v h_2$, $f' = u h_1' + v h_2'$ et f est solution de $\big(L_2\big)$ sur I_k si et seulement si :
$$t u' + t^2 v' = 0 \quad , \quad u' + 2t v' = t^2 \cos t.$$
On en déduit successivement :
$$u' = -t^2 \cos t \quad , \quad v' = t \cos t$$
$$u = -t^2 \sin t - 2t \cos t + 2 \sin t + \lambda \quad , \quad v = t \sin t + \cos t + \mu$$
$$f(t) = 2t \sin t - t^2 \cos t + \lambda t + \mu t^2$$

D'où les solutions sur I_k, $k \in \{1,2\}$: $t \mapsto \lambda t + \mu t^2 - \frac{1}{2} + 2t\sin t - t^2 \cos t$.

On pourra vérifier que ce sont aussi les solutions sur $\mathbb{R}$. Donc, dans cet exemple, l'ensemble des solutions de (L) sur $\mathbb{R}$ est aussi un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ce que ne permet pas de prévoir le théorème de Cauchy-Lipschitz.

4.3 – Méthode ramenant à une équation du premier ordre

Théorème 6

Si φ est une solution de (H) ne s'annulant pas sur I, il existe une équation linéaire du premier ordre (L') (resp. (H')) telle que, pour tout $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{K})$, f est solution de (L) (resp. de (H)) si et seulement si g' dérivée de $g = \dfrac{f}{\varphi}$ est solution de (L') (resp (H')) sur I.

On retiendra que le changement de fonction inconnue défini par $x = y\varphi$ ramène à la résolution d'une équation du premier ordre en $z = y'$.

☞ Cette méthode a été exposée dans le cadre des équations à coefficients constants (MPSI–Analyse, chapitre 2, propriété 7).

Le calcul est strictement identique :

f est solution de (L) (resp. de (H)) si et seulement si $h = g'$ est solution sur I de :

$$z' + z\left(a(t) + 2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right) = \frac{c(t)}{\varphi(t)} \qquad \text{(resp. = 0).}$$

Exemple 7 Résoudre l'équation différentielle (E) : $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

On remarque tout d'abord que (E) vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et $I_2 =]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Par identification, on trouve que (E) admet sur I_k, $k \in \{1,2\}$ une et une seule solution de la forme indiquée, il s'agit de $x \mapsto e^{-2x}$.

Cette fonction ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la méthode s'applique sans difficulté et le changement de fonction inconnue défini par $y = ze^{-2x}$ donne que y est solution de (E) sur I_k si et seulement si z est solution sur le même intervalle de (E') : $(2x+1)z'' - (4x+6)z' = 0$.

On obtient alors $z' = \lambda(2x+1)^2 e^{2x}$ puis $z = A\left(4x^2+1\right)e^{2x} + B$.

L'espace vectoriel des solutions de (E) sur I_k, $k \in \{1,2\}$ est donc décrit par

$$x \mapsto A_k\left(4x^2+1\right) + B_k e^{-2x} \text{ avec } \left(A_k, B_k\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Si f est une solution (éventuelle) sur $\mathbb{R}$, il existe $\left(A_1, B_1, A_2, B_2\right) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$f(x) = A_1\left(4x^2+1\right) + B_1 e^{-2x} \text{ pour } x < -\frac{1}{2} \text{ et } f(x) = A_2\left(4x^2+1\right) + B_2 e^{-2x} \text{ pour } x > \frac{1}{2}.$$

La continuité de f en $-\frac{1}{2}$ exige $2A_1 + eB_1 = 2A_2 + eB_2$.

En supposant cette condition réalisée, on constate que la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2A_1 + eB_1$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4A_1 - 2eB_1$, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 8A_1 + 4eB_1$ et donc qu'elle est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 3. ✎[15]

✎[15] Une base est par exemple (f_1, f_2, f_3) avec : $f_1 : x \mapsto 4x^2+1$, $f_2 : x \mapsto e^{-2x}$ et f_3 telle que $f_3(x) = 0$ si $x \leqslant -\frac{1}{2}$ et $f_3(x) = e(4x^2+1) - 2e^{-2x}$ si $x \geqslant -\frac{1}{2}$.

B. Équations non linéaires

1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

✎[16] f est solution sur I de (E) se dit aussi (I,f) est solution de (E).

Définition 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
Pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, on dit que $f\ : I \to \mathbb{R}$ est solution sur I ✎[16] de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y^{(n)} = F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

si et seulement si f est n fois dérivable sur I et telle que :

$$\forall x \in I,\ \left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)\right) \in \Omega$$

et
$$f^{(n)}(x) = F\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)\right).$$

✎[17] c'est-à-dire que si g est solution sur $J \supset I$ et coïncide avec f sur I, on a $J = I$ et donc $g = f$.

Définition 4

On dit que la solution (I,f) de l'équation (E) est maximale lorsqu'il n'existe aucune solution la prolongeant strictement. ✎[17]

Théorème 7

Théorème de Cauchy-Lipschitz d'ordre 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout point $\left(x_0, y_0\right)$ de Ω, l'équation différentielle d'ordre 1 $(E)\ :\ y' = f(x,y)$ admet une unique solution maximale $\varphi\ : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varphi\left(x_0\right) = y_0$, l'intervalle I est ouvert.

Théorème 8

Théorème de Cauchy-Lipschitz d'ordre 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout point $\left(x_0, y_0, y'_0\right)$ de Ω, l'équation différentielle d'ordre 2 $(E)\ :\ y'' = f\left(x, y, y'\right)$ admet une unique solution maximale $\varphi\ :\ I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varphi\left(x_0\right) = y_0$, $\varphi'\left(x_0\right) = y'_0$, l'intervalle I est ouvert.

☞ Les démonstrations de ces théorèmes sont hors programme.

Remarques

1) Une solution $\varphi\ : I \to \mathbb{R}$ de $(E)\ :\ y' = f(x,y)$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ vérifie pour tout $x \in I\ :\ \left(x, \varphi(x)\right) \in \Omega$ et $\varphi'(x) = f\left(x, \varphi(x)\right)$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
   Cette remarque s'applique aussi à l'ordre deux où on obtient φ de classe $\mathcal{C}^3$ sur I.
2) Dans le cas de l'équation $(E)\ :\ y' = f(x,y)$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, par tout point $\left(x_0, y_0\right)$ de Ω «passe » une solution et une seule, les courbes intégrales ne se coupent donc jamais.
   Dans le cas de l'équation $(E)\ :\ y'' = f\left(x, y, y'\right)$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, par tout élément $\left(x_0, y_0, y'_0\right)$ de Ω, (appelé élément de contact), «passe» une solution ; deux courbes intégrales passant par le point $\left(x_0, y_0\right)$ ont des tangentes distinctes en ce point.
3) Lorsque la **fonction nulle** est solution de l'équation (E) :
   - $(E)\ :\ y' = f(x,y)$, pour toute autre solution $(I, \varphi)\ :\ \forall x \in I, \varphi(x) \neq 0$.
   - $(E)\ :\ y'' = f(x, y, y')$, pour toute autre solution (I, φ), $\forall x \in I,\ \left(\varphi(x), \varphi'(x)\right) \neq (0,0)$.
4) Si $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $y\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction **croissante**, solution **maximale** de (E) :
   $y' = f(x,y)$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} y(x) = +\infty$.

En effet, envisageons le cas d'une limite finie $c = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} y(x)$, (seule autre possibilité pour une fonction croissante), alors y admet un prolongement $\widetilde{y}$ sur $]a, b]$, dérivable en b, par :

$$\widetilde{y}(b) = c \ , \ \widetilde{y}\,'(b) = f(b, c).$$

Cette fonction $\widetilde{y}$ est solution de (E) prolongeant strictement la solution maximale y, ce qui est contradictoire. Le seul cas possible est donc $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} y(x) = +\infty$.

5) Dans tout ce qui suit, pour simplifier le langage, on convient que l'expression : φ est **solution** de (E), signifie en fait que : φ est **solution maximale** de (E).

Exemple 8 Étude de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = \sin y$.

a) Montrer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les solutions constantes de (E) et montrer que les autres solutions sont strictement monotones.

c) On considère la solution $\varphi\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que $\varphi(x) = \pi - \varphi(-x)$.

Trouver l'expression de $\varphi(x)$; retrouver le résultat précédent par le calcul.

Dessiner sa courbe $\mathscr{C}$. A-t-elle un centre de symétrie ?

d) Montrer que toutes les courbes intégrales non rectilignes sont isométriques à $\mathscr{C}$.

a) Le théorème de Cauchy-Lipschitz d'ordre un s'applique en tout point $\left(x_0, y_0\right)$ de $\mathbb{R}^2$, car la fonction $f\ :\ (x, y) \mapsto \sin y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Soit ψ une solution maximale sur $I =]a, b[$, $a < b$.

Supposons $b < +\infty$, en écrivant pour $x_0 \in I$:

$$\forall x \in I,\ \ \psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \sin t \mathrm{d}t,$$

on voit que ψ a une limite finie c en b, $c = \psi\left(x_0\right) + \displaystyle\int_{x_0}^{b} \sin t \mathrm{d}t$.

On peut alors définir un prolongement $\widetilde{\psi}$ de ψ sur $]a, b]$ en posant $\widetilde{\psi}(b) = c$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ avec $\widetilde{\psi}'(b) = \sin c$ ✎(18) , c'est donc une solution de (E) sur $]a, b]$ prolongeant strictement la solution ψ, ce qui est contradiction avec le caractère maximal de ψ. Il en résulte $b = +\infty$.

✎(18) $\widetilde{\psi}$ est continue sur $]a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ et de plus : $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} \widetilde{\psi}'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} \psi'(x) = \sin c.$

De même $a = -\infty$: toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Les solutions constantes de (E) sont $y_k\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto k\,\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Pour toute autre solution, $\sin y$ ne s'annule pas, (les courbes intégrales sont deux à deux disjointes, cf. Remarques 2)).

Chaque courbe est tracée dans une bande : $k\pi < y < (k+1)\pi$. Or, pour $y \in \left]k\pi, (k+1)\pi\right[$, $\sin y$ est non nul et du signe de $(-1)^k$, donc y est strictement monotone, croissante si k est pair, décroissante si k est impair.

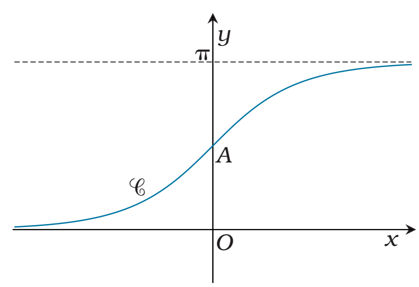
c) Comme $\varphi'(-x) = \sin \varphi(-x) = \sin\left[\pi - \varphi(-x)\right]$, la fonction $\theta\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \pi - \varphi(-x)$ est aussi solution de (E) et vérifie $\theta(0) = \dfrac{\pi}{2}$. L'unicité d'une telle solution exige $\theta = \varphi$.

D'après b), la fonction φ est à valeurs dans $]0, \pi[$.

D'où le calcul :

$$1 = \frac{\varphi'}{\sin \varphi} = \left(\ell n \tan \frac{\varphi}{2}\right)' \qquad \ell n \tan \frac{\varphi}{2} = x$$

$$\varphi(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\, e^x.$$



Avec $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{u} = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, u \quad$ pour $u > 0$, on obtient $\quad \varphi(-x) = \pi - \varphi(x)$.

Le point $A\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

d) Soit ψ une solution non constante quelconque, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\psi(\mathbb{R})\subset\left]p\pi,(p+1)\pi\right[$ et le même calcul qu'en c) donne :

$$1=\frac{\psi'}{\sin\psi}\quad\text{d'où}\quad \ell n\left|\tan\frac{\psi}{2}\right|=x-a$$

- si p est pair : $p=2k$, on obtient :

$$\psi(x)=2k\,\pi+2\operatorname{Arctan}e^{x-a}=2k\,\pi+\varphi\,(x-a)\,;$$

- si p est impair, $p=2k+1$, on obtient :

$$\psi(x)=(2k+2)\,\pi-2\operatorname{Arctan}e^{x-a}=2(k+1)\,\pi-\varphi\,(x-a).$$

On en déduit que $\mathscr{C}_\psi$, courbe intégrale de ψ, se déduit de $\mathscr{C}$, soit dans la translation de vecteur $a\,\vec{i}+2k\pi\,\vec{j}$, soit dans le produit de la translation de vecteur $a\,\vec{i}+2(k+1)\pi\,\vec{j}$ et de la symétrie par rapport à Ox.

Exemple 9 $(E)\ :\ yy''=1+y'^2$. Trouver la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie : $y(0)=1\ ,\ y'(0)=0$.

En déduire toutes les autres solutions de (E).

a) Remarques sur l'équation (E)

Soit $y\ :I\to\mathbb{R}$ une solution de (E), alors $x\mapsto -y(x)\ ,\ x\mapsto y(x-\mu)$ et $x\mapsto\lambda y\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ sont aussi des solutions. Observons que, d'après (E), y ne s'annule pas, on est en fait ramené à résoudre $y''=\dfrac{1+y^2}{2}$.

b) Application du théorème de Cauchy-Lipschitz d'ordre deux

Avec l'ouvert $\Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^3$ et la fonction :

$$f\ :\ \Omega\to\mathbb{R},\ \left(x,y,y'\right)\mapsto\frac{1+y'^2}{y},$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, pour tout $\left(x_0,y_0,y_0'\right)\in\Omega$, il existe une unique solution maximale de $(E)\ :\ y''=\dfrac{1+y'^2}{y}$, vérifiant :

$$\varphi\left(x_0\right)=y_0,\ \varphi'\left(x_0\right)=y_0'.$$

Il est visible que la solution demandée est $x\mapsto\operatorname{ch}x$, définie sur $\mathbb{R}$, donc, d'après les remarques préliminaires, toute fonction :

$$\psi_{\lambda,\mu}\ :x\mapsto\lambda\operatorname{ch}\frac{x-\mu}{\lambda}\quad(\lambda\in\mathbb{R}^*,\mu\in\mathbb{R})\quad\text{est solution sur }\mathbb{R}.$$

Soit alors φ la solution (maximale) telle que :

$$\varphi\left(x_0\right)=y_0\quad,\quad\varphi'\left(x_0\right)=y_0'\quad\left(x_0,y_0,y_0'\right)\in\Omega$$

par identification, on constate que pour :

$$\lambda=\frac{y_0}{\sqrt{1+y_0'^2}}\quad\text{et}\quad\mu=x_0-\frac{y_0\operatorname{Argsh}y_0'}{\sqrt{1+y_0'^2}},$$

la fonction $\psi_{\lambda,\mu}$ vérifie aussi :

$$\psi_{\lambda,\mu}\left(x_0\right)=y_0\text{ et }\psi_{\lambda,\mu}'\left(x_0\right)=y_0'.$$

Donc par unicité pour le problème de Cauchy, on a $\varphi=\psi_{\lambda,\mu}$ et φ est solution sur $\mathbb{R}$.

2. Systèmes différentiels autonomes d'ordre 2

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 5

Champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$

Soit F une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^2$ de composantes f et g.

$$F \; : \; U \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \; \mapsto \big(f(x, y), g(x, y)\big)$$

$$\text{ou} \quad F \; : \; U \to \mathbb{R}^2, \quad M \; \mapsto \big(f(M), g(M)\big) \quad \text{en notant } (x, y) = M.$$

Le **champ de vecteurs** associé à F (ou au couple (f, g)) est l'application $V \; : \; U \to U \times \mathbb{R}^2$ qui à tout point M de U associe le couple (M, M_1) tel que $M_1 = M + F(M)$: ✎(19)

$$V \; : \; M \mapsto \big(M, M + F(M)\big).$$

✎(19) En langage géométrique traditionnel, le couple (M,M_1) est aussi appelé un **bipoint** ou encore **vecteur lié** et noté $\overrightarrow{MM_1}$.

Exemple : **Le champ des vitesses d'un solide à un instant t**

Soit le mouvement d'une plaque plane S glissant sur un plan P fixe de $\mathbb{R}^3$ euclidien.

On prouve en cinématique qu'à tout instant t, il existe un vecteur $\overrightarrow{\Omega_t}$ (rotation instantanée) orthogonal à P tel que M_0 étant un point de S, la vitesse $\overrightarrow{V_t(M)}$ de tout point M de S à l'instant t est :

$$\overrightarrow{V_t(M)} = \overrightarrow{V_t(M_0)} + \overrightarrow{\Omega_t} \wedge \overrightarrow{M_0M}.$$

L'application $S \to S \times \mathbb{R}^2$, $M \mapsto (M, M_1)$ avec $M_1 = M + \overrightarrow{V_t(M)}$ est le **champ des vitesses** du solide S à l'instant t. ✎(20)

✎(20) Dans ce cas particulier, ce champ de vitesses est un torseur (voir le cours de physique).

Définition 6

Soit $F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$ de composantes f et g.

Le système différentiel :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, y) \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x, y) \end{cases}$$

équivalent à l'équation différentielle vectorielle :

$$(\Sigma') \; : \; \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = F(M)$$

est appelé **système autonome** associé à $F = (f, g)$. ✎(21)

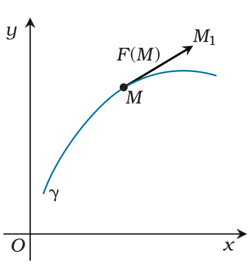
✎(21) La fonction F ne dépend pas de la variable t.

Une solution de ce système sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une application $\Phi = (\varphi, \psi)$ de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad \Phi'(t) = F\big(\Phi(t)\big)$$

ou encore : $$\varphi'(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \quad , \quad \psi'(t) = g\big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$

L'arc γ paramétré par $t \mapsto M = \big(\varphi(t), \psi(t)\big)$, $t \in I$, est alors appelé une **trajectoire** ou **orbite** du système (Σ) (ou de l'équation (Σ')), ou aussi du champ de vecteurs associé à F.



Remarques

1) La terminologie est évidemment héritée de la cinématique. En effet, si F définit le champ des vitesses d'une famille de points en mouvement dans un plan P, les trajectoires de ces points sont des arcs qui, en tout point M, admettent pour vecteur tangent le vecteur vitesse $F(M)$.

2) Φ est solution de (Σ) sur I se dit aussi (I, Φ) est solution de (Σ).

Définition 7

On dit que la solution (I, Φ) est **maximale** lorsqu'il n'existe pas de solution la prolongeant strictement.

C'est-à-dire que pour toute solution (J, Ψ) telle que $J \subset I$ et $\Phi_{|I}$ on a $I = J$ et $\Phi = \Psi$.

Soit f et g dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et le système autonome :

$$(\Sigma) \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, y) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x, y).$$

Propriété 3

Si $\Phi = (\varphi, \psi)$ est une solution de (Σ) sur I, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$, en posant $I_1 = I + h = \{t + h \,/\, t \in I\}$:

$$\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \varphi(t - h) \quad \text{et} \quad \psi_1 : I_1 \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \psi(t - h)$$

$\Phi_1 = \left(\varphi_1, \psi_1\right)$ est solution de (Σ) sur I_1. ✎ (22)

✎ (22) On dit que la famille des solutions du système (Σ) est invariante par translation de la variable.
Ceci justifie le qualificatif **autonome** attribué au système (Σ).

☞ Propriété évidente due au fait que la variable t n'intervient pas explicitement dans le système.

On remarquera que Φ et Φ_1 définissent la même trajectoire du système (Σ).

Théorème 9

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $\left(x_0, y_0\right) \in U$, il existe une unique solution maximale $\left(I, \Phi_0\right)$ de (Σ) vérifiant :

$$\Phi\left(t_0\right) = \left(x_0, y_0\right).$$

L'intervalle I est ouvert.

☞ Résultat admis.

Corollaire

Par tout point $\left(x_0, y_0\right) \in U$, il passe une trajectoire et une seule du système (Σ).

L'essentiel

I. Équations linéaires

✔ **Si l'on veut** déterminer une solution particulière d'une équation linéaire à coefficients polynomiaux,

- **on peut** penser à rechercher cette solution sous la forme de la somme d'une série entière.
Cette méthode peut également aboutir avec un second membre non polynomial mais développable en série entière.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2.

✔ **Si l'on veut** résoudre une équation linéaire à coefficients non constants,

- **on peut** penser à rechercher un changement de variable qui la transforme en une équation à coefficients constants.
→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 3.

✔ **Si l'on veut** résoudre une inéquation :

$$(I)\ :\ af'' + bf' + cf \geqslant 0,$$

- **on peut** se ramener à la résolution d'une équation différentielle en observant que (I) équivaut à :

$$af'' + bf' + cf = \varphi \text{ avec } \varphi \text{ positive.}$$

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 4.

✔ **Si l'on veut** interpréter une limite :

$$(L)\ :\ \lim(af'' + bf' + cf) = \ell,$$

- **on peut** se ramener à une équation différentielle en écrivant cette condition :

$$af'' + bf' + cf = \varphi \text{ avec } \lim \varphi = \ell.$$

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 5.

✔ **Si l'on veut** résoudre un système différentiel linéaire du deuxième ordre aux inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$X'' = AX' + BX + C(t)$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{C}^0\big(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$,

- **on peut**

  - lorsque A est nulle, étudier la réduction de B et opérer comme pour les systèmes du premier ordre :
  1) si B est diagonalisable, en notant P une matrice diagonalisant B, le changement de fonctions inconnues défini par $X = PY$ ramène à un système de n équations du type $y_k'' = \lambda_k y_k + d_k(t)$;
  2) sinon il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}BP$ soit triangulaire et le changement de fonctions inconnues défini par $X = PY$ ramène à un système à inconnues échelonnées ;

  - dans le cas général, observer qu'en introduisant les inconnues auxiliaires $x_{n+k} = x_k'$, $1 \leqslant k \leqslant n$, on obtient un système linéaire du premier ordre aux inconnues $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7.

Méthodes

II. Équations non linéaires

On considère une équation $(E)\ :\ y' = f(x,y)$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$.

✔ **Si l'on veut** établir la parité (resp. imparité) (resp. T-périodicité) de la solution maximale φ du problème de Cauchy en un point (x_0, y_0),

- **on peut** introduire la fonction $\psi\ :\ x \mapsto \varphi(-x)$ (resp. $x \mapsto -\varphi(-x)$) (resp. $x \mapsto \varphi(x+T)$) puis, à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer que φ et ψ coïncident.
  $\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 8.

✔ **Si l'on veut** établir que l'intervalle de définition $I =]a,b[$ de la solution maximale φ au problème de Cauchy en (x_0, y_0) est non majoré (resp. non minoré),

- **on peut** raisonner par l'absurde en montrant que, si b (resp. a) était fini, φ admettrait sur $]a,b]$ (resp $[a,b[$) un prolongement ψ de classe $\mathcal{C}^1$ lui aussi solution de (E) ce qui contredit le caractère maximal de φ.
  $\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 8.

✔ **Si l'on veut** résoudre (E) dans le cas où $f(x,y) = \dfrac{u(x)}{v(y)}$,

l'équation $(E)\ :\ y' = \dfrac{u(x)}{v(y)}$ est dite **à variables séparables**,

- **on peut** observer que si (I,φ) est une solution de (E) alors, U et V étant des primitives de u et v sur I et $\varphi(I)$ respectivement, on a :
  $$\forall x \in I,\quad V\big(\varphi(x)\big) = U(x) + k,\quad k \in \mathbb{R}.$$
  $\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 9.

✔ **Si l'on veut** résoudre (E) dans le cas où $f(x,y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

l'équation $(E)\ :\ y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ est dite **homogène en** (x,y),

- **on peut** utiliser que si (I,φ) est une solution de (E), telle que $0 \notin I$, alors la fonction définie par $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$ est solution sur I d'une équation à variables séparables.
  En effet, on a alors $\varphi'(x) = \psi(x) + x\,\psi'(x)$ donc :
  $$\forall x \in I,\quad \psi'(x) = \frac{F\big(\psi(x)\big) - \psi(x)}{x}.$$
  $\rightarrow$ Voir *Mise en œuvre*, exercice 10.

Mise en œuvre

I. Équations linéaires

Ex. 1

Résoudre l'équation différentielle $(H)\ :\ tx'' + 2x' - tx = 0$.

Indications

Déterminer les solutions développables en série entière. Puis achever la résolution avec la méthode du théorème 6.

Solution

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$ et de somme f.

f est solution de (H) sur $]-\rho,\rho[$ si et seulement si :

$$\forall t\in]-\rho,\rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

soit $2a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+3)a_{n+2} - a_n\right] t^{n+1} = 0$ ou encore :

$$2a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n\geqslant 0, (n+2)(n+3)a_{n+2} - a_n = 0. \qquad (\mathcal{R})$$

La relation $(\mathcal{R})$ et le critère de d'Alembert donnent $\rho = +\infty$. Donc la somme d'une série entière dont les coefficients vérifient $(\mathcal{R})$ est solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

De $(\mathcal{R})$, on déduit $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0,\ a_{2n} = \dfrac{\lambda}{(2n+1)!}$ (avec $\lambda = a_0$).

Ainsi les solutions de (H) développables en série entière sont les fonctions :

$$f_\lambda\ :\ t\mapsto \lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f_\lambda(t) = \lambda\frac{\operatorname{sh} t}{t}.$$

L'équation (H) satisfait aux conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0,+\infty[$.

Transformons (H) par le changement de fonction inconnue défini sur I_1 ou sur I_2 par $x = y\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$.

On trouve que x est solution de (H) sur I_1 ou sur I_2 si et seulement si :

$$y''\operatorname{sh} t + 2y'\operatorname{ch} t = 0$$

d'où on déduit $y' = \dfrac{\lambda}{\operatorname{sh}^2 t}$, $y = a\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} + b$ puis $x = a\dfrac{\operatorname{ch} t}{t} + b\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$.

Les solutions de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ sont :

$$t\mapsto a\frac{\operatorname{ch} t}{t} + b\frac{\operatorname{sh} t}{t},\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Commentaires

Cette technique a déjà été rencontrée dans le chapitre 5 à propos de l'utilisation d'une équation différentielle pour calculer un développement en série entière.

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle.

Le calcul est le même sur I_1 ou sur I_2, il n'y a donc pas lieu de séparer les deux cas.

On vérifie que les solutions sur $\mathbb{R}$ sont : $t\mapsto b\frac{\operatorname{sh} t}{t}$ prolongées par continuité en 0.

Ex. 2

Résoudre l'équation différentielle $(L)\ :\ 2xy' + y = 3x\cos x^{\frac{3}{2}}$.

Indications

Observer que $x \mapsto \cos x^{\frac{3}{2}}$ coïncide sur $[0, +\infty[$ avec la somme d'une série entière.

Solution

L'équation (L) vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur $]0, +\infty[$.

La solution générale sur cet intervalle de l'équation homogène associée est :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x}}.$$

Recherchons alors une solution particulière de (L) sous la forme de la somme d'une série entière.

Remarquons d'abord que pour tout $x \geqslant 0$, $3x\cos x^{\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3x^{3n+1}}{(2n)!}$.

Soit alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$ et de somme f.

f est solution de (L) sur $[0, \rho[$ si et seulement si :

$$\forall x \in [0, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3x^{3n+1}}{(2n)!},$$

donc si et seulement si $a_n = 0$ pour tout $n \in \{3k\ /\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k+2\ /\ k \in \mathbb{N}\}$ et $(6k+3)a_{3k+1} = \frac{3(-1)^k}{(2k)!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On déduit de ce calcul qu'il existe au plus une série entière de rayon ρ non nul dont la somme f est solution de (L) sur $[0, \rho[$, il s'agit de :

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{(2n+1)!}.$$

On vérifie alors que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ et le calcul précédent montre que f est solution de (L) sur $[0, +\infty[$.

En remarquant que pour tout $x > 0$, $x^{3n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{2n+1}$, il vient :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

En conséquence, la solution générale de (L) sur $]0, +\infty[$ est :

$$x \mapsto \frac{\sin\left(x\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Commentaires

Les coefficients $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{3}{2}\cos x^{\frac{3}{2}}$ sont continus sur $]0,+\infty[$.

En effet on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

En toute rigueur il ne s'agit pas de f mais de sa restriction à $[0,\rho[$.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On constate que sur $[0,+\infty[$, (L) admet une solution et une seule : c'est $f_{[0,+\infty[}$.

Ex. 3

Résoudre l'équation différentielle $(H)\ :\ \left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right)y' + y = 0.$

Indications

Trouver un changement de variable défini par $x = \varphi(t)$ transformant (H) en une équation à coefficients constants.

Solution

(H) vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur $\mathbb{R}$.
Soit φ un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de I sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Posons $g = f \circ \varphi$.
Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, avec $f = g \circ \varphi^{-1}$, en posant $t = \varphi^{-1}(x)$, il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = g'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \frac{g'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$f''(x) = \frac{g''(t)}{\varphi'^2(t)} - g'(t)\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

Donc f est solution de (L) si et seulement si g vérifie :

$$\frac{\left(1+\varphi^2\right)^2}{\varphi'^2}g'' + \left(\frac{2\varphi\left(1+\varphi^2\right)}{\varphi'} - \frac{\varphi''\left(1+\varphi^2\right)^2}{\varphi'^3}\right)g' + g = 0.$$

Remarquons que dans cette équation, le coefficient de g' est, à un facteur 2 près, la dérivée de $\dfrac{\left(1+\varphi^2\right)^2}{\varphi'^2}$

Ainsi en choisissant φ tel que $\dfrac{1+\varphi^2}{\varphi'} = 1$, on obtient :

$$\forall t \in I,\quad g''(t) + g(t) = 0 \qquad (H')$$

Un couple (I,φ) réalisant ces conditions est constitué de $\varphi\ :\ t \mapsto \tan t$ avec $I = \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

L'équation (H') donne alors $g(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t$ et la solution générale de (H) est donc :

$$x \mapsto \lambda\cos\left(\operatorname{Arctan} x\right) + \mu\sin\left(\operatorname{Arctan} x\right)$$

c'est-à-dire $\quad x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{\mu x}{\sqrt{1+x^2}}.$

Commentaires

L'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On sait que $\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)} = \dfrac{1}{\varphi'\circ\varphi^{-1}(x)}$.

Dans ce genre de calcul, il est avantageux pour composer les dérivations d'utiliser la notation différentielle :
avec $y = f(x) = g(t)$, on a
$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $g'(t) = \dfrac{dy}{dt}$,
d'où $f'(x) = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\varphi'(t)}\cdot\dfrac{dy}{dt}$,
puis $f''(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)}\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dt}{dx} - \dfrac{\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\dfrac{dt}{dx}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

$= \dfrac{1}{\varphi'^2(t)}\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}\cdot\dfrac{dy}{dt}$.

La condition $\dfrac{\varphi'}{1+\varphi^2} = 1$ donne
$\operatorname{Arctan}\varphi(t) = t - a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Ex. 4

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f''(x) \geqslant 0 \quad$ **(1)**.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Indications

Écrire la condition **(1)** sous la forme d'une équation différentielle et résoudre celle-ci par la méthode de variation des constantes.

Solution

D'après **(1)**, il existe $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x) = g(x) \ \text{ et } \ g(x) \geqslant 0.$$

Utilisons la méthode de variation des constantes : il existe $(u,v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ tel que pour tout x réel,

$$\begin{cases} f(x) = u(x)\cos x + v(x)\sin x \\ f'(x) = -u(x)\sin x + v(x)\cos x \end{cases}$$

et $(u'(x), v'(x))$ est alors défini par le système

$$\begin{cases} u'(x)\cos x + v'(x)\sin x = 0 \\ -u'(x)\sin x + v'(x)\cos x = g(x) \end{cases}$$

Commentaires

Une base de l'espace des solutions de l'équation homogène $y''+y=0$ est $(\cos,\sin)$.

On en déduit $u'(x) = -g(x)\sin x,\ \ v'(x) = g(x)\cos x$

puis $u(x) = a - \displaystyle\int_0^x g(t)\sin t\mathrm{d}t,\ \ v(x) = b + \int_0^x g(t)\cos t\mathrm{d}t,$

et enfin $f(x) = a\cos x + b\sin x + \displaystyle\int_0^x g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t.$

Formons alors

$$f(x)+f(x+\pi) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{x+\pi}^x g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\pi} g(x-u)\sin u\mathrm{d}u.$$

La conclusion résulte alors de la positivité de g sur $\mathbb{R}$ et de $\sin$ sur $[0,\pi]$.

On regroupe les intégrales puis on effectue le changement de variable défini par $u = x - t$.

Ex. 5

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)+f'(x)+f(x) = \ell,\ \ \ell\in\mathbb{R}.$

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$

Indications

Commencer par prouver qu'il suffit d'étudier le cas où $\ell = 0$, puis poser $h = f''+f'+f$.

Solution

Posons $g = f - \ell$, on a encore g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et l'hypothèse se lit :

$$\lim_{x\to+\infty} g''(x)+g'(x)+g(x) = 0.$$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ équivaut à $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ donc, pour que la propriété soit vraie avec ℓ réel quelconque il faut et il suffit qu'elle le soit pour $\ell = 0$.

On suppose maintenant $\ell = 0$.

La fonction $h = f''+f'+f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x) = 0.$

f est ainsi solution de l'équation différentielle :

$$(L)\ :\quad y''+y'+y = h(x).$$

L'équation homogène associée, $(H)\ :\ \ y''+y'+y = 0$, a pour solution générale :

$$x \mapsto ae^{jx} + be^{j^2x},\ \ (a,b)\in\mathbb{C}^2.$$

Appliquons la méthode de variations des constantes. On sait alors qu'il existe u et v de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$f(x) = u(x)e^{jx} + v(x)e^{j^2x} \qquad \textbf{(1)}$$
$$f'(x) = ju(x)e^{jx} + j^2v(x)e^{j^2x} \qquad \textbf{(2)}$$

et les dérivées $u'(x)$, $v'(x)$ sont définies par :

$$u'(x)e^{jx} + v'(x)e^{j^2x} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$
$$ju'(x)e^{jx} + j^2v'(x)e^{j^2x} = h(x) \qquad \textbf{(4)}$$

Commentaires

La linéarité des applications $\lim\limits_{x\to+\infty}$ et $f\mapsto f''+f'+f$ permet, par translation de la fonction, de se ramener au cas où $\ell = 0$.

h étant continue sur $\mathbb{R}$, cette équation vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur $\mathbb{R}$.

$j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$

On considère les solutions à valeurs complexes.

(3) s'obtient en dérivant **(1)** et en comparant avec **(2)**.

(4) s'obtient en dérivant **(2)** et en écrivant que f est solution de (L).

On en déduit :

$$u'(x) = -\frac{e^{(1+j^2)x}h(x)}{j^2-j} \quad , \quad v'(x) = \frac{e^{(1+j)x}h(x)}{j^2-j} \,,$$

$$u(x)=\lambda+\frac{1}{i\sqrt{3}}\int_0^x e^{-jt}h(t)\mathrm{d}t$$
$$v(x)=\mu-\frac{1}{i\sqrt{3}}\int_0^x e^{-j^2t}h(t)\mathrm{d}t.$$

puis :

$$f(x) = \lambda e^{jx} + \mu e^{j^2x} + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^x e^{\frac{t-x}{2}}h(t)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\mathrm{d}t.$$

Avec $\left|e^{jx}\right| = \left|e^{j^2x}\right| = e^{-\frac{x}{2}}$, il est clair que $\lim\limits_{+\infty} e^{jx} = \lim\limits_{+\infty} e^{j^2x} = 0$, on est donc ramené à étudier la limite de :

$$F(x) = \int_0^x e^{\frac{t-x}{2}}h(t)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\mathrm{d}t\,.$$

Une majoration donne :

$$|F(x)| \leqslant \int_0^x e^{\frac{t-x}{2}}|h(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

donc en posant $A = \|\, h\,\|_\infty^{[0,+\infty[}$ et $M(x) = \|\, h\,\|_\infty^{\left[\frac{x}{2},+\infty\right[}$, il vient :

h étant continue sur $[0,+\infty[$ et admettant une limite finie en $+\infty$, elle est bornée sur $[0,+\infty[$ d'où l'existence de A et $M(x)$.

$$|F(x)| \leqslant A\int_0^{\frac{x}{2}} e^{\frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t + M(x)\int_{\frac{x}{2}}^x e^{\frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 2Ae^{-\frac{x}{4}} + 2M(x).$$

$$\int_0^{\frac{x}{2}} e^{\frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t=2\left(e^{-\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)$$
$$\int_{\frac{x}{2}}^x e^{\frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t=2\left(1-e^{-\frac{x}{4}}\right)$$

Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = 0$, il vient $\lim F(x) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.

Puisque $\lim\limits_{+\infty} h=0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe x_0 tel que quel que soit $x\geqslant x_0$, $|h(x)|\leqslant\varepsilon$. Donc pour tout $x\geqslant 2x_0$, $M(x)\leqslant\varepsilon$.

Ex. 6

Résoudre le système différentiel (L) : $\begin{cases} x'' = 3x+y+e^t \\ y'' = 2x+2y+e^{2t}\end{cases}$

Indications

La matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2\end{bmatrix}$ est diagonalisable.

Solution

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\,\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4).$$

Les calculs de diagonalisation donnent :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Introduisons alors les fonctions inconnues X et Y définies par :

$$\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} X \\ Y\end{bmatrix}.$$

Commentaires

Puisqu'elle admet deux valeurs propres distinctes, la matrice A est diagonalisable.

La solution générale de $X''=X$ s'écrit $X=ae^t+be^{-t}$.

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ est solution de (L) si et seulement si $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ est solution de :

$$(L') \ : \ \begin{cases} X'' = X + \dfrac{e^t - e^{2t}}{3} \\ Y'' = 4Y + \dfrac{2e^t + e^{2t}}{3} \end{cases}$$

La solution générale de (L') est définie par :

$$\begin{cases} X = ae^t + be^{-t} + \dfrac{1}{6}te^t - \dfrac{1}{9}e^{2t} \\ Y = ce^{2t} + de^{-2t} + \dfrac{t}{12}e^{2t} - \dfrac{2}{9}e^t \end{cases} \quad \text{avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

On conclut à l'aide des relations $x = X + Y$ et $y = -2X + Y$:

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{t}{6} + a - \dfrac{2}{9}\right)e^t + be^{-t} + \left(\dfrac{t}{12} + c - \dfrac{1}{9}\right)e^{2t} + de^{-2t} \\ y = -\left(\dfrac{t}{3} + 2a + \dfrac{2}{9}\right)e^t - 2be^{-t} + \left(\dfrac{t}{12} + c + \dfrac{2}{9}\right)e^{2t} + de^{-2t} \end{cases}$$

$X'' = X + \frac{e^t}{3}$ admet une solution particulière de la forme $X = \lambda te^t$ et par identification, on trouve $\lambda = \frac{1}{6}$.

$X'' = X - \frac{e^{2t}}{3}$ admet une solution particulière de la forme $X = \mu e^{2t}$ et une identification donne $\mu = -\frac{1}{9}$.

Le principe de superposition des solutions (cf. MPSI-Analyse chap. 2) fournit alors une solution de $X'' = X + \frac{e^t - e^{2t}}{3}$.

La seconde équation de (L') se résoud de même.

$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Ex. 7

Résoudre le système différentiel d'ordre 2 $(H) \ : \ \begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' - y' + x \end{cases}$

Indications

Ramener le problème à la résolution d'un système d'ordre 1.

Solution

En posant $u = x'$ et $v = y'$, à ce système correspond le système différentiel d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^4$:

$$(h') \ : \ X' = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$.

$A - I_4$ et $A + I_4$ sont de rang 3 : A n'est pas diagonalisable mais, puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable.

Désignons par $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On trouve $\operatorname{Ker}(A - I_4) = \operatorname{Vect}(a_1)$ avec $a_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$,

et $\operatorname{Ker}(A + I_4) = \operatorname{Vect}(a_3)$ avec $a_3 = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$.

Formons alors :

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \qquad (A + I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commentaires

Pour obtenir une réduite triangulaire simple, on s'appuie sur le fait que, d'après les théorèmes de Cayley-Hamilton et de décomposition des noyaux, on a

$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A + I_3)^2$

ce qui met en évidence une décomposition de $\mathbb{R}^4$ en somme directe de deux sous-espaces stables contenant respectivement $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ et $\operatorname{Ker}(A + I_3)$.

Une base de $\operatorname{Ker}\left(A - I_4\right)^2$ est donc $\left(a_1, a_2\right)$ avec $a_2 = -e_2 + e_3$; et une base de $\operatorname{Ker}\left(A + I_4\right)^2$ est $\left(a_3, a_4\right)$ avec $a_4 = e_1 - e_4$.

Puisque $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}\left(A - I_4\right)^2 \oplus \operatorname{Ker}\left(A + I_4\right)^2$, $\mathscr{A} = \left(a_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ adaptée à cette somme directe.
Le calcul donne $A \cdot a_2 = a_1 + a_2$ et $A \cdot a_4 = a_3 - a_4$ donc en posant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le changement de fonction inconnue défini par $X = PX_1$ donne le nouveau système :

$$X_1' = PX_1 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + y_1 \\ y_1' = y_1 \\ u_1' = -u_1 + v_1 \\ v_1' = -v_1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = (a + bt)e^t + (c + d + dt)e^{-t} \\ y = (a - b + bt)e^t - (c + dt)e^{-t} \end{cases}$$

$A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_3 + e_4 = a_1 + a_2$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_2 - e_3 + 2e_4 = a_3 - a_4$

$A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} f_A$; $T = \operatorname{mat}_{\mathscr{A}} f_A$;

$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$

système dont la solution générale s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 = (a + bt)e^t \\ y_1 = be^t \\ u_1 = de^{-t} \\ v_1 = (c + dt)e^{-t} \end{cases}$$

II. Équations non linéaires

Ex. 8

Soit f la solution maximale telle que $f(0) = 0$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = e^{-xy}$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

2) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$.

3) Montrer que $1 \leqslant \lambda \leqslant 1 + \dfrac{1}{e}$.

Solution

1) La fonction $(x, y) \mapsto e^{-xy}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de f qui est définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$.
Supposons $b < +\infty$.
De $f'(x) = e^{-xf(x)}$, on déduit que f est strictement croissante sur I et, puisque $f(0) = 0$, elle est strictement positive sur $]0, b[$. On a donc :

$$\forall x \in]0, b[, \quad e^{-xf(x)} < 1.$$

Commentaires

L'intervalle I contient 0 donc $a < 0 < b$.

On prépare un raisonnement par l'absurde : l'hypothèse « b est réel » doit conduire à une contradiction avec le caractère maximal de f.

D'autre part, l'identité $\forall x \in I,\ f'(x) = e^{-xf(x)}$ avec $f(0) = 0$ donne $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-tf(t)}\mathrm{d}t$, donc pour tout $x \in]0, b[$, il vient :

$$f(x) \leqslant \int_0^x \mathrm{d}t < b.$$

On sait maintenant qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $L = \lim\limits_{x \to b} f(x)$.

C'est le théorème de la limite monotone : f est croissante majorée.

Définissons alors $g\ :]a, b] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $g(b) = L$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x \to b} g'(x) = e^{-bL}$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$.

Voir à ce propos le chapitre 4, théorème 11 : caractérisation des applications de classe $\mathcal{C}^1$.

On dispose ainsi d'une solution g de (E) prolongeant strictement f ce qui est contraire au caractère maximal de f.

C'est absurde, on a donc $b = +\infty$.

Considérons maintenant la fonction :

$$h\ :]-\infty, -a[\to \mathbb{R},\quad x \mapsto -f(-x).$$

Inutile de prouver directement $a=-\infty$: l'imparité va nous donner ce résultat.

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $-I=\{x\ /\ -x\in I\}$ l'intervalle symétrique de I par rapport à 0.

Puisque f est solution de (E) sur I, en posant $-I =]-\infty, -a[$, on obtient $\forall x \in -I,\ f'(-x) = e^{xf(-x)}$ c'est-à-dire $h'(x) = e^{-xh(x)}$: h est solution sur $-I$.

De plus si (J, h_1) est une solution prolongeant $(-I, h)$, le même calcul montre que $(-J, f_1)$ avec $f_1\ : x \mapsto -h_1(-x)$ est une solution prolongeant (I, f). Puisque (I, f) est maximale, on en déduit :

$$-J = I,\ f_1 = f \text{ donc } J = -I \text{ et } h_1 = h.$$

Comme de plus $h(0) = f(0) = 0$, on a ainsi trouvé deux solutions maximales (I, f) et $(-I, h)$ vérifiant la même condition initiale.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il en résulte $I = -I$ et $h = f$ donc f est impaire et $I = \mathbb{R}$.

$I=-I$ donne $a=-b=-\infty$.

2) Sur $[1, +\infty[$, on a $f(x) \geqslant f(1) > 0$ donc :

$$f'(x) \leqslant e^{-xf(1)}.$$

On a vu que f est croissante, il s'agit donc ici de montrer qu'elle est majorée.

On en déduit $\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) - f(1) \leqslant \displaystyle\int_1^x e^{-tf(1)}\mathrm{d}t$ donc :

$$f(x) \leqslant f(1) + \frac{e^{-f(1)}}{f(1)}.$$

$\displaystyle\int_1^x e^{-tf(1)}\mathrm{d}t = \frac{e^{-f(1)} - e^{-xf(1)}}{f(1)}$.

L'existence de λ réel tel que $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en résulte.

3) Sur $]0, +\infty[$, on a $0 < f(x) < \lambda$ donc $f'(x) > e^{-\lambda x}$ puis :

$$f(x) \geqslant \int_0^x e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \text{ c'est-à-dire } f(x) \geqslant \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right).$$

Une majoration de f sur $\mathbb{R}_+$ induit une minoration de f' puis, par intégration, une minoration de f. De même une minoration de f conduit à une majoration de f.

En passant à la limite quand x tend vers $+\infty$, cette inégalité donne $\lambda \geqslant \dfrac{1}{\lambda}$ donc $\lambda^2 \geqslant 1$ et, puisque λ est positif, $\lambda \geqslant 1$.

En procédant comme en 2), pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\forall x \in [a, +\infty[,\ f(x) \leqslant f(a) + \frac{e^{-af(a)}}{f(a)}.$$

Si $\lambda > 1$, il existe $a \in]0, +\infty[$ tel que $f(a) = 1$, et puisque l'on sait que $f(x) < x$ sur $]0, +\infty[$, on a nécessairement $a > 1$.

En effet f est continue strictement croissante, elle induit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]f(0),\lambda[=]0,\lambda[$.

Alors avec $e^{-af(a)} = e^{-a} \leqslant \dfrac{1}{e}$, l'inégalité précédente donne pour tout $x \geqslant a,\ f(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{e}$. En passant à la limite, on en déduit $\lambda \leqslant 1 + \dfrac{1}{e}$.

Pour $\lambda=1$ cette inégalité est évidente. La preuve est donc complète.

Ex. 9

Soit l'équation différentielle $(E) \; : xy' = \tan y$.

Trouver la solution maximale f qui vérifie $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Indications

Raisonner par analyse-synthèse en considérant les restrictions de f à $I \cap \mathbb{R}_+^*$ et $I \cap \mathbb{R}_-^*$ où I est l'intervalle de définition de f.

Solution

■ **Analyse**

Soit f solution maximale de (E) sur I vérifiant $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

La fonction $\tan$ est définie sur l'intervalle $f(I)$ et celui-ci contient $\dfrac{\pi}{4}$.

On a donc $f(I) \subset \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Posons $J = I \cap]0, +\infty[$ et $\varphi = f|_J$. Alors (J, φ) est solution maximale de :

$$(E_1) \; : y' = \frac{\tan y}{x}.$$

Pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, introduisons l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$: $\Omega =]0, +\infty[\times \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

L'application $\Phi \; : \; \Omega \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \dfrac{\tan y}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc l'équation (E_1) admet une unique solution maximale $\varphi \; : J \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\varphi(1) = \frac{\pi}{4} \text{ et } \{(x, \varphi(x)/x \in J\} \subset \Omega.$$

Explicitons maintenant cette fonction φ.

On remarque que la fonction nulle est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, puisque φ est distincte de cette fonction, par unicité au problème de Cauchy en tout point $(x, 0) \in \Omega$ on a :

$$\forall x \in J, \quad \varphi(x) \neq 0, \text{ et ainsi } \varphi(I) \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Donc φ solution de (E_1) sur J s'écrit :

$$\forall x \in J, \quad \frac{\varphi'(x)}{\tan \varphi(x)} = \frac{1}{x},$$

d'où on déduit l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sin \varphi(x) = \lambda x$, donc tel que :

$$\varphi(x) = \operatorname{Arcsin} \lambda x.$$

Enfin, $\varphi(1) = \dfrac{\pi}{4}$ donne $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\varphi(x) = \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ce qui exige $I \subset]0, \sqrt{2}[$.

Résumons : s'il existe f solution maximale de (E) sur I vérifiant $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$,

on a $I \cap [0, +\infty[\subset [0, \sqrt{2}[$ et $\forall x \in I \cap [0, +\infty[, \;\; f(x) = \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Commentaires

(E) n'étant pas donnée sous forme résolue $y' = F(x,y)$, on n'est pas en mesure d'affirmer a priori l'existence et l'unicité de f.

$1 \in I$ donne $J \neq \varnothing$.

Afin de procéder à la séparation des variables, on commence par prouver que φ ne s'annule pas sur J.

Une primitive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$ est $x \mapsto \ell n(\sin x)$.

Car $\varphi(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Posons alors $K = I \cap]-\infty, 0[$ et, si K est non vide, $\psi = f|_K$.

K est non vide si et seulement si 0 est intérieur à I.

Comme précédemment, (K, ψ) est solution maximale de (E_1) telle que :

$$\{(x, \psi(x)/x \in J\} \subset \Omega_1 \text{ avec } \Omega_1 =]-\infty, 0[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω_1.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre encore l'existence et l'unicité d'une solution maximale de (E_1) au problème de Cauchy en tout point $(x_0, y_0) \in \Omega_1$.

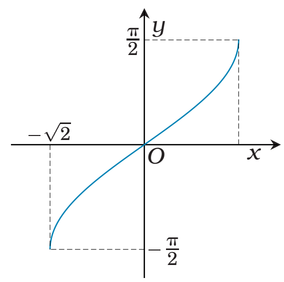
On remarque que $\psi = f|_K$ n'est pas la fonction nulle car on aurait dans ce cas $f_g'(0) = 0$ et $f_d'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et f ne serait pas dérivable en 0. En conséquence, par unicité au problème de Cauchy en tout point $(x, 0) \in \Omega_1$, on a $\forall x \in K,\ \psi(x) \neq 0$.

0 étant intérieur à I, f dérivable en 0 exige $f_g'(0) = f_d'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Le calcul se déroule donc de la même façon que celui de φ et on obtient l'existence de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(x) = \operatorname{Arcsin} \mu x$.

Alors $f_g'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donne $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc :

$$\psi(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{2}} \text{ et } K \subset]-\sqrt{2}, 0[.$$



En conclusion, le problème admet au plus une solution, il s'agit de la fonction $f\ :\ ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\quad x \mapsto \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

- **Synthèse**

Il reste à vérifier que la fonction f ainsi définie est solution de (E) telle que :

$$f(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Ex. 10

Résoudre l'équation différentielle $\quad y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x} + 1.$

Indications

Il s'agit d'une équation homogène en (x, y).

Solution

La fonction $(x, y) \mapsto \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x} + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et sur $U_2 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(x_0, y_0) \in U_k$, $(k = 1$ ou $2)$, il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle I ouvert, inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ (si $x_0 > 0$) ou $\mathbb{R}_-^*$ (si $x_0 < 0$) et vérifiant $f(x_0) = y_0$.

- Si f est une telle solution maximale, soit $g\ :\ I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I,\quad g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Commentaires

Dans le cas présent la forme même de l'équation impose $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$.

On peut donc utiliser le changement de fonction inconnue exposé en méthode sans avoir à faire de découpage de l'intervalle comme cela pourra se produire dans d'autres exemples.

On obtient alors $f'(x) = g(x) + xg'(x)$ donc :

$$\forall x \in I,\quad xg'(x) = g(x)^2 + 1$$

c'est-à-dire :
$$\forall x \in I,\quad \frac{g'(x)}{g(x)^2 + 1} = \frac{1}{x}.$$

D'où
$$\operatorname{Arctan} g(x) = \ell n\left|\frac{x}{\lambda}\right|,\quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

et enfin : $f(x) = x\tan\left(\ell n\left|\frac{x}{\lambda}\right|\right)$ avec :

$$I \subset \left]\lambda\, e^{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \lambda e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right[$$

ou

$$I \subset \left] -\lambda e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}, -\lambda\, e^{-\frac{\pi}{2}+k\pi}\right[.$$

- Réciproquement, il est immédiat de vérifier que toute fonction :

$$x \mapsto x\tan\left(\ell n\left|\frac{x}{\lambda}\right|\right)$$

est solution sur $I = \left]\lambda\, e^{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \lambda e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right[$

ou sur $I = \left] -\lambda e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}, -\lambda\, e^{-\frac{\pi}{2}+k\pi}\right[.$

Écrivons ce calcul avec la notation différentielle :

en posant $y = f(x)$ et $t = \frac{y}{x} = g(x)$, il vient

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = t + x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$

donc $\forall x \in I,\ x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t^2 + 1$

d'où aussi $\forall x \in I, \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

et enfin $\operatorname{Arctan} t = \ell n\left|\frac{x}{\lambda}\right|\quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$

D'après l'analyse, ces intervalles sont maximaux les solutions correspondantes sont donc maximales.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

Résoudre l'équation différentielle :

$$(H)\ :\ x^2y'' - 4xy' + (x^2+6)y = 0.$$

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$?

Ex. 2

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ x^2y'' - 2xy' + 2y = x\cos x - \sin x.$$

Ex. 3

Soit $q \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

1) f étant une solution bornée sur $[0,+\infty[$, de $(L) : y'' + qy = 0$, étudier $\lim\limits_{+\infty} f'$.

2) Montrer que (L) a des solutions non bornées.

Ex. 4

Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

1) Résoudre le système différentiel $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$ **(1)**

2) Calculer $\exp A$.

Ex. 5

Résoudre le système différentiel :

$$(S)\quad \begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = -x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

Niveau 2

Ex. 6

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ (1+x^2)y'' + xy' + k^2y = 0,\quad k \in \mathbb{R}_+^*$$

au moyen d'un changement de variable qui la ramène à une équation à coefficients constants.

Ex. 7

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f''(x) \geqslant f(x) + \frac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$$

$f(0) = f'(0) = 0$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) \geqslant \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$.

Ex. 8

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $\varphi(0) = I_n$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \varphi'(0)\,\varphi(x)$.

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$

et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \det[\varphi(x)] \neq 0$.

Ex. 9

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, antisymétrique non nulle, et l'équation différentielle : $(H)\ :\ X' = AX$.

1) Quelles sont les solutions constantes de (H) ?

2) Montrer que toutes les solutions sont bornées puis que les courbes intégrales sont des arcs de cercle.

Ex. 10

Soit $\left(U,V,X_0\right) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^3$, $\ U \neq 0,\ \ V \neq 0,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$,

$B = U\,{}^tV$ et $A = \lambda I_n + B$.

1) Déterminer la solution du problème de Cauchy :

$$X'(t) = A\,X(t),\quad X(0) = X_0$$

en fonction de λ, $\operatorname{Tr} B$, B, X_0 et t.

2) Quels sont les sous-espaces E de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$X_0 \in E \ \Rightarrow\ \forall t \in \mathbb{R},\ \ X(t) \in E\ ?$$

3) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que toute solution possède une limite finie en $+\infty$.

Ex. 11

Soit $(E) : y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

1) Trouver la solution maximale vérifiant $f(0) = 1$.

2) En déduire les autres solutions et reconnaître les courbes intégrales.

Ex. 12

Soit f la solution maximale de $(E)\ :\ y' = y^2 + x$ vérifiant $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est développable en série entière.

2) Montrer que f est définie sur un intervalle majoré.

Niveau 3

Ex. 13

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant x + a^2 x \int_0^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t \quad (I)\ (a \geqslant 0)$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{f(x)}{x} \leqslant e.$

Ex. 14

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t\,.$$

2) En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Ex. 15

Soit $y\ :\ I \to \mathbb{R}$ la solution de l'équation différentielle $(E)\ : 2y'' = 1 - 3y^2$ telle que $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

1) Justifier son existence et vérifier que y est une fonction paire.

2) Décrire cette solution lorsque $x \in [0, a]$ où :

$$a = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u^2)}}.$$

3) Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique.

Indications

Ex. 6

Voir *Mise en œuvre*, exercice 3.

Ex. 7

Avec $g\ : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$ et $h = f - g$, les hypothèses se ramènent à $h'' - h \geqslant 0,\ \ h(0) = h'(0) = 0.$

Puis, voir *Mise en œuvre*, exercice 4.

Ex. 8

Utiliser les propriétés de l'exponentielle de matrice vues dans le chapitre 5.

Ex. 9

$\operatorname{Ker} A$ est une droite vectorielle.

Ex. 10

$\forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = (\operatorname{Tr} B)^{n-1} B.$

Ex. 11

Exploiter le théorème de Cauchy-Lipschitz ; introduire $t = \dfrac{y}{x}$. Utiliser des homothéties de centre O. Reconnaître les courbes intégrales par leur équation polaire.

Ex. 12

1) Procéder par identification :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = x + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2$$

et vérifier que la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Si $x \geqslant 1, y' \geqslant y^2 + 1$.

Ex. 13

Introduire h définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$.

Puis, voir *Mise en œuvre*, exercice 4.

Ex. 14

Montrer que :

$$f\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t \quad \text{et } g\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une même équation différentielle.

Ex. 15

2) Multiplier les deux membres de (E) par y'.

3) Étudier $Y \mapsto \displaystyle\int_0^Y \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u^2)}}$.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

L'équation (H) vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur les intervalles :

$$I_1 =]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad I_2 =]0, +\infty[.$$

Chacun des espaces $S_k(H)$: ensemble des solutions de (H) sur I_k, ($k = 1$ ou 2), est de dimension 2.

Cherchons les solutions développables en série entière.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$ et de somme f.

f est solution de (H) sur $]-\rho, \rho[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-\rho, \rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)(n-3)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

donc si et seulement si $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 4, (n-2)(n-3)a_n + a_{n-2} = 0$ $(\mathcal{R})$.

De la relation $(\mathcal{R})$ on déduit : $\rho = +\infty$ et

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_{2n} = (-1)^{n-1}\frac{a_2}{(2n-2)!} \quad , \quad a_{2n+1} = (-1)^{n-1}\frac{a_3}{(2n-1)!}.$$

Il en résulte que les solutions développables en série entière sont les fonctions :

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2 \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

avec $f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{(2n-2)!} = x^2\cos x$, $f_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n-1)!} = x^2 \sin x$

chacun des couples $\left(f_{1|I_k}, f_{2|I_k}\right)$, ($k = 1$ ou 2), est libre et constitue donc une base de $S_k(H)$.

Ainsi $S_k(H)$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \lambda x^2 \cos x + \mu x^2 \sin x$, $\quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On vérifie facilement que toute fonction f telle que :

$$f(x) = \lambda x^2 \cos x + \mu x^2 \sin x \ \text{ si } x < 0 \quad , \quad f(x) = \lambda' x^2 \cos x + \mu' x^2 \sin x \ \text{ si } x \geqslant 0$$

est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda' = \lambda$.

L'espace $S_{\mathbb{R}}(H)$ des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est donc de dimension 3, une base en est $\left(f_1, f_2, f_3\right)$ avec :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^2\cos x && \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,;\\
f_2(x) &= x^2 \sin x && \text{si } x < 0 \ \text{ et}\\
f_2(x) &= 0 && \text{si } x \geqslant 0\,;\\
f_3(x) &= 0 && \text{si } x < 0 \ \text{ et}\\
f_3(x) &= x^2 \sin x && \text{si } x \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ex. 2

Les fonctions $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$, $x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ sont continues sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'ensemble S_k des solutions de (E) sur I_k ($I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, +\infty[$) est un $\mathbb{R}$-espace affine dont la direction est l'espace vectoriel des solutions de (H) sur I_k avec :

$$(H) \ : \ x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

(H) est une équation d'Euler, elle admet des solutions de la forme $x \mapsto |x|^{\alpha}$.
Par identification, on trouve $\alpha = 1$ ou 2, donc sur I_1 et sur I_2 la solution générale de (H) est définie par $x \mapsto \lambda x + \mu x^2$.

- Résolution de (E) sur I_k, ($k = 1$ ou 2), par la méthode de variation des constantes.

Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(I_k, \mathbb{R})$, il existe un couple unique $(u, v) \in \mathcal{C}^1(I_k, \mathbb{R})^2$ tel que :

$$\forall x \in I_k, \quad \begin{cases} y = xu + x^2 v \\ y' = u + 2xv \end{cases}$$

Alors y est solution de (E) sur I_k si et seulement si :

$$\forall x \in I_k, \quad \begin{cases} xu' + x^2 v' = 0 \\ u' + 2xv' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} \end{cases}$$

Ce système fournit $u' = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$, $v' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$, d'où :

$$u = \lambda - \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad v = \mu + \int_0^x \frac{t\cos t - \sin t}{t^3} \mathrm{d}t.$$

(Remarquer que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^3}$ est prolongeable par continuité en 0 avec $\varphi(0) = -\dfrac{1}{3}$.)

Compte tenu de $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t - t\cos t}{t^2} = 0$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^x \frac{t\cos t - \sin t}{t^3} \mathrm{d}t = \left[\frac{\sin t - t\cos t}{2t^2}\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

On en déduit que la solution générale de (E) sur I_k s'écrit :

$$f_{\lambda,\mu} : x \mapsto \lambda x + \mu x^2 - \frac{\sin x}{2} - \frac{x\cos x}{2} - \frac{x^2}{2}\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

- Solutions sur $\mathbb{R}$

Les dérivées sur I_k de $y : x \mapsto \lambda x + \mu x^2 - \dfrac{\sin x}{2} - \dfrac{x\cos x}{2} - \dfrac{x^2}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ sont :

$$y' = \lambda + 2\mu x - \cos x - x\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad , \quad y'' = 2\mu - \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

Si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ tels que :

$$f_{|I_1} = f_{\lambda_1,\mu_1} \quad \text{et} \quad f_{|I_2} = f_{\lambda_2,\mu_2}$$

f' devant être continue en 0, on a $\lambda_1 - 1 = \lambda_2 - 1$ donc $\lambda_1 = \lambda_2$.
Le calcul précédent montre que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f''(x) = \mu_1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f''(x) = \mu_2$$

donc l'existence de $f''(0)$ nécessite $\mu_2 = \mu_1$.
En conclusion, toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme :

$$x \mapsto \lambda x + \mu x^2 - \frac{\sin x}{2} - \frac{x\cos x}{2} - \frac{x^2}{2}\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

On vérifie que toute fonction de cette forme est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ex. 3

1) Pour tout $x \geqslant 0$, on a $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f'' = f'(0) - \int_0^x qf$.

Posons $M = \|f\|_\infty^{[0,+\infty[}$, alors $\forall x \in [0,+\infty[, \quad |q(x)f(x)| \leqslant M\,|q(x)|$, donc l'intégrabilité de q sur $[0,+\infty[$ donne celle de qf, et il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x qf$ existe, donc qu'il existe $\ell = \lim\limits_{+\infty} f'$.

Notons maintenant que $\forall x \geqslant 0, f(x) = f(0) + \int_0^x f'$.

Si ℓ était non nul, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f' = \pm\infty$ (avec le signe de ℓ) et f serait non bornée. Donc $\ell = \lim\limits_{+\infty} f' = 0$.

2) L'ensemble $\mathcal{B}_L$ des solutions bornées de L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(L)$.

Si y_1 et y_2 sont deux éléments de $\left(\mathcal{B}_L\right)$, on a $y_1''y_2 - y_2''y_1 = 0$ c'est-à-dire $\left(y_1'y_2 - y_2'y_1\right)' = 0$.

On en déduit que $y_1'y_2 - y_2'y_1$ est constante sur $[0,+\infty[$, or d'après le 1), $\lim\limits_{+\infty} y_1'y_2 - y_2'y_1 = 0$, donc cette constante est nulle.

Ainsi, on a sur $[0,+\infty[$, $y_1'y_2 - y_2'y_1 = 0$ et le couple $\left(y_1, y_2\right)$ est lié.

On en déduit $\dim \mathcal{B}_L \leqslant 1$, donc $\mathcal{S}(L) \setminus \mathcal{B}_L$ est non vide, c'est-à-dire qu'il existe des solutions non bornées.

Ex. 4

1) Posons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$. Le système **(1)** s'écrit :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \end{cases} \quad \textbf{(1')} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases} \quad \textbf{(1'')}.$$

Le système **(1')** est équivalent à :

$$\begin{cases} x_1' + x_3' = 6(x_1 + x_3) \\ x_1' - x_3 = 2(x_1 - x_3) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} u' = 6u \\ v' = 2v \end{cases} \quad (\text{avec } u = x_1 + x_3\,,\ v = x_1 - x_3).$$

On en déduit :

$$u = \lambda e^{6t} \quad , \quad v = \mu e^{2t} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

et :

$$x_1 = \alpha e^{6t} + \beta e^{2t} \quad , \quad x_3 = \alpha e^{6t} - \beta e^{2t} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On a de même pour le système **(1'')** $\quad x_2 = \gamma e^{6t} + \delta e^{2t}\,,\ x_4 = \gamma e^{6t} - \delta e^{2t},\ (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$.

2) La solution du système **(1)** aux conditions initiales $x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{6t} + e^{2t} & 0 & e^{6t} - e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{6t} + e^{2t} & 0 & e^{6t} - e^{2t} \\ e^{6t} - e^{2t} & 0 & e^{6t} + e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{6t} - e^{2t} & 0 & e^{6t} + e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

on sait qu'elle s'écrit également $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$, on en déduit :

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 & 0 \\ 0 & e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 \\ e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 & 0 \\ 0 & e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 \end{bmatrix}.$$

Ex. 5

Matriciellement (S) s'écrit :

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Réduction de la matrice A

On obtient $\quad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^3$.

1 est valeur propre triple, A n'est pas diagonalisable, (sinon $A = I_3$), par contre elle est trigonalisable.

En notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on voit que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ est le plan d'équation $x + y - z = 0$ donc $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) = 1$.

Remarquons que $u - \mathrm{Id}$ est nilpotent (car d'après Cayley-Hamilton $(A - I_3)^3 = 0$), donc :

$$\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id})^2 < \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) \text{ ce qui donne } \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id})^2 = 0$$

et donc : $\quad \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ étant (e_1, e_2, e_3), on constate que $e_1 \notin \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, posons donc :

$$e'_1 = e_1 \quad , \quad e'_2 = (u - \mathrm{Id})(e_1 big) = 2e_1 - e_2 + e_3 \quad , \quad e'_2 \text{ est un vecteur de } \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}).$$

Avec $e'_3 = e_1 + e_3$, (e'_2, e'_3) est une base du plan $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et, on a par construction :

$$\underset{(e'_i)}{\mathrm{mat}}\, u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

Donc, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1}AP = T.$

- Application à S.

On opère le changement de fonctions inconnues défini par $X = PX_1$ et (S) devient :

$$(S_1) \quad X'_1 = TX_1.$$

Soit en développant :

$$(S_1) \ : \ \begin{cases} x'_1 = x_1 & \textbf{(1)} \\ y'_1 = x_1 + y_1 & \textbf{(2)} \\ z'_1 = z_1 & \textbf{(3)} \end{cases}$$

(1) et **(3)** donnent $\quad x_1 = a\,e^t \quad , \quad z = c\,e^t$,

donc **(2)** devient $\quad y'_1 = y_1 + a\,e^t\;$ ce qui donne $\quad y_1 = (at + b)e^t$.

On en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,e^t \\ (at+b)e^t \\ c\,e^t \end{pmatrix}.$

$$x = (2at + a + 2b + c)e^t \quad , \quad y = (-at - b)e^t \quad , \quad z = (at + b + c)e^t.$$

Niveau 2

Ex. 6

L'équation (E) satisfait aux conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire sur $\mathbb{R}$. L'ensemble S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, est un plan vectoriel inclus dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On recherche un changement de variable défini par $x = \varphi(t)$ où φ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de I sur $\mathbb{R}$ (I intervalle à déterminer).

Étant donnée $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $g = f \circ \varphi$ et il vient :

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} g'(t), \quad f''(x) = \frac{1}{\varphi'^2(t)} g''(t) - \frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} g'(t),$$

donc $f \in S$ si et seulement si :

$$\frac{1+\varphi^2}{\varphi'^2} g'' + \left(\frac{\varphi}{\varphi'} - \frac{(1+\varphi^2)\varphi''}{\varphi'^3} \right) g' + k^2 g = 0 \quad \text{(sur } I\text{)}.$$

Choisissons alors φ telle que $\dfrac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi^2}} = 1$. Une solution est $\varphi : t \mapsto \operatorname{Argsh} t$. Cette fonction φ est un $\mathcal{C}^{\infty}$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même tel que $\varphi^{-1} = \operatorname{sh}$.

Avec ce changement de variable, on obtient que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de :

$$\left(E'\right) : z'' + k^2 z = 0.$$

La solution générale de $\left(E'\right)$ étant $t \mapsto \lambda \cos kt + \mu \sin kt$, on en déduit que S est décrit par les fonctions :

$$f_{\lambda,\mu} : x \mapsto \lambda \cos(k \operatorname{sh} x) + \mu \sin(k \operatorname{sh} x), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Ex. 7

Considérons la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$. Le calcul donne $g''(x) - g(x) = \dfrac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$.

Donc avec $h = f - g$, l'hypothèse se lit : $h'' - h \geqslant 0$, $h(0) = h'(0) = 0$.

Sachant que h est, tout comme f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la condition $h'' - h \geqslant 0$ équivaut à l'existence de $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ positive et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h''(x) - h(x) = \varphi(x).$$

Utilisons alors la méthode de variation des constantes : puisque $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de $y'' - y = 0$, il existe u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} h(x) = u(x) \operatorname{ch} x + v(x) \operatorname{sh} x \\ h'(x) = u(x) \operatorname{sh} x + v(x) \operatorname{ch} x \end{cases}$$

et en écrivant que h est solution de $y'' - y = \varphi(x)$, il vient :

$$\begin{cases} u'(x) \operatorname{ch} x + v'(x) \operatorname{sh} x = 0 \\ u'(x) \operatorname{sh} x + v'(x) \operatorname{ch} x = \varphi(x). \end{cases}$$

On en déduit $u'(x) = -\varphi(x) \operatorname{sh} x$, $v'(x) = \varphi(x) \operatorname{ch} x$, puis :

$$u(x) = a - \int_0^x \varphi(t) \operatorname{sh} t \mathrm{d}t, \quad v(x) = b + \int_0^x \varphi(t) \operatorname{ch} t \mathrm{d}t,$$

et enfin, compte tenu de $h(0) = h'(0) = 0$, $h(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t) \operatorname{sh}(x-t) \mathrm{d}t$.

La positivité de φ, avec $\operatorname{sh}(x-t) \geqslant 0$ pour $t \in [0, x]$ si $x > 0$ et $\operatorname{sh}(x-t) \leqslant 0$ pour $t \in [0, x]$ si $x < 0$, donne alors celle de h et l'inégalité annoncée en résulte.

Ex. 8

1) **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**

Posons $\varphi'(0) = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; la fonction vectorielle φ, à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (de dimension n^2 sur $\mathbb{R}$), est solution de l'équation différentielle linéaire et homogène $\varphi' = A\varphi$ **(1)** et vérifie de plus $\varphi(0) = I_n$.

On sait qu'une telle équation différentielle admet pour la condition initiales imposée une solution unique :

$$x \mapsto \exp(xA).$$

D'après les propriétés de l'exponentielle de matrices (voir chapitre 5), on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp\big((x+y)A\big) = \exp(xA)\exp(yA) \quad \text{et} \quad \exp(xA) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

La proposition (ii) en résulte.

2) **(ii)** $\Rightarrow$ **(i)**

On a, pour $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x+0) = \varphi(x)\,\varphi(0) = \varphi(x)$.

$\varphi(x)$ étant inversible, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(0) = I_n$.

Fixons alors $x \in \mathbb{R}$. On a pour $h \in \mathbb{R}$: $\varphi(x+h) = \varphi(x)\,\varphi(h) = \varphi(h)\,\varphi(x)$ donc :

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{\varphi(h) - I_n}{h}\,\varphi(x) = \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h}\,\varphi(x).$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, φ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\varphi'(x) = \varphi'(0)\,\varphi(x).$$

Ex. 9

1) Il est classique que pour n impair, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $\det A = 0$, car on a :

$$\det {}^tA = \det A \text{ et } \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A.$$

Montrons de plus que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de A et $U \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé :

$$AU = \lambda U \qquad \textbf{(1)}$$

De **(1)** on déduit :

$$ {}^t\overline{U}AU = \lambda\,{}^t\overline{U}U \qquad \textbf{(2)}$$

puis en transconjuguant, compte tenu de ${}^t\overline{A} = -A$:

$$ {}^t\overline{U}AU = -\overline{\lambda}\,{}^t\overline{U}U \qquad \textbf{(3)}$$

Donc, avec **(2)** et **(3)**, il vient :

$$\left(\lambda + \overline{\lambda}\right){}^t\overline{U}U = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Or ${}^t\overline{U}U = \|U\|^2$ (norme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^3$) et puisque U est non nul, on a ${}^t\overline{U}U > 0$ donc, avec **(4)**, on obtient :

$$\overline{\lambda} = -\lambda \text{ c'est-à-dire } \lambda \in i\mathbb{R}.$$

Avec $\det A = 0$ et $\operatorname{Sp} A \subset i\mathbb{R}$, et puisque $A \neq 0$, on a ici :

$$\operatorname{Sp} A = \{0, i\lambda, -i\lambda\} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

(A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mais ne l'est pas dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Notons encore A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, X est solution constante si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) \in \operatorname{Ker} A.$$

$\operatorname{Ker} A$ étant une droite : $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect} U$, les solutions constantes sont les fonctions X_λ : $t \mapsto \lambda U$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Soit X une solution non constante. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ {}^tX(t)\,X'(t) = {}^tX(t)\,AX(t) = 0 \text{ car } A = -{}^tA$$

donc il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|X(t)\|^2 = {}^tX(t)\,X(t) = R$$

(il s'agit maintenant de la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^3$), ce qui prouve que X est bornée.

De plus, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, ${}^tUX'(t) = {}^tU\,AX(t) = {}^t\left({}^tU\,AX(t)\right) = -{}^tX(t)AU = 0$ c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\langle U \,\middle|\, X'(t)\right\rangle = 0.$$

Il en résulte $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left\langle U \,\middle|\, X(t)\right\rangle = k$ (constante).

La courbe intégrale Γ_X appartient donc à l'intersection de la sphère de centre O et de rayon R et du plan :

$$P = \left\{X \in \mathbb{R}^3 / \left\langle U \,\middle|\, X\right\rangle = k\right\}$$

Γ_X est un arc de cercle.

Ex. 10

1) La solution demandée est $X\ : t \mapsto \exp(tA)\, X_0$.

Il s'agit donc de calculer $\exp(tA) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$. I_n et B étant permutables, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \lambda^{n-k} B^k.$$

En remarquant que ${}^tVU$ est une matrice uni-élément, on a ${}^tVU = \mathrm{Tr}({}^tVU) = \mathrm{Tr}(U\,{}^tV) = \mathrm{Tr}\,B$ et une récurrence simple montre que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad B^k = (\mathrm{Tr}\,B)^{k-1} B.$$

Ainsi, pour $\mathrm{Tr}\,B \neq 0$, il vient : $\quad A^n = \lambda^n I_n + \dfrac{B}{\mathrm{Tr}\,B} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \lambda^{n-k} (\mathrm{Tr}\,B)^k$

$$A^n = \lambda^n I_n + \frac{(\lambda + \mathrm{Tr}\,B)^n - \lambda^n}{\mathrm{Tr}\,B} B$$

puis $\quad \exp(tA) = e^{\lambda t} I_n + \dfrac{B}{\mathrm{Tr}\,B}\left(e^{t(\lambda + \mathrm{Tr}\,B)} - e^{t\lambda}\right)$

Pour $\mathrm{Tr}\,B = 0$, il reste $A^n = \lambda^n I_n + n\,\lambda^{n-1} B$ d'où $\exp(tA) = e^{\lambda t} I_n + t e^{\lambda t} B$.

2) La courbe intégrale de X est incluse dans $\mathrm{Vect}\left(X_0\,, BX_0\right)$ donc E vérifie la condition annoncée si et seulement si ce sous-espace est stable par B (ou plutôt par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B).

U et V étant non nuls, on a $\mathrm{rg}\,B = 1$, $\mathrm{Im}\,B = \mathbb{R}U$, $\mathrm{Ker}\,B = (\mathbb{R}V)^{\perp}$ et E est stable par B si et seulement si E contient U ou est inclus dans $\mathrm{Ker}\,B$.

3) Il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\left(X_0\,, BX_0\right)$ soit libre.

Si $\mathrm{Tr}\,B \neq 0$, X a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si il en est de même pour $t \mapsto e^{\lambda t}$ et pour $t \mapsto e^{t(\lambda + \mathrm{Tr}\,B)}$ donc si et seulement si $\lambda \leqslant 0$ et $\lambda + \mathrm{Tr}\,B \leqslant 0$.

Si $\mathrm{Tr}\,B = 0$, il faut et il suffit que $t \mapsto e^{\lambda t}$ et $t \mapsto t e^{\lambda t}$ aient une limite finie en $+\infty$ donc que $\lambda < 0$.

Ex. 11

1) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur chaque ouvert :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y - x > 0\} \quad \text{et} \quad \Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y - x < 0\}.$$

Notons $y : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale de (E) vérifiant $y(0) = 1$, (son support est inclus dans Ω) et posons :

$$I' = I \cap]-\infty, 0[\quad , \quad I'' = I \cap]0, +\infty[.$$

Sur I' ou I'', la fonction $t : x \mapsto \dfrac{y}{x}$ est dérivable, le calcul donne :

$$y' = (xt)' = xt' + t = \frac{1+t}{1-t} \quad , \quad xt' = \frac{1+t^2}{1-t} \quad , \quad \frac{1}{x} = \frac{1-t}{1+t^2} \bullet t'$$

donc il existe λ' et λ'' réels non nuls tels que :

$$\text{pour } x \in I' \;:\; x = \lambda' \frac{e^{\mathrm{Arctan}\,t}}{\sqrt{1+t^2}}$$

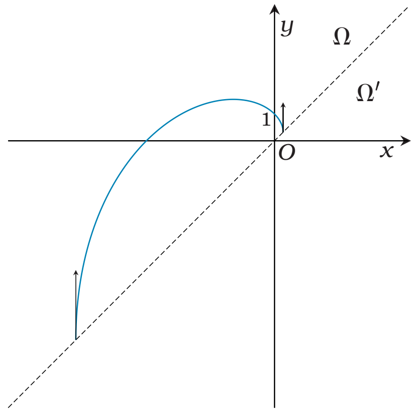
$$\text{et pour } x \in I'' \;:\; x = \lambda'' \frac{e^{\mathrm{Arctan}\,t}}{\sqrt{1+t^2}} \qquad (\text{donc } \lambda' < 0 \quad \text{et} \quad \lambda'' > 0).$$

- **Étude quand x tend vers 0**

De $t = \dfrac{y}{x}$, on déduit : $t(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$, d'où :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} t(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} t(x) = +\infty$$

puis : $\quad \lambda' \dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{|t(x)|} \underset{\substack{x \to 0 \\ x < 0}}{\sim} x\ ,\quad \lambda'' \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{t(x)} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\sim} x \quad$ d'où $\quad \lambda' = -e^{\frac{\pi}{2}}$, et $\lambda'' = e^{-\frac{\pi}{2}}$.



2) Exprimons la solution précédente sous forme paramétrée à l'aide de $\theta = \text{Arctan}\, t$.

En notant que $y - x > 0$ donne, pour $x < 0$, $t < 1$ donc $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$, et pour $x > 0$, $t > 1$ donc $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, on obtient les paramétrages :

$$\begin{cases} x = -e^{\frac{\pi}{2}+\theta} \cos\theta \\ y = -e^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sin\theta \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = e^{\theta-\frac{\pi}{2}} \cos\theta \\ y = e^{\theta-\frac{\pi}{2}} \sin\theta \end{cases} \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Changeons à nouveau de paramètres :

$$\begin{cases} x = -e^{\varphi} \sin\varphi \\ y = e^{\varphi} \cos\varphi \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} + \theta \\ 0 < \varphi < \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -e^{\alpha} \sin\alpha \\ y = e^{\alpha} \cos\alpha \\ \alpha = \theta - \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{4} < \alpha < 0 \end{cases}$$

d'où la représentation polaire : $M = O + e^{\varphi}\overrightarrow{u}'(\varphi), \quad \varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$ où $\overrightarrow{u}'(\varphi) = -\sin\varphi\,\overrightarrow{i} + \cos\varphi\,\overrightarrow{j}$.

La courbe de la solution (I, y) est donc une spirale logarithmique limitée à deux tangentes verticales et l'intervalle I est :

$$\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right[.$$

Ensembles des solutions

L'équation étant homogène, l'ensemble des solutions est décrit quand λ décrit $\mathbb{R}^*$ par les fonctions :

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda y\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad x \in I_\lambda \quad \text{où} \quad I_\lambda = \{x \in \mathbb{R} / \frac{x}{\lambda} \in I\}.$$

En particulier $x \mapsto -y(-x)$ est solution sur $-I = I_{-1}$, l'étude sur Ω' se déduit de l'étude sur Ω par symétrie par rapport à O.

La frontière commune de Ω et Ω' est la droite $y = x$, lieu des points à tangentes verticales des courbes intégrales : il n'y a pas de raccordement possible des solutions.

Noter que le lieu des points à tangentes horizontales est la droite $y + x = 0$.

Ex. 12

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en tout point de $\mathbb{R}^2$, ce qui justifie l'existence et l'unicité de $f : I \to \mathbb{R}$, solution maximale telle que $f(0) = 0$ avec I ouvert.

1) Considérons une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ de somme :

$$g :]-\rho,\rho[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Examinons les conditions nécessaires pour que g soit solution de (E) sur $]-\rho,\rho[$:

$$g(0) = 0 \quad , \quad g'(x) = g^2(x) + x \quad , \quad a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

et par produit de séries entières :

$$g^2(x) = \sum_{n=4}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k}\right) x^n$$

d'où par identification de séries entières de rayon non nul :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k}, \quad (n \geqslant 4).$$

Ces relations déterminent une unique suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$.

Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant 1$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $\rho \geqslant 1$ et le calcul précédent prouve que g est solution de (E) sur $]-\rho,\rho[$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, f coïncide avec g sur $]-\rho,\rho[$, donc f est développable en série entière.

2) Supposons l'intervalle I non majoré et exploitons l'inégalité $x \geqslant 1$ dans $y' = y^2 + x$.

Sur $[1,x] \subset I$, $\quad f'(x) \geqslant f^2(x) + 1, \quad \dfrac{f'}{f^2+1} \geqslant 1, \quad \displaystyle\int_1^x \frac{f'(t)}{f^2(t)+1}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x \mathrm{d}t$

$$\operatorname{Arctan} f(x) - \operatorname{Arctan} f(1) \geqslant x - 1 \quad , \quad x \leqslant 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Ceci exige que I soit majoré. Soit b la borne supérieure de I. Alors $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = +\infty$.

En effet, f est croissante sur $[0,b[$ et s'il existe une limite $c = \displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$, la solution de (E) passant par le point (b,c) prolonge strictement f, ce qui est impossible puisque (I,f) est solution maximale.

Niveau 3

Ex. 13

Définissons $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$.

Puisque f est continue, h est positive et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = e^{-ax} f(x).$$

L'hypothèse se lit donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^{ax}h'(x) - a^2 x\, h(x) \leqslant x,$$

ou encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^{ax}h'(x) - a^2 x\, h(x) = \varphi(x)$$

où $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ est telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) \leqslant x$.

L'équation $(H)\ :\ e^{ax}y' - a^2 xy = 0$ (linéaire homogène du premier ordre) admet pour solution générale

$$y\ : x \mapsto \lambda e^{-(ax+1)e^{-ax}}.$$

La méthode de variation de la constante donne alors la solution générale de :

$$(L)\ :\ e^{ax}y' - a^2xy = \varphi(x).$$

En posant $y = \lambda(x)e^{-(ax+1)e^{-ax}}$, y est solution de (L) si et seulement si $\lambda'(x)e^{ax-(ax+1)e^{-ax}} = \varphi(x)$, d'où on tire :

$$\lambda(x) = \mu + \int_0^x \varphi(t)e^{-at+(at+1)e^{-at}}\mathrm{d}t$$

puis :
$$y = \mu e^{-(ax+1)e^{-ax}} + e^{-(ax+1)e^{-ax}}\int_0^x \varphi(t)e^{-at+(at+1)e^{-at}}\mathrm{d}t.$$

En tenant compte de $h(0) = 0$, on en déduit :

$$h(x) = e^{-(ax+1)e^{-ax}}\int_0^x \varphi(t)e^{-at+(at+1)e^{-at}}\mathrm{d}t$$

et donc :
$$h'(x) = a^2xe^{-ax}e^{-(ax+1)e^{-ax}}\int_0^x \varphi(t)e^{-at+(at+1)e^{-at}}\mathrm{d}t + \varphi(x)e^{-ax},$$

puis :
$$f(x) = e^{ax}h'(x) = \varphi(x) + a^2xe^{-(ax+1)e^{-ax}}\int_0^x \varphi(t)e^{-at+(at+1)e^{-at}}\mathrm{d}t.$$

Avec $\varphi(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$, on obtient alors :

$$f(x) \leqslant x + a^2xe^{-(ax+1)e^{-ax}}\int_0^x t\,e^{-at+(at+1)e^{-at}}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $f(x) \leqslant x - x\,e^{-(ax+1)e^{-ax}}\left[e^{(at+1)e^{-at}}\right]_0^x$, soit :

$$f(x) \leqslant x - x + ex\,e^{-(ax+1)e^{-ax}}.$$

Puisque $-(ax+1)e^{-ax} \leqslant 0$, il en résulte que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{f(x)}{x} \leqslant e \bullet e^{-(ax+1)e^{-ax}} \leqslant e.$$

Ex. 14

1) ▪ Montrons que $f\ : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est impropre convergente (cf. chapitre 6, exemple 11) donc en posant :

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,$$

l'existence de $f(x)$ équivaut à celle de $f(x) - A$.

Formons alors $\varphi(x, t) = \dfrac{\sin t}{x+t} - \dfrac{\sin t}{t} = -\dfrac{x\sin t}{t(x+t)}$.

(i) φ est continue sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$

(ii) pour tout $a \in]1, +\infty[$, on a $\forall (x, t) \in [0, a]\times]0, +\infty[$, $|\varphi(x, t)| \leqslant \Phi(t)$ avec :

$$\Phi(t) = 1 \text{ si } t \in]0, 1], \text{ et } \Phi(t) = \frac{a}{t^2} \text{ si } t \in]1, +\infty[.$$

La fonction Φ ainsi définie est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ donc, avec **(i)** et **(ii)**, le théorème de continuité sous le signe somme avec domination locale donne que :

$$f_1\ : x \mapsto \int_{]0,+\infty[} \varphi(x, t)\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et il en est de même pour $f = A + f_1$.

Remarque

En considérant la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{x+t}\mathrm{d}t$, on peut établir que $t \mapsto \dfrac{\sin t}{x+t}$ est non intégrable sur $]0, +\infty[$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t$ est impropre convergente.

Étudions maintenant la classe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(i) φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ avec :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{\sin t}{(x+t)^2} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t) = 2\frac{\sin t}{(x+t)^3}$$

(ii) pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on vient de voir que $t\mapsto\varphi(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et la majoration

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{(x+t)^2}$$

montre qu'il en est de même pour $t\mapsto\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$

(iii) pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\forall(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{(a+t)^2} \quad\text{et}\quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{2}{(a+t)^3}\,.$$

Donc puisque $t\mapsto\dfrac{1}{(a+t)^2}$ et $t\mapsto\dfrac{2}{(a+t)^3}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$, **(iii)** réalise les hypothèses de domination qui, avec le théorème de Leibniz (avec domination locale), montrent que f_1 puis que $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc que f_1 est de classe $\mathcal{C}^2$.

Le même théorème donne :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\, f_1''(x) = \int_{]0,+\infty[}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t.$$

En conclusion f est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f''(x) = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{(x+t)^3}\mathrm{d}t\,.$$

Étant donné $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t$, puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{-\cos t}{x+t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{-\cos t}{x+t} = -\frac{1}{x}$, une intégration par parties donne :

$$f(x) = \left[\frac{-\cos t}{x+t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(x+t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(x+t)^2}\mathrm{d}t,$$

puis de même :

$$f(x) - \frac{1}{x} = -\left[\frac{\sin t}{(x+t)^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{2\sin t}{(x+t)^3}\mathrm{d}t = -f''(x).$$

Donc $\qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f''(x)+f(x) = \dfrac{1}{x}\,.$ **(1)**

■ Montrons de même que $g\,:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $\psi(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$, ψ est continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ et,

$$\forall(x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\quad |\psi(x,t)|\leqslant\Psi(t)\ \text{ avec }\ \Psi(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction Ψ ainsi définie est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ donc le théorème de continuité sous le signe somme (avec domination globale) montre que g est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Étudions maintenant la classe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

(i) ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ avec :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\,,$$

(ii) quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après l'étude de la continuité de g, $t \mapsto \psi(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et la majoration $\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-xt}$ montre que $t \mapsto \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)$ est également intégrable sur $]0,+\infty[$.

(iii) pour tout $a > 0$, on a $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ et **(iii)** réalise les hypothèses de domination locale qui, avec **(i)** et **(ii)** permettent de conclure à la classe $\mathcal{C}^2$ de g sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors :

$$g''(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}. \qquad \textbf{(2)}$$

- Montrons que $f = g$.

D'après **(1)** et **(2)**, $f - g$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle homogène $y'' + y = 0$. Donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f(x) - g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x.$$

Pour prouver $\lambda = \mu = 0$, étudions les limites de f et g en $+\infty$.

Sachant que quel que soit $a > 0$, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ sont impropres convergentes, on peut écrire pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u$$

et, puisque les restes d'intégrales convergentes tendent vers 0, il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Pour la seconde limite on a de façon immédiate :

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \ \text{ donc } \ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Ainsi la fonction $f - g$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est 2π-périodique et de limite nulle en $+\infty$.

2) Puisque f et g sont continues en 0, l'égalité $f(x) = g(x)$ reste vraie en ce point. Alors :

$$f(0) = g(0) \ \text{ donne } \ \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ex. 15

1) C'est une application du théorème de Cauchy-Lipschitz d'ordre deux :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \left(x, y, y'\right) \mapsto \frac{1}{2}\left(1 - 3y^2\right)$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$. Il existe une unique solution maximale $y : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$; I est ouvert.

Soit $I' = \{x \in \mathbb{R} / -x \in I\}$ et $z : I' \to \mathbb{R}, x \mapsto y(-x)$.

On vérifie que z est solution de (E) sur I', avec $z(0) = z'(0) = 0$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il en résulte que $z = y$, $I' = I$.

Ainsi y est une fonction paire.

2) Une première intégration se fait en multipliant par y' :

$$2y'y'' = y' - 3y^2y' \quad \text{donne} \quad y'^2 = y - y^3 \quad (\text{car } y(0) = y'(0) = 0).$$

Comme $y\left(1 - y^2\right) \geqslant 0$, $y(I)$ est un intervalle inclus dans $]-\infty,-1] \cup [0,1]$, et puisqu'il contient 0, on a finalement $y(I) \subset [0,1]$.

Comme $y''(0) = \dfrac{1}{2}$, on a $y'(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \alpha[$, $y'(x) > 0$ et donc :

$$y'(x) = \sqrt{y(1-y^2)}\ ,\quad \frac{y'}{\sqrt{y(1-y^2)}} = 1\ ,\quad \int_0^{\alpha} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)\left(1-y^2(t)\right)}}\mathrm{d}t = \int_0^{y(\alpha)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u^2)}} = \alpha.$$

Sachant que $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u\left(1-u^2\right)}}$ est intégrable sur $]0,1[$, en posant $a = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u\left(1-u^2\right)}}$ on a $\alpha \leqslant a$.

En choisissant $\alpha = \sup\{x \geqslant 0 / y'(t) > 0 \text{ pour tout } t \in]0, x[\}$, y est croissante sur $[0, \alpha[$, majorée donc $\beta = \lim\limits_{x \to \alpha} y(x)$ existe.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique au point $\left(x_0\,, y_0\,, y_0'\right) = \left(\alpha, \beta, \sqrt{\beta\left(1-\beta^2\right)}\right)$ donc $\alpha \in I$ (ouvert), y se prolonge au-delà de α.

Comme α est une borne supérieure, on a :

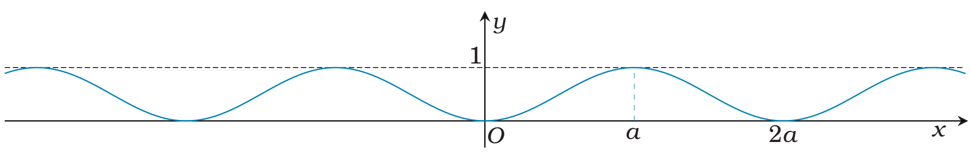
$$y'(\alpha) = 0,\ y(\alpha) = 1 \text{ et } \alpha = a.$$

Ce dernier point tient à la croissance stricte de la fonction :

$$h : [0,1] \to [0,a],\ Y \mapsto X = \int_0^Y \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u^2)}}$$

dérivable sur $]0,1[$: $h'(Y) = \dfrac{1}{\sqrt{Y(1-Y^2)}}$; h est une bijection.

Ainsi, pour $x \in [0,a]$, $y(x)$ est donné par $x = \displaystyle\int_0^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u^2)}} = h\big(y(x)\big)$ autrement dit $y(x) = h^{-1}(x)$.



La fonction y est désormais connue sur $[-a, a]$ (y est paire).

Elle se prolonge au-delà puisque (E) a une solution au point $\left(x_0 = a, y_0 = 1, y_0' = 0\right)$.

La fonction $z : x \mapsto y(x-2a)$ est solution de (E) (équation incomplète en x) , elle vérifie :

$$z(a) = y(-a) = y(a) = 1,\ z'(a) = y'(-a) = 0.$$

Par unicité du problème de Cauchy en $(x_0, y_0, y_0') = (a, 1, 0)$, les fonctions y et z sont identiques : $y(x) = y(x-2a)$. Ainsi y est définie sur $\mathbb{R}$ et de période $2a$.

CHAPITRE

9

Fonctions de plusieurs variables réelles Calcul différentiel

Conventions

n et p sont des entiers naturels non nuls.

Dans ce chapitre, on étudie des fonctions de E dans F où E et F sont deux espaces vectoriels normés réels de dimensions finies : $\dim E = n,\ \ \dim F = p.$ ✎ (1)

Les espaces E et F étant rapportés aux bases $\mathcal{B}_E = \big(e_1, \dots, e_n\big)$ et $\mathcal{B}'_F = \big(e'_1, \dots, e'_p\big)$, une fonction $f : E \to F$ d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ se représente par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad f(x) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x) e'_j .$$

Si les bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}'_F$ de F sont fixées, on peut convenir de noter :

$$x = \sum_{x=1}^{n} x_i e_i = \big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{p} y_j e'_j = \big(y_1, y_2, \dots, y_p\big)$$

et f se représente alors par $\quad \forall x = \big(x_1, \dots, x_n\big) \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\big)$

ou encore :

$$f\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) = \big(f_1\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big), f_2\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big), \dots, f_p\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big)\big)$$

C'est la notation usuelle lorsque $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, ces espaces étant rapportés à leurs bases canoniques ; on dit alors que f est **une fonction de n variables réelles.** ✎ (2)

✎ (1) Le cas usuel est $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$.

✎ (2) On dispose ainsi de notations identiques pour représenter les fonctions de E dans F et les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

A. Fonctions continûment différentiables

1. Dérivées partielles

1.1 – Applications partielles

Définition 1

Soit $f : E \to F$ d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. L'espace E étant rapporté à une base $\mathcal{B} = \big(e_i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, soit $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ un élément de $\mathcal{D}_f$.

Les **fonctions partielles de f en a** suivant la base $\mathcal{B}$ ✎ (3) sont :

$$f_{a,i} : \mathbb{R} \to F, \ \ t \mapsto f\big(a + \big(t - a_i\big) e_i\big) \quad i \in [\![1, n]\!].$$

L'ensemble de définition de $f_{a,i}$ est :

$$\mathcal{D}_{f_{a,i}} = \big\{t \in \mathbb{R} \ / \ a + \big(t - a_i\big) e_i \in \ \mathcal{D}_f\big\}.$$

✎ (3) Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, les fonctions partielles de f en a sont par défaut les fonctions partielles sur la base canonique.

Remarques

1) Si $\mathcal{D}_f$ est un voisinage de a, alors $\mathcal{D}_{f_{a,i}}$ est un voisinage de a_i dans $\mathbb{R}$.
2) Si la base $\mathcal{B}$ est fixée sans ambiguïté, les $f_{a,i}$ seront simplement appelées fonctions partielles de f en a.
3) $f_{a,i}$ se définit aussi par : $t \mapsto f\big(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n\big)$.

1.2 – Continuité

Théorème 1

Si f est continue en a, chacune de ses fonctions partielles $f_{a,i}$ est continue en a_i. ✎ (4)

☞ Utiliser $\quad f_{a,i}(t) = f\big(a + \big(t - a_i\big) e_i\big)$ et la composition des fonctions continues.

✎ (4) **Remarque**. Ce théorème exprime une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que f soit continue en a.

Exemple 1 Étudier la continuité en $(0,0)$ de $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

▪ Les deux fonctions partielles en $(0,0)$: $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont identiquement nulles, donc continues.

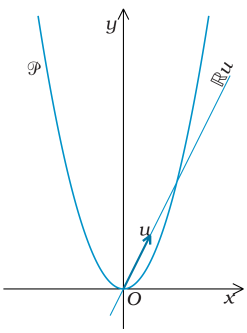
▪ Pour $x \neq 0$, on a $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$, la restriction de f à la droite $\mathbb{R}u$, où $u = (1,1)$, n'est donc pas continue en $(0,0)$ et il en est de même pour f.

Exemple 2 On considère la fonction $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

a) Étudier la continuité en $(0,0)$ des restrictions f_u de f aux droites vectorielles $\mathbb{R}u$.

b) f est-elle continue en $(0,0)$?



a) Les fonctions partielles en $(0,0)$: $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont nulles, donc continues, ce qui assure la continuité en $(0,0)$ des restrictions de f aux droites $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$, où $e_1 = (1,0)$, et $e_2 = (0,1)$. Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f(x,tx) = \frac{tx}{x^2+t^2}$$

d'où la continuité en $(0,0)$ de la restriction de f à toute droite $\mathbb{R}u_t$, avec $u_t = (1,t)$. Tous les cas ont ainsi été envisagés.

b) Pour tout $x \neq 0$, on a : $f(x,x^2) = \dfrac{1}{2}$.

La restriction de f à $P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\right\}$, (parabole), n'est donc pas continue en $(0,0)$ et il en est de même pour f.

1.3 – Dérivée suivant un vecteur Dérivées partielles sur une base

f est supposée définie sur U **ouvert de** E à valeurs dans F.

Définition 2

Soit $a \in U$ et $v \in E$, $v \neq 0_E$.
On dit que f admet une **dérivée en** a **suivant le vecteur** v si la fonction :

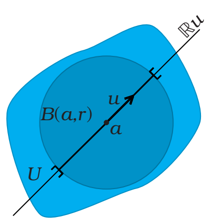
$$f_{a,v} : \mathbb{R} \to F, \quad t \mapsto f(a+tv),$$

définie au voisinage de 0 ✎(5) , est dérivable en 0, c'est-à-dire s'il existe :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$

Lorsqu'elle existe, cette dérivée est notée $D_v f(a)$.

✎(5) U contient une boule ouverte $B(a,r)$ de centre a et de rayon $r>0$. Donc pour $|t| < \frac{r}{\|v\|}$, $u+tv$ est dans U.



Définition 3

Un vecteur v étant fixé dans $E \setminus \{0\}$, on dit que f admet sur U une dérivée suivant le vecteur v si et seulement si pour tout a de U, f admet en a une dérivée suivant le vecteur v. On la note $D_v f$.
La fonction f est dite de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si quel que soit $v \in E \setminus \{0\}$, f admet une dérivée suivant le vecteur v continue sur U.

Définition 4

Soit $\mathcal{B} = \left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E.

Étant donné $a \in U$ et $j \in [\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ième}}$ **dérivée partielle de** f **en** a **suivant la base** $\mathcal{B}$ est, lorsqu'elle existe, la dérivée de f en a suivant le vecteur e_j . Il s'agit donc aussi de la dérivée en a_j ✎(6) de la $j^{\text{ème}}$ fonction partielle $f_{a,j}$ en a suivant la base $\mathcal{B}$.

On la note $\quad D_j f(a) \quad$ ou $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

✎(6) $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f\left(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n\right) - f\left(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n\right)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f\left(a + te_j\right) - f(a)}{t}.$$

Définition 5

Si $D_j f(a)$ existe en tout point a de U, on définit la j ième **fonction dérivée partielle**, suivant la base $\mathcal{B}$, de f sur U par :

$$D_j f : U \to F, \quad a \mapsto D_j f(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to F, \quad a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Remarques

1) Si la base $\mathcal{B}$ de E est fixée sans ambiguïté, on dira plus simplement j^e dérivée partielle de f en a ou j^e fonction dérivée partielle de f sur U.
2) Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, les dérivées partielles de f en a ou fonctions dérivées partielles de f sur U sont par défaut définies par rapport à la base canonique.

Propriété 1

f est définie par la donnée de ses p fonctions composantes $f_1, \dots, f_p$ sur $\mathcal{B}'_p$, base de F.
Pour tout $a \in U$ et tout $v \in E \setminus \{0\}$, f admet une dérivée en a suivant le vecteur v si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i admet en a une dérivée suivant le vecteur v, et alors :

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^{p} D_v f_i(a) e'_i.$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

☞ Ce sont là des propriétés relatives à la dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle.

Propriété 2

Linéarité des dérivations partielles

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, F)$ des fonctions de E dans F de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, F)$.
Pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, l'application $D_v : \mathcal{C}^1(U, F) \to \mathcal{C}^0(U, F), \ f \mapsto D_v f$ est linéaire.

☞ Cela résulte aussi des propriétés des fonctions d'une variable réelle et on a :

$$D_v(\lambda f + \mu g) = \lambda D_v f + \mu D_v g.$$

Propriété 3

Fonctions de dérivée partielle nulle

E étant rapporté à la base $\mathcal{B} = \left(e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, notons E_j le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\left(e_i\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}}$.

Si U est convexe et si f admet sur U une j ième fonction dérivée partielle $D_j f$ identiquement nulle sur U, alors il existe $g : E_j \to F$ telle que :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in U, \ f(x) = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n). \text{ ✎}^{(7)}$$

✎ (7) On pourra retenir que si U est convexe et si $\forall x \in U$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ alors $f(x)$ « ne dépend pas de x_j ».

$x = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i e_i$ est noté $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$

et $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} x_i e_i$ est noté $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

☞ Il s'agit en fait de montrer que l'on a $f(x) = f\left(x'\right)$ pour tout couple $\left(x, x'\right)$ de points de U,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ x' = \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i, \text{ tels que } \forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}, \ x_i = x'_i.$$

U étant convexe, le segment $[x, x']$ est inclus dans U, donc la fonction :

$$\varphi : [0, 1] \to F, \ t \mapsto f\left(x + t\left(x'_j - x_j\right)e_j\right)$$

est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée est identiquement nulle. Il en résulte qu'elle est constante sur $[0, 1]$, et on a donc $\varphi(0) = \varphi(1)$ c'est-à-dire $f(x) = f\left(x'\right)$.

On est ainsi ramené à un problème de fonction d'une variable réelle.

2. Fonction différentiable en un point

2.1 – Fonction différentiable

Définition 6

Deux fonctions f et g de E dans F définies sur V voisinage de $a \in E$ sont dites **tangentes en** a **si** $f(a) = g(a)$ **et** $f(x) - g(x) = o(x - a)$ **quand** x **tend vers** a, c'est-à-dire si :

$$f(a) = g(a) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - a\|} = 0.$$

Définition 7

Soit $f : E \to F$ définie sur V voisinage de $a \in E$.
f est dite **différentiable en** a s'il existe φ_a, application affine de E dans F, telle que f et φ_a soient tangentes en a.

☞ D'après la définition 6, on a alors $\varphi_a(a) = f(a)$, donc, si ψ_a est la partie linéaire de φ_a, il vient : $\quad \forall x \in E, \quad \varphi_a(a + x) = f(a) + \psi_a(x)$.

Théorème 2

$f : E \to F$ étant définie sur V voisinage de $a \in E$, f est différentiable en a si et seulement si il existe $\psi_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a + h) = f(a) + \psi_a(h) + o(h) \quad \text{quand } h \text{ tend vers } 0.$$

Propriété 4

Si f est différentiable en a, f est continue en a.

☞ E étant de dimension finie, ψ_a est continue, d'où $\lim_{h \to 0} \psi_a(h) = 0$.

Propriété 5

Si f est différentiable en a, f admet en a une dérivée suivant tout vecteur v non nul de E.

☞ En effet, $\quad f(a + tv) = f(a) + t\,\psi_a(v) + o(tv) \quad$ donne :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \psi_a(v) \quad \text{c'est-à-dire} \quad D_v f(a) = \psi_a(v).$$

Ces notions (fonction différentiable en a, différentielle en a) sont invariantes par changement de norme dans E ou F.
En effet E (resp. F) étant de dimensions finies, toutes les normes sur E (resp. F) sont équivalentes, et les limites sont invariantes par changement de norme.

Propriété 6

Si f est différentiable en a, l'application linéaire ψ_a est définie de manière unique.
Elle est appelée **différentielle de** f **en** a et notée df_a.
Pour tout vecteur v non nul de E, on a donc : $D_v f(a) = df_a(v)$.

☞ E étant rapporté à la base $\left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on a : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \psi_a\left(e_i\right) = D_i f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Ainsi, ψ_a est l'unique application linéaire de E dans F définie par :

$$\forall h \in E, \quad h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \;, \quad \psi_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Notation 1

En calcul différentiel, on note $\left(dx_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base duale de la base $\left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, dx_i : $h \mapsto h_i$. Il vient alors :

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i.$$

Propriété 7

Cas où $E = \mathbb{R}$

f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a et alors df_a est définie par :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad df_a(h) = hf'(a) \quad \text{ou} \quad df_a = f'(a)dx.$$

☞ Les deux propositions se traduisent en effet par :

$$\exists A \in F, \; f(a+h) = f(a) + hA + o(h) \quad (A = f'(a)).$$

Exemple 3 Soit $f : E \to F$ définie sur un voisinage de 0 avec $f(x) = o(x)$.

Montrer que f est différentiable en 0. Calculer df_0.

Il suffit de constater que f et l'application nulle (de E dans F) sont tangentes en 0.

Donc f est différentiable en 0 avec : $df_0 = 0$.

Exemple 4 $E = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \; / \; \deg P \leqslant n\}$.

Montrer que $f : P \mapsto \displaystyle\int_0^1 \sin\big(t\,P(t)\big)\mathrm{d}t$ est différentiable en tout point P de E.

Pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$, posons $\varphi(x,h) = \sin(x+h) - \sin x - h\cos x$: φ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a $|\varphi(x,h)| \leqslant \dfrac{h^2}{2}$. Formons alors

$$f(P+Q) - f(P) = \int_0^1 \Big[\sin\big(t\,P(t) + t\,Q(t)\big) - \sin\big(t\,P(t)\big)\Big]\,\mathrm{d}t$$

$$f(P+Q) - f(P) = \int_0^1 t\,Q(t)\cos\big(t\,P(t)\big)\mathrm{d}t + \int_0^1 \varphi\big(t\,P(t), t\,Q(t)\big)\mathrm{d}t.$$

L'application $\quad L : Q \mapsto \displaystyle\int_0^1 t\,Q(t)\cos\big(t\,P(t)\big)\mathrm{d}t \quad$ est évidemment linéaire.

Avec, par exemple, $\|Q\| = \left(\displaystyle\int_0^1 Q^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, et :

$$\left|\int_0^1 \varphi\big(t\,P(t), t\,Q(t)\big)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^2Q^2(t)}{2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 Q^2(t)\mathrm{d}t,$$

il vient $\quad |f(P+Q) - f(P) - L(Q)| \leqslant \dfrac{1}{2}\|Q\|^2$, donc :

$$f(P+Q) = f(P) + L(Q) + o(Q).$$

En conclusion, f est différentiable en P avec $df_P = L$.

Théorème 3

Linéarité de la différentiation

Si $f : E \to F$ et $g : E \to F$ sont différentiables en $a \in E$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a avec :

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$$

$\mathcal{D}_a(E,F)$, ensemble des fonctions de E dans F différentiables en a, est donc un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions définies au voisinage de a.

☞ En effet : $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h)$ avec $df_a \in \mathcal{L}(E,F)$

$g(a+h) = g(a) + dg_a(h) + o(h)$ avec $dg_a \in \mathcal{L}(E,F)$

donne : $(\lambda f + \mu g)(a+h) = (\lambda f + \mu g)(a) + (\lambda df_a + \mu dg_a)(h) + o(h)$

avec $\lambda df_a + \mu dg_a \in \mathcal{L}(E,F)$.

2.2 – Matrice jacobienne

Théorème 4

F est rapporté à une base $\left(e'_i\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$, les composantes de f sur cette base sont notées $f_1, f_2, \ldots, f_p$.

f est différentiable en a si et seulement si chaque f_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, est différentiable en a.

On a alors $\left(df_i\right)_a = \left(df_a\right)_i$, c'est-à-dire que la différentielle en a de la $i^{\text{ième}}$ composante de f est la $i^{\text{ième}}$ composante de la différentielle en a de f.

☞ ▪ Si f est différentiable en a, on a $f(a+h) - f(a) = \psi_a(h) + o(h)$.

Donc, en introduisant les composantes $\left(\psi_a\right)_i$ de ψ_a, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad f_i(a+h) - f_i(a) = \left(\psi_a\right)_i(h) + o(h).$$

Ainsi, f_i est différentiable en a avec $\left(df_i\right)_a = \left(\psi_a\right)_i = \left(df_a\right)_i$.

▪ Inversement, si chaque f_i est différentiable en a, posons $\psi_a = \sum_{i=1}^{p} \left(df_i\right)_a e'_i$.

On a alors $f(a+h) - f(a) = \psi_a(h) + o(h)$; donc f est différentiable en a.

Définition 8

Matrice jacobienne

Si f est différentiable en a, la matrice de df_a, par rapport au couple de bases $\left(e_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de E, et $\left(e'_i\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de F, est appelée matrice jacobienne de f en a.

On la note $J_f(a)$ et on a $J_f(a) = \left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

(i : indice de ligne ; j : indice de colonne).

☞ En effet $df_a\left(e_j\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) e'_i$.

Définition 9

Jacobien

On suppose $E = F$, $\left(e'_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n} = \left(e_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$.

Le déterminant de $J_f(a)$ (c'est-à-dire aussi le déterminant de df_a) est appelé jacobien ou **déterminant fonctionnel** de f en a.

On le note $\dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a) = \det J_f(a)$.

2.3 – Gradient d'une fonction numérique

Définition 10

On suppose ici que E est un espace vectoriel euclidien et que $F = \mathbb{R}$. ✎(8)

$f : E \to \mathbb{R}$ étant différentiable en a, il existe un unique vecteur de E appelé le **gradient** de f en a et noté $\operatorname{grad} f(a)$ tel que :

$$\forall h \in E, \quad df_a(h) = \left\langle \operatorname{grad} f(a) \,\middle|\, h \right\rangle.$$

✎(8) Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ on considère que, par défaut, cet espace est muni de sa structure euclidienne canonique, c'est-à-dire du produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée.

☞ C'est une conséquence du fait que df_a appartient au dual de E qui est canoniquement isomorphe à E (voir Algèbre – Géométrie, Espaces euclidiens).

Si $\left(e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale de E, on a $\operatorname{grad} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$.

Exemple 5 Montrer que $f : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \| x \|$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$, avec :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \operatorname{grad} f(x) = \frac{x}{\| x \|}.$$

Pour $x \in E \setminus \{0\}$ et $h \in E$, on a $\| x+h \|^2 = \| x \|^2 + 2\langle x \mid h \rangle + \| h \|^2$, donc

$$f(x+h) = \| x \| \left(1 + 2\frac{\langle x \mid h \rangle}{\| x \|^2} + \frac{\| h \|^2}{\| x \|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sachant que, au voisinage 0, $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} + o(u), \quad u \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{\langle x \mid h \rangle}{\| x \|} + o(h),$$

f est donc différentiable sur $E \setminus \{0\}$ avec :

$$df_x : h \mapsto \frac{\langle x \mid h \rangle}{\| x \|} \quad \text{d'où} \quad \operatorname{grad} f(x) = \frac{x}{\| x \|}.$$

3. Différentiabilité d'une application de classe C^1

Remarque : l'étude des applications différentiables non de classe $\mathcal{C}^1$ est hors programme.

Théorème 5

Soit $f : E \to F$ définie sur U ouvert de E.
Si, par rapport à une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, f admet n dérivées partielles $D_j f$ continues sur U, alors f est différentiable en tout point de U.
En outre, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U : $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$.

Cette démonstration est non exigible.

☞ Soit $a \in U$, on sait que si f est différentiable, la différentielle de f en a est :

$$\psi_a = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\, dx_i\,.$$

On est donc ramené à prouver que cette application ψ_a vérifie, quand $h \in E$ tend vers 0 :

$$f(a+h) = f(a) + \psi_a(h) + o(h).$$

U étant ouvert, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que U contienne le pavé :

$$P = \left\{ x \in E \,/\, \forall j \in [\![1, n]\!], \quad \left| x_j - a_j \right| < \eta \right\} \quad ✎^{(9)}$$

✎(9) P est la boule ouverte de centre a et de rayon η pour la norme $x \mapsto \sup\{|x_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Pour $h \in E$ tel que $a+h \in P$, soit $V_j = \sum_{i=1}^{j} h_i e_i \quad 1 \leqslant j \leqslant n$ et $V_0 = 0$.

On a alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $V_j = V_{j-1} + h_j e_j$ et

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} f\left(a + V_j\right) - f\left(a + V_{j-1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^{h_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a + V_{j-1} + t e_j\right) \mathrm{d}t \quad ✎^{(10)}$$

✎(10) Le principe consiste à écrire $f(a+h) - f(a)$ comme somme d'accroissements des fonctions partielles. S'agissant de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ d'une variable réelle, on peut alors écrire ces accroissements comme intégrales de leurs dérivées.

d'où :

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{h_j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a + V_{j-1} + t e_j\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right] \mathrm{d}t.$$

Considérons sur E et F les normes définies par :

$$\forall x \in E, \quad \| x \| = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| x_j \right|, \qquad \forall y \in F, \quad \| y \| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} |y_i|.$$

La continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sur P donne l'existence de :

$$M_j = \sup_{t \in [0, h_j]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a + V_{j-1} + t e_j\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\| \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} M_j = 0.$$

On obtient alors :

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |h_j|\, M_j \leqslant \| h \| \sum_{j=1}^{n} M_j$$

d'où finalement $\quad f(a+h) - f(a) - \psi_a(h) = o(h)$.

Ainsi f est différentiable sur U.

Il reste à prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

On sait déjà que, pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, f admet en tout point a de U une dérivée suivant le vecteur u : $Df_u(a) = df_a(u)$.

En posant $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, on a donc $Df_u(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i$ ainsi la continuité sur U de $a \mapsto Df_u(a)$ résulte de celle des n dérivées partielles $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Théorème 6

Une fonction $f : E \to F$, définie sur U ouvert de E, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si étant donné $\mathcal{B} = \left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base de E, f admet par rapport à cette base n dérivées partielles $D_i f$ (ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) continues sur U.

☞ Corollaire du théorème **5**.

Théorème 7

Soit $f : E \to F$ définie sur U ouvert de E, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U,

(2) pour tout $a \in U$, f est différentiable en a et l'application $a \mapsto df_a$ définie sur U à valeurs dans $\mathcal{L}(E, F)$ est continue sur U,

(3) il existe une application $\ell : U \to \mathcal{L}(E, F)$ continue sur U telle que pour tout a de U :

$$f(a+h) - f(a) = \ell(a)(h) + o(h) \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

☞ Il est clair que **(2)** $\iff$ **(3)** par définition de la différentiabilité de f.

(1) $\Rightarrow$ **(2)** Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors, d'après le théorème 5, elle est différentiable en tout point de U et l'application $a \mapsto df_a = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) dx_i$ est continue.

(2) $\Rightarrow$ **(1)** Si f est différentiable sur U avec $a \mapsto df_a$ continue sur U, pour tout $v \in E \setminus \{0\}$ et tout $a \in U$, f admet en a une dérivée suivant v : $D_v f(a) = df_a(v)$, et la continuité sur U de $a \mapsto df_a$ donne celle de $a \mapsto D_v f(a)$.

Définition 11

Une fonction $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est aussi dite **continûment différentiable** sur U. L'application $a \mapsto df_a$ de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ est appelée **différentielle** de f et notée df, elle est continue sur U. ✎ (11)

✎ (11) **Remarque** : attention à la rigueur des notations :
$df_a \in \mathcal{L}(E,F)$
tandis que :
$df \in \mathcal{C}^0\left(U, \mathcal{L}(E,F)\right)$

Exemples

- Si f est constante sur U, la proposition **(3)** du théorème 7 est vérifiée avec ℓ fonction nulle de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, f est donc continûment différentiable sur U avec $df = 0$.
- Si f est la restriction à U d'une application linéaire φ, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, la proposition **(3)** du théorème 7 est vérifiée avec, pour tout a de U, $\ell(a) = \varphi$, f est donc continûment différentiable sur U avec $\forall a \in U, df_a = \varphi$.

On notera que, dans chacun des trois premiers exemples, l'application df est constante sur U.

- Si f est la restriction à U d'une application affine θ de partie linéaire φ, $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, la proposition **(3)** du théorème 7 est vérifiée avec, pour tout a de U, $\ell(a) = \varphi$.
  f est donc continûment différentiable sur U avec $\quad \forall a \in U, \quad df_a = \varphi$.
- Si P est la fonction produit sur $\mathbb{R} \times E$:
  $$P \; : \mathbb{R} \times E \to E, \;\; (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$
  la proposition **(3)** du théorème 7 est vérifiée avec, pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$:
  $$\ell(\lambda, x) \;:\; (\mu, y) \mapsto \mu x + \lambda y.$$
  P est donc continûment différentiable sur $\mathbb{R} \times E$ avec :
  $$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \;\; dP_{(\lambda,x)} = x\, d\lambda + \lambda \; dx \; ✎^{(12)}$$
  où les applications $d\lambda \in \mathscr{L}(\mathbb{R} \times E, \mathbb{R})$ et $dx \in \mathscr{L}(\mathbb{R} \times E, E)$ sont définies par :
  $$\forall (\mu, y) \in \mathbb{R} \times E, \;\; d\lambda\,(\mu, y) = \mu, \;\; dx(\mu, y) = y.$$

✎(12) Avec $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ on peut arriver à ce résultat en étudiant les dérivées partielles de P.

Exemple 6

a) Soit $\;f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$

Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis calculer la matrice jacobienne et le jacobien de f en (r, θ).

b) Mêmes questions pour :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi).$$

Dans les deux cas, on a affaire à des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ puisque leurs composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ car pourvues de dérivées partielles continues.

a) Premier exemple.

$$J_f(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \det J_f(r, \theta) = r.$$

b) Deuxième exemple.

$$J_f(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \det J_f(r, \theta, \varphi) = r^2\cos\varphi.$$

4. Composition des applications de classe $\mathcal{C}^1$

On considère maintenant trois espaces vectoriels de dimensions finies : E, F et G.

Théorème 8

Soit $\;f : E \to F\;$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E
$\quad g : F \to G\;$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V ouvert de F tel que $f(U) \subset V$.
Alors $\;g \circ f : E \to G\;$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U avec, pour tout a de U :
$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

☞ Posons $b = f(a)$. Les relations :

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + o(h) \quad , \quad h \in E, \quad a + h \in U$$
$$g(b + k) = g(b) + dg_b(k) + o(k) \quad , \quad k \in F, \quad b + k \in V$$

se traduisent par l'existence de deux fonctions :

$$\varepsilon_1 \; : E \to F \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 \; : F \to G$$

définies respectivement sur :

$$\Omega_1 = \{h \in E \,/\, a + h \in U\} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \{k \in F \,/\, b + k \in V\} \quad \text{telles que :}$$

$$\forall h \in \Omega_1 \quad , \quad f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \varepsilon_1(h)\|\,h\,\| \quad , \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$
$$\forall k \in \Omega_2 \quad , \quad g(b + k) = g(b) + dg_b(k) + \varepsilon_2(k)\|\,k\,\| \quad , \quad \lim_{k \to 0} \varepsilon_2(k) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Ω_2 est un ouvert de F contenant 0 et f est continue en a, donc il existe B boule ouverte non vide de centre 0 dans E, $B \subset \Omega_1$ telle que $\forall h \in B, u(h) = f(a+h) - f(a) \in \Omega_2$.
Avec $b + u(h) = f(a+h)$ et $u(h) = df_a(h) + \varepsilon_1(h)\| h \|$, la relation **(2)** donne :

$$\forall h \in B, \quad g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + dg_b \circ df_a(h) + \varepsilon_3(h)\| h \| \tag{3}$$

où on a posé $\varepsilon_3(h) = dg_b\big(\varepsilon_1(h)\big) + \varepsilon_2\big(u(h)\big)\dfrac{\| u(h) \|}{\| h \|}$ pour $h \neq 0$ et $\varepsilon_3(0) = 0$.

Il est clair que $\lim\limits_{h \to 0} dg_b\big(\varepsilon_1(h)\big) = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2\big(u(h)\big) = 0$.

D'autre part la continuité de df_a [13] donne $\forall x \in E$, $\| df_a(x) \| \leqslant \| df_a \| \, \| x \|$ d'où :

$$\frac{\| u(h) \|}{\| h \|} \leqslant \left\| df_a\left(\frac{h}{\| h \|}\right) \right\| + \| \varepsilon_1(h) \| \leqslant \| df_a \| + \| \varepsilon_1(h) \|.$$

On en déduit que $h \mapsto \dfrac{\| u(h) \|}{\| h \|}$ est bornée au voisinage de 0, donc que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_3(h) = 0$.

La relation **(3)** donne alors : $g \circ f(a+h) = g \circ f(a) + dg_b \circ df_a(h) + o(h)$, ce qui prouve que $g \circ f$ est différentiable en a avec : $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Enfin, la continuité de $\varphi : U \to \mathcal{L}(E, G)$, $a \mapsto dg_{f(a)} \circ df_a$ en tout point a de U résulte de la majoration :

$$\| \varphi(a') - \varphi(a) \| \leqslant \| dg_{f(a')} - dg_{f(a)} \| \; \| df_{a'} \| + \| dg_{f(a)} \| \; \| df_{a'} - df_a \|,$$

ainsi que de la continuité de df en a, de dg en $f(a)$ et de f en a.

[13] E étant de dimension finie, toutte application linéaire de E dans F est continue et $\| df_a \|$ est la norme de df_a subordonnée aux normes choisies dans E et F.

Corollaire 1

Jacobienne d'une fonction composée [14]

Pour tout a de U, les matrices jacobiennes vérifient :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big)\, J_f(a).$$

[14] On conserve les hypothèses du théorème 8.

Exemple 7 Étant donnés $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $a \in U$ et $v \in E \setminus \{0\}$, retrouver la dérivée de $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$.

U contient une boule ouverte $B(a, r)$, $r > 0$, donc φ est définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ contenant $]-r, r[$ et, pour tout $t \in]-r, r[$, $\varphi'(t)$ est la dérivée de f en $a + tv$ suivant le vecteur v : $\varphi'(t) = df_{a+tv}(v)$.

Le théorème précédent nous donne une autre méthode pour atteindre ce résultat.

Avec $g : t \mapsto a + tv$, on a $\varphi = f \circ g$.

Or g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-r, r[$ avec $\forall t \in]-r, r[$, $dg_t : h \mapsto hv$ donc, puisque $g\big(]-r, r[\big) \subset U$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-r, r[$ telle que $\forall t \in]-r, r[$, $d\varphi_t : h \mapsto df_{a+tv} \circ dg_t(h)$ soit $d\varphi_t(h) = h\, df_{a+tv}(v)$. Il en résulte $\varphi'(t) = df_{a+tv}(v)$.

Corollaire 2

Composition des dérivations partielles

Soit $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E et $g : F \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V ouvert de F tel que $f(U) \subset V$.

Les espaces E et F étant rapportés à des bases fixées $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(e'_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$, on note :

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \big(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$$

$$g : (y_1, y_2, \ldots, y_p) \mapsto g(y_1, y_2, \ldots, y_p)$$

Alors en tout point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de U, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}\big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)\big)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

☞ C'est une conséquence de l'égalité matricielle $J_{g \circ f}(x) = J_g\big(f(x)\big)\, J_f(x)$ où :

$$J_{g\circ f}(x) = \left[\frac{\partial g\circ f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g\circ f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial g\circ f}{\partial x_n}(x)\right] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$$

$$J_g\big(f(x)\big) = \left[\frac{\partial g}{\partial y_1}\big(f(x)\big), \frac{\partial g}{\partial y_2}\big(f(x)\big), \frac{\partial g}{\partial y_p}\big(f(x)\big)\right] \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$$

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Corollaire 3

Composition des différentielles : méthode pratique

Soit $f:\ E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E

et $g:\ F \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V ouvert de F avec $f(U) \subset V$.

Les espaces E, F et G étant rapportés à des bases fixées $\big(e_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\big(e'_j\big)_{1\leqslant j\leqslant p}$, $\big(e''_k\big)_{1\leqslant k\leqslant q}$, on note :

$$f : x = \big(x_1, \ldots, x_n\big) \mapsto y = \big(y_1, \ldots, y_p\big)$$

$$g : y = \big(y_1, \ldots, y_p\big) \mapsto z = \big(z_1, \ldots, z_q\big)$$

Alors, f_i, $i \in [\![1, p]\!]$, étant les fonctions composantes de f on a :

$$dg = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, p]\!],\ df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

et
$$d(g\circ f) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j\,.$$

On obtient donc $d(g\circ f)$ en remplaçant dans dg les dy_i par les df_i.

Corollaire 4

Différentielle d'un produit, d'un inverse

a) Soit $f:\ E \to F$ et $g:\ E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E.
Alors fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U avec :

$$\forall x \in U \quad d(fg)_x = g(x)df_x + f(x)dg_x \qquad \textbf{(1)}$$

b) Soit $f:\ E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E et $a \in U$ tel que $f(a) \neq 0$.

Alors il existe V ouvert de E tel que $\{a\} \subset V \subset U$ et $0 \notin f(V)$, $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V avec :

$$\forall x \in V \quad d\left(\frac{1}{f}\right)_x = \frac{-1}{f^2(x)} df_x\,. \qquad \textbf{(2)}$$

☞ a) On peut écrire $fg = P\circ\Phi$ avec :

$$\begin{cases} \Phi : & E & \to & F\times\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \big(f(x), g(x)\big) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P : & F\times\mathbb{R} & \to & F \\ & (y,\lambda) & \mapsto & \lambda y \end{cases}$$

Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, il en est de même pour Φ. ✎(15)

D'autre part on a vu que P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $F\times\mathbb{R}$ (cf. les exemples suivant le théorème 7) donc, $fg = P\circ\Phi$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème 8.

De plus, sachant que $d\Phi_x$, et $dP_{(y,\lambda)}$, sont définies par :

$$\begin{cases} d\Phi_x : & E & \to & F\times\mathbb{R} \\ & h & \mapsto & \big(df_x(h), dg_x(h)\big) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} dP_{(y,\lambda)} : & F\times\mathbb{R} & \to & F \\ & (u,\mu) & \mapsto & \lambda u + \mu y \end{cases}$$

avec $d(fg)_x = dP_{\left(f(x),g(x)\right)} \circ dF_x$, on obtient :

$$d(fg)_x\ :\ E \to F,\, h \mapsto g(x)\, df_x(h) + dg_x(h)f(x) \qquad \text{d'où } \textbf{(1)}.$$

b) f est continue en a donc il existe V ouvert tel que $\{a\} \subset V \subset U$, $0 \notin f(V)$.

La propriété annoncée s'obtient, comme ci-dessus, par application du théorème 8, en écrivant :

$$\frac{1}{f} = I\circ f \quad \text{avec} \quad I\ :\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\, t \mapsto \frac{1}{t}\,.$$

✎(15) Pour vérifier ce fait il suffit d'étudier les dérivées partielles de Φ.

B. Dérivées partielles d'ordres supérieurs

1. Fonctions de classe C^k

$f : E \to F$ est supposée définie sur U ouvert de E.

L'espace E est rapporté à une base $\mathcal{B} = \left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Définition 12

On suppose que f admet sur U une $j^{\text{ième}}$ fonction dérivée partielle, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Si $D_j f$ admet en a une $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle $D_k\left(D_j f\right)(a)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, on dit que f admet en a une $(k, j)^{\text{ième}}$ **dérivée partielle seconde** notée :

$$D^2_{k,j} f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \ \partial x_j}(a).$$

$$D^2_{k,j} f(a) = D_k\left(D_j f\right)(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \ \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a).$$

On peut alors définir, si c'est possible, les fonctions dérivées partielles secondes, puis, en itérant le procédé, les dérivées partielles et fonctions dérivées partielles triples, quadruples, etc.

Notation 2

$$f'_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = D_j f$$

$$f''_{x_k x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \ \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = D^2_{k,j}$$

$\ldots \quad \ldots$

$$f^{(q)}_{x_{j_q} \ldots x_{j_2} x_{j_1}} = \frac{\partial^q f}{\partial x_{j_q} \ldots \partial x_{j_2} \ \partial x_{j_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_q}}\left(\frac{\partial^{q-1} f}{\partial x_{j_{q-1}} \ldots \partial x_{j_2} \ \partial x_{j_1}}\right).$$

Définition 13

Rappelons que f est dite de classe $\mathcal{C}^0$ sur U si elle est continue sur U.

On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^k$, $(k \in \mathbb{N}^*)$, sur U lorsque, quel que soit $\left(j_1, \ldots, j_k\right) \in [\![1, n]\!]^k$, f admet une $\left(j_k, \ldots, j_1\right)^{\text{ième}}$ fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \ldots \partial x_{j_1}}$ continue sur U.

On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur U lorsque, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Propriété 8

$f : E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si et seulement si ses p fonctions composantes sur la base $\mathcal{B}'$ de F sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Théorème 9

Théorème de Schwarz ✎ (16)

Soit $f : E \to F$ admettant sur U ouvert de E des fonctions dérivées partielles secondes $D^2_{i,j} f$ et $D^2_{j,i} f \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$.

Si ces fonctions sont continues en $a \in U$, alors :

$$D^2_{i,j} f(a) = D^2_{j,i} f(a).$$

✎ (16) La démonstration est hors programme.

Corollaire 1

Soit $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert de E.

Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :

$$D^2_{i,j} f = D^2_{j,i} f \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}.$$

Corollaire 2

Si $f : E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, pour tout $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$ et toute permutation σ de $[\![1, k]\!]$, on a :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}\, \partial x_{i_{\sigma(2)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}}.$$

f étant de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, tout calcul de fonction dérivée partielle d'ordre inférieur ou égal à k peut se faire dans un ordre arbitraire, ordre qui n'a donc pas à apparaître dans la notation.

On écrit par exemple $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2\, \partial x^2}$ pour $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y\, \partial x\, \partial y\, \partial x}$.

Exemple 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0).$$

Montrer l'existence des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$.

Que peut-on déduire de ce calcul ?

$$x \neq 0, \quad \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \qquad \text{d'où} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,$$

$$y \neq 0, \quad \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \frac{y\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} \qquad \text{d'où} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y.$$

De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x.$

On en déduit :

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0) = -1,$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 1, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = 1.$$

Par ailleurs, f admet, évidemment, des dérivées partielles secondes en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il résulte donc du théorème de Schwarz que l'une au moins des deux fonctions :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

est non continue en $(0,0)$, (en fait, les deux sont non continues par raison d'antisymétrie).

2. Opérations sur les fonctions de classe C^k

Propriété 9

L'ensemble $\mathcal{C}^k(U,F)$ des fonctions de E dans F de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,F)$.

☞ C'est immédiat en notant que, pour tout $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![1, n]\!]^k$, on a :

$$\frac{\partial^k(\lambda f + \mu g)}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = \lambda \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} + \mu \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

Propriété 10

Produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Si $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, la fonction produit fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. ✎[17]

✎[17] **Remarque** : on a des résultats analogues pour tous les produits usuels :
- une fonction vectorielle par une fonction numérique,
- produit scalaire de deux fonctions vectorielles, etc.

☞ Démonstration par récurrence en utilisant le fait que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial (fg)}{\partial x_i} = f\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Propriété 11

Inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et si a est un point de U tel que $f(a) \neq 0$, il existe V ouvert de E tel que :

$$\{a\} \subset V \subset U, \quad 0 \notin f(V) \text{ et } \frac{1}{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } V.$$

☞ L'existence de V résulte de la continuité de f en a. On a de plus :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

ce qui permet une démonstration par récurrence.

Propriété 12

Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^m$, $m \geqslant 1$

Si $f : E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^m$ sur U ouvert de E et $g : F \to G$ de classe $\mathcal{C}^m$ sur V ouvert de F tel que $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^m$ sur U.

☞ ■ Il suffit de montrer que les composantes $(g \circ f)_k, 1 \leqslant k \leqslant q$, de $g \circ f$ dans la base $\left(e''_k\right)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ de G sont de classe $\mathcal{C}^m$. Or, $(g \circ f)_k = g_k \circ f$; on est donc ramené à démontrer la proposition dans le cas où $q = 1$.

■ Procédons par récurrence.

Le résultat est acquis pour $m = 1$. Supposons la propriété vraie pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^m$, et supposons f et g de classe $\mathcal{C}^{m+1}$. Leurs fonctions dérivées partielles sont alors de classe $\mathcal{C}^m$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, les $\dfrac{\partial g}{\partial y_j} \circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^m$. On en déduit que les $\left(\dfrac{\partial g}{\partial y_j} \circ f\right)\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ sont de classe $\mathcal{C}^m$, propriété 10, et donc que les :

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f\right)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{sont de classe } \mathcal{C}^m.$$

Ainsi, $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$: la propriété annoncée est récurrente.

Exemple 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de $F = f \circ g$.

En déduire l'expression de $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (Laplacien de f) en fonction des dérivées partielles de F.

✎(18) Dans ces formules, pour alléger l'écriture, nous notons : $\frac{\partial F}{\partial r}$ pour $\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta), \dots$

On a ici $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ d'où : $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta \end{cases}$ ✎(18)

Le théorème de Schwarz s'applique, et on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\sin\theta\cos\theta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} r\cos\theta - \dfrac{\partial f}{\partial y} r\sin\theta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2\sin^2\theta - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} r^2\sin\theta\cos\theta \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2\cos^2\theta \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\theta - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} r\sin\theta\cos\theta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} r\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

On en déduit $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + r^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + r\dfrac{\partial F}{\partial r} = r^2\,\Delta f.$

Donc, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$: $\Delta f = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r}$.

C. Difféomorphismes

1. Définition – Propriétés

Définition 14

Soit U un ouvert de E, V un ouvert de F et k un entier naturel non nul.
On dit que f est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** de U sur V si f est une bijection de U sur V telle que f soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et f^{-1} de classe $\mathcal{C}^k$ sur V.

Propriété 13

Si f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U ouvert de E sur V ouvert de F, alors, pour tout $a \in U$, avec $b = f(a)$, df_a **est un isomorphisme de E sur F** tel que :

$$(df_a)^{-1} = d\left(f^{-1}\right)_b.$$

☞ f et f^{-1} sont continûment différentiables puisque $k \geqslant 1$. Alors :

$$\begin{array}{rclll} f^{-1}\circ f & = & \mathrm{Id}_U & \text{donne} & \forall a \in U, d\left(f^{-1}\right)_b \circ df_a = \mathrm{Id}_E\,, \\ f\circ f^{-1} & = & \mathrm{Id}_V & \text{donne} & \forall b \in V, df_a \circ d\left(f^{-1}\right)_b = \mathrm{Id}_F\,. \end{array}$$

La conclusion en résulte.

Propriété 14

S'il existe f, $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U ouvert de E sur V ouvert de F, alors :

$$\dim E = \dim F.$$

☞ En effet, d'après la propriété **13**, E et F sont isomorphes.

Propriété 15

Si f est $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U ouvert de E sur V ouvert de F, E étant rapporté à la base $\left(e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et F à $\left(e'_i\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$, on a, pour tout $a \in U$, avec $b = f(a)$:

$$J_f(a) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \text{et}\ \left(J_f(a)\right)^{-1} = J_{f^{-1}}(b).$$

Pour la suite, E et F sont deux espaces vectoriels normés de même dimension n.
Le théorème 10 est admis.

Théorème 10

Caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes
Soit U un ouvert de E et f une application injective de classe $\mathcal{C}^k$,$(k \geqslant 1)$, de U dans F.
Alors, $V = f(U)$ est un ouvert et f définit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U dans V si et seulement si , quel que soit $a \in U$, df_a est inversible.

2. Application aux changements de variables

Problème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $(k \geqslant 1)$, sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$:

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto y = f(x_1, \dots, x_n)$$

Supposons disposer de $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ induisant un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de V sur U :

$$\varphi : (u_1, \dots, u_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n) = \big(\varphi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_n)\big)$$

(ce fait pourra, par exemple, être mis en évidence au moyen du théorème 10).

La fonction $g = f \circ \varphi$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$ sur V et on désire calculer les dérivées partielles de f en fonction de celle de g.

- On a $f = g \circ \varphi^{-1}$ et la difficulté tient au fait que l'on ne sait, en général, pas expliciter φ^{-1}.
On pourra, pour calculer les dérivées partielles de φ^{-1}, inverser la matrice $J_\varphi(u)$:

en posant $\psi = \varphi^{-1}$ on a $J_\psi(x) = \left[\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x)\right] = \big(J_\varphi(u)\big)^{-1}$

$x = (x_1, \dots, x_n) = \varphi(u), u = (u_1, \dots, u_n)$.

On utilisera ensuite : $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u_j}(u) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x) \quad u = \psi(x).$$

- Une autre méthode consiste à écrire les formules :

$$\frac{\partial g}{\partial u_i}(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i}(u) \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

et observer qu'il s'agit là, pour tout $u \in V$, d'un système de Cramer aux inconnues

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x), 1 \leqslant j \leqslant n$; le déterminant n'est autre que le jacobien de φ en u.

Exemple 10 Étude du changement de variable défini par :

$$x = r\cos\theta \ , \quad y = r\sin\theta$$

$\varphi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de :

$$V =]0, +\infty[\times] - \pi, + \pi[\quad \text{sur} \quad U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)/x \leqslant 0\}.$$

Son jacobien est $\det J_\varphi(r, \theta) = r$ (cf. exemple 6), donc, par application du théorème 10, φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de V sur U.

Étant donné $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de $g = f \circ \varphi$.

- Première méthode

$$J_\varphi(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad J_\psi(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{r}$ et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\sin\theta + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$ ✎(19)

✎(19) Pour alléger la notation, on écrit : $\frac{\partial r}{\partial x}$ pour $\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial g}{\partial r}$ pour $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$, avec $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

■ Deuxième méthode

$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ c'est-à-dire $g = f\circ\varphi$ donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta. \end{cases}$$

La résolution de ce système permet de retrouver les formules précédentes.

Remarque : on pourra déduire de l'étude de la fonction exponentielle complexe (chapitre 5, propriété 7) que φ^{-1} est définie par :

$$\varphi^{-1} : U \to V, \quad (x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

D. Inégalité des accroissements finis

Théorème 11

Soit U un ouvert de E et $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, $k \geqslant 1$.
Pour tout $(a,b) \in U^2$ tel que le segment $[a,b] = \{a + t(b-a) \mid t \in [0,1]\}$ soit inclus dans U, on a :

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant M \| b - a \|$$

où M est un majorant de $\{ ||| df_x ||| \,/\, x \in [a,b] \}$. ✎(20)

✎(20) $||| df_x |||$ désigne la norme de l'application linéaire continue df_x subordonnée aux normes de E et F.

☞ L'existence de M résulte de la continuité de $x \mapsto df_x$ sur le compact $[a,b]$.
Posons $h = b - a$ et soit $\varphi : [0,1] \to F$, $t \mapsto f(a+th)$.
φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec :

$$\forall t \in [0,1],\ \varphi'(t) = df_{a+th}(h)$$ ✎(21)

✎(21) $\varphi'(t)$ est la dérivée de f en $a+th$ suivant le vecteur h.

φ' étant continue sur $[0,1]$, on a $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Or $\forall t \in [0,1], \| \varphi'(t) \| = \| df_{a+th}(h) \| \leqslant \| h \| \; ||| df_{a+th} ||| \leqslant M \| h \|$.
D'où $\| f(b) - f(a) \| \leqslant M \| h \|$.

Exemple

Munissons E de la norme $x \mapsto \| x \|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|$ ✎(22) et soit $A = \displaystyle\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\ \sup_{x\in[a,b]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\|$.

✎(22) Une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant fixée, $x_1, \cdots, x_n$ sont les coordonnées de x sur cette base.

Alors $df_x(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ on déduit :

$$\forall h \in E, \forall x \in [a,b], \| df_x(h) \| \leqslant A \sum_{i=1}^n |h_i| = A \| h \|_1$$

donc $\forall x \in [a,b]$, $||| df_x ||| \leqslant A$ et, dans ce cas $\| f(b) - f(a) \| \leqslant A \| b - a \|$.

Corollaire 1

Soit U un ouvert **convexe** de E et $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telle qu'il existe M majorant de $\{\|df_x\| / x \in U\}$, alors f est lipschitzienne, donc uniformément continue de U.

☞ La convexité de U donne que, pour tout $(a,b) \in U^2$, on a $[a,b] \subset U$, donc, d'après le théorème 11 : $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\|$.

Corollaire 2

Soit U un ouvert **étoilé** ✎(23) et f une application de U dans F.
f est constante si et seulement si df_x est nulle pour tout $x \in U$.

✎(23) Rappelons que U est dit étoilé lorsqu'il existe $x_0 \in U$ tel que, pour tout x de U, $[x_0, x] \subset U$. (cf. chapitre 1, définition 40).

☞ On sait déjà que si f est constante sur U, elle est continûment différentiable sur U avec :
$$\forall x \in U, df_x = 0.$$
La réciproque est une conséquence immédiate du théorème 11 et du fait que :
$$\forall x \in U, \left[x_0, x\right] \subset U.$$

Exemple 11 Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab \neq 1$, exprimer $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ en fonction de :
$$\operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab}$.

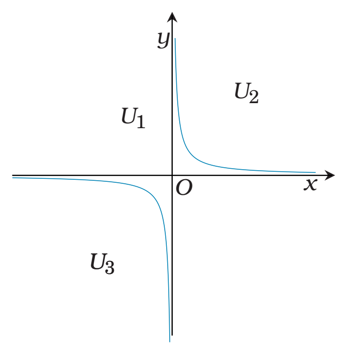
f est continûment différentiable sur l'ouvert $U = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab \neq 1\right\}$ avec :
$$\forall (a,b) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 0 \quad \text{donc} \quad df_{(a,b)} = 0.$$

On a $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$.

$$U_1 = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab < 1\right\}$$

$$U_2 = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab > 1, a > 0\right\}$$

$$U_3 = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab > 1, a < 0\right\}$$



U_1, U_2 et U_3 sont des ouverts comme images réciproques d'ouverts par des fonctions continues.

Par exemple $U_2 = \Phi^{-1}(]1, +\infty[\times]0, +\infty[)$ avec $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a,b) \mapsto (ab, a)$.

Comme l'application $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est convexe, on en déduit que U_2 est convexe donc étoilé et, par symétrie, il en est de même pour U_3.

U_1 est étoilé car, pour tout $m = (a,b) \in U_1$, on a $\left[O, m\right] \subset U_1$.

Le corollaire 2 du théorème 11 donne alors que $\forall k \in \{1,2,3\}$, f est constante sur U_k, donc :

$$\forall (a,b) \in U_1, \; f(a,b) = f(0,0) = 0$$
$$\forall (a,b) \in U_2, \; f(a,b) = \lim_{a \to +\infty} f(a,a) = \pi$$
$$\forall (a,b) \in U_3, \; f(a,b) = \lim_{a \to -\infty} f(a,a) = -\pi$$

E. Formule de Taylor-Young Extremums

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Une base $\left(e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de l'espace E est fixée.

1. Formule de Taylor-Young

Théorème 12

Soit U un ouvert de E et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
Pour tout point a de U, on a, lorsque u tend vers 0 :

$f(a+u) - f(a) =$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)u_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)\right) + o\left(\| u\|^2\right) \quad ✎^{(24)}$$

✎[24] Il s'agit là de la formule de Taylor-Young en a.

☞ U étant ouvert, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r)\subset U$. ✎[25]
Alors, pour tout $u\in E$ tel que $\| u\| < r$, le segment $[a, a+u]$ est inclus dans $B(a,r)$, donc dans U, et $g : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(a+tu)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

✎[25] $B(a,r)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r.

On a $\quad g'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+tu) \quad$ et $\quad g''(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a+tu).$

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à g donne :

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) &= g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t)\mathrm{d}t \\ &= g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \int_0^1 (1-t)\left(g''(t) - g''(0)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donc $\quad f(a+u) - f(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a) + R(u)$ avec :

$$R(u) = \int_0^1 (1-t)\left(g''(t) - g''(0)\right)\mathrm{d}t.$$

Posons alors pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\; m_{i,j}(u) = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)\right|.$

Puisque les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ sont continues en a, on a $\displaystyle\lim_{u\to 0} m_{i,j}(u) = 0$.

Avec, par exemple, la norme euclidienne : $\| u\| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, on obtient quel que soit (i,j), ✎[26] $\left|u_i u_j\right| \leqslant \dfrac{u_i^2 + u_j^2}{2} \leqslant \| u\|^2$. Il vient donc :

✎[26] $u = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i e_i$

$\forall t\in [0,1]$, $\left|g''(t) - g''(0)\right| \leqslant \| u\|^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(u)$, puis $|R(u)| \leqslant \dfrac{\| u\|^2}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(u)$.

Puisque chaque $m_{i,j}(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0, il en résulte $R(u) = o\left(\| u\|^2\right)$.
D'où la conclusion.

Corollaire

Cas particulier : $\dim E = 2$ – **Notation de Monge**

La formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = ph+qk+\frac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2)+o(h^2+k^2)$$

où on a posé :

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad q=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a,b) \quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$ ✎ (27)

✎ (27) Ce sont là les **notations de Monge**.

2. Extremums relatifs

Rappel

- $f : E \to \mathbb{R}$ définie sur D, admet en $a \in D$ un **extremum (maximum ou minimum) local (ou relatif)** si et seulement si il existe V voisinage de a tel que :

$$\forall u \in E, \quad a+u \in V \cap D \quad \Rightarrow \quad f(a+u) \leqslant f(a) \qquad \text{maximum}$$

$$\forall u \in E, \quad a+u \in V \cap D \quad \Rightarrow \quad f(a+u) \geqslant f(a) \qquad \text{minimum}$$

On parle d'extremum **strict** si, de plus $u \neq 0 \Rightarrow f(a+u) \neq f(a)$.

- Dans tout ce qui suit, U est un ouvert de E.

2.1 – Conditions nécessaires d'extremum

Théorème 13

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E.

Pour que f admette un extremum local en $a \in U$, il est nécessaire (mais non suffisant) que $df_a = 0$, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$ ✎ (28)

✎ (28) Ou encore $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

- Il existe $\alpha > 0$ tel que U contienne la boule :

$$B_\infty(a,\alpha) = \left\{x \in E \;/\; \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ |x_i - a_i| < \alpha\right\}$$ ✎ (29)

✎ (29) $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Si f admet un extremum en a, chaque fonction partielle :

$$x_i \mapsto f\left(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n\right) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

est dérivable sur $]a_i-\alpha, a_i+\alpha[$ et admet un extremum en a_i, donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

- Ces conditions ne sont pas suffisantes.

En effet, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Or, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ puisque tout voisinage V de $(0,0)$ contient des points pour lequels $f(x,y,) > 0$ c'est-à-dire $f(x,y) > f(0,0)$ et des points pour lesquels $f(x,y) < 0$.

Définition 15

Étant donné $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, on dit que $a \in U$ est un **point critique** de f lorsque $df_a = 0$.

2.2 – Conditions suffisantes d'extremum

Théorème 14

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et $a \in U$ un point critique de f tel que la forme quadratique q_a soit non dégénérée.

$$q_a : u \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a).$$

Si q_a est définie positive, f présente un minimum en a.
Si q_a est définie négative, f présente un maximum en a.
Sinon f ne présente en a ni maximum ni minimum : on dit avoir affaire à un **point col**.

☞ Dans les deux premiers cas, il s'agit d'un extremum strict.
Pour $u \neq 0$, la formule de Taylor-Young s'écrit ici :

$$f(a+u) - f(a) = \frac{1}{2} q_a(u) + o\left(\| u \|^2\right)$$

$$f(a+u) - f(a) = \frac{\| u \|^2}{2} \left[q_a \left(\frac{u}{\| u \|} \right) + \varepsilon(u) \right.$$

où $\varepsilon : E \to \mathbb{R}$ est telle que $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$.

- Supposons q_a définie positive ou définie négative.

Quand u décrit $E \setminus \{0\}$, $\dfrac{u}{\| u \|}$ décrit S, sphère unité de E.

S est un compact (fermé-borné et E est de dimension finie), $|q_a|$ est continue sur S, donc il existe $v \in S$ tel que $|q_a(v)| = \inf\limits_{x \in S} |q_a(x)|$.

q_a étant définie (positive ou négative), $v \neq 0$ donne $q_a(v) \neq 0$, donc : $\inf\limits_{x \in S} |q_a(x)| = m > 0$.

De $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$ on déduit l'existence de $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\| u \| < r \Rightarrow |\varepsilon(u)| < m$.

Donc, pour tout $\| u \| < r$, $f(a+u) - f(a) = \| u \|^2 \left[q_a \left(\dfrac{u}{\| u \|} \right) + \varepsilon(u) \right]$ est du signe de q_a, ce qui assure la conclusion.

De plus, on note que dans ces conditions, $u \neq 0 \Rightarrow f(a+u) - f(a) \neq 0$; donc, il s'agit d'un extremum strict.

- Supposons q_a non dégénérée, non positive et non négative.

Il existe alors $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $q_a(v) = 1$ et $w \in E \setminus \{0\}$ tel que $q_a(w) = -1$.

D'où : $f(a+tv) - f(a) = \dfrac{1}{2} t^2 + o\left(t^2\right)$ $\quad f(a+tw) - f(a) = -\dfrac{1}{2} t^2 + o\left(t^2\right)$.

On en déduit que tout voisinage de a contient :

- des points $a + tv$ en lesquels $f(a+tv) - f(a) > 0$ et
- des points $a + tw$ en lesquels $f(a+tw) - f(a) > 0$.

f ne présente pas d'extremum en a.

Théorème 15

On suppose $E = \mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique. ✎(30)

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et $(a, b) \in U$ un point critique de f tel qu'en ce point on ait $s^2 - rt \neq 0$ (cf. notations de Monge).

- Si $s^2 - rt < 0, r > 0$, f présente un minimum en (a, b).
- Si $s^2 - rt < 0, r < 0$, f présente un maximum en (a, b).
- Si $s^2 - rt > 0, (a, b)$ est un **point col** pour f, c'est-à-dire que f ne présente en a ni maximum ni minimum.

✎(30) C'est le seul cas qui soit explicitement au programme.

C'est évidemment un cas particulier du théorème 14.

Exemple 12 Étudier les extremums de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x + y)$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarquons d'abord que :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + \pi, y) = f(x, y + \pi) = f(x, y)$.

Donc, si f présente un extremum en (x, y), il en est de même en $(x + \pi, y)$ et en $(x, y + \pi)$, et ils sont de même nature (maximum ou minimum). **(1)**

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(-x, -y) = -f(x, y)$.

Donc si f présente un maximum (resp. minimum) en (x, y), elle présente un minimum (resp. maximum) en $(-x, -y)$. **(2)**

On peut ainsi se limiter à la recherche des extremums sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ✎(31)

De $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin(2x + y) \sin y \quad$ et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(2y + x) \sin x$,

on déduit que les points critiques sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $(0, 0)$ et $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

- En $(0, 0)$, on a $\quad f(0, 0) = 0$.

Or, $f(x, x) = \sin^2 x \sin 2x$ change de signe en 0 ; $(0, 0)$ est donc un point col.

- En $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, on a $r = -\sqrt{3}, s = -\frac{\sqrt{3}}{2}, t = -\sqrt{3}, \; f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

donc $\quad s^2 - rt < 0 \quad$ et $\quad r < 0$: f présente un maximum relatif strict.

D'après la remarque **(2)**, f présente un minimum relatif strict en : $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$.

Conclusion : f présente en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ un maximum local strict, c'est un maximum absolu (non strict), sa valeur est $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, elle est aussi atteinte aux points $\left(\frac{\pi}{3} + n\pi, \frac{\pi}{3} + p\pi\right), (n, p) \in \mathbb{Z}^2$.

La situation est analogue en $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$ pour les minimums de f.

✎(31) **Remarque**
L'étude précédente consiste en la recherche des extremums de f situés sur le compact $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = K$ et non pas en la recherche des extremums de la restriction de f à K, (pour celle-ci le théorème 15 ne s'appliquerait pas).

Exemple 13 Étudier les extremums relatifs

de : $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^3 + y^3$

puis de : $\quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^4 + y^4$.

a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

On commence par déterminer les points critiques de f.

$\operatorname{grad} f(x, y) = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} 2(x - y) + 3x^2 = 0 \\ -2(x - y) + 3y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ 2(x - y) + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

On a donc un seul point critique : $(0, 0)$.

D'entrée de jeu, f est donnée sous la forme d'un développement de Taylor-Young :

$$f(x, y) = (x - y)^2 + o(x^2 + y^2) \quad ✎(32)$$

On a donc ici $\quad q_{(0,0)}(x, y) = 2(x - y)^2 \;:\; \operatorname{rg} q_{(0,0)} = 1, \; q_{(0,0)}$ est dégénérée. ✎(33)

Ainsi, on ne peut pas conclure par application du théorème 15.

Remarquons alors que $f(x, x) = 2x^3$ est du signe de x, ce qui assure que $(0, 0)$ est un point col.

b) g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On trouve un seul point critique : $(0, 0)$, et ici aussi $q_{(0,0)}$ est dégénérée.

De façon évidente, on a $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) \geqslant g(0, 0) = 0$.

Donc, g présente un minimum en $(0, 0)$ (qui est d'ailleurs un minimum absolu et strict).

✎(32) car $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$

✎(33) On peut aussi noter que $r = t = 2$ et $s = -2$, donc $s^2 - rt = 0$.

Méthodes

L'essentiel

I. Différentiabilité

Rappelons que l'étude des fonctions différentiables non de classe $\mathcal{C}^1$ est hors programme.

✔ **Si l'on veut** prouver qu'une fonction $f : E \to F$ définie sur U ouvert de E est continûment différentiable sur U,

- **on peut** montrer que f admet sur U, par rapport à une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, n fonctions dérivées partielles continues sur U,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 1
- **on peut** en revenant à la définition, mettre en évidence pour tout $a \in U$ l'existence d'une application linéaire ℓ_a telle que :
  $$f(a+h) - f(a) = \ell_a(h) + o(h).$$
  On vérifiera ensuite que l'application $a \mapsto \ell_a$ est continue sur U.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

II. Équations aux dérivées partielles

✔ **Si l'on veut** résoudre une équation aux dérivées partielles d'une fonction f,

- **on peut** penser à utiliser un changement de variable qui la transforme en une équation simple. Par exemple, on résoud facilement les équations :
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ avec la propriété 3 ;
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = h(x)$ (h donnée) en se ramenant au cas précédent grâce à une primitive de $x_j \mapsto h(x)$;
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) + a(x)f(x) = h(x)$ en la considérant comme une équation différentielle linéaire du premier ordre pour la $j^{\text{ième}}$ fonction partielle ;
  - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) = 0$ en utilisant deux fois la propriété 3.

  Sauf indications contraires, on privilégiera les changements de variable linéaires ou polaires (dans $\mathbb{R}^2$).
  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 3,4

III. Extremums

✔ **Si l'on veut** trouver les bornes d'une fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ sur un compact K,

- **on peut**
  - si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U contenant K, déterminer les points critiques de f sur l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K, calculer les bornes de f sur la frontière de K et les comparer avec les valeurs prises par f aux points critiques ;
  - si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U contenant K sauf en certains points, opérer comme précédemment en adjoignant à la comparaison les valeurs prises par f aux points de $\overset{\circ}{K}$ où f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

Mise en œuvre

I. Différentiabilité

Ex. 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, montrer que $F : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto \int_0^1 f\big(t, P(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Indications

Étudier les dérivées partielles par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution

Écrivons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la fonction $(t, a_k) \mapsto f\big(t, P(t)\big)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de dérivation sous le signe somme, dans le cas de l'intégration sur un intervalle compact, donne que la fonction partielle $a_k \mapsto \int_0^1 f\big(t, P(t)\big)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial F}{\partial a_k}(P) = \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial y}\big(t, P(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Par composition de fonctions continues, on dispose également de la continuité sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_n[X]$ de $(t, P) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}\big(t, P(t)\big)$ donc le théorème de continuité sous le signe somme, dans le cas de l'intégration sur un intervalle compact, donne que :

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} : P \mapsto \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial y}\big(t, P(t)\big)\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } \mathbb{R}_n[X].$$

Il en résulte que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc qu'elle est continûment différentiable, la différentielle étant définie en tout point P par :

$$dF_P : H \mapsto \int_0^1 H(t) \frac{\partial f}{\partial y}\big(t, P(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Commentaires

Noter que l'application du théorème de Leibniz donne seulement la continuité de $a_k \mapsto \frac{\partial F}{\partial a_k}(P)$.

Il y a donc lieu de poursuivre le raisonnement pour obtenir la continuité de $\frac{\partial F}{\partial a_k}$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Ex. 2

Montrer que la fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M\,{}^tM$ est continûment différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indications

Former la différence $f(M + H) - f(M)$

Solution

Pour tout M et H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$f(M + H) - f(M) = M\,{}^tH + H\,{}^tM + H\,{}^tH. \qquad \textbf{(1)}$$

Il est clair que l'application $\ell_M : H \mapsto M\,{}^tH + H\,{}^tM$ est linéaire. Pour conclure il reste donc à montrer que $H\,{}^tH = o(H)$.

Commentaires

Supposons avoir muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire d'une norme telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

Il vient alors $\|H\,{}^tH\| \leqslant \|H\|\,\|{}^tH\|$, or par continuité de l'application linéaire $\mathrm{Tr}\ : A \mapsto {}^tA$, en posant $\lambda = |\!|\!|\mathrm{Tr}|\!|\!|$ il vient $\|{}^tH\| \leqslant \lambda \|H\|$ d'où finalement $\|H\,{}^tH\| \leqslant \lambda \|H\|^2$.

On a ainsi prouvé que $H\,{}^tH = o(H)$ et la relation **(1)** devient :

$$f(M+H) - f(M) = \ell_M(H) + o(H). \qquad \textbf{(2)}$$

Donc f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $df_M = \ell_M$.
Puisque l'application $M \mapsto \ell_M$ est, elle aussi, visiblement linéaire, elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et finalement, f est continûment différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On peut facilement définir une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Par exemple notons φ_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. Alors si $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ est la norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ subordonnée à une norme quelconque choisie dans $\mathbb{R}^n$, l'application $M \mapsto |\!|\!|\varphi_M|\!|\!|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II. Équations aux dérivées partielles

Ex. 3

On considère l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 3(x-y)f(x,y) = 0.$ **(1)**

1) Soit $\varphi\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ (x,y) \mapsto (xy, x+y)$. Montrer que φ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme Φ de l'ouvert $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x-y>0\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ sur un ouvert V que l'on précisera.

2) En déduire toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ vérifiant **(1)**.

Indications

1) Étant donné $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, si (u,v) est dans V, l'équation $X^2 - vX + u = 0$ admet des racines réelles distinctes. Expliciter Φ^{-1} pour vérifier que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

2) Avec $g = f \circ \Phi^{-1}$, on reconnaît une équation différentielle linéaire de la fonction partielle $u \mapsto g(u,v)$.

Solution

1) Pour $(u,v) \in \varphi(U)$, il existe $(x,y) \in U$ tel que $v = x+y$ et $u = xy$. Donc x et y sont racines réelles distinctes de l'équation $X^2 - vX + u = 0$, ce qui impose $\Delta' = v^2 - 4u > 0$.
Ainsi on a $\varphi(U) \subset V$ avec $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ /\ v^2 - 4u > 0\}$.

Réciproquement, pour $(u,v) \in V$, il existe un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $u = xy,\ \ v = x+y,\ \ x>y$, il s'agit de :

$$(x,y) = \left(\frac{v+\sqrt{v^2-4u}}{2}, \frac{v-\sqrt{v^2-4u}}{2}\right).$$

Donc tout élément de V a un antécédent et un seul dans U : en posant $\Phi = \varphi|_U$, Φ est une bijection de U sur V dont la bijection réciproque est :

$$\Phi^{-1}\ : (u,v) \mapsto \left(\frac{v+\sqrt{v^2-4u}}{2}, \frac{v-\sqrt{v^2-4u}}{2}\right).$$

On peut alors constater directement que V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ puisque c'est l'image réciproque de $]0,+\infty[$ par l'application continue :

$$(u,v) \mapsto v^2 - 4u.$$

Enfin, les expressions de Φ et Φ^{-1} montrent que ces deux applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.

Commentaires

U est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'image réciproque de $]0,+\infty[$ par l'application continue $(x,y) \mapsto x-y$.

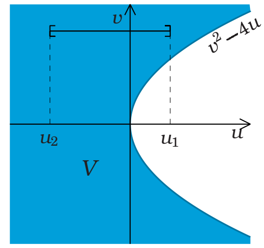
En appelant a et b les racines de l'équation $X^2 - vX + u = 0$, il existe deux couples (x,y) vérifiant $u = xy$ et $v = x+y$, ce sont (a,b) et (b,a).

Dès que l'on dispose des formules définissant Φ^{-1} on voit que Φ est un homéomorphisme (bijection bicontinue) de U sur V et il en résulte que V est un ouvert en tant qu'image réciproque de l'ouvert U par l'application continue Φ^{-1} :

$$V = (\Phi^{-1})^{-1}(U).$$

2) Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, posons $g = f \circ \Phi^{-1}$: $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$.
On a alors $f = g \circ \Phi$ c'est-à-dire $\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) = g(xy, x + y)$, et il en résulte :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y)$$



Donc f est solution de **(1)** sur U si et seulement si

$$\forall (x, y) \in U,\ \ (y - x)\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + 3(x - y)g(xy, x + y) = 0$$

soit, si et seulement si

Car sur U, on a $x - y \neq 0$.

$$\forall (u, v) \in V,\ \ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 3g(u, v). \qquad \textbf{(2)}$$

L'équation **(2)** est encore équivalente à :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - 3g(u, v)\right)e^{-3u} = 0,$$

donc aussi à $\dfrac{\partial h}{\partial u}(u, v) = 0$ où on a posé $h(u, v) = g(u, v)e^{-3u}$.

On utilise ici la méthode du facteur intégrant pour la résolution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

Remarquons alors que pour tout couple $\big((u_1, v), (u_2, v)\big)$ de points de V, le segment joignant ces deux points est inclus dans V. La condition $\dfrac{\partial h}{\partial u} = 0$ sur V, donne alors pour $u_1 \neq u_2$,

$$h\big(u_2, v\big) - h\big(u_1, v\big) = \frac{1}{u_1 - u_2}\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial h}{\partial u}\Big(tu_1 + (1-t)u_2, v\Big)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (u, v) \in V,\ g(u, v) = \lambda(v)e^{3u}$ et les fonctions f cherchées sont définies par $f(x, y) = \lambda(x + y)e^{3xy}$.

V n'étant pas convexe, la propriété 3 ne s'applique pas, il est nécessaire de reprendre une démonstration directe.

Ex. 4

Soit $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\right\}$.

On veut déterminer les applications $f : U \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U telles que :

$$\forall (x, y) \in U,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}\,. \qquad \textbf{(1)}$$

1) Étant donné $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on définit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par $g(x + y, x - y) = f(x, y)$.

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.

2) En déduire les solutions de **(1)**.

Indications

2) Appliquer deux fois la propriété 3.

Solution

1) g est définie sur $V = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / uv > 0\right\}$ par :

$$g(u, v) = f\left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right),$$

ou encore $g = f \circ \varphi$ avec $\varphi\ :\ (u, v) \mapsto (x, y) = \left(\dfrac{u + v}{2}, \dfrac{u - v}{2}\right)$.

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ tout comme f.

Commentaires

U et V sont des ouverts en tant qu'images réciproques de $]0, +\infty[$ par les applications continues $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ et $(u,v) \mapsto uv$ respectivement.

En fait φ induit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de V sur U.

De $f(x,y) = g(x+y, x-y)$, on déduit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Dans ces formules toutes les dérivées de f sont prises au point (x,y) et celles de g au point $(x+y, x-y)$.

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\,(x+y, x-y)$

2) φ réalisant une bijection de $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / uv > 0\}$ sur U, le calcul ci-dessus donne :

$$\textbf{(1)} \iff \forall (u,v) \in V, \quad 4\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{uv}}\,. \qquad \textbf{(2)}$$

On a ici $V = V_1 \cup V_2$ où $V_1 = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $V_2 = (\mathbb{R}_-^*)^2$, sont des pavés de $\mathbb{R}^2$.

Ce sont donc des convexes.

Pour $(u,v) \in V_1$, **(2)** donne successivement, d'après la propriété 3 :

Sur V_1, **(2)** s'écrit $\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 0$ où on a posé $h(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}$.

$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} + a_1(u)$, $a_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ étant arbitraire

$g(u,v) = \sqrt{uv} + A_1(u) + B_1(v)$, A_1 et B_1 étant arbitraires dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

Sur V_2, **(2)** donne de même $g(u,v) = \sqrt{uv} + A_2(u) + B_2(v)$, avec A_2 et B_2 arbitraires dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

En posant :

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x - y > 0,\; x + y > 0\}$$

$$\text{et} \quad U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x - y < 0,\; x + y < 0\}$$

on en déduit que la solution générale de **(1)** est définie par :

$$\forall (x,y) \in U_k, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + A_k(x+y) + B_k(x-y)$$

A_k et B_k étant arbitraires dans :

$$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{ si } k = 1, \quad \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}) \text{ si } k = 2.$$

III. Extremums

Ex. 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Calculer $\sup\limits_{\Delta} f$ avec $\Delta = [0,1]^2$.

Indications

Si la borne supérieure de f sur Δ est atteinte sur le pavé ouvert $]0,1[^2$, c'est en un point critique.

La considération de $g = \ell n f$ apporte une simplification intéressante des calculs.

Solution

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Sur le compact Δ elle est bornée et atteint ses bornes.

Sur le pavé ouvert $\mathring{\Delta} =]0,1[^2$, f est strictement positive donc $g = \ell n f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et (x,y) est point critique pour f si et seulement si il l'est pour g.

Les points critiques de f sur $\mathring{\Delta}$ sont donc définis par :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{2x}{1+x^2} = 0 \\ \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{2y}{1+y^2} = 0 \\ 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

Ce système a une solution et une seule : $\Omega = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Étudions maintenant f sur le bord du pavé Δ.

Puisque $f(x,y) = f(y,x)$ il suffit de faire cette étude sur les segments $[O,A]$ et $[B,C]$ où $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,1)$.

Avec $f(x,0) = \dfrac{x}{1+x^2}$, on obtient $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant f(x,0) \leqslant \dfrac{1}{2}$, les bornes 0 et $\dfrac{1}{2}$ étant atteintes en $(0,0)$ et $(1,1)$ respectivement.

Avec $f(x,1) = \dfrac{x+1}{2(1+x^2)}$, l'étude des variations de $\varphi : x \mapsto f(x,1)$ sur $[0,1]$ montre que les bornes de f sur $[B,C]$ sont $\inf\limits_{[B,C]} f = \dfrac{1}{2}$ atteinte en B et C, et $\sup\limits_{[B,C]} f = \dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$ atteinte en $(\sqrt{2}-1, 1)$.

Le calcul donne :

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \simeq 0,65$$

$$\text{et} \qquad f(\sqrt{2}-1, 1) = \frac{\sqrt{2}+1}{4} \simeq 0,60.$$

En conclusion, on a : $\sup\limits_{\Delta} f = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, cette borne étant atteinte au seul point Ω.

Commentaires

On sait qu'une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Il est clair que la borne inférieure est 0 atteinte en $(0,0)$.

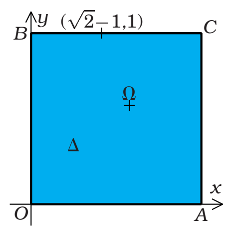
En tout point (x,y) de $\mathring{\Delta}$, on a :

$dg_{(x,y)} = \dfrac{1}{f(x,y)} \bullet df_{(x,y)}$ donc

$df_{(x,y)} = 0$ équivaut à $dg_{(x,y)} = 0$.

Un système équivalent est :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ \dfrac{1}{2x} - \dfrac{2x}{1+x^2} = 0 \\ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \end{cases}$$



On sait que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$2|ab| \leqslant a^2 + b^2.$$

$\varphi'(x) = -\dfrac{x^2+2x-1}{2(1+x^2)^2}$ s'annule sur $[0,1]$ au seul point $\sqrt{2}-1$, φ est strictement croissante sur $[0, \sqrt{2}-1]$ et strictement décroissante sur $[\sqrt{2}-1, 0]$.

Si la borne supérieure est atteinte sur $\mathring{\Delta}$, ce ne peut être qu'en Ω, on a donc

$$\sup_{\Delta} f = \max\left\{f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), f(\sqrt{2}-1, 1)\right\}.$$

Exercices

Niveau 1

Différentiabilité

Ex. 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1) Étudier la continuité de f en $(0,0)$.

2) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Ex. 2

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Montrer que $f : \mathbb{R}^n \setminus (0,0) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{\|x\|}$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus (0,0)$.

Calculer $\operatorname{grad} f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \setminus (0,0)$.

Ex. 3

Soit $f : R^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Montrer que f est linéaire.

Ex. 4

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = 0$.

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = yg(x,y).$$

Difféomorphismes

Ex. 5

Soit $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;/\; u - v > 0\}$, et

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^2,\quad (u,v) \mapsto (u^2+v^2, u+v).$$

Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de l'ouvert U sur un ouvert V que l'on précisera.

Ex. 6

Monter que :

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad (u,v) \mapsto \left(u + \frac{1}{2}\cos v,\ v + \frac{1}{2}\cos u\right)$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.

Ex. 7

Soit $\Phi : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3 \to \mathbb{R}^3,\quad (x,y,z) \mapsto (u,v,w)$,

avec $(u,v,w) = (x+z^2, y+x^2, z+y^2)$.

1) Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ sur $\operatorname{Im}\Phi$.

2) On note x, y, z les composantes de Φ^{-1}.

Calculer $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ et $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$.

Équations aux dérivées partielles

Ex. 8

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad (E)$$

On pourra utiliser un changement de variable linéaire.

Ex. 9

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x+y > 0\}$.

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in D,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$$

Extremums

Ex. 10

Étudier les extremums de :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad (x,y) \mapsto e^{x \sin y}.$$

Ex. 11

1) Étudier les extremums de :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad (x,y) \mapsto xy^2 + \ell n\left(4+y^2\right).$$

2) On pose $\Omega = [0,1] \times \mathbb{R}$. Étudier les extremums de f sur Ω.

Niveau 2

Avec solution détaillée

Ex. 12

Étant donnée $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^y f(u,v)\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex. 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, X \mapsto \det X$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et trouver sa différentielle.

Ex. 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que l'application :

$$F\ : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(R),\ \ M \mapsto M^{-1}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Calculer sa différentielle.

Ex. 15

Soit $k \in]0,1[$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \left|f'(x)\right| \leqslant k.$$

Montrer que :

$\Phi\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ (u,v) \mapsto \big(u + f(v), v + f(u)\big)$,

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Ex. 16

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ et

$a = (x_0, y_0, z_0) \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) \neq 0$.

On admet que, dans ces conditions, il existe un pavé ouvert $P = I \times J \times K$ contenant a, et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I \times J, K)$ tels que :

$$\forall (x,y,z) \in P,\ \ f(x,y,z) = 0 \iff z = \varphi(x,y),$$

et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,\varphi(x,y)\big) \neq 0.$

1) Soit $g :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U contenant a. Montrer que, pour que $G :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto g\big(x,y,\varphi(x,y)\big)$ présente un extremum local en a, il est nécessaire qu'en ce point on ait :

$$\textbf{(1)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(a)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z}(a) \\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial y}(a)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z}(a) \end{cases}$$

2) Application

Trouver les extremums de :

$g(x,y,z) = x\,\ell n\,x + y\,\ell n\,y + z\,\ell n\,z$

où x, y, z sont liés par $x + y + z = 3\alpha$, $\alpha > 0$.

Ex. 17

Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ euclidien et $f : U \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in U,\ \ \|df_x\| \leqslant k f(x)\quad (k > 0). \qquad \textbf{(1)}$$

1) Montrer que, pour tous points x_1 et x_2 de U pouvant être joints par un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et de longueur ℓ, on a : $\ f\left(x_2\right) \leqslant e^{k\ell} f\left(x_1\right)$. **(2)**
2) Montrer que, s'il existe $x_0 \in U$ tel que $f(x_0) = 0$, alors $f = 0$.
3) Généraliser au cas où $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, est telle que :

$$\forall x \in U,\ \ \|\,df_x\,\| \leqslant k\,|f(x)|. \qquad \textbf{(3)}$$

Ex. 18

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $f \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\big)$ pour laquelle il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \big\langle df_x(h) \,|\, h \,\big|\! \geqslant \big\rangle\ \alpha\,\|\,h\,\|^2. \qquad \textbf{(1)}$$

1) Montrer que : $\quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\big\langle f(b) - f(a) \,|\, b - a \,\big|\! \geqslant \big\rangle\ \alpha\,\|\,b - a\,\|^2. \qquad \textbf{(2)}$$

2) Montrer que f définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f\big(\,\mathbb{R}^n\,\big)$.
3) Montrer que $f\big(\,\mathbb{R}^n\,\big) = \mathbb{R}^n$.

Avec éléments de solution

Ex. 19

Soit f une application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré α lorsque :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que si f est homogène de degré α, alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

2) Étudier la réciproque

3) Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et telles que :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4 + 2y^4}.$$

Ex. 20

Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} y}$.

Trouver $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f\big(u(x,y)\big)$$

ait un laplacien nul.

Ex. 21

Soit $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x - y^2 > 0\}$.

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ vérifiant sur V :

$$2(y^2 - x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^2 + x = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variable défini par :

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u + v.$$

Ex. 22

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, df_x est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que la différentielle df est constante.

2) En déduire que f est une isométrie de $\mathbb{R}^n$.

Indications

Ex. 12

Le théorème de Fubini permet de ramener l'étude de la deuxième dérivation partielle à celle de la première. Appliquer avec soin les théorèmes de dérivation et de continuité sous le signe somme.

Ex. 13

$X = \left(x_{ij}\right)$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}$ en considérant le développement de $\det X$ suivant la colonne j.

Exprimer $df_X(H)$ en fonction de ${}^t\operatorname{com} X$.

Ex. 14

1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = D^{-1}(\mathbb{R}^*)$ avec $D\ : M \mapsto \det M$.

2) Montrer que F est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ex. 15

Cela revient à prouver que Φ est bijective.

On peut faire apparaître la fonction :

$$g_{x,y}\ : u \mapsto x - f\left(y - f(u)\right)$$

et montrer qu'elle admet un point fixe et un seul en utilisant une suite récurrente (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = g_{x,y}(u_n).$$

Ex. 16

1) Calculer les dérivées partielles de φ en considérant l'identité : $\forall (x,y) \in I \times J,\ \ f\left(x, y, \varphi(x,y)\right) = 0.$

Ex. 17

1) $\left([a,b], \varphi\right)$ étant un paramétrage d'un chemin joignant x_1 et x_2, introduire :

$$F : t \mapsto f\left(\varphi(t)\right) \exp\left(-k\int_a^t \|\varphi'\|\right).$$

2) Considérer $V = \{x \in U, f(x) = 0\}$

3) Considérer f^2.

Ex. 18

1) Considérer la fonction $\varphi : t \mapsto f\left(f(tb + (1-t)a\right).$

3) Montrer que $f\left(\mathbb{R}^n\right)$ est une partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}^n$.

Ex. 19

Considérer la fonction $\varphi\ : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\quad t \mapsto f(tx, ty).$

Ex. 20

f' doit être solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Ex. 21

Voir l'exercice 5.

Ex. 22

1) Prouver que les dérivées partielles secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ sont identiquement nulles.

2) Pour $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2$, considérer la fonction :

$$t \mapsto f\left(tb + (1-t)a\right).$$

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) Munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique et notons :

$$r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Puisque $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \geqslant x^4 + y^4$, on a $0 \leqslant f(x, y) \leqslant r^2$.

Donc $\lim\limits_{r \to 0} f(x, y) = 0$ et f est continue en $(0, 0)$.

2) En tant que rapport de deux polynômes qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{2x\left(x^4 + 2x^2y^2 - y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ et, puisque $f(x, 0) = x^2$, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0)}{x} = 0.$$

On remarque alors que pour $(x, y) \neq 0$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant \frac{2\,|x|\,(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2\,|x|,$$

donc $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

De même puisque f est symétrique, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex. 2

Posons $U = \mathbb{R}^n \setminus (0, 0)$.

La base canonique étant orthonormale, pour tout $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in U$, on a :

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc, par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{u}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\psi : \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, $f = \varphi \circ \psi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a alors :

$$\forall x \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -x_j \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x_j}{\|x\|^3}.$$

En notant $\left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e_j = -\frac{x}{\|x\|^3}.$$

Ex. 3

Pour une application linéaire u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad du_x = u.$$

Nous allons donc conclure en montrant que $f = df_0$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, considérons l'application $h\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p,\quad \lambda \mapsto f(\lambda x)$.

h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $h'(\lambda) = df_{\lambda x}(x)$. Mais puisque $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, on a aussi $h'(\lambda) = f(x)$.

Pour $\lambda = 0$ on en déduit en particulier $f(x) = df_0(x)$.

Ceci étant vrai quel que soit x, on obtient $f = df_0$ ce qui prouve que f est linéaire.

Ex. 4

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) - f(x, 0) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)\mathrm{d}t$$

donc :

$$f(x, y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)\mathrm{d}t.$$

Pour $y \neq 0$, le changement de variable défini par $t = uy$ donne alors $f(x, y) = y \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, uy)\mathrm{d}u$, et il est clair que cette identité est encore vraie pour $y = 0$.

On pose alors $g(x, y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, uy)\mathrm{d}u$.

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Leibniz (cas où l'intervalle d'intégration est compact) donne que les fonctions :

$$x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, uy)\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, uy)\mathrm{d}u$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, uy)\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \int_0^1 u\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, uy)\mathrm{d}u.$$

Le théorème de continuité sous le signe somme (cas où l'intervalle d'intégration est compact) donne alors que ces deux fonctions dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex. 5

Posons $\Phi(u, v) = (x, y)$ c'est-à-dire $x = u^2 + v^2,\quad y = u + v$.

Φ est visiblement de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(u, v) \in U$, la matrice jacobienne de Φ en ce point est :

$$J_\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où on déduit :

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \det J_\Phi(u, v) = 2(u - v).$$

Ce déterminant jacobien ne s'annulant pas sur U, d'après le théorème 10, pour prouver que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $\Phi(U)$, il suffit de vérifier que Φ est injective.

Déterminons alors $V = \Phi(U)$.

Étant donné $(S, P) \in \mathbb{R}^2$, on sait qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u + v = S,\quad uv = P\quad u \neq v$ si et seulement si $S^2 - 4P > 0$. Dans ce cas, si on appelle a et b les racines réelles (distinctes) de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, il y a deux couples (u, v) solutions du problème, il s'agit de (a, b) et (b, a).

En conséquence, pour tout $(S, P) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(u, v) \in U$ tel que $u + v = S,\quad uv = P$ si et seulement si $S^2 - 4P > 0$.

Cette condition étant réalisée, le problème admet une solution et une seule :

$$(u, v) = \left(\frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}, \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}\right).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y) \in V$ si et seulement si il existe $(u, v) \in U$ tel que :

$$x = (u + v)^2 - 2uv,\quad y = u + v \quad \text{donc tel que } u + v = y,\quad 2uv = y^2 - x.$$

D'après le rappel précédent, il en résulte que (x, y) est élément de V si et seulement si :

$$y^2 - 4\left(\frac{y^2 - x}{2}\right) > 0 \text{ c'est-à-dire } \quad 2x - y^2 > 0.$$

On a donc $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x - y^2 > 0\}$. De plus, toujours avec le rappel, tout élément de V a un antécédent et un seul par Φ dans U : Φ est une bijection de U sur V.

Avec le théorème 10, on conclut que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V et que V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Remarques

- V est l'image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par l'application continue $(x, y) \mapsto 2x - y^2$, ce qui prouve que V est ouvert sans recours au théorème 10.
- Le rappel montre que l'on peut expliciter l'application :

$$\Phi^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\frac{y + \sqrt{2x - y^2}}{2}, \frac{y - \sqrt{2x - y^2}}{2}\right).$$

et on peut ainsi vérifier directement que Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Le théorème 10 n'est réellement utile que lorsque l'on ne peut pas exprimer la fonction réciproque ou lorsque cette détermination ne présente pas d'intèrêt pour la suite.

Ex. 6

Posons $\Phi(u, v) = (x, y)$ c'est-à-dire $x = u + \frac{1}{2}\cos v, \quad y = v + \frac{1}{2}\cos u.$

Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de Φ en ce point est :

$$J_\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sin v \\ -\frac{1}{2}\sin u & 1 \end{pmatrix},$$

d'où on déduit :

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \det J_\Phi(u, v) = 1 - \frac{1}{4}\sin u \sin v.$$

Ce déterminant jacobien ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème 10, pour prouver que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, il suffit de vérifier que Φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y) = \Phi(u, v)$ si et seulement si

$$\begin{cases} u + \frac{1}{2}\cos\left(y - \frac{1}{2}\cos u\right) = x \\ v = y - \frac{1}{2}\cos u \end{cases}$$

Considérons alors la fonction $f_y : u \mapsto u + \frac{1}{2}\cos\left(y - \frac{1}{2}\cos u\right)$.

f_y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f_y'(u) = 1 - \frac{1}{4}\sin u \sin\left(y - \frac{1}{2}\cos u\right)$$

donc $f_y'(u) > 0$. Ainsi f_y est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et, puisque :

$$\lim_{-\infty} f_y = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f_y = +\infty,$$

f_y est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

En conséquence l'équation $(x, y) = \Phi(u, v)$ admet une solution et une seule définie par :

$$u = f_y^{-1}(x), \quad v = y - \frac{1}{2}\cos\left(f_y^{-1}(x)\right),$$

ce qui montre que Φ est bijective et, d'après la remarque initiale, c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex. 7

1) Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ et pour tout $(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$, la matrice jacobienne s'écrit :

$$J_\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2z \\ 2x & 1 & 0 \\ 0 & 2y & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant jacobien : $\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = 1+8xyz$ est donc strictement positif sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ et, d'après le théorème 10, il suffit, pour conclure, de montrer que Φ est injective.

Soit alors (x, y, z) et (x', y', z') dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ tels que $\Phi(x, y, z) = \Phi(x', y', z')$.

En supposant $x' \geqslant x$, $z^2 - z'^2 = x' - x$ avec z et z' positifs donne $z \geqslant z'$ et, de même, avec $y'^2 - y^2 = z - z'$, il vient $y' \geqslant y$ et enfin, $x^2 - x'^2 = y' - y$ fournit $x \geqslant x'$. Il en résulte finalement $x = x'$, d'où aussi :

$$y' = y \text{ et } z' = z.$$

On a ainsi montré que Φ est injective, et elle définit donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme et a fortiori $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ sur $\Phi\left(\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3\right)$.

2) **Remarque** : les notations utilisées dans ce texte consistent à nommer x, y, z les fonctions coordonnées de Φ^{-1}. C'est une pratique courante mais non dénuée de dangers.

Avec $(u, v, w) = \Phi(x, y, z)$, la jacobienne de Φ^{-1} au point (u, v, w) est $\left(J_\Phi(x, y, z)\right)^{-1}$ c'est-à-dire que :

$$J_{\Phi^{-1}}(u, v, w) = \frac{1}{1 + 8xyz}\begin{pmatrix} 1 & 4yz & -2z \\ -2x & 1 & 4xz \\ 4xy & -2y & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) = \dfrac{1}{1 + 8xyz}$, puis de même :

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) = \frac{-2x}{1 + 8xyz} \text{ et } \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) = \frac{4xy}{1 + 8xyz}.$$

En notant $1 + 8xyz = D$, $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ pour $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v, w)$, et de même pour les autres dérivées, on obtient alors par composition des dérivations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial z}{\partial u} \\ &= -\frac{8yz}{D^3} + \frac{16x^2z}{D^3} - \frac{32x^2y^2}{D^3}.\end{aligned}$$

Ensuite, le théorème de Schwarz permet de permuter les dérivations et il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{\partial z}{\partial v} \\ &= -\frac{32y^2z^2}{D^3} - \frac{8xz}{D^3} + \frac{16xy^2}{D^3}.\end{aligned}$$

Ex. 8

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (u, v) = (ax + by, cx + dy)$.

Avec $ad - bc \neq 0$, Φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, posons $g = f \circ \Phi^{-1}$; il vient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(ax + by, cx + dy).$$

g est également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial g}{\partial u} + c\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = b\frac{\partial g}{\partial u} + d\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ac\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = ab\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (ad + bc)\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + cd\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2bd\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + d^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

(dans ces formules, toutes les dérivées de f sont prises au point (x, y) et celles de g au point $(ax + by, cx + dy)$).
On en déduit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(a^2 - 4ab + 3b^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(c^2 - 4cd + 3d^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \left(2ac - 4ad - 4bc + 6bd\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}.$$

donc, en choisissant a, b, c, d tels que :

$$a^2 - 4ab + 3b^2 = c^2 - 4cd + 3d^2 = 0,$$

nous allons obtenir une équation du type $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = 0$.

On prend par exemple $a = 1,\quad b = 1,\quad c = 3,\quad d = 1$ ce qui donne bien $ad - bc \neq 0$, et alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v},$$

donc f est solution de (E) si et seulement si g est solution de :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = 0 \qquad (E').$$

D'après la propriété f3, les solutions de (E') sont les fonctions g telles que :

$$g(u, v) = h(u) + k(v)$$

où h et k sont arbitraires dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et celles de (E) sont donc les fonctions f telles que :

$$f(x, y) = h(x + y) + k(3x + y).$$

Ex. 9

Remarquons tout d'abord que $x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$.

Donc, avec $x^2 - xy + y^2 = \dfrac{1}{4}(x + y)^2 + \dfrac{3}{4}(x - y)^2$, on voit que pour tout $(x, y) \in D,\quad x^3 + y^3 > 0$.

La forme de l'équation (E) proposée peut faire penser à utiliser un passage en polaires.

Posons alors $\Delta = \left]0, +\infty\right[\times \left] -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$, l'application $\Phi\ : \Delta \to D,\quad (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de Δ sur D dont le jacobien ne s'annule pas sur Δ.

D'après le théorème 10, Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur D.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, posons $g = f \circ \Phi$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ et $\forall (r, \theta) \in \Delta,\quad g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Le calcul est classique (voir exemple 9 du cours) et donne avec des notations simplifiées :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

puis :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\frac{\partial g}{\partial r}.$$

Ainsi f est solution du problème si et seulement si g est solution sur Δ de l'équation :

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos^3\theta + \sin^3\theta}. \qquad (E')$$

(E') est encore équivalente à :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^{\frac{1}{2}}\sqrt{\cos^3\theta + \sin^3\theta},$$

ses solutions sont donc les fonctions g de la forme :

$$(r,\theta) \mapsto \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos^3\theta + \sin^3\theta} + \lambda(\theta)$$

où λ est arbitraire dans $\mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[,\mathbb{R}\right)$.

Pour en déduire f, explicitons Φ^{-1}.

En remarquant que pour $(r,\theta)\in\Delta$ on a $\theta-\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, le calcul de :

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1} = \frac{y-x}{y+x},$$

donne :
$$\theta = \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\frac{y-x}{y+x}.$$

En conclusion les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme :

$$(x,y)\mapsto \frac{2}{3}\sqrt{x^3+y^3} + A\left(\frac{y-x}{y+x}\right), \qquad A\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Ex. 10

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ avec pour tout (x,y) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y\, e^{x\sin y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos y\, e^{x\sin y}.$$

Les points critiques sont donc $(0,k\pi)$, $\quad k\in\mathbb{Z}$.

Comme $f(x,y+2\pi)=f(x,y)$ et $f(x,\pi-y)=f(x,y)$, il suffit d'étudier f au point $(0,0)$.

En remarquant que $f(0,0)=1$ et que, pour tout $x\in\,]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$:

$$f(x,x)=e^{x\sin x}>1 \ \text{ et } \ f(x,-x)=e^{-x\sin x}<1,$$

on voit que f ne présente en $(0,0)$ ni maximum ni minimum : on a affaire à un point col.

Ex. 11

1) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + \frac{2y}{4+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x + \frac{2}{4+y^2} - \frac{4y^2}{\left(4+y^2\right)^2}.$$

L'ensemble des points critiques de f est donc $\{(x,0)/x\in\mathbb{R}\}$, il est infini.

En tout point critique on a $s^2-rt=0$: on est toujours dans le cas douteux.

Formons donc $\Delta(h,k) = f(x+h,k) - f(x,0) = (x+h)k^2 + \ell n\left(4+k^2\right) - \ell n\, 4$

$$= (x+h)k^2 + \ell n\left(1+\frac{k^2}{4}\right)$$

Un développement limité de ℓn au voisinage de 1 donne alors :

$$\Delta(h,k) = \left(x+\frac{1}{4}+h\right)k^2 - \frac{k^4}{32} + o\left(k^4\right).$$

- Si $x > -\frac{1}{4}$, pour $|h| \leqslant \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)$, on a $\Delta(h,k) \geqslant \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)k^2 + o\left(k^2\right)$, donc $\Delta(h,k) \geqslant 0$ pour k assez petit, et on a affaire à un minimum.
- Si $x < -\frac{1}{4}$, pour $|h| \leqslant \frac{1}{2}\left|x+\frac{1}{4}\right|$, on a $\Delta(h,k) \leqslant \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)k^2 + o\left(k^2\right)$, donc $\Delta(h,k) \leqslant 0$ pour k assez petit, et on a affaire à un maximum.
- Si $x = -\frac{1}{4}$, on a $\Delta(h,h) = h^3 + o\left(h^3\right)$, donc $\Delta(h,h)$ change de signe avec h. C'est alors un point col.

2) Notons g la restriction de f à $D = [0,1] \times \mathbb{R}$.

Si g atteint un extremum en un point de $\overset{\circ}{D} =]0,1[\times\mathbb{R}$, c'est un point critique, donc un point $(x,0)$, $0 < x < 1$.
Comme on vient de voir qu'en un tel point f atteint un minimum relatif, il en est de même pour g.
Il reste à examiner si g atteint un extremum sur la frontière de D, c'est-à-dire sur les deux droites $x = 0$ et $x = 1$.
Avec $g(0,y) = \ell n\left(4+y^2\right)$ et $g(1,y) = y^2 + \ell n\left(4+y^2\right)$, on voit que la restriction de g à cette frontière atteint un minimum en $(0,0)$ et en $(1,0)$.
Enfin, en remarquant que $g(x,0) = \ell n\, 4$ et que $\forall (x,y) \in D,\ g(x,y) \geqslant \ell n\, 4$, on conclut que g atteint son minimum absolu en tout point $(x,0)$, $x \in [0,1]$, et il n'y a pas d'autre extremum (relatif ou absolu).

Niveau 2

Ex. 12

En posant $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \int_0^y f(x,v)\mathrm{d}v$, on obtient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \int_0^x g(u,y)\mathrm{d}u$.

Pour y fixé dans $\mathbb{R}$, puisque f est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $\mathbb{R} \times [0,y]$, le théorème de continuité sous le signe somme (cas où l'intervalle d'intégration est compact) donne que la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte que la fonction partielle $x \mapsto F(x,y) = \int_0^x g(u,y)\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = g(x,y) = \int_0^y f(x,v)\mathrm{d}v.$$

Il reste à prouver que la fonction dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}$ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, formons :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x+h,y+k) - \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^y \left(f(x+h,v) - f(x,v)\right)\mathrm{d}v + \int_y^{y+k} f(x+h,v)\mathrm{d}v.$$

Imposons $|h| \leqslant 1$, $|k| \leqslant 1$ et soit $M = \|f\|_\infty^P$ où P est le pavé compact $[-a,a] \times [-b,b]$ avec $a = |x|+1$, $b = |y|+1$.
Il vient alors :

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x+h,y+k) - \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \int_0^b |f(x+h,v) - f(x,v)|\,\mathrm{d}v + M\,|k|.$$

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, avec intégration sur un segment, puisque :

$$(h,v) \mapsto |f(x+h,v) - f(x,v)|$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$, il en est de même pour :

$$\Delta \;:\; h \mapsto \int_0^b |f(x+h,v) - f(x,v)|$$

sur $\mathbb{R}$ et, puisqu'elle est nulle en 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|h| < \eta \quad \Rightarrow \quad |\Delta(h)| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, $|h| < \eta$ et $|k| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ donnent :

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x+h, y+k) - \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui assure la continuité de $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ au point (x,y), donc sur $\mathbb{R}^2$.

Pour étudier la deuxième dérivée partielle, fixons maintenant x dans $\mathbb{R}$.

La contnuité de $v \mapsto f(x,v)$ assure la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de :

$$y \mapsto g(x,y) = \int_0^y f(x,v)\mathrm{d}v$$

et, avec $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$, la continuité de f montre celle de $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Compte tenu de la continuité de $u \mapsto g(u,y)$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de dérivation sous le signe somme, avec intégration sur un intervalle compact, donne alors la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de :

$$y \mapsto F(x,y) = \int_0^x g(u,y)\mathrm{d}u \quad \text{avec} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial g}{\partial y}(u,y)\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^x f(u,y)\mathrm{d}u.$$

On montre, comme précédemment, que cette dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

En conclusion, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisqu'elle admet deux dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ continues sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque

Avec le théorème de Fubini (voir chapitre 11), on peut faire l'économie d'une des deux vérifications précédentes. En effet, la fonction f étant continue sur $[0,x] \times [0,y]$, on a :

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^y f(u,v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \int_0^y \left(\int_0^x f(u,v)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v,$$

donc, en posant $h(u,v) = f(v,u)$, on a :

$$F(x,y) = \int_0^y \left(\int_0^x h(v,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = \int_0^y \left(\int_0^x h(u,v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u.$$

L'étude de la deuxième dérivée partielle de F se ramène ainsi à celle de la première dérivée partielle de :

$$H \;:\; (x,y) \mapsto \int_0^x \left(\int_0^y h(u,v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \;\; \text{avec} \;\; \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,y).$$

Or, d'après la première vérification, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \int_0^y h(x,v)\mathrm{d}v$$

donc :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^x h(y,v)\mathrm{d}v = \int_0^x f(v,y)\mathrm{d}v.$$

Ex. 13

On identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$ par l'isomorphisme canonique $\quad X \mapsto (x_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$.

Notons $\gamma_{i,j}(X)$ le cofacteur (i,j) de la matrice X et posons $\widetilde{X} = {}^t\operatorname{com} X$.

1) f est une fonction polynôme des n^2 variables $x_{i,j}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

Soit (i,j) fixé dans $[\![1,n]\!]^2$, calculons la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}$.

Le développement de $\det X$ suivant les termes de la colonne j donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{kj}\,\gamma_{kj}(X)$.

Dans cette expression, les γ_{kj}, $k \in [\![1,n]\!]$, sont indépendants de x_{ij}, d'où la dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} : X \mapsto \gamma_{ij}(X).$$

2) La différentielle de f s'exprime à l'aide des dérivées partielles :

$$df_X = \sum_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2} \gamma_{ij}(X)dX_{ij}\,.$$

Autrement dit, df_X est l'application :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\, H \mapsto \sum_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2} \gamma_{ij}(X)H_{ij}\,.$$

Sachant que $\quad \operatorname{Tr}(AB) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2} A_{ij}B_{ji},\quad$ on trouve $\quad df_X(H) = \operatorname{Tr}(\widetilde{X}h)$.

Ex. 14

1) L'application $D\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \ M \mapsto \det M$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ (voir exercice précédent). Donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert en tant qu'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue D.

2) Notons $\gamma_{i,j}(M)$ le cofacteur (i,j) de la matrice M et posons $\widetilde{M} = {}^t\operatorname{com} M$. Les applications $\gamma_{i,j}\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ainsi définies sont encore des polynômes par rapport aux coordonnées $m_{i,j}$ de M sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elles sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\gamma_{i,j}$ étant la $(j,i)^{\text{ème}}$ composante de $\Gamma\ :\ M \mapsto \widetilde{M}$, cette application Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisque toutes ses composantes le sont.

Sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, D ne s'annule pas et on a $F = \dfrac{\Gamma}{D}$ donc F est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ (cf. propriétés 10 et 11).

3) Pour calculer la différentielle de F en $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, revenons à la définition en essayant d'écrire la différence $F(M+H) - F(M)$ sous la forme $\ell_M(H) + o(H)$ où ℓ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(R)$.

Tout d'abord, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contienne la boule ouverte $\mathcal{B}(M,r)$. Ainsi pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|H\| < r$, $\ M + H$ est inversible et on obtient :

$$\begin{aligned} F(M+H) - F(M) &= (M+H)^{-1} - M^{-1} \\ &= (M+H)^{-1}\left(I_n - (M+H)M^{-1}\right) \\ &= -(M+H)^{-1}HM^{-1} \end{aligned}$$

F étant continue en M, on a $F(M+H) = (M+H)^{-1} = M^{-1} + \varepsilon(H)$ où ε est une application de la boule ouverte $\mathcal{B}(0,r)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{H\to 0} \varepsilon(H) = 0$, et on obtient ainsi :

$$F(M+H) - F(M) = -M^{-1}HM^{-1} - \varepsilon(H)HM^{-1}.$$

En supposant avoir muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre, on a :

$$\|\ \varepsilon(H)HM^{-1}\| \leqslant \|\ \varepsilon(H)\|\,\|H\|\,\|M^{-1}\|$$

donc la relation précédente devient : $F(M+H) - F(M) = -M^{-1}HM^{-1} + o(H)$ ce qui prouve que la différentielle de F en M est l'application linéaire $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$.

Ex. 15

Posons $(x, y) = \Phi(u, v)$ c'est-à-dire $x = u + f(v)$, $y = v + f(u)$.

Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et sa matrice jacobienne en tout point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$J_\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & f'(v) \\ f'(u) & 1 \end{pmatrix}$$

donc :
$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1 - f'(u)f'(v).$$

De $\left|f'(u)f'(v)\right| \leqslant k^2 < 1$, on déduit que $J_\Phi(u, v)$ est inversible quel que soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et. d'après le théorème 10, il suffit pour conclure de prouver que Φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Étant donné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y) = \Phi(u, v)$ si et seulement si

$$\begin{cases} u = x - f\big(y - f(u)\big) & \textbf{(1)} \\ v = y - f(u) & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Considérons alors la fonction $g_{x,y} : u \mapsto x - f\big(y - f(u)\big)$.

L'équation **(1)** s'écrit $u = g_{x,y}(u)$, ce qui traduit que u est point fixe de $g_{x,y}$.

Remarquons d'abord que $g_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall u \in \mathbb{R},\quad g'_{x,y}(u) = f'(u)f'\big(y - f(u)\big)$$

donc
$$\left|g'_{x,y}(u)\right| \leqslant k^2 < 1.$$

Si u et u' sont deux points fixes de $g_{x,y}$, on a $u' - u = g_{x,y}(u') - g_{x,y}(u)$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|u' - u\right| \leqslant k^2 \left|u' - u\right| \text{ c'est-à-dire } (1 - k^2)\left|u' - u\right| \leqslant 0$$

et, puisque $1 - k^2 > 0$, il vient $u' - u = 0$. Ainsi $g_{x,y}$ admet au plus un point fixe.

Soit maintenant $a = g_{x,y}(0)$ et (u_n) la suite récurrente définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = g_{x,y}\big(u_n\big).$$

L'inégalité des accroissements finis donne :

$$|u_{n+1} - u_n| = \left|g_{x,y}\big(u_n\big) - g_{x,y}\big(u_{n-1}\big)\right| \leqslant k^2 \left|u_n - u_{n-1}\right|$$

et, par récurrence,
$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^{2n} \left|u_1 - u_0\right|.$$

La série géométrique $\sum k^{2n}$ étant convergente, il en est de même pour $\sum \big(u_{n+1} - u_n\big)$ ce qui assure la convergence de la suite (u_n) (cf. chapitre 4 : relation entre suites et séries).

En posant $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, compte tenu de la continuité de $g_{x,y}$, la relation $u_{n+1} = g_{x,y}\big(u_n\big)$ donne $\ell = g_{x,y}(\ell)$.

Donc $g_{x,y}$ admet un point fixe et un seul.

Il en résulte que le système **(1)**, **(2)** admet une solution et une seule, ce qui prouve que Φ est bijective.

Ex. 16

1) Les points critiques de G sont définis par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{où on a posé } z = \varphi(x, y).$$

D'autre part, l'identité $\forall (x, y) \in I \times J,\ f\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = 0$, avec $\dfrac{\partial f}{\partial z}\big(x, y, \varphi(x, y)\big) \neq 0$, donne en dérivant par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}.$$

La conclusion en résulte.

2) Application

$f(x, y, z) = x + y + z - 3\alpha$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ définit évidemment z en fonction de (x, y), et on peut ici expliciter :

$$\varphi \ : (x, y) \mapsto z = 3\,\alpha - x - y$$

ce qui permet de faire une étude directe de la recherche des extremums de G :

$$G : (x, y) \mapsto x\,\ell n\,x + y\,\ell n\,y + (3\,\alpha - x - y)\,\ell n(3\,\alpha - x - y).$$

Nous allons procéder différemment :

- la condition **(1)** s'écrit $\quad 1 + \ell n\,x = 1 + \ell n\,y = 1 + \ell n\,z$

on en tire $x = y = z$, G a donc un seul extremum possible : en (α, α, α).

- Posons alors $\quad x = \alpha + u, \quad y = \alpha + v, \quad z = \alpha + w,$

la condition $\quad x + y + z = 3\alpha \quad$ donne $\quad u + v + w = 0.$

On obtient $\begin{cases} \ell n(\alpha + u) = \ell n\,\alpha + \dfrac{u}{\alpha} - \dfrac{u^2}{2\alpha^2} + o\left(u^2\right) \\ (\alpha + u)\,\ell n(\alpha + u) = \alpha\,\ell n\,\alpha + u(1 + \ell n\,\alpha) + \dfrac{u^2}{2\alpha} + o\left(u^2\right) \end{cases}$

d'où $\quad g(x, y, z) = 3\,\alpha\,\ell n\,\alpha + \dfrac{1}{2\alpha}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + o\left(u^2 + v^2 + w^2\right).$

Ainsi, il est clair que f atteint en (α, α, α) un minimum local et strict de valeur $3\,\alpha\,\ell n\,\alpha$.

Ex. 17

1) Soit $\varphi \ : [a, b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \ \varphi(t)$ une paramétrisation du chemin joignant x_1 et x_2 :

$$\varphi \in \mathcal{C}^1\left([a, b], \mathbb{R}^n\right), \quad \varphi(a) = x_1, \quad \varphi(b) = x_2, \quad a \leqslant b.$$

On a alors $\quad \ell \ = \displaystyle\int_a^b \|\ \varphi'\ \|.$

Introduisons $\quad F : [a, b] \to \mathbb{R}_+, \quad t \mapsto f\left(\varphi(t)\right) e^{-k \int_a^t \|\,\varphi'\,\|}.$

La proposition **(2)** s'écrit $\quad F(b) \leqslant F(a)$; pour l'établir, il suffit donc de montrer que F est décroissante.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ (comme composée de telles fonctions), avec :

$$\forall t \in [a, b], \quad F'(t) = \left[df_{\varphi(t)}\left(\varphi'(t)\right) - k\|\ \varphi'\ (t)\,\|\,f\left(\varphi(t)\right)\right] e^{-k \int_a^t \|\,\varphi'\,\|}$$

De $df_{\varphi(t)}\left(\varphi'(t)\right) \leqslant \left|df_{\varphi(t)}\left(\varphi'(t)\right)\right| \leqslant \left|\!\left|\!\left|df_{\varphi(t)}\right|\!\right|\!\right| \ \|\varphi'\ (t)\,\|$, on déduit, en utilisant **(1)**, que :

$$df_{\varphi(t)}\left(\varphi'(t)\right) \leqslant k\,\|\varphi'\ (t)\,\|\,f\left(\varphi(t)\right)$$

et donc que $F'(t) \leqslant 0$, d'où la conclusion.

2) Posons $\quad V = \{x \in U / f(x) = 0\}$;

(i) $\quad$ on a $\quad V \neq \varnothing \quad$ car $\quad x_0 \in V$;

(ii) $\quad$ montrons que V est un ouvert de U, c'est-à-dire un ouvert de $\mathbb{R}^n$ puisque U est lui-même ouvert.

Soit $x \in V$, on a $x \in U$ et, U étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset U$.

Pour tout y de $\mathcal{B}(x, r)$, le segment $[x, y]$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et de longueur $\ell < r$ joignant x et y ; ce chemin est contenu dans $\mathcal{B}(x, r)$ donc dans U.

D'après **(2)**, on a alors $0 \leqslant f(y) \leqslant e^{k\ell} f(x)$ donc $f(y) = 0$ car $f(x) = 0$ $(x \in V)$ et f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On a ainsi établi que, pour tout x de V, il existe $r > 0$ tel que $\quad \mathcal{B}(x, r) \subset V$: V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ donc de U.

(iii) $\quad V$ est un fermé de U. En effet $\quad V = U \cap f^{-1}(\{0\})$, f est continue et $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

U étant connexe par arcs, on déduit de (i), (ii) et (iii) que $V = U$ et donc $f = 0$.

3) Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ vérifie **(3)** alors $\quad g = f^2 \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall x \in U, \quad \|\,dg_x\,\| \leqslant 2kg(x)$$

Donc s'il existe $x_0 \in U$ tel que $f(x_0) = 0$, on a $g = 0$ d'après **(2)**, donc $f = 0$.

Ex. 18

1) On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto f\big(tb + (1-t)a\big)$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi'(t) = df_{tb+(1-t)a}(b-a)$ et on a :

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $\big\langle f(b) - f(a) \,\big|\, b - a \big\rangle = \displaystyle\int_0^1 \big\langle \varphi'(t) \,\big|\, b-a \big\rangle \mathrm{d}t$ (voir chapitre 4, propriété 28)

$$= \int_0^1 \big\langle df_{tb+(1-t)a}(b-a) \,\big|\, b-a \big\rangle \mathrm{d}t.$$

L'hypothèse **(1)** donne alors :

$$\big\langle f(b) - f(a) \,\big|\, b-a \big\rangle \geqslant \alpha \| b-a \|^2. \qquad \textbf{(2)}$$

2) On déduit de **(2)** que f est injective.

De même, d'après **(1)**, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, df_x est injective, c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Il en résulte que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f\big(\mathbb{R}^n\big)$ et que $f\big(\mathbb{R}^n\big)$ est un ouvert.

3) On montre que $f\big(\mathbb{R}^n\big)$ est aussi un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Étant donné $y \in \overline{f\big(\mathbb{R}^n\big)}$, il existe $\big(a_n\big)_{\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}^n$ telle que $y = \lim\limits_{n\to+\infty} f\big(a_n\big)$.

D'après **(2)** et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$\alpha \, \|a_n - a_p\|^2 \leqslant \big\langle f\big(a_n\big) - f\big(a_p\big) \mid a_n - a_p \mid \leqslant \big\rangle \, \big\|f\big(a_n\big) - f\big(a_p\big)\big\| \; \|a_n - a_p\|$$

$$\text{donc} \quad \|a_n - a_p\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \big\|f\big(a_n\big) - f\big(a_p\big)\big\|.$$

La suite $\Big(f\big(a_n\big)\Big)_{\mathbb{N}}$ est de Cauchy car elle converge vers y, donc l'inégalité précédente montre que $\big(a_n\big)_{\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy et puisque $\mathbb{R}^n$ est complet, elle converge.

Alors en posant $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ on obtient $y = f(a)$ et donc $y \in f\big(\mathbb{R}^n\big)$.

On a ainsi montré que $f\big(\mathbb{R}^n\big)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Finalement, $f\big(\mathbb{R}^n\big)$ est une partie non vide, ouverte et fermée de $\mathbb{R}^n$. Cet espace étant connexe, cela prouve que $f\big(\mathbb{R}^n\big) = \mathbb{R}^n$.

Ex. 19

1) Soit $\varphi \; : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(t) = f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y).$$

Pour $t = 1$ on obtient l'identité annoncée.

2) L'identité du **1)** donne $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t\,\varphi'(t) = \alpha\,\varphi(t)$ d'où $\varphi(t) = \lambda t^\alpha$. Alors $\lambda = \varphi(1) = f(x,y)$ fournit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(t) = f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y).$$

3) Si f de classe $\mathcal{C}^1$, homogène de degré α, est solution, on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \alpha f(tx, ty) = t^2\sqrt{x^4 + 2y^4}$$

d'où :

$$t^\alpha \sqrt{x^4 + 2y^4} = t^2\sqrt{x^4 + 2y^4}.$$

Il en résulte $\alpha = 2$ et $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^4 + 2y^4}$.

C'est la seule solution possible et on vérifie qu'elle convient effectivement.

Ex. 20

Avec $g = f \circ u$, le calcul donne $\Delta g = -\dfrac{2u}{\text{ch}^2 y} f' \circ u + \dfrac{1-u^2}{\text{ch}^2 y} f'' \circ u$.

Pour que g ait un laplacien nul, il faut et il suffit que f' soit solution de l'équation différentielle linéaire :

$$(1-u^2)z' - 2uz = 0.$$

On en déduit :

$$f(u) = a\,\ell n \frac{1+u}{1-u} + b, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Ex. 21

Le changement de variable proposé a été étudié dans l'exercice 5, l'application $\Phi\ : (u,v) \mapsto (u^2+v^2, u+v)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u - v > 0\}$ sur V.

Pour $f \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$, on pose $g = f \circ \Phi$: g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Alors f est solution du problème si et seulement si g vérifie $\forall (u,v) \in U,\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} = 2uv$.

L'ouvert U étant convexe, on en déduit $g(u,v) = \dfrac{u^2v^2}{2} + a(u) + b(v)$ avec a et b arbitraires dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Les solutions de l'équation proposée sont donc les fonctions f définies par :

$$f(x,y) = \frac{1}{8}(x-y^2)^2 + A\left(y + \sqrt{2x - y^2}\right) + B\left(y - \sqrt{2x-y^2}\right) \qquad A \text{ et } B \text{ appartenant à } \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Ex. 22

1) Cela revient à démontrer que la matrice jacobienne de f est indépendante de x donc aussi que les vecteurs dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ sont constants.

Puisqu'il s'agit là de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit pour ce faire de prouver que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0.$$

Introduisons des notations simplifiées : $f_i' = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ et $f_{i,j}'' = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\left(f_i'(x)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. On dispose donc des relations :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ \| f_i'(x) \|^2 = 1 \ \text{ et } \ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ \left\langle f_i'(x) \middle| f_j'(x) \right\rangle = 0.$$

Par dérivation on en déduit que quel que soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ \left\langle f_{i,j}''(x) \middle| f_k'(x) \right\rangle = 0.$$

Il en résulte $f_{i,j}'' = 0$.

2) Pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2$, posons $\varphi(t) = f\left(tb + (1-t)a\right)$, on obtient :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 df_{tb+(1-t)a}(b-a)\mathrm{d}t.$$

Donc, puisque df est constante : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df_x = u$, il vient :

$$f(b) - f(a) = u\left(\int_0^1 (b-a)\mathrm{d}t\right) = u(b-a).$$

L'endomorphisme u étant orthogonal, f est bien une isométrie.

CHAPITRE 10

Courbes et surfaces

En première année : Analyse – MPSI, nous avons étudié les arcs paramétrés de $\mathbb{R}^2$ (étude affine et étude métrique). Cette étude n'est pas reprise dans le présent ouvrage.

De même, on se référera au livre de première année pour l'étude des courbes d'équation :

$$F(x, y) = 0.$$

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 2$, muni d'un repère $\mathcal{R}_0 = \left(O, e_1, \dots, e_n\right)$.

Les cas usuels sont :

$$n = 2, E = \mathbb{R}^2, \mathcal{R}_0 = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$$

$$\text{et} \quad n = 3, E = \mathbb{R}^3, \mathcal{R}_0 = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$$

Lorsque E est euclidien orienté, ce repère est orthonormal direct.

A. Courbes paramétrées

1. Courbe paramétrée de E ✎(1)

✎(1) Les définitions de ce paragraphe sont valables quel que soit l'espace E, donc en particulier pour les arcs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1.1 – Définitions. Interprétation cinématique

Définition 1

On appelle **arc paramétré** ou **courbe paramétrée** de E, un couple (I, Φ) formé d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une application Φ de I dans E de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

L'image $\Phi(I)$ de Φ est le **support de l'arc** paramétré (I, f).

Lorsque Φ est de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$, l'arc paramétré est dit de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

- Usuellement, un arc paramétré (I, Φ) de support $\Gamma = \Phi(I)$ est noté Γ.

Interprétation cinématique

En considérant que le paramètre t désigne le temps, $\Phi(t)$ est la position d'un mobile ponctuel M à l'instant t ; le support de l'arc s'appelle la **trajectoire** et les deux premiers vecteurs dérivés

$$\Phi'(t) = \frac{dM}{dt} \text{ la } \textbf{vitesse}, \qquad \Phi''(t) = \frac{d^2M}{dt^2} \text{ l'}\textbf{accélération}.$$

Ceci explique la notation $M(t) = \Phi(t)$, on note aussi M', M'' pour les dérivées de M.

Exemple 1 $E = \mathbb{R}^3$. L'arc $\Gamma \ : \ t \mapsto M = O + \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\overrightarrow{j} + \operatorname{th} t\,\overrightarrow{k}$, $t \in \mathbb{R}$, est la trajectoire d'un mobile $M(t)$ qui se déplace sur la sphère $S(O, 1)$.

Avec $\overrightarrow{u} = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u'} = \dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} = -\sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j}$, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}\overrightarrow{u} + \operatorname{th} t\,\overrightarrow{k} \text{ donc } \|\overrightarrow{OM}\|^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} + \operatorname{th}^2 t = 1,$$

$$M' = \frac{dM}{dt} = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\overrightarrow{u} + \frac{1}{\operatorname{ch} t}\overrightarrow{u'} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\overrightarrow{k},$$

$$M'' = \frac{d^2M}{dt^2} = -\frac{2}{\operatorname{ch}^3 t}\overrightarrow{u} - \frac{2\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\overrightarrow{u'} - \frac{2\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^3 t}\overrightarrow{k}.$$

✎(2) **Rappel :** pour que θ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur I, il faut et il suffit que θ soit une application surjective de J sur I, $(\theta(J) = I)$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, et telle que θ' ne s'annule pas sur J.

1.2 – Changement de paramètre admissible

Soit $\Gamma = (I, \Phi)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$, et J un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que $\theta : J \to I$ est un **changement de paramètre admissible** sur Γ si c'est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur I. ✎(2)

Avec $\Psi = \Phi \circ \theta$, (J, Ψ) a le même support que (I, Φ) : $\Phi(I) = \Psi(J) = \Gamma$; on dit aussi que (J, Ψ) est un autre **paramétrage admissible** de Γ.

1.3 – Point simple – Point multiple – Arc simple

Les définitions sont les mêmes que pour un arc plan.

Ces notions sont invariantes par changement de paramètre admissible.

2. Étude locale d'un arc

2.1 – Points réguliers – Tangente

Le cas des arcs plans est connu, on suppose ici que $\dim E \geqslant 2$..

Soit $\Gamma = (I, \Phi)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, ($k \in \mathbb{N}^*$ aussi grand que nécessaire).

- S'il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Phi^{(i)}\left(t_0\right) \neq 0$, on note p le plus petit de ces entiers non nuls.

Cet entier p, ainsi que la droite vectorielle $\mathbb{R}\,\Phi^{(p)}\left(t_0\right)$ sont invariants par tout changement de paramètre admissible.

Définition 2

> La **tangente** à l'arc Γ au point $M_0 = \Phi\left(t_0\right)$ est la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\Phi^{(p)}\left(t_0\right)$.

La tangente ne dépend pas du paramétrage admissible choisi.

Définition 3

> Le point $M_0 = \Phi\left(t_0\right)$ est un **point régulier** de Γ si $\Phi'\left(t_0\right)$ est non nul.
>
> Il est dit **stationnaire** si $\Phi'\left(t_0\right) = 0$. ✎(3)

✎(3) Dans le cas où $n \geqslant 3$, le programme n'envisage la notion de tangente qu'en un point régulier.

Définition 4

> Γ est un **arc régulier** si tous ses points sont réguliers.
>
> La tangente à Γ en un point M est alors la droite $M + \mathbb{R}\overrightarrow{M'}$.

<u>**Cas des arcs plans**</u> : $n = 2$.

L'entier p, s'il existe, étant défini comme ci-dessus, on suppose ensuite qu'il existe un entier $j : 1 \leqslant p < j \leqslant k$, tel que $\left(\Phi^{(p)}\left(t_0\right), \Phi^{(j)}\left(t_0\right)\right)$ soit une base de E et on note q le plus petit de ces entiers.

- p, q sont les **entiers caractéristiques** du point $M_0 = \Phi\left(t_0\right)$ de l'arc Γ. Voir Analyse – MPSI, chapitre 3.

Définition 5

$M_0 = \Phi(t_0)$ est dit **birégulier** si $(\Phi'(t_0), \Phi''(t_0))$ est une famille libre, c'est-à-dire une base de E. ✎[4]

✎[4] $\dim E = 2$.

Définition 6

Γ est un arc birégulier si tous ses points sont biréguliers.

2.2 – Demi-tangentes

À une application $\Phi : I \to E$, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, on peut comme dans la définition 1, associer un arc paramétré continu, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. ✎[5]

✎[5] D'après la définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux un tel arc apparaît alors, géométriquement, comme réunion d'arcs de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 7

Soit $t_0 \in I$ et $M_0 = \Phi(t_0)$, si $\Phi'_d(t_0)$ (dérivée à droite de Φ en t_0) est non nulle, la demi-droite :

$$T_d(t_0) = \{\Phi(t_0) + \lambda\, \Phi'_d(t_0), \lambda \in \mathbb{R}^+\}$$

est la **demi-tangente** à droite en M_0.

On définit de même la demi-tangente à gauche.

3. Longueur – Abscisse curviligne

3.1 – Longueur d'un arc

Définition 8

Soit Γ un arc de E paramétré par $\Phi : [a, b] \to E, \quad t \mapsto M = \Phi(t)$.

Si l'ensemble des longueurs L_σ des lignes polygonales inscrites dans Γ où σ décrit les subdivisions de $[a, b]$, admet une borne supérieure $L = \sup L_\sigma$, on dit que l'arc Γ est **rectifiable** ✎[6] et le réel L est appelé **longueur** de Γ.

✎[6] Cette notion et le théorème 1 suivant sont non exigibles, ils sont donnés en introduction à l'abscisse curviligne.

Théorème 1

Une courbe Γ paramétrée par Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ est rectifiable, et sa longueur est $\quad L(\Gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\,\Phi'(t)\,\| \mathrm{d}t$.

3.2 – Abscisse curviligne d'un arc paramétré

Définition 9

Soit Γ un arc paramétré par une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Au réel $t_0 \in I$ correspond la fonction $s : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\,\Phi'(u)\,\| \mathrm{d}u$ appelée **abscisse curviligne d'origine** $M_0 = \Phi(t_0)$ sur l'arc Γ orienté «dans le sens des t croissants».

Remarque

En notant, comme c'est l'usage, $M(t)$ au lieu de $\Phi(t)$, le réel $s(t)$ est l'abscisse curviligne du point $M(t)$, elle est positive si $t > t_0$, négative si $t < t_0$, et $|s(t)|$ est la longueur de l'arc $M_0M(t)$.

La fonction s est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $s'(t) = \|\,\Phi'(t)\,\|$.

Exemple 2 Dans $\mathbb{R}^3$, considérons de nouveau l'arc $\Gamma \ : \ t \mapsto M = O + \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t}\vec{i} + \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\vec{j} + \operatorname{th} t\,\vec{k}$.

On a trouvé $\quad M'(t) = -\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{u} + \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\vec{u'} + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{k}$

donc $\quad \left\|M'(t)\right\| = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t}$.

En choisissant $t_0 = 0$, on obtient :

$$s(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} u}\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}\operatorname{Arctan} e^t - \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Théorème 2

Une abscisse curviligne d'un arc paramétré régulier définit un nouveau paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 10

Un paramétrage $\Psi \ : \ J \to E, \ \sigma \mapsto M = \Psi(\sigma)$ de l'arc Γ est dit **normal** lorsque :

$$\forall \ \sigma \in J, \ \| \ \Psi'(\sigma) \| = 1.$$

On dit aussi que σ est un **paramètre normal**.

Une abscisse curviligne est un paramètre normal.

3.3 – Vecteur unitaire tangent ✎(7)

✎(7) **Remarques :**

- si Γ est un arc de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 2$, $\vec{T}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et, en tout point, les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{T'}$ sont orthogonaux ;
- si t est un paramètre normal : $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}$.

Définition 11

Soit Γ un arc régulier paramétré par $\ \Phi \ : \ I \to E, \ t \mapsto M = \Phi(t)$.

Le vecteur unitaire $\vec{T}(t) = \dfrac{\Phi'(t)}{\|\Phi'(t)\|}$ est appelé **vecteur unitaire tangent** au point de paramètre t. Il dirige la tangente orientée $M(t) + \mathbb{R}\,\Phi'(t)$.

B. Surfaces et nappes paramétrées

Dans cette section, on a $E = \mathbb{R}^3$, et cet espace (éventuellement euclidien orienté) est muni d'un repère (orthonormal direct) $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. Notions de surface et de nappe paramétrée

Définition 12

Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.

On appelle **surface d'équation cartésienne** $f(x,y,z) = 0$ ou $f(M) = 0$, la partie $\mathcal{S}$ de E :

$$\mathcal{S} = \left\{M = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \,/ f(x,y,z) = 0\right\}.$$

Définition 13

On appelle **nappe paramétrée** tout couple (F, D) où F est une application de $\mathbb{R}^2$ dans E de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Son support Σ est l'image $F(D)$ de F appelée **surface paramétrée** :

$$D \subset \mathbb{R}^2 \to E, (u,v) \mapsto M = F(u,v) = O + x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}.$$

Définition 14

Une nappe paramétrée est dite **cartésienne** s'il existe un repère de E dans lequel Σ est définie par : $D \to E, (x, y) \mapsto M = O + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + h(x, y)\,\overrightarrow{k}$, avec $h \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$.

Σ est aussi la surface d'équation cartésienne $z = h(x, y)$.

Définition 15

On dit que $M_0 = O + x_0\,\overrightarrow{i} + y_0\,\overrightarrow{j} + z_0\,\overrightarrow{k}$ est un **point singulier** de la surface $\mathcal{S}\ :\ f(x, y, z) = 0$ si :

$$f\left(M_0\right) = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(M_0\right) = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(M_0\right) = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}\left(M_0\right) = 0.$$ ✎(8)

✎(8) Donc aussi, si $f(M_0)=0$ et $\operatorname{grad} f(M_0)=0$.

Définition 16

On dit que $M_0 = F\left(u_0, v_0\right)$ est un **point stationnaire** de la nappe paramétrée :

$$\Sigma\ :\ D \to E, (u, v) \mapsto F(u, v)$$

si les vecteurs $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}\left(u_0, v_0\right)$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}\left(u_0, v_0\right)$ sont liés.

Dans le cas contraire, M_0 est un **point régulier**.

Si la famille $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial y}, \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}\right)$ reste libre sur D, on dit que la **nappe est régulière**.

Remarques

- Certaines surfaces usuelles ne rentrent pas dans ce cadre (penser à des polyèdres, des cubes ou un tétraèdre par exemple).
- Une surface pourra être donnée en coordonnées cylindriques.

  Par exemple $\mathcal{S}\ :\ z = a\cos 2\theta$ pour le conoïde de Plücker.

$$\mathbb{R}^2 \to E, (r, \theta) \mapsto F = O + r\,\overrightarrow{u}(\theta) + a\cos 2\,\theta\,\overrightarrow{k}.$$

1.1 – Relation entre surface et nappe paramétrée

Il est intéressant de paramétrer une surface $\mathcal{S}\ : f(x, y, z) = 0$.

Par exemple, le cône $\mathcal{C}\ : x^2 + y^2 - z^2 = 0$, est le support de la nappe :

$$\Sigma\ :\ \mathbb{R}^2 \to E, (r, \theta) \mapsto M = F(r, \theta) = O + r\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}\right) + r\,\overrightarrow{k}$$ ✎(9)

✎(9) On dit que $z = r$ est une équation cylindrique du cône $\mathcal{C}$.

Inversement, pour obtenir une équation cartésienne du support d'une nappe, on «élimine» les paramètres u et v entre les expressions des trois coordonnées :

$$x = x(u, v)\quad,\quad y = y(u, v)\quad,\quad z = z(u, v)$$

alors l'équation obtenue $f(x, y, z) = 0$ est celle d'une surface contenant le support de la nappe mais non forcément identique à celui-ci.

Par exemple, la nappe paramétrée Σ :

$$\mathbb{R}^2 \to E, (u, v) \mapsto M\ : x = \cos u,\quad y = \cos v,\quad z = \cos(u + v)$$

est incluse dans la surface $\mathcal{S}\ : x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 1 = 0$ mais il n'y a pas égalité. En effet Σ est bornée, alors que $\mathcal{S}$ ne l'est pas ($\mathcal{S} \cap (z = 1)$ est une droite).

Le problème de la paramétrisation d'une surface a une solution (locale) fournie par le théorème suivant qui est admis.

Théorème 3

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ où $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, et M_0 un point non singulier de $\mathcal{S}$ ($f'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ ✎(10), par exemple).

Alors il existe un ouvert V de E contenant M_0, un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ contenant (x_0,y_0) et une fonction $h: D\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$(x,y,z)\in\mathcal{S}\cap\mathcal{B} \iff (x,y)\in D \text{ et } z=h(x,y).$$

Autrement dit, dans le voisinage de M_0, la surface $\mathcal{S}$ admet le paramétrage cartésien :

$$D\to E,(x,y)\mapsto M=0+x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+h(x,y)\,\vec{k}.$$

✎(10) f'_z est une notation simplifiée pour $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Exemple 3 Soit Σ la nappe paramétrée $\mathbb{R}^2\to E,(u,v)\mapsto M=F(u,v)\begin{cases}x=u+v\\y=u^2+v^2\\z=u^3+v^3\end{cases}$

a) Quels sont les points stationnaires de Σ ?

b) Trouver l'équation d'une surface $\mathcal{S}$ contenant le support de Σ.

c) Transformer le paramétrage de Σ par $s=u+v$, $p=uv$.

d) Vérifier que le support de Σ est réunion de demi-droites.

a) On calcule $\overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}}=\begin{bmatrix}1\\2u\\3u^2\end{bmatrix}$ $\overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}}=\begin{bmatrix}1\\2v\\3v^2\end{bmatrix}$ $\overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}}\wedge\overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}}=(v-u)\begin{bmatrix}6uv\\-3(u+v)\\2\end{bmatrix}$.

Les points stationnaires de Σ sont $F(u,u)=O+2\left(u\,\vec{i}+u^2\,\vec{j}+u^3\,\vec{k}\right)$, $u\in\mathbb{R}$.

b) Une équation de $\mathcal{S}$ s'obtient en éliminant les paramètres u,v entre les coordonnées x,y,z de $F(u,v)$. $\mathcal{S}: x^3-3xy+2z=0$. $\mathcal{S}$ contient Σ car $\Sigma=\mathcal{S}\cap(y\geqslant 0)$.

c) L'application $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(u,v)\mapsto(s=u+v,p=uv)$ induit une bijection de :

$$U=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ /\ u<v\right\} \text{ sur } \Omega=\left\{(s,p)\in\mathbb{R}^2\ /\ s^2-4p>0\right\}.$$

Le nouveau paramétrage de Σ est :

$$\Omega\subset\mathbb{R}^2\to E,(s,p)\mapsto M=G(s,p)\ : x=s, y=s^2-2p, z=s^3-3sp.$$

Observer que cette nouvelle nappe est régulière.

d) Comme l'application partielle $p\mapsto G(s,p)$ est affine, les lignes coordonnées D_s (s fixé) ✎(11) sont portées par des droites ; ce sont des demi-droites car $p<\frac{s^2}{4}$.

Σ est donc la réunion de ces demi-droites D_s.

✎(11) Sur une nappe paramétrée par :
$(u,v)\mapsto M=F(u,v)$,
les lignes coordonnées sont les courbes paramétrées :
$\Gamma_u : v\mapsto F(u,v)$, ($u$ fixé)
et
$\Gamma'_v : u\mapsto F(u,v)$, ($v$ fixé).

2. Plan tangent à une surface ou à une nappe

2.1 – Définitions

Définition 17

Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point non singulier d'une surface $\mathcal{S}: f(x,y,z)=0$. ✎(12)

On appelle **plan tangent à** $\mathcal{S}$ **en** M_0 le plan d'équation :

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)=0.$$

✎(12) $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$.

Remarques

- Lorsque E est euclidien, le plan tangent en M_0 à $\mathcal{S}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\operatorname{grad}}f(M_0)$. La droite orthogonale en M_0 au plan tangent est la **normale en** M_0 **à** $\mathcal{S}$.
- Si $\mathcal{S}$ est définie par l'équation cartésienne $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, tout point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de $\mathcal{S}$ ($z_0=f(x_0,y_0)$) est régulier et le plan tangent en M_0 a pour équation :

$$z-z_0=(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

✎(13) $F \in \mathcal{C}^1(D,E)$.

✎(14) Le théorème 3 permet de vérifier que ces deux définitions 17 et 18 sont cohérentes.

Définition 18

Soit Σ une nappe paramétrée par $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to E$, ✎(13) et $M_0 = F\left(u_0, v_0\right)$ un point régulier du support de Σ.

On appelle **plan tangent à Σ en** M_0, le plan affine contenant M_0 de direction :

$$\mathrm{Vect}\left(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}\left(u_0, v_0\right), \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}\left(u_0, v_0\right)\right).$$ ✎ ✎(14)

Remarques

- Lorsque E est euclidien orienté, le plan tangent est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{N} = \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}$ calculé en $\left(u_0, v_0\right) \in D$.

  La normale en M_0 à Σ est la droite $M_0 + \mathbb{R}\overrightarrow{N}\left(u_0, v_0\right)$.
- Une nappe cartésienne $\mathcal{S}$: $z = f(x,y)$ étant paramétrée par :
$$(x,y) \mapsto M = O + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + f(x,y)\,\overrightarrow{k}\ ,\quad f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}),$$
  pour tout $(x,y) \in D$ on a : $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x}(x,y) = \overrightarrow{i} + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\overrightarrow{k}\ ,\quad \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial y}(x,y) = \overrightarrow{j} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\overrightarrow{k}$.

  Une telle nappe est donc régulière et pour tout $(x,y) \in D$, un vecteur normal en $M\left(x, y, f(x,y)\right)$ est :
$$\overrightarrow{n} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$
- Une droite tracée sur une surface est incluse dans le plan tangent à la surface en un point de la droite. Lorsque ce point glisse sur la droite, le plan tangent pivote, en général, autour de cette droite.

Exemple 4 Dans l'espace euclidien E rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, soit $\mathcal{S}$ la nappe cartésienne définie par $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ où l'ouvert D de $\mathbb{R}^2$ est tel que $\overline{D}$ soit compact. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $\overline{D}$: $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et, de plus, que :

$$\forall (x,y) \in D,\ \ f(x,y) > 0, \qquad \forall (x,y) \in \mathrm{Fr}D,\ \ f(x,y) = 0.$$

Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Fr}D$, il existe une sphère tangente en $(a,b,0)$ au plan xOy et tangente à $\mathcal{S}$. ✎(15)

✎(15) Deux surfaces sont dites tangentes en un point commun, si en ce point elles admettent le même plan tangent.

Une sphère tangente en $(a,b,0)$ au plan xOy a pour équation :
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 - \lambda z = 0,$$
elle passe par $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ $\left(z_0 = f\left(x_0, y_0\right), \left(x_0, y_0\right) \in D\right)$ si et seulement si :

$\lambda = \dfrac{\left(x_0 - a\right)^2 + \left(y_0 - b\right)^2 + f^2\left(x_0, y_0\right)}{f\left(x_0, y_0\right)}$ (pour $\left(x_0, y_0\right) \in D$, on a $f\left(x_0, y_0\right) \neq 0$).

Son rayon est alors $R\left(x_0, y_0\right) = \dfrac{\left(x_0 - a\right)^2 + \left(y_0 - b\right)^2 + f^2\left(x_0, y_0\right)}{2f\left(x_0, y_0\right)}$.

Notons $\sum\left(x_0, y_0\right)$ cette sphère.

Soit $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{2f(x,y)}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + f^2(x,y)}$,

φ est continue sur $\overline{D}$ donc, $\overline{D}$ étant compact, φ atteint un maximum en un point $\left(x_0, y_0\right)$ de $\overline{D}$.

Sachant de plus que φ est nulle sur $\mathrm{Fr}D$ et strictement positive sur D, $\left(x_0, y_0\right)$ est un point de D, c'est donc un point critique de φ : $d\varphi_{\left(x_0, y_0\right)} = 0$.

Il reste à montrer que $\sum\left(x_0, y_0\right)$ et $\mathcal{S}$ ont même plan tangent en $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

- Le plan tangent à $\sum\left(x_0\,,y_0\right)$ en M_0 a pour équation :

$$\left(x_0-a\right)(x-a)+\left(y_0-b\right)(y-b)+z_0z-\frac{z+z_0}{\varphi\left(x_0\,,y_0\right)}=0,$$

il est normal au vecteur :

$$\overrightarrow{n}=2z_0\left(x_0-a\right)\overrightarrow{i}+2z_0\left(y_0-b\right)\overrightarrow{j}+\left[z_0^2-\left(x_0-a\right)^2-\left(y_0-b\right)^2\right]\overrightarrow{k}$$

- Le plan tangent en M_0 à $\mathcal{S}$ est dirigé par les vecteurs :

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0\,,y_0\right)\overrightarrow{k}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{v}=\overrightarrow{j}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0\,,y_0\right)\overrightarrow{k}.$$

- La condition $d\varphi_{(x_0\,,y_0)}=0$ équivaut à :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x_0\,,y_0\right)\left[\left(x_0-a\right)^2+\left(y_0-b\right)^2+z_0^2\right]-2z_0\left[\left(x_0-a\right)+z_0\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x_0\,,y_0\right)\right.&=0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x_0\,,y_0\right)\left[\left(x_0-a\right)^2+\left(y_0-b\right)^2+z_0^2\right]-2z_0\left[\left(y_0-b\right)+z_0\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x_0\,,y_0\right)\right.&=0,\end{cases}$$

soit aussi :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x_0\,,y_0\right)\left[\left(x_0-a\right)^2+\left(y_0-b\right)^2-z_0^2\right]-2\left(x_0-a\right)z_0=0 & \textbf{(1)}\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x_0\,,y_0\right)\left[\left(x_0-a\right)^2+\left(y_0-b\right)^2-z_0^2\right]-2\left(y_0-a\right)z_0=0 & \textbf{(2)}\end{cases}$$

- Alors **(1)** exprime que $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{n}=0$ et **(2)** que $\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{n}=0$. La coïncidence des plans tangents en résulte.

2.2 – Position d'une surface par rapport à un plan tangent

En un point non singulier, une surface admet localement une représentation paramétrique cartésienne. Prenons ce point pour origine ; l'équation de la surface est $\mathcal{S}:z=h(x,y)$ et on suppose h de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$. Nous utiliserons les notations de Monge :

$$p=\frac{\partial h}{\partial x}(0,0),\quad q=\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)\text{ et }r,s,t\text{ pour }\frac{\partial^2 h}{\partial x^2},\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y},\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\text{ en }(0,0).$$

L'équation du plan tangent en O est $\pi_0:z=px+qy$.

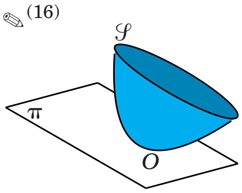
La formule de Taylor-Young en $(0,0)$ appliquée à h s'écrit :

$$h(x,y)=px+qy+\frac{1}{2}\left(rx^2+2sxy+ty^2\right)+o\left(x^2+y^2\right).$$

Elle permet de situer la surface par rapport au plan tangent :

$$h(x,y)-(px+qy)=\frac{1}{2}\left(rx^2+2sxy+ty^2\right)+o\left(x^2+y^2\right).$$

✎(16)

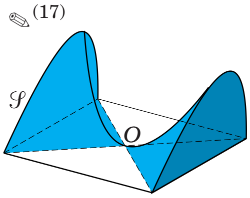


Le théorème sur les extremums locaux d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (cf. chapitre 9 de ce tome) permet de conclure à :

- si $rt-s^2>0$, ✎(16)

le plan tangent en O n'est pas traversé, $\mathcal{S}$ présente une disposition en **ballon**. On dit que O est un **point elliptique**.

✎(17)



- si $rt-s^2<0$, ✎(17)

le plan tangent en O est traversé, $\mathcal{S}$ présente une disposition en **col**. On dit que O est un **point hyperbolique**.

3. Exemples usuels

3.1 – Cylindres

Définition 19

Une **nappe** est dite **cylindrique** lorsque son support peut être engendré par une famille de droites de direction fixe qui sont alors appelées les **génératrices** de la nappe ou du cylindre.

Un cas usuel est celui de la nappe engendrée par les droites de direction $\mathbb{R}\vec{u}$ ($\vec{u}$ est fixé non nul) astreintes à rencontrer une courbe (Γ) donnée par un paramétrage :

$$f : I \to E,\ t \mapsto P(t).$$ ✎[18]

✎[18] Pour être conforme à la définition 13, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(Γ) est alors appelée **directrice** du cylindre.

Dans ce cas, la génératrice D_t dirigée par $\vec{u}$ et passant par $P(t)$ est définie par :

$$D_t = \left\{ P(t) + \lambda\,\vec{u} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

donc le cylindre (C) ainsi défini est paramétré par :

$$F : I \times \mathbb{R} \to E,\ (t,\lambda) \mapsto M(t,\lambda) = P(t) + \lambda\,\vec{u}\,.$$ ✎[19]

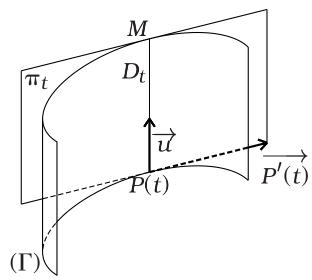
✎[19] Avec $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$, on obtient $F \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R}, E)$.

On obtient alors :

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial t}(t,\lambda) = \overrightarrow{P'(t)} \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \lambda}(t,\lambda) = \vec{u}$$

donc pour que $M(t,\lambda)$ soit régulier, il faut et il suffit que $\overrightarrow{P'(t)}$ soit non nul et non colinéaire à $\vec{u}$, c'est-à-dire que $P(t)$ soit un point régulier de (Γ) et que la génératrice D_t ne soit pas tangente à (Γ) en $P(t)$.

Lorsqu'il en est ainsi, tous les points de la génératrice D_t sont réguliers et le plan tangent au cyclindre (C) est le même en tous ces points : il est défini par la génératrice D_t et la tangente en $P(t)$ à (Γ).



3.2 – Cônes

Définition 20

Une **nappe** est dite **conique** lorsque son support peut être engendré par une famille de droites passant par un point fixe S.

Ces droites sont les **génératrices** de la nappe conique ou cône et S en est le **sommet**.

Un cas usuel est celui de la nappe engendrée par les droites passant par S astreintes à rencontrer une courbe (Γ) ne contenant pas S et donnée par un paramétrage :

$$f : I \to E,\ t \mapsto P(t).$$ ✎[20]

✎[20] On suppose encore f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(Γ) est une **directrice** du cône.

Dans ce cas, la génératrice D_t passant par S et $P(t)$ est définie par :

$$D_t = \left\{ S + \lambda\overrightarrow{SP(t)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

donc le cône (C) ainsi défini est paramétré par :

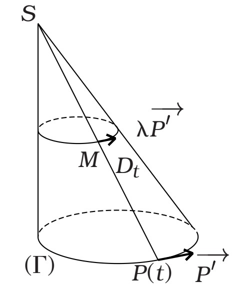
$$F : I \times \mathbb{R} \to E,\ (t,\lambda) \mapsto M(t,\lambda) = (1-\lambda)S + \lambda P(t).$$ ✎[21]

✎[21] On obtient bien : $F \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R}, E)$.

Avec $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial (t)}(t,\lambda) = \lambda\overrightarrow{P'(t)}$ et $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \lambda}(t,\lambda) = \overrightarrow{SP(t)}$, il vient que $M(t,\lambda)$ est régulier si et seulement si $P(t)$ est régulier sur (Γ), $M \neq S$ et la génératrice D_t passant par $M(t,\lambda)$ n'est pas tangente à (Γ) en $P(t)$. ✎[22]

✎[22] $\overrightarrow{P'(t)} \neq \vec{0}$
$\lambda \neq 0$
$\overrightarrow{P'(t)} \wedge \overrightarrow{SP(t)} \neq \vec{0}$.

Dans ces conditions, tous les points de la génératrice D_t – sauf S – sont réguliers et le plan tangent au cône (C) est le même en tous ces points : il est défini par la génératrice D_t et la tangente en $P(t)$ à (Γ).



3.3 – Nappes de révolution

Définition 21

Une **nappe** est dite de **révolution** d'axe Δ lorsque son support est invariant par toute rotation d'axe Δ.

Un exemple usuel est fourni par la nappe (Σ) dont le support est engendré par les images d'un arc donné (Γ) par toutes les rotations d'axes Δ. ✎ [23]

✎ [23] On dit que Σ est engendrée par la rotation de Σ autour de Δ.

Dans le cas particulier où (Γ) est contenu dans un plan (Π) passant par Δ, ✎ [24] l'intersection de (Σ) et de (Π) est $\left(\Gamma\right) \cup \left(\Gamma'\right)$ où $\left(\Gamma'\right)$ est l'image de (Γ) dans la symétrie axiale d'axe Δ.

✎ [24] Un tel plan contenant l'axe Δ est appelé **plan méridien**.

On dit que $\left(\Gamma\right) \cup \left(\Gamma'\right)$ est une **méridienne** de (Σ) et (Γ) est une **demi-méridienne**. ✎ [25]

✎ [25] Sauf cas particulier où $(\Gamma) = (\Gamma')$.

Considérons par exemple le cas où (Σ) est la nappe de révolution d'axe $Oz = \left(O, \overrightarrow{k}\right)$, définie par la demi-méridienne (Γ) (du plan xOz), paramétrée par :

$$f : I \to E,\ t \mapsto P = O + x(t)\,\overrightarrow{i} + z(t)\,\overrightarrow{k} \quad \text{avec } f \in \mathcal{C}^1(I, E).$$

Notons, comme il est d'usage, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i}\cos\theta + \overrightarrow{j}\sin\theta$. L'image $\left(\Gamma_\theta\right)$ de (Γ) dans la rotation d'axe Oz et d'angle θ est contenue dans le plan $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{k}\right)$ et paramétrée par :

$$f_\theta : I \to E,\ t \mapsto O + x(t)\,\overrightarrow{u} + z(t)\,\overrightarrow{k}.$$

Ainsi la nappe (Σ) est paramétrée par :

$$F : I \times \left[0, 2\pi\right[\to E,\ (t,\theta) \mapsto M(t,\theta) = O + x(t)\,\overrightarrow{u} + z(t)\,\overrightarrow{k}.$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t}(t,\theta) = x'(t)\,\overrightarrow{u} + z' t)\,\overrightarrow{k}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \theta}(t,\theta) = x(t)\overrightarrow{u'} \quad ✎ [26]$$

✎ [26] $\overrightarrow{u'} = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$.

En remarquant que :

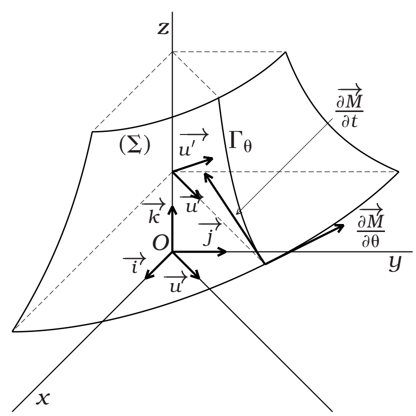
$$\overrightarrow{P'(t)} = x'(t)\,\overrightarrow{i} + z'(t)\,\overrightarrow{k}$$

on obtient que $M(t,\theta)$ est un point régulier de (Σ) si et seulement si $\overrightarrow{P'(t)} \neq \overrightarrow{0}$ et $x(t) \neq 0$ donc, si et seulement si $P(t)$ est un point régulier de (Γ) n'appartenant pas à l'axe de révolution Oz. ✎ [27]

✎ [27] Noter que $P(t) \notin Oz$ équivaut à $M(t,\theta) \notin Oz$.

Lorsqu'il en est ainsi, $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t}(t,\theta)$ dirige la tangente en $M(t,\theta)$ à la méridienne $\left(\Gamma_\theta\right)$ passant par $M(t,\theta)$ et le plan tangent à (Σ) en $M(t,\theta)$ est le plan contenant cette tangente et perpendiculaire au plan méridien passant par $M(t,\theta)$. ✎ [28]

✎ [28] C'est-à-dire contenant le vecteur $\overrightarrow{u'}$.



4. Intersection de deux surfaces

Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux surfaces d'équations $f_1(M) = 0$ et $f_2(M) = 0$.

On suppose que leur intersection $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ contient un point M_0 non singulier ni pour $\mathcal{S}_1$ ni pour $\mathcal{S}_2$.

On note Π_1 et Π_2 les plans tangents à $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ en M_0.

- Lorsque $\Pi_1 = \Pi_2$, les surfaces ont un plan tangent commun, on dit qu'elles sont tangentes au point M_0.
- Lorsque $\Pi_1 \neq \Pi_2$, l'intersection des plans tangents est une droite $\mathcal{D} = \Pi_1 \cap \Pi_2$ et nous admettons le résultat suivant qui assure l'existence d'un paramétrage de la courbe $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ au voisinage de M_0.

Théorème 4

Si $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(M_0)\dfrac{\partial f_2}{\partial z}(M_0) - \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(M_0)\dfrac{\partial f_1}{\partial z}(M_0) \neq 0$, il existe un ouvert V de E contenant M_0, un intervalle ouvert I contenant x_0, et deux fonctions Y et Z : $I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que :

$$(x, y, z) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap V \iff y = Y(x) \text{ et } z = Z(x).$$

C'est un paramétrage de la courbe $\mathcal{C}$: $I \to E, x \mapsto O + x\vec{i} + Y(x)\vec{j} + Z(x)\vec{k}$.

La droite $\mathcal{D} = \Pi_1 \cap \Pi_2$ est la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$.

Remarque

On dispose de deux résultats analogues par permutation circulaire sur (x, y, z) et ainsi, dès que la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(M_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(M_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(M_0) \end{pmatrix}$ est de rang 2,

$\mathcal{C}$ coïncide autour de M_0 avec un arc paramétré.

Exemple 5 Soit $\mathcal{C}$ l'intersection des deux surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ d'équations :

$$\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 - 2z = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0.$$

Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ au point O.

$\mathcal{S}_1$ est un paraboloïde de révolution, $\mathcal{S}_2$ est une sphère.

Écrivons la matrice des demi-dérivées partielles

en (x, y, z) : $\begin{pmatrix} x & y & -1 \\ x-1 & y & z \end{pmatrix}$

puis en O : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Seul y est un paramètre admissible de la courbe $\mathcal{C}$.

Il existe un intervalle ouvert I et deux fonctions de la classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$I \to E, y \mapsto M = O + x(y)\vec{i} + y\vec{j} + z(y)\vec{k}$$

soit un paramètrage de $\mathcal{C}$.

Par dérivation, les équations de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, donnent :

$$\forall y \in I : \begin{cases} xx' + y - z' = 0 \\ (x-1)x' + y + zz' = 0 \end{cases}$$

ce qui fournit le vecteur dérivé en O : $\vec{M}'(O) = \vec{j}$.

La tangente à $\mathcal{C}$ en O est le support de l'axe $(O, \vec{j})$.

CHAPITRE

11

Fonctions de plusieurs variables Calcul intégral

E désigne l'espace $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ muni de sa structure affine canonique et la base canonique est notée $\mathcal{B}$: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

On dispose d'un espace vectoriel normé en munissant $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

A. Formes différentielles de degré un

U désigne un ouvert de E. Le dual de E est noté E^*.

Définition 1

On appelle **forme différentielle** sur U, toute application de U dans E^*. ✎(1)

✎(1) **Remarques**

- Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sa différentielle $df : U \to E^*$ est une forme différentielle.
- L'espace E^* est un espace vectoriel normé ; on peut donc parler de forme différentielle continue, de forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$.

Notation 1

La base de E^*, duale de $\mathcal{B}$, est notée $\mathcal{B}^* = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$.

Notation 2

Une forme différentielle ω sur U est caractérisée par ses fonctions coordonnées $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ dans la base $\mathcal{B}^*$ $(P_j : U \to \mathbb{R})$.

Ainsi, pour tout x de U : $\omega(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x) dx_j$, où $\omega(x)$ est la forme linéaire :

$$\omega(x) : E \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \omega(x) \cdot y = \sum_{j=1}^{n} y_j P_j(x). \quad ✎(2)$$

✎(2) On note $\omega(x) \cdot y$ l'image de y par l'application linéaire $\omega(x)$.

Notation 3

$\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ est l'écriture canonique de ω. ✎(3)

✎(3) On écrit souvent $\omega = Pdx + Qdy$ $(n = 2)$ $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ $(n = 3)$.

Propriété 1

Classe d'une forme différentielle

La forme différentielle sur U, $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ est de classe $\mathcal{C}^k$, $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$,

si et seulement si les n applications $P_1, P_2, \dots, P_n : U \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

☞ ω est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si ses composantes sur une base donnée sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Notation 4

On note $\Omega^k(U)$ l'ensemble des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ; c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2

Forme différentielle exacte

Une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(U)$ est dite exacte sur U s'il existe une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ dont la différentielle est ω : $df = \omega$.

L'application f s'appelle une **primitive** de ω sur U.

Définition 3

Forme différentielle fermée

Une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, $(k \geqslant 1)$, $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ est dite fermée si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \quad \text{(sur } U).$$

Propriété 2

Pour qu'une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$, $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j \in \Omega^1(U)$, soit exacte sur U, il est nécessaire qu'elle soit fermée sur U. ✎ (4)

✎ (4) Noter que cette condition n'est pas suffisante (voir exemple 1).

☞ Si ω est exacte sur U, il existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $df = \omega$, donc :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \ P_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \ \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Schwarz (cf. chapitre 9, théorème 9).

Théorème 1

Théorème de Poincaré

Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert étoilé U. ✎ (5)

Alors, ω est exacte si et seulement si ω est fermée. ✎ (6)

✎ (5) La notion de partie étoilée est introduite dans le chapitre 1, définition 40.

✎ (6) La démonstration de ce résultat est non exigible.

✎ (7) U étant étoilé, pour tout $t \in [0,1]$, on a $tx \in [0,x] \subset U$.

☞ Supposons que U soit étoilé par rapport à l'origine (on se ramène à ce cas par translation).

On définit alors $\varphi : U \times [0,1] \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \omega(tx) \bullet x = \sum_{j=1}^{n} x_j P_j(tx)$. ✎ (7)

Elle est continue et, pour tout $t \in [0,1]$, l'application partielle $U \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!], \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,t) = P_i(tx) + \sum_{j=1}^{n} tx_j \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(tx)$.

Sachant que ω est fermée sur U, on peut écrire $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,t) = P_i(tx) + \sum_{j=1}^{n} tx_j \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(tx)$ et constater qu'il s'agit de la dérivée de $t \mapsto tP_i(tx)$.

Introduisons alors l'application $f : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^1 \varphi(x,t)\mathrm{d}t$.

Le théorème de dérivation sous le signe somme ✎ (8) s'applique pour chaque fonction partielle $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ est continue sur } U \times [0,1]\right)$ d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t = \left[tP_i(tx)\right]_0^1 = P_i(x).$$

Ainsi, ω est exacte, f est une primitive de ω sur U.

✎ (8) Cas où l'intervalle d'intégration est compact.

Exemple 1 Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et ω la forme différentielle définie sur U par : $\omega(x,y) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

a) Vérifier que ω est de classe $\mathcal{C}^1$ et fermée sur U.

b) On suppose que ω est exacte sur U. Il existe donc $F \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $(x,y) \in U$, on a $\omega(x,y) = dF_{(x,y)}$

Étant donné $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\varphi : V \to U$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on pose :

$$G = F \circ \varphi, \quad G : (r,\theta) \mapsto F(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Calculer dG et en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (r,\theta) \in V, \quad G(r,\theta) = \theta + \lambda$.

c) Relever une contradiction dans les résultats précédents et conclure.

a) Vérifications immédiates : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

b)
$$\begin{aligned} dG_{(r,\theta)} &= dF_{(r\cos\theta, r\sin\theta)} \circ d\varphi_{(r,\theta)} \\ &= \omega(r\cos\theta, r\sin\theta) \circ d\varphi_{(r,\theta)} \\ &= \frac{r\cos\theta(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) - r\sin\theta(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)}{r^2} \\ &= d\theta \end{aligned}$$

Donc $G(r,\theta) = \theta + \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$. ✎(9)

✎(9) Car V est convexe (cf. chapitre 9, théorème 11, corollaire 2).

c) L'égalité $F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \theta + \lambda$, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, est absurde. (pour r fixé, elle donne l'égalité d'une fonction 2π-périodique avec une fonction non périodique).

En conclusion, ω n'est pas exacte sur U. On constate que le théorème de Poincaré ne s'applique pas ici, car l'ouvert U n'est pas étoilé.

Exemple 2

a) Montrer que $U = \mathbb{R}^2 \setminus \triangle$ où $\triangle = \{(x,0) / x \leqslant 0\}$ est un ouvert étoilé.

b) Montrer que la forme différentielle ω définie sur U par $\omega(x,y) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ admet pour primitive sur U $f : (x,y) \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$.

a) On vérifie que U est étoilé par rapport à tout point $A = (a, 0)$ où $a > 0$.

b) Pour tout $(x,y) \in U$ on a $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$ et on obtient sans difficulté :

$$\forall (x,y) \in U, \quad df_{(x,y)} = \omega(x,y).$$

Noter que l'on a $\tan\big(f(x,y)\big) = \dfrac{y}{x}$.

Exemple 3 Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

On dit que l'application $\varphi : U \to \mathbb{R}$ est un **facteur intégrant** de ω si la forme différentielle $\varphi\omega$ est exacte sur U.

Exemple : $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$, montrer que $\omega : (x,y,z) \mapsto \dfrac{y+z}{x}dx + \dfrac{z+x}{y}dy + \dfrac{x+y}{z}dz$ admet un facteur intégrant de la forme $(x,y,z) \mapsto \varphi(xyz)$ où $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

Comme U est convexe, il suffit de choisir φ telle que la forme différentielle $\varphi\omega$ soit fermée.

Notons $\varphi\omega = Pdx + Qdy + Rdz$; $\varphi\omega$ est fermée si :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ \textbf{(1)}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \ \textbf{(2)}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \ \textbf{(3)}.$$

On a : $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\,\varphi\,(xyz) + z(y+z)\,\varphi'\,(xyz) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\,\varphi\,(xyz) + z(z+x)\,\varphi'\,(xyz) \end{cases}$

L'égalité **(1)** donne $\dfrac{(y-x)}{xy}[\varphi(xyz) + xyz\,\varphi'\,(xyz)] = 0$.

Par raison de symétrie, pour que **(1)**, **(2)**, **(3)** soient vérifiées, il suffit que :

$$\forall t > 0, \varphi(t) + t\,\varphi'(t) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

Ainsi $\omega_1 = \dfrac{y+z}{x^2yz}dx + \dfrac{z+x}{xy^2z}dy + \dfrac{x+y}{xyz^2}dz$ est exacte.

Soit alors, $f : U \to \mathbb{R}$ une primitive de ω_1 sur U, puisque U est un pavé donc un convexe ✎(10) les conditions :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y+z}{x^2yz} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z+x}{xy^2z} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x+y}{xyz^2}$$

sont successivement équivalentes à :

$$f(x,y,z) = -\frac{y+z}{xyz} + \lambda(y,z) \quad , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{1}{y^2z} \quad , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{1}{yz^2}$$

$$f(x,y,z) = -\frac{y+z}{xyz} + \lambda(y,z) \quad , \quad \lambda(y,z) = -\frac{1}{yz} + K \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Les primitives de ω_1 sur U sont donc de la forme $(x,y,z) \mapsto -\dfrac{x+y+z}{xyz} + K.$

✎(10) Voir chapitre 9, propriété 3.

B. Intégrale curviligne

Définition 4

Soit ω une forme différentielle continue sur U ouvert de E et $\gamma = ([a,b], \varphi)$ un arc compact continu et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont le support Γ est inclus dans U.

On appelle **intégrale curviligne de ω le long de γ** le réel :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega\big(\varphi(t)\big) \cdot \big[\varphi'(t)\big]\mathrm{d}t.$$

Remarques

1) L'application $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \omega\big(\varphi(t)\big) \cdot \big[\varphi'(t)\big]$ est continue par morceaux.

2) Dans le cas $n = 2$, $\omega = Pdx + Qdy \in \Omega^0(U)$ et $\varphi : [a,b] \to U$, $t \mapsto \varphi(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

On a $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_a^b \Big[x'(t)P\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)Q\big(x(t),y(t)\big)\Big]\,\mathrm{d}t.$ ✎(11)

✎(11) En première année, nous avons introduit la notion de champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
Ainsi dans les cas $n=2$ ou $n=3$, en associant à la forme différentielle $\omega = Pdx+Qdy$ ou $\omega = Pdx+Qdy+Rdz$ le champ de vecteurs $V = Pe_1+Qe_2$ ou $V = Pe_1+Qe_2+Re_3$, on constate que l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ n'est autre que la circulation le long de γ du champ de vecteurs V.

Propriété 3

Relation de Chasles

Avec les notations précédentes et, pour $c \in]a,b[$, introduisons les arcs compacts continus, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : $\gamma_{a,c} = ([a,c], \varphi)$, $\gamma_{c,b} = ([c,b], \varphi)$, $\gamma = \gamma_{a,b}$. ✎(12)

Alors $\displaystyle\int_{\gamma_{a,b}} \omega = \int_{\gamma_{a,c}} \omega + \int_{\gamma_{c,b}} \omega.$

✎(12) Cette formule se généralise à un nombre fini de points de $]a,b[$.
Elle permet le calcul de $\int_\gamma \omega$ lorsque γ a des points anguleux.

Propriété 4

Changement de paramétrisation

Ajoutons aux données précédentes celle d'un autre arc paramétré $\gamma' = ([c,d], \varphi \circ \theta)$, où θ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[c,d]$ sur $[a,b]$. ✎(13)

Alors $\displaystyle\int_{\gamma'} \omega = \varepsilon \int_\gamma \omega$ avec $\begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ si } \theta \text{ est croissant} \\ \varepsilon = -1 \text{ si } \theta \text{ est décroissant} \end{cases}$

✎(13) On constate que γ' est compact continu, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et de même support Γ que γ, il est inclus dans U.

☞ Plaçons-nous dans le cas particulier où γ est de classe $\mathcal{C}^1$, le cas général s'en déduit à l'aide de la relation de Chasles.

Le changement de variable $t = \theta(u)$ donne :

$$\int_a^b \omega\big(\varphi(t)\big) \cdot \big[\,\varphi'\,(t)\big]\mathrm{d}t = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \omega\big(\varphi \circ \theta(u)\big) \cdot \big[\varphi'\big(\theta(u)\big)\big]\ \theta'\,(u)\mathrm{d}u$$

d'où $\displaystyle\int_\gamma \omega \;=\; \varepsilon \int_c^d \omega\big(\varphi \circ \theta(u)\big) \cdot \big[(\varphi \circ \theta)'(u)\big]\,\mathrm{d}u = \;\varepsilon \int_{\gamma'} \omega.$

Remarque

Soit Γ^+ l'arc orienté défini par le choix d'un représentant γ, la propriété 3 montre que deux représentants de Γ^+ donnent la même intégrale curviligne ; celle-ci sera notée $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \omega.$

Si Γ^- désigne l'arc déduit de Γ^+ par changement d'orientation, on a :

$$\int_{\Gamma^-} \omega \;=\; -\int_{\Gamma^+} \omega.$$

L'intégrale curviligne de ω le long d'une courbe Γ dont l'orientation n'est pas précisée, n'est définie qu'à un signe près.

Propriété 5

Si Γ est une courbe fermée orientée, l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ ne dépend pas de l'origine choisie sur Γ.

Propriété 6

Pour U et Γ donnés, l'application $\omega \mapsto \displaystyle\int_\Gamma \omega$ est une forme linéaire sur $\Omega^0(U)$.

Théorème 2

Soit ω une forme différentielle exacte sur U, f une primitive de ω.

Pour toute courbe orientée Γ d'origine A, d'extrémité B incluse dans U, on a :

$$\int_\Gamma \omega = f(B) - f(A).$$ ✎ (14)

✎ (14) Noter que le résultat ne dépend que des points A et B.

☞ Soit $\gamma = ([a,b],\varphi)$ un représentant de Γ, $\quad A = \varphi(a), B = \varphi(b)$.

Plaçons-nous dans le cas où γ est de classe $\mathcal{C}^1$, le cas général s'en déduit à l'aide de la relation de Chasles.

De $\quad \omega \;=\; df$, on tire $\quad \omega\big(\varphi(t)\big) \cdot \big[\,\varphi'\,(t)\big] = df_{\varphi(t)}\big[\,\varphi'\,(t)\big] = (f \circ \varphi)'(t)$ d'où :

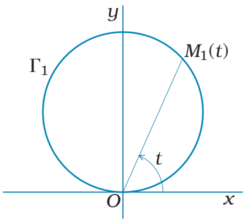
$$\int_\Gamma \omega \;=\; \int_a^b (f \circ \varphi)'(t)\mathrm{d}t = f \circ \varphi(b) - f \circ \varphi(a) = f(B) - f(A).$$

Exemple 4 Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ lorsque Γ est l'une des courbes suivantes :

a) $x^2 + y^2 - ay = 0$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad\qquad a > 0, b > 0$

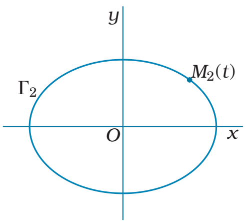
c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{2y}{b} = 0$



a) Paramétrisation de $\Gamma_1 \ : \ x^2+y^2-ay=0.$

$[0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto M_1(t), \quad x = a\cos t \sin t, \quad y = a\sin^2 t.$

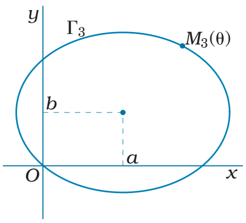
$$\int_{\Gamma_1} y^2 \mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y = \frac{a^3}{4}\int_0^{\pi}\left[(1-\cos 2t)^2\cos 2t + \sin^3 2t\right]\mathrm{d}t = -\frac{\pi\, a^3}{4}.$$



b) Paramétrisation de $\Gamma_2 \ : \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0.$

$[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto M_2(t), \quad x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$

$$\int_{\Gamma_2} y^2 \mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi}\left[-ab^2\sin^3 t + a^2 b\cos^3 t\right]\mathrm{d}t = 0.$$



c) Paramétrisation de $\Gamma_3 \ : \ \dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}-2=0.$

$[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto M_3(\theta), \quad x = a\left(1+\sqrt{2}\cos\theta\right), \quad y = b\left(1+\sqrt{2}\sin\theta\right).$

$$\int_{\Gamma_3} y^2 \mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{+\pi}\Big[-ab^2\sqrt{2}\sin\theta\left(1+\sqrt{2}\sin\theta\right)^2 + a^2 b\sqrt{2}\cos\theta(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2\Big]\mathrm{d}\theta$$

$$\int_{\Gamma_3} y^2 \mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y = 4\,\pi\, ab(a-b).$$

Exemple 5 Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ avec $\omega = \dfrac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, Γ étant le carré orienté de sommets consécutifs $A=(a,a)$, $B=(-a,a)$, $C=(-a,-a)$, $D=(a,-a)$, $(a>0)$.

La forme différentielle ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Elle se décompose en $\quad \omega = \omega' + \omega'' \quad$ avec $\quad \omega' = \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \quad , \quad \omega'' = \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$

On constate que ω' est exacte sur U : $\quad \omega' = \dfrac{1}{2} d\,\ell n(x^2+y^2)$

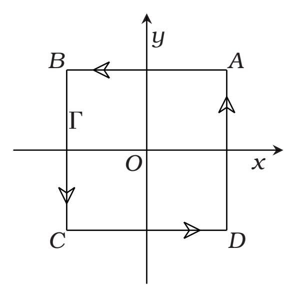
donc $\displaystyle\int_\Gamma \omega' = 0$ et $\displaystyle\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \omega''$, ω'' a été étudiée dans l'exemple 1.

- Elle est exacte sur $U_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x \neq 0\right\}$

  $\omega'' = d\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}.$

- Elle est exacte sur $U_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y \neq 0\right\}$

  $\omega'' = -d\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{y}.$



Écrivons $\quad \displaystyle\int_\Gamma \omega'' = \int_{AB}\omega'' + \int_{BC}\omega'' + \int_{CD}\omega'' + \int_{DA}\omega''.$

On a $\quad \displaystyle\int_{AB}\omega'' = \Big[-\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{a}\Big]_{x=a}^{x=-a} = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\int_{BC}\omega'' = \Big[\mathrm{Arctan}\left(-\frac{y}{a}\right)\Big]_{y=a}^{y=-a} = \frac{\pi}{2}.$

On trouve de même $\quad \displaystyle\int_{CD}\omega'' = \int_{DA}\omega'' = \frac{\pi}{2}.$ Ainsi $\displaystyle\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \omega'' = 2\pi.$

On remarquera que ce calcul montre que ω n'est pas exacte sur U bien qu'étant fermée. ✎ (15)

✎ (15) Il n'existe donc aucun ouvert étoilé contenant Γ sur lequel ω soit de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 6 Calculer $\displaystyle\int_\Gamma z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$ où Γ est le cercle (supposé orienté) d'équations :

$$x+y+z=a \quad , \quad x^2+y^2+z^2=a^2.$$

La projection orthogonale de Γ sur le plan Oxy est l'ellipse d'équations :

$$z=0 \quad , \quad x^2+y^2+xy-a(x+y)=0.$$

La deuxième équation s'écrit $\quad 3\left(x+y-\dfrac{2a}{3}\right)^2+(x-y)^2-\dfrac{4a^2}{3}=0.$

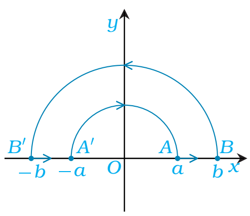
On obtient pour paramétrisation de Γ $\quad [0,2\pi]\to\mathbb{R}^3, \quad t\mapsto\begin{cases} x=\dfrac{a}{3}(1+\cos t)+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\sin t \\ y=\dfrac{a}{3}(1+\cos t)-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\sin t \\ z=\dfrac{a}{3}(1-2\cos t)\end{cases}$

Γ étant orienté par cette paramétrisation, on obtient $\displaystyle\int_\Gamma z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=-\frac{2\,\pi\,a^2}{\sqrt{3}}.$

Exemple 7 On considère la forme différentielle ω sur $U=\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$, définie par :

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\Big[(x\sin x-y\cos x)dx+(x\cos x+y\sin x)dy\Big]$$

et Γ la courbe orientée formée des demi-cercles de centre O, de rayons a et b $(0<a<b)$ et des segments $[A,B]$ et $[A',B']$. (Voir figure.)



a) Calculer l'intégrale curviligne $\quad I(a,b)=\displaystyle\int_\Gamma\omega.$

b) En considérant $\displaystyle\lim_{\substack{a\to0\\b\to+\infty}} I(a,b)$, calculer l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$

a) Il est clair que ω est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on vérifie qu'elle est fermée.

L'ouvert $V=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,y)\,/\,y\leqslant0\}$ est étoilé par rapport à tout point $(0,y)$ tel que $y\in\mathbb{R}_+^*$, le théorème de Poincaré montre donc que ω est exacte sur V.

Puisque le contour fermé Γ est inclus dans V, on a finalement $I(a,b)=\displaystyle\int_\Gamma\omega=0.$

b) Un paramétrage de Γ donne : $I(a,b)=2\displaystyle\int_a^b\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+f(b)-f(a).$ ✎[16]

où on a posé $f(x)=\displaystyle\int_0^\pi e^{-x\sin\theta}\cos(x\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$

▪ La fonction $(x,\theta)\mapsto e^{-x\sin\theta}\cos(x\cos\theta)$ étant continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$, le théorème de continuité sous le signe somme avec intégration sur un intervalle compact donne que f est continue sur $\mathbb{R}$, et donc :

$$\lim_{a\to0}f(a)=f(0)=\pi.$$

▪ Une majoration fournit : $|f(b)|\leqslant\displaystyle\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ donc $|f(b)|\leqslant2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-b\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

Alors, sachant que sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin\theta\geqslant\dfrac{2\theta}{\pi}$ ✎on obtient : ✎[17]

$$|f(b)|\leqslant2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2b\theta}{\pi}}\,\mathrm{d}\theta\leqslant2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{2b\theta}{\pi}}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{b},\text{ et donc }\lim_{b\to+\infty}f(b)=0.$$

▪ On en déduit enfin $\displaystyle\lim_{\substack{a\to0\\b\to+\infty}} I(a,b)=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\pi$ et, comme $I(a,b)=0$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

✎[16] On sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ est impropre convergente. (cf. chapitre 6)
La question se ramène donc au calcul de la limite de $\int_a^b\frac{\sin t}{t}dt$ quand a tend vers 0 et b vers $+\infty$.

✎[17] Car la fonction sin est concave sur cet intervalle.

C. Intégrale double

1. Intégrale double sur un pavé compact

✎ (18) $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ $a<b,\ c<d$.

Théorème 3

Soit f une application continue sur le pavé compact $\left[a,b\right] \times \left[c,d\right]$, ✎ (18) à valeurs réelles ou complexes. On a alors :

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

☞ On remarquera d'abord que, d'après le théorème de continuité sous le signe somme (cas où l'intervalle d'intégration est compact), les fonctions :

$$F : x \mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad G : y \mapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

sont continues sur $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement, ce qui assure l'existence de :

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_c^d G(y)\mathrm{d}y.$$

Considérons alors les fonctions :

$$H_1 \ :\ [a,b] \to \mathbb{C}, u \mapsto \int_a^u F(x)\mathrm{d}x$$

$$H_2 \ :\ [a,b] \to \mathbb{C}, u \mapsto \int_c^d \left(\int_a^u f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

F étant continue sur $[a,b]$, H_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec :

$$\forall u \in [a,b],\quad H_1'(u) = F(u).$$

Pour la même raison, la fonction $K : (u,y) \mapsto \int_a^u f(x,y)\mathrm{d}x$ admet sur $[a,b] \times [c,d]$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial K}{\partial u}\ :\ (u,y) \mapsto f(u,y)$ qui est continue sur $[a,b] \times [c,d]$.

Par application du théorème de continuité sous le signe somme (cas où l'intervalle d'intégration est compact), pour $u \in [a,b]$ la fonction partielle $y \mapsto \int_a^u f(x,y)\mathrm{d}x$ est continue sur $[c,d]$. On déduit alors du théorème de dérivation sous le signe somme (cas où l'intervalle d'intégration est compact) que H_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec :

$$\forall u \in [a,b], H_2'(u) = \int_c^d \frac{\partial K}{\partial u}(u,y)\mathrm{d}y = \int_c^d f(u,y)\mathrm{d}y = F(u).$$

Il résulte de ceci qu'il existe une constante $\lambda \in E$ telle que :

$$\forall u \in [a,b], H_2(u) = H_1(u) + \lambda$$

et, comme $H_2(a) = H_1(a) = 0$, on a finalement $\lambda = 0$ et la formule annoncée.

Définition 5

L'**intégrale double** sur un pavé compact $P = [a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$ d'une fonction f réelle ou complexe, continue sur P, est la valeur commune des deux intégrales du théorème 3 précédent. On la note :

$$\iint_P f \quad \text{ou} \quad \iint_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_P f = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Propriété 7

Si f à valeurs réelles ou complexes, continue sur le pavé $P = [a, b] \times [c, d]$, se décompose en $f(x, y) = g(x)\,h(y)$, on a :

$$\iint_P g(x)\,h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_c^d h(y)\mathrm{d}y\right].$$

L'aire de P se calcule en choisissant $f = 1$: $\mathscr{A}(P) = \displaystyle\iint_P \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Propriété 8

Si f est réelle positive, continue sur le pavé $P = [a, b] \times [c, d]$, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère le compact :

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\right\}.$$

Le volume de D est :

$$V(D) = \iint_P f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

☞ a) Il y a d'abord lieu de donner un sens à la notion de volume de D.

Ètant donné $\sigma = \left(\alpha_i\right)_{0\leqslant i\leqslant m}$ et $\sigma' = \left(\beta_j\right)_{0\leqslant j\leqslant m}$ subdivisions de $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement, posons, pour tout $(i, j) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![0, m-1]\!]$:

$$p_{ij} = \left[\alpha_i\,,\alpha_{i+1}\right] \times \left[\beta_j\,,\beta_{j+1}\right].$$

Les p_{ij}, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, constituent un **pavage** de $P = [a, b] \times [c, d]$ que nous noterons $\sigma \times \sigma'$ et nous désignerons par $\mathscr{P}$ l'ensemble des pavages de P. ✎[19]

Pour tout (i, j), f étant continue et p_{ij} compact, il existe $\left(x_i\,, y_j\right) \in p_{ij}$ et $\left(x_i'\,, y_j'\right) \in p_{i,j}$ tels que :

$$f\left(x_i\,, y_j\right) = \sup_{(x,y)\in p_{ij}} f(x, y)\quad,\quad f\left(x_i'\,, y_j'\right) = \inf_{(x,y)\in p_{ij}} f(x, y)$$

et on peut définir les sommes :

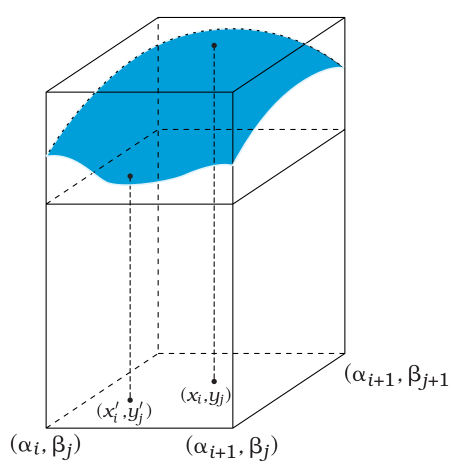
$$S_{\sigma\times\sigma'} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\alpha_{i+1}-\alpha_i\right)\left(\beta_{j+1}-\beta_j\right)f\left(x_i\,, y_j\right)$$

✎[20]

$$s_{\sigma\times\sigma'} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\alpha_{i+1}-\alpha_i\right)\left(\beta_{j+1}-\beta_j\right)f\left(x_i'\,, y_j'\right)$$

Il est clair que pour tout pavage $\sigma \times \sigma'$ on a :

$$s_{\sigma\times\sigma'} \leqslant S_{\sigma\times\sigma'}\,.$$



On vérifie que si σ_1 et σ_1' sont des subdivisions de $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement plus fines ✎[21] que σ et σ', on a :

$$s_{\sigma\times\sigma'} \leqslant s_{\sigma_1\times\sigma_1'} \leqslant S_{\sigma_1\times\sigma_1'} \leqslant S_{\sigma\times\sigma'}\,.$$

Il en résulte que si $\sigma_1 \times \sigma_1'$ et $\sigma_2 \times \sigma_2'$ sont deux pavages quelconques de P, en posant $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ et $\sigma' = \sigma_1' \cup \sigma_2'$ ✎[21] on a :

$$s_{\sigma_1\times\sigma_1'} \leqslant s_{\sigma\times\sigma'} \leqslant S_{\sigma\times\sigma'} \leqslant S_{\sigma_2\times\sigma_2'}\,.$$

L'uniforme continuité de f sur le pavé P ✎[22] donne enfin :

$\forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\,, \exists\,\eta \in \mathbb{R}_+^*\,, \forall\,\sigma \times \sigma' \in \mathscr{P}$,

$\left(|\sigma| \leqslant \eta \text{ et } \left|\sigma'\right| \leqslant \eta\right) \Rightarrow 0 \leqslant S_{\sigma\times\sigma'} - s_{\sigma,\sigma'} \leqslant \varepsilon$

et finalement les ensembles :

$$V_+(D) = \left\{S_{\sigma\times\sigma'} \;/\; \sigma \times \sigma' \in \mathscr{P}\right\}$$

$$\text{et}\quad V_-(D) = \left\{s_{\sigma\times\sigma'} \;/\; \sigma \times \sigma' \in \mathscr{P}\right\}$$

sont adjacents.

✎[19] Obtenu en faisant décrire à σ (resp. σ') l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ (resp. $[c,d]$).

✎[20] Géométriquement, $S_{\sigma\times\sigma'}$ et $s_{\sigma\times\sigma'}$ sont les sommes de deux réunions de parallélépipèdes rectangles contenant D pour la première et contenue dans D pour la seconde.

✎[21] Notions introduites en Analyse – MPSI, chapitre 9.

✎[22] Théorème de Heine.

On dit alors que D est une partie **cubable** dont le volume $V(D)$ est la borne commune de $V_+(D)$ et $V_-(D)$:

$$V(D) = \sup V_-(D) = \inf V_+(D).$$

b) Montrons maintenant que $V(D) = \iint_D f$.

Considérons un pavage quelconque $\sigma \times \sigma' \in \mathcal{P}$, $\sigma = \left(\alpha_i\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, $\sigma' = \left(\beta_j\right)_{0 \leqslant j \leqslant m}$.

La relation de Chasles – pour l'intégrale simple – donne :

$$\forall y \in [c, d], \quad \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x, y)\mathrm{d}x$$

$$\int_d^c \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x, y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$$

puis par linéarité de l'intégrale simple :

$$\iint_P f = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \left(\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x, y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \iint_{p_{ij}} f.$$

Pour tout $y \in \left[\beta_j, \beta_{j+1}\right]$, on a :

$$\forall x \in \left[\alpha_i, \alpha_{i+1}\right], \quad f\left(x_i', y_j'\right) \leqslant f(x, y) \leqslant f\left(x_i, y_j\right) \quad ✎^{(23)}$$

✎(23) Notations introduites en a).

donc, par croissance de l'intégrale simple :

$$\left(\alpha_{i+1} - \alpha_i\right) f\left(x_i', y_j'\right) \leqslant \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x, y)\mathrm{d}x \leqslant \left(\alpha_{i+1} - \alpha_i\right) f\left(x_i, y_j\right)$$

puis :

$$\left(\beta_{j+1} - \beta_j\right)\left(\alpha_{i+1} - \alpha_i\right) f\left(x_i', y_j'\right) \leqslant \iint_{p_{ij}} f \leqslant \left(\beta_{j+1} - \beta_j\right)\left(\alpha_{i+1} - \alpha_i\right) f\left(x_i, y_j\right)$$

et enfin, en sommant :

$$s_{\sigma \times \sigma'} \leqslant \iint_P f \leqslant S_{\sigma \times \sigma'}.$$

Ceci étant vrai quel que soit le pavage $\sigma \times \sigma'$, il en résulte $V(D) = \iint_P f$.

Propriété 9

Si f est réelle positive, continue sur $P = [a, b] \times [c, d]$, pour tout pavé compact P' inclus dans P, on a :

$$\iint_{P'} f \leqslant \int_P f.$$

☞ On pose $P' = \left[a', b'\right] \times \left[c', d'\right]$.

Avec $\left[a', b'\right] \subset \left[a, b\right]$, la positivité de $x \mapsto f(x, y)$ donne :

$$\forall y \in \left[c, d\right], \quad 0 \leqslant \int_{a'}^{b'} f(x, y)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x,$$

donc, avec la croissance de l'intégrale simple :

$$\int_{c'}^{d'} \left(\int_{a'}^{b'} f(x, y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \leqslant \int_{c'}^{d'} \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \leqslant \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$$

c'est-à-dire : $$\iint_{P'} f \leqslant \iint_P f.$$

Propriété 10

Si f et g sont réelles continues sur $P = [a, b] \times [c, d]$ telles que $f \leqslant g$, on a :

$$\iint_P f \leqslant \iint_P g.$$

☞ En utilisant deux fois la croissance de l'intégrale simple, on obtient :

$$\forall y \in [c, d], \quad \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x, y)\mathrm{d}x$$

puis :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \leqslant \int_c^d \left(\int_a^b g(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Propriété 11

Pour toutes fonctions f et g réelles ou complexes, continues sur $P = [a, b] \times [c, d]$, et tout couple (λ, μ) de nombres réels ou complexes, on a :

$$\iint_P (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_P f + \mu \iint_P g.$$

☞ On utilise deux fois la linéarité de l'intégrale simple.

2. Intégrale double sur un pavé quelconque

2.1 – Intégrabilité des fonctions réelles positives

✎[24] Notations du chapitre 6.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}_I$ désigne l'ensemble des segments inclus dans I. ✎[24]

Définition 6

Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$, non vides, non réduits à un point.

Une fonction f à valeurs réelles positives, continue sur le pavé $P = I \times I'$, est dite intégrable sur P s'il existe M réel positif tel que :

$$\forall (J, J') \in \mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_{I'}, \quad \iint_{J \times J'} f \leqslant M.$$

Lorsqu'il en est ainsi, on pose :

$$\iint_{I \times I'} f = \sup \left\{ \iint_{J \times J'} f \Big/ J \in \mathcal{S}_I, J' \in \mathcal{S}_{I'} \right\}.$$

Remarques

1) Si P est un pavé compact $P = I \times I'$ avec $I = [a, b]$, $I' = [c, d]$, on déduit de la propriété 9 que :

$$\iint_P f = \sup \left\{ \iint_{J \times J'} f \Big/ J \in \mathcal{S}_I, J' \in \mathcal{S}_{I'} \right\}.$$

Ceci assure la cohérence de la définition 6 avec la définition 5.

2) Par définition, l'intégrale sur P d'une fonction continue, positive, intégrable sur P, est positive.

Propriété 12

Étant donné des fonctions f et g réelles positives, continues sur un pavé $P = I \times I'$, si $f \leqslant g$ et si g est intégrable sur P, alors f l'est également et on a de plus :

$$\iint_P f \leqslant \iint_P g.$$

☞ g étant intégrable sur P :
$$\forall (J, J') \in \mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_{I'}, \iint_{J\times J'} g \leqslant \iint_{I\times I'} g$$
donc, d'après la propriété 10, on obtient :
$$\iint_{J\times J'} f \leqslant \iint_{J\times J'} g \leqslant \iint_{I\times I'} g$$
et il en résulte que f est intégrable sur P.
En passant à la borne supérieure, on obtient de plus :
$$\iint_{I\times I'} f \leqslant \int_{I\times I'} g.$$

Propriété 13

a) La somme de deux fonctions réelles positives f et g, continues et intégrables sur un pavé $P = I \times I'$, est intégrable sur P.

b) Le produit d'une fonction réelle positive f, continue et intégrable sur un pavé $P = I \times I'$, par un réel positif λ est intégrable sur P.

☞ Pour tout $(J, J') \in \mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_{I'}$, on a, d'après la propriété 11 :
$$\iint_{J\times J'} (f+g) = \iint_{J\times J'} f + \iint_{J\times J'} g \text{ donc } \iint_{J\times J'} (f+g) \leqslant \iint_{I\times I'} f + \iint_{I\times I'} g$$
et
$$\iint_{J\times J'} \lambda f = \lambda \iint_{J\times J'} f \text{ donc } \int_{J\times J'} \lambda f \leqslant \lambda \iint_{I\times I'} f.$$

Propriété 14

Soit f une fonction réelle positive, continue sur le pavé $P = I \times I'$ et intégrable sur P.

a) Pour tout pavé $Q \subset P$, f est intégrable sur Q et on a :
$$\iint_Q f \leqslant \iint_P f.$$

b) f est intégrable sur $\overset{\circ}{P} = \overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{I}{}'$ et on a :
$$\iint_{\overset{\circ}{P}} f = \iint_P f.$$

☞ a) C'est un corollaire de la propriété 9.

b) L'intégrabilité de f sur $\overset{\circ}{P}$ résulte du a) avec $\overset{\circ}{P} \subset P$ et l'égalité des intégrales se prouve comme pour la propriété 3 du chapitre 6.

Théorème 4

Soit f une fonction réelle positive, continue sur le pavé $P = I \times I'$, telle que :
(i) pour tout $x \in I$, la fonction partielle $f(x, \bullet) : y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur I' ;
(ii) la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{I'} f(x, \bullet)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
Alors f est intégrable sur $P = I \times I'$.

☞ Soit $J \times J'$ un pavé compact inclus dans $I \times I'$.
Pour tout $x \in I$, $f(x, \bullet)$ est positive et intégrable sur I' donc, avec $J' \subset I'$, on obtient :
$$0 \leqslant \int_{J'} f(x, \bullet) \leqslant \int_{I'} f(x, \bullet).$$
Puisque $x \mapsto \displaystyle\int_{I'} f(x, \bullet)$ est intégrable sur I, le critère de domination pour les fonctions continues par morceaux, réelles, positives, donne l'intégrabilité sur I de :
$$x \mapsto \int_{J'} f(x, \bullet) \text{ avec } \int_I \left(\int_{J'} f(x, \bullet) \right) \mathrm{d}x \leqslant \int_I \left(\int_{I'} f(x, \bullet) \right) \mathrm{d}x$$

et d'autre part $\int_J \left(\int_{J'} f(x,\bullet)\right) \mathrm{d}x \leqslant \int_I \left(\int_{J'} f(x,\bullet)\right) \mathrm{d}x$, d'où finalement :

$$\iint_{J\times J'} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M \text{ où on a posé } M = \int_I \left(\int_{I'} f(x,\bullet)\right) \mathrm{d}x.$$

Ceci étant vrai pour tout pavé compact $J \times J'$ inclus dans $I \times I'$, on en déduit que f est intégrable sur $I \times I'$.

Remarque

On obtient un résultat analogue en échangeant les variables x et y.

2.2 – Intégrabilité des fonctions réelles ou complexes

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on définit f^+ et f^- comme on l'a fait lors du chapitre 6, dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On obtient de même :

a) $f^+ = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right)$, $f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right)$;

b) $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$;

c) f est continue sur un pavé $I \times I'$ si et seulement si f^+ et f^- le sont ;

d) si f est continue sur un pavé compact $P = I \times I'$:

$$\iint_P f = \iint_P f^+ - \iint_P f^-.$$

Définition 7

Une fonction f, à valeurs réelles ou complexes, continue sur un pavé $P = I \times I'$, est dite **intégrable** ou **sommable** sur P lorsque $|f|$ est intégrable sur ce pavé.

Propriété 15

Une fonction f, à valeurs réelles, continue sur un pavé $P = I \times I'$, est intégrable sur P si et seulement si f^+ et f^- le sont.

☞ Les deux implications résultent des propriétés 12 et 13, avec :

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \ , \ 0 \leqslant f^- \leqslant |f| \ \text{ et } \ |f| = f^+ + f^-.$$

Définition 8

Si une fonction f, à valeurs réelles, continue sur un pavé $P = I \times I'$, est intégrable sur P, on définit l'intégrale de f sur P par :

$$\iint_P f = \iint_P f^+ - \iint_P f^-. \text{ ✎}^{(25)}$$

✎(25) D'après une remarque précédente, cette définition est cohérente avec le cas où le pavé P est compact.

Propriété 16

Une fonction f, à valeurs complexes, continue sur un pavé $P = I \times I'$, est intégrable sur P si et seulement si $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ le sont.

☞ C'est une conséquence des propriétés 12 et 13, avec :

$$0 \leqslant |\mathrm{Re}\, f| \leqslant |f| \ , \ 0 \leqslant |\mathrm{Im}\, f| \leqslant |f| \ \text{ et } \ |f| \leqslant |\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|.$$

Définition 9

Si une fonction f, à valeurs complexes, continue sur un pavé $P = I \times I'$ est intégrable sur P, on définit l'intégrale de f sur P par :

$$\iint_P f = \iint_P \mathrm{Re}\, f + i \iint_P \mathrm{Im}\, f. \text{ ✎}^{(26)}$$

✎(26) D'après la propriété 11, cette définition est cohérente.

2.3 – Propriétés – Calcul de l'intégrale

Rappelons qu'une suite exhaustive de $\mathcal{S}_I$ est une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de segments inclus dans I telle que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I. \quad ✎^{(27)}$$

✎(27) Voir le chapitre 6.

En considérant une suite exhaustive $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_I$ et une suite exhaustive $(J'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_{I'}$, et en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = J_n \times J'_n$, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de pavés compacts telle que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = I \times I'.$$

On dira qu'il s'agit d'une suite exhaustive de pavés compacts de $I \times I'$.

Propriété 17

Si f est une fonction réelle ou complexe, continue et intégrable sur un pavé $P = I \times I'$ et si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de pavés compacts inclus dans P, on a :

$$\iint_P f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{K_n} f.$$

☞ On procède comme dans le chapitre 6 : en commençant par vérifier la propriété pour les fonctions positives, ✎(28) on l'étend successivement aux fonctions réelles puis complexes grâce aux définitions 8 et 9.

✎(28) Comme dans le chapitre 6, dans le cas des fonctions positives, l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \iint_{K_n} f$ donne une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité (voir chapitre 6, théorème 2).

Propriété 18

Linéarité de l'intégrale

Étant donné un pavé $P = I \times I'$, l'ensemble E_P des fonctions réelles (resp. complexes) continues et intégrables sur P est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

L'application $f \mapsto \iint_P f$ est une forme linéaire sur cet espace :

$$\forall (f, g) \in E_P^2,\ \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \iint_P \lambda f + \mu g = \lambda \iint_P f + \mu \iint_P g. \quad ✎^{(29)}$$

✎(29) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

☞ ■ E_P est non vide car il contient la fonction nulle. Avec :

$$|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda|\ |f| + |\mu|\ |g|$$

les propriétés 12 et 13 montrent que E_P est stable par combinaison linéaire.

■ La linéarité est connue pour les intégrales sur un pavé compact. En conséquence, en considérant une suite exhaustive $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pavés compacts inclus dans P, on a pour tout $(f, g) \in E_P^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \iint_{K_n} \lambda f + \mu g = \lambda \iint_{K_n} f + \mu \iint_{K_n} g$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient :

$$\iint_P \lambda f + \mu g = \lambda \iint_P f + \mu \iint_P g.$$

Corollaire 1

Croissance de l'intégrale

Si f et g sont des fonctions réelles, continues, intégrables sur un pavé P et si, de plus, $f \leqslant g$, alors on a :

$$\iint_P f \leqslant \iint_P g. \quad ✎^{(30)}$$

✎(30) $\iint_P g - \iint_P f = \iint_P g - f \geqslant 0.$

✎ (31) La démonstration est hors programme.

Théorème 5

Formule de Fubini ✎ (31)

Soit f une fonction réelle ou complexe, continue et intégrable sur un pavé $P = I \times I'$.

a) Si, pour tout $x \in I$, la fonction $f(x, \bullet) : y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur I', et si l'application $F : x \mapsto \int_{I'} f(x, y)\mathrm{d}y$ est continue par morceaux sur I, alors cette fonction F est intégrable sur I et on a :

$$\iint_P f = \int_I \left(\int_{I'} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

b) Si, de plus, la fonction $f(\bullet, y) : x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur I pour tout $y \in I'$, et si l'application $G : y \mapsto \int_I f(x, y)\mathrm{d}x$ est continue par morceaux et intégrable sur I',alors cette fonction G est intégrable sur I et on a :

$$\iint_P f = \int_I \left(\int_{I'} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{I'} \left(\int_I f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$ ✎ (32)

✎ (32) C'est la formule de Fubini.

Exemple 8 Soit $\Delta = [a, b] \times]0, 1]$ avec $-1 < a < b$.

a) Montrer que $f : (x, y) \mapsto y^x$ est intégrable sur Δ et calculer $\iint_\Delta y^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

b) En déduire $\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ell n\, y}\mathrm{d}y$.

a) Pour tout $(x, y) \in \Delta$, $f(x, y) = e^{x\,\ell n\, y}$: f est continue, positive, sur Δ.

Pour tout $x \in [a, b]$, on a $x > -1$ donc $f(x, \bullet) : y \mapsto y^x$ est intégrable sur $]0, 1]$ et on a :

$$\int_{]0,1]} y^x \mathrm{d}y = \frac{1}{x+1}\left[y^{x+1}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x+1}.$$

Avec $-1 < a < b$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est continue donc intégrable sur le segment $[a, b]$.

Ainsi, d'après les théorèmes 4 et 5, f est intégrable sur Δ et on a :

$$\iint_\Delta y^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \ell n\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

b) D'autre part, $x \mapsto e^{x\,\ell n\, y}$ est continue donc intégrable sur $[a, b]$ et la fonction :

$$F : y \mapsto \int_a^b e^{x\,\ell n\, y}\mathrm{d}x = \frac{y^b - y^a}{\ell n\, y}$$

est continue sur $]0, 1[$, et prolongeable par continuité en 1 par $F(1) = b - a$ ✎ (33) .

Le théorème de Fubini donne alors que F est intégrable sur $]0, 1[$ ✎ (34) et que l'on a :

$$\iint_\Delta y^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_a^b e^{x\,\ell n\, y}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

c'est-à-dire , compte tenu du a) :

$$\ell n\left(\frac{b+1}{a+1}\right) = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ell n\, y}\mathrm{d}y.$$

Remarquer que, dans l'application du théorème de Fubini, le choix de l'ordre des intégrations n'est pas indifférent. En effet, le calcul de la dernière intégrale ne peut pas se faire à l'aide de primitives.

✎ (33) Au voisinage de 1, on pose $y = 1 + h$, et il vient :
$y^a = 1 + ah + o(h)$
$y^b = 1 + bh + o(h)$
$F(y) = b - a + o(1)$.

✎ (34) Cela peut évidemment se justifier directement par le fait que F est prolongeable par continuité en 1 et qu'au voisinage de 0, on a :
$F(y) \sim -\frac{1}{y^{-a}\,\ell n\, y}$
avec $-a < 1$.

Exemple 9 Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}^2$, et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y) = \iint_{\Delta(x,y)} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \ \text{ où } \Delta(x,y) = [0,x] \times [0,y].$$

✎(35) On a affaire à une fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $M_{x,y} = \|f\|_\infty^{\Delta(x,y)}$. ✎(35)

Si f est solution, une majoration donne : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x,y)| \leqslant M_{x,y}\,|x|\,|y|$.

Alors, en remarquant que pour tout $(u,v) \in \Delta(x,y)$ on a $\Delta(u,v) \subset \Delta(x,y)$, il vient $M_{u,v} \leqslant M_{x,y}$ donc $|f(u,v)| \leqslant M_{x,y}\,|u|\,|v|$, puis une nouvelle majoration de l'intégrale fournit :

$$|f(x,y| \leqslant M_{x,y}\frac{|x|^2}{2}\frac{|y|^2}{2}.$$

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait :

✎(36) On prépare une démonstration par récurrence.

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x,y)| \leqslant M_{x,y}\frac{|xy|^n}{(n!)^2}. \quad ✎^{(36)}$$

Alors, comme ci-dessus, il vient :

$$\forall (u,v) \in \Delta(x,y),\ \ |f(u,v)| \leqslant M_{x,y}\frac{|uv|^n}{(n!)^2}$$

puis :
$$|f(x,y)| \leqslant M_{x,y}\iint_{\Delta(x,y)}\frac{|uv|}{(n!)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

donc :
$$|f(x,y)| \leqslant M_{x,y}\frac{|xy|^{n+1}}{\big((n+1)!\big)^2}.$$

Ainsi la propriété $\mathcal{P}(n)$ est récurrente donc, $\mathcal{P}(0)$ étant vraie, elle l'est pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{|xy|^n}{(n!)^2}$ est le terme général d'une série convergente et tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En conséquence, la majoration $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |f(x,y)| \leqslant M_{x,y}\dfrac{|xy|^n}{(n!)^2}$ donne $f(x,y) = 0$.

Ceci est vrai pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction nulle est l'unique solution du problème.

Remarque :
Pour orienter la recherche, il est judicieux de considérer le problème analogue pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x f$,
la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$ telle que $F(0) = 0$, c'est donc la fonction nulle.

3. Intégrale double sur une partie simple

Définition 10

Une **partie** A de $\mathbb{R}^2$ est dite **élémentaire** si elle admet les deux définitions suivantes :

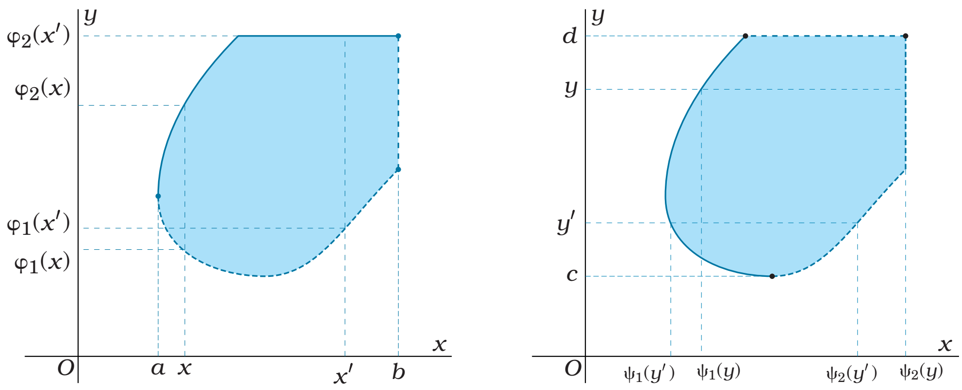
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\right\}$$
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ c \leqslant y \leqslant d, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\right\}$$

où φ_1, φ_2 (resp. ψ_1, ψ_2) sont des fonctions continues sur l'intervalle compact $[a,b]$ (resp. $[c,d]$) vérifiant $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ (resp. $\psi_1(y) < \psi_2(y)$) pour tout x de $]a,b[$ (resp. pour tout y de $]c,d[$).

✎(37) C'est un fermé-borné de $\mathbb{R}^2$.

On remarquera qu'une partie élémentaire est compacte. ✎(37) On dit usuellement que ce sont des **compacts élémentaires**.

Exemple



Sur cet exemple, les graphes de φ_2 et ψ_2 contiennent des segments de droites, ce qui correspond à
$\psi_1(d) < \psi_2(d)$
$\varphi_1(b) < \varphi_2(b)$.

Propriété 19

Étant donné A compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$, pour tout réel strictement positif ε, il existe des fonctions α et β, définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, nulles en dehors d'une partie bornée et telles que l'on ait :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \mathbf{1}_A \leqslant \beta \quad \text{et} \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \beta - \alpha \leqslant \varepsilon. \text{ ✎(38)}$$

✎(38) $\mathbf{1}_A$ est la fonction caractéristique de A.

☞ Conservons les notations de la définition 10. Il y a lieu d'envisager plusieurs cas selon que la frontière de A est formée par les graphes de φ_1 et φ_2 (resp. ψ_1 et ψ_2) ou est formée de cette réunion et de segments de droites.

Traitons par exemple le cas où $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$, $\varphi_1(b) < \varphi_2(b)$.

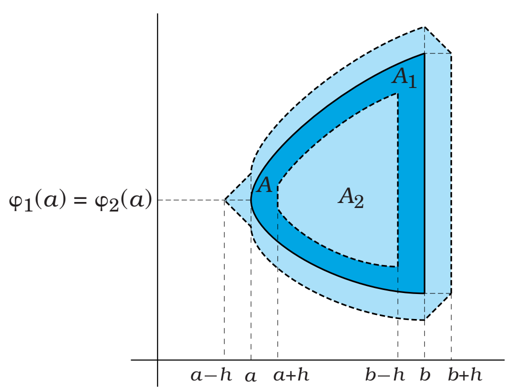
Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a + h < b - h$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\delta \leqslant h \quad \text{et} \quad 2\,\delta \leqslant \min_{x \in [a+h,b]} \left(\varphi_2(x) - \varphi_1(x) \right).$$

Considérons alors le contour Γ_1 défini comme raccordement des arcs $\gamma_{1,i}$ donnés ci-après.

$$\begin{array}{lll}
\gamma_{1,1} & : a - h \leqslant x < a, & y = \varphi_2(a) + (x - a + h)\dfrac{\delta}{h} \\
\gamma_{1,2} & : a \leqslant x \leqslant b, & y = \varphi_2(x) + \delta \\
\gamma_{1,3} & : b < x < b + h, & y = \varphi_2(b) + \delta - \dfrac{\delta}{h}(x - b) \\
\gamma_{1,4} & : x = b + h, & \varphi_1(b) \leqslant y \leqslant \varphi_2(b) \\
\gamma_{1,5} & : b < x < b + h, & y = \varphi_1(b) - \delta + \dfrac{\delta}{h}(x - b) \\
\gamma_{1,6} & : a \leqslant x \leqslant b, & y = \varphi_1(x) - \delta \\
\gamma_{1,7} & : a - h \leqslant x < a, & y = \varphi_1(a) - (x - a + h)\dfrac{\delta}{h} \text{ ✎(39)}
\end{array}$$

✎(39) Γ_1 est un arc continu fermé car $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$.



✎(40) Quoiqu'un peu laborieux

✎(41) Cette construction est effectuée de façon que le graphe de $\beta_{|A_1 \setminus \overset{\circ}{A}}$ soit constitué d'une famille de segments dont les extrémités décrivent Γ_1 et le contour du graphe de $\mathbf{1}_A$.

✎(42) La description des arcs $\gamma_{1,i}$ et $\gamma_{2,j}$ donne celle des fonctions Φ_k, $k = 1,2,3,4$.

Γ_1 est la frontière d'un compact élémentaire A_1.

Il est facile ✎(40) de définir une fonction β continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\beta_{|A} = \mathbf{1}_A \;,\; \beta_{|\mathbb{R}^2 \setminus A_1} = 0 \;\text{ et }\; 0 \leqslant \beta \leqslant 1 \text{ sur } A_1 \setminus A.$$

Il suffit, par exemple, de procéder par raccordements affines :

pour $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_2(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) + \delta$, on pose $\beta(x, y) = \dfrac{1}{\delta}\big(\varphi_2(x) + \delta - y\big)$;

pour $b < x < b + h$, $\varphi_2(b) \leqslant y \leqslant \varphi_2(b) + \delta - \dfrac{\delta}{h}(x - b)$, on pose :

$$\beta(x, y) = 1 - \frac{1}{\delta}\big(y - \varphi_2(b)\big) - \frac{1}{h}\big(x - b\big) \;;$$

pour $b \leqslant x \leqslant b + h$, $\varphi_1(b) \leqslant y \leqslant \varphi_2(b)$, on pose $\beta(x, y) = \dfrac{b + h - x}{h}$.

etc. ✎(41)

De même le contour Γ_2 défini par les arcs $\gamma_{2,i}$:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{2,1} \;: x = a + h, && \varphi_1(a + h) + \delta < y < \varphi_2(a + h) - \delta\\
&\gamma_{2,2} \;: a + h \leqslant x \leqslant b - h, && y = \varphi_2(x) - \delta\\
&\gamma_{2,3} \;: x = b - h, && \varphi_1(b) + \delta < y < \varphi_2(b) - \delta\\
&\gamma_{2,4} \;: a + h \leqslant x \leqslant b - h, && y = \varphi_1(x) + \delta
\end{aligned}$$

est la frontière d'un compact élémentaire A_2 inclus dans A et on définit une fonction α continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\alpha_{|A_2} = \mathbf{1}_{A_2} \,,\; \alpha_{|\mathbb{R}^2 \setminus A} = 0 \;\text{ et }\; 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ sur } A \setminus A_2 .$$

Par construction, on a bien $0 \leqslant \alpha \leqslant \mathbf{1}_A \leqslant \beta$.

D'autre part, la fonction $\beta - \alpha$ est positive, continue et nulle en dehors du compact A_1, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et en réécrivant les définitions de A_1 et A_2 :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a - h \leqslant x \leqslant b + h,\;\; \Phi_1(x) \leqslant y \leqslant \Phi_2(x)\Big\}\\
A_2 &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a + h \leqslant x \leqslant b - h,\;\; \Phi_3(x) \leqslant y \leqslant \Phi_4(x)\Big\}
\end{aligned}$$ ✎(42)

le théorème 5 (formule de Fubini) donne :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} (\beta - \alpha) = &\int_{a-h}^{a+h} \left(\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} (\beta - \alpha)(x, y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x + \int_{b-h}^{b+h} \left(\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} (\beta - \alpha)(x, y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x\\
&+ \int_{a+h}^{b-h} \left(\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_3(x)} (\beta - \alpha)(x, y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x + \int_{a+h}^{b-h} \left(\int_{\Phi_4(x)}^{\Phi_2(x)} (\beta - \alpha)(x, y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Nous convenons d'imposer $0 < h < 1$ et soit :

$$M = 1 + \max\big\{\|\,\varphi_1\,\|_\infty, \|\,\varphi_2\,\|_\infty\big\}$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \big[a - h, a + h\big] \subset \big[a - 1, b + 1\big], \big[\,\Phi_1\,(x), \Phi_2(x)\big] \subset \big[-M, M\big]\\
\forall x \in \big[b - h, b + h\big] \subset \big[a - 1, b + 1\big], \big[\,\Phi_1\,(x), \Phi_2(x)\big] \subset \big[-M, M\big]
\end{aligned}$$

et, avec $\forall x \in \big[a + h, b - h\big]$, $\Phi_3(x) - \Phi_1(x) = \Phi_2(x) - \Phi_4(x) = 2\delta$, compte tenu de $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \alpha$, il vient :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\beta - \alpha) \leqslant 8Mh + 4(b - a)\,\delta \leqslant \big(8M + 4(b - a)\big)h$$

Ainsi, pour réaliser $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} (\beta - \alpha) \leqslant \varepsilon$, il suffit de choisir h tel que :

$$\big(8M + 4(b - a)\big)h < \varepsilon.$$

Théorème 6

Soit A un compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur A. En notant $\widehat{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ obtenue en prolongeant f par 0 sur le complémentaire de A, les intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \quad\text{et}\quad \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

ont un sens et prennent la même valeur.

Cette valeur commune est appelée l'intégrale double de f sur A et notée :

$$\iint_A f.$$

☞ Les fonctions $\widehat{f}(x,\bullet) : y \mapsto \widehat{f}(x,y)$ et $\widehat{f}(\bullet,y) : x \mapsto \widehat{f}(x,y)$ sont continues par morceaux et nulles en dehors d'un certain compact. Elles sont donc intégrables sur $\mathbb{R}$.

Il en est de même pour les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,\bullet)$ et $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\bullet,y)$.

Envisageons d'abord le cas où f est positive réelle.

Puisque A est un compact élémentaire, on peut, comme dans la propriété 19, construire une fonction F continue, positive sur $\mathbb{R}^2$, nulle en dehors d'un compact A_1 contenant A et telle que $f = F_{|A}$. ✎(43) On a alors $\widehat{f} = F \cdot \mathbf{1}_A$.

✎(43) C'est-à-dire que F est un prolongement continu, positif, de f à $\mathbb{R}^2$.

Remarquons de plus que F est bornée sur $\mathbb{R}^2$ et posons :

$$M = \sup_{\mathbb{R}^2}|F(x,y)| = \sup_{\mathbb{R}^2}F(x,y) = \sup_{A_1}F(x,y).$$

D'après la propriété 19, à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer des fonctions α et β continues sur $\mathbb{R}^2$ nulles en dehors d'un compact et telles que :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \mathbf{1}_A \leqslant \beta \quad\text{et}\quad \iint_{\mathbb{R}^2}\beta - \alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{M}.$$

F étant positive sur $\mathbb{R}^2$, on a alors :

$$0 \leqslant \alpha\cdot F \leqslant \mathbf{1}_A\cdot F \leqslant \beta\cdot F \quad\text{c'est-à-dire}\quad 0 \leqslant \alpha\cdot F \leqslant \widehat{f} \leqslant \beta\cdot F.$$

Toutes les fonctions intervenantes étant nulles en dehors d'un certain compact, elles sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et on obtient par croissance de l'intégrale simple (sur un intervalle) :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\alpha(x,y)\,F(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\beta(x,y)\,F(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \qquad \textbf{(i)}\\ \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\alpha(x,y)\,F(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\beta(x,y)\,F(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \qquad \textbf{(ii)}\end{aligned}$$

Ainsi les inégalités **(i)** et **(ii)** deviennent :

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\alpha\cdot F \leqslant \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2}\beta\cdot F \qquad \textbf{(iii)}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\alpha\cdot F \leqslant \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2}\beta\cdot F \qquad \textbf{(iv)}$$

et on en déduit :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right| \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} \beta \cdot F - \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha \cdot F \qquad \textbf{(v)}$$

avec $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \beta \cdot F - \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha \cdot F = \iint_{\mathbb{R}^2} (\beta - \alpha)F \leqslant M \iint_{\mathbb{R}^2} (\beta - \alpha) \leqslant \varepsilon.$ ✎(44)

✎(44) Voir la propriété 18 et son corollaire.

On a ainsi montré que, quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right| \leqslant \varepsilon$$

donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Dans le cas où f est à valeurs réelles, on écrit $f = f^+ - f^-$ où f^+ et f^- sont positives et continues sur A. Il est clair que $\widehat{f} = \widehat{f^+} - \widehat{f^-}$ c'est-à-dire que :

$$\left(\widehat{f}\right)^+ = \widehat{\left(f^+\right)} \text{ et que } \left(\widehat{f}\right)^- = \widehat{\left(f^-\right)}.$$

D'après la linéarité de l'intégrale sur un intervalle, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f^+}(x, y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} \widehat{f^-}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f^+}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f^-}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f^+}(x, y)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \widehat{f^-}(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f^+}(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f^-}(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

L'égalité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ résulte donc de ce que cette propriété est vraie pour f^+ et f^- d'après l'étude du premier cas.

On établit de même que la propriété reste vraie dans le cas où f est à valeurs complexes en utilisant qu'elle l'est pour $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

Corollaire 1

Formule de Fubini

Soit A un compact élémentaire défini par :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leqslant x \leqslant b,\ \ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\right\}$$ ✎(45)

$$\text{ou} \quad A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, c \leqslant y \leqslant d,\ \ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\right\}$$

✎(45) φ_1 et φ_2 sont continues sur $[a,b]$.
ψ_1 et ψ_2 sont continues sur $[c,d]$.
Voir définition 10.

et f une fonction réelle ou complexe continue sur A.

On a alors :

$$\iint_A f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

☞ Il suffit de remarquer que $f(x, \bullet)$ est nulle en dehors de $\left[\varphi_1(x), \varphi_2(x)\right]$, ce qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$$

puis que $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y$ est continue par morceaux et nulle en dehors de $[a,b]$, ce qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \text{ ✎}^{(46)}$$

✎(46) Et on procède de même pour la seconde intégrale.

Remarque

Dans la pratique, on note :

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

au lieu de $\displaystyle\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

et la formule de Fubini devient :

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x. \text{ ✎}^{(47)}$$

✎(47) On notera que les éléments différentiels $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ apparaissent ainsi dans l'ordre inverse des intégrations.

Définition 11

L'aire du compact élémentaire A est le réel $\mathscr{A}(A)$ défini par :

$$\mathscr{A}(A) = \iint_A \mathbf{1}_A = \iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Définition 12

On dit que A est une **partie simple** de $\mathbb{R}^2$ si c'est la réunion d'une famille finie de compacts élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

Définition 13

Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont des compacts élémentaires, ✎(48)

et f une fonction réelle ou complexe continue sur A. On définit l'intégrale double de f sur A par :

$$\iint_A f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} f. \text{ ✎}^{(49)}$$

✎(48) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \overset{\circ}{A}_i \cap \overset{\circ}{A}_j = \varnothing$.

✎(49) Nous admettons que cette définition est indépendante de la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de compacts élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints dont A est la réunion.

Définition 14

L'aire $\mathscr{A}(A)$ d'une partie simple A est la somme des aires des compacts élémentaires A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, qui la constituent :

$$\mathscr{A}(A) = \iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Propriété 20

Linéarité de l'intégrale sur une partie simple

Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$, f et g des fonctions réelles ou complexes, continues sur A, λ et μ des scalaires (réels ou complexes). Alors :

$$\iint_A \lambda f + \mu g = \lambda \iint_A f + \mu \iint_A g. \text{ ✎}^{(50)}$$

En conséquence, l'application :

$$\mathcal{I}_A \;:\; C(A,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, f \mapsto \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

est une forme linéaire sur $C(A,\mathbb{K})$.

✎(50) Il suffit de montrer que ces propriétés sont vraies pour tout compact élémentaire et cela résulte du théorème 6 et de la linéarité de l'intégrale simple.

Propriété 21

Croissance de l'intégrale sur une partie simple

Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$, f et g des fonctions réelles continues sur A telles que $f \leqslant g$. On a alors :

$$\iint_A f \leqslant \iint_A g. \quad (46)$$

Propriété 22

Soit A_1 et A_2 deux parties simples de $\mathbb{R}^2$ telles que $A_1 \subset A_2$ et f une fonction réelle positive, continue sur A_2. On a alors :

$$\iint_{A_1} f \leqslant \int_{A_2} f.$$

☞ En admettant que $\overline{A_2 \setminus A_1}$ est une partie simple, la formule résulte de :

$$\iint_{A_2} f = \iint_{A_1} f + \iint_{\overline{A_2 \setminus A_1}} f$$

et de :

$$\iint_{\overline{A_2 \setminus A_1}} f \geqslant 0.$$

Exemple 10 Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin \frac{\pi x}{2y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin \frac{\pi x}{2y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

En posant :

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leqslant x \leqslant 2, \sqrt{x} \leqslant y \leqslant x \right\}$$

et

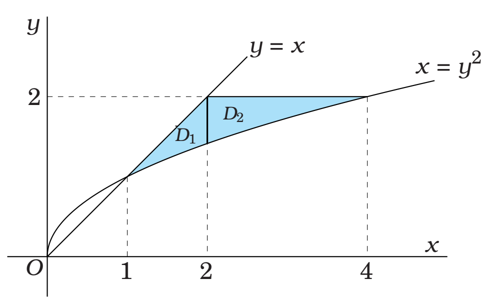
$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2 \leqslant x \leqslant 4, \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2 \right\}$$

la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin \dfrac{\pi x}{2y}$ est continue sur D_1 et sur D_2 et on a :

$$I = \iint_{D_1} \sin \frac{\pi x}{2y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} \sin \frac{\pi x}{2y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

D_1 et D_2 sont des compacts élémentaires tels que $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \varnothing$, donc, en posant $D = D_1 \cup D_2$, on obtient :

$$I = \iint_D \sin \left(\frac{\pi x}{2y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



D'autre part, D s'écrit aussi :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leqslant y \leqslant 2, y \leqslant x \leqslant y^2 \right\},$$

donc, d'après la formule de Fubini, on a :

$$I = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{y^2} \sin \left(\frac{\pi x}{2y} \right) \mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi y}{2} \mathrm{d}y$$

soit, en posant $t = \frac{\pi}{2}y$,

$$I = -\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Finalement : $$I = -\frac{8}{\pi^3}\left(\left[t\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t\right) = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\pi}{2}+1\right).$$

Exemple 11 Soit $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y \geqslant x^2,\;\; x^2-2x+y^2 \leqslant 0\right\}$.

Calculer $I = \iint_D y^2 x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

D est un compact élémentaire qui est aussi défini par :

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\;\; x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}\right\}$$

et la fonction $f : (x,y) \mapsto y^2x$ est évidemment continue sur D.

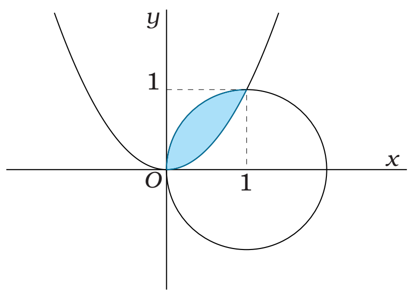
On a donc :

$$I = \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} y^2\mathrm{d}y$$

c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[x\left(2x-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - x^7\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}J - \frac{1}{24}$$

où on a posé $J = \int_0^1 x\left(2x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$.



Avec $x^2-2x = (x-1)^2-1$, le changement de variable défini par $t = 1-x$ donne :

$$J = \int_0^1 (1-t)\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t - \int_0^1 t\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$$

soit :

$$J = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t + \frac{1}{5}\left[\left(1-t^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = K - \frac{1}{5}$$

où on a posé $K = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$.

Le changement de variable défini par $t = \cos u$, $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donne :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\,\mathrm{d}u.$$

On reconnaît une intégrale de Wallis dont le calcul est classique :

$$K = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}.$$

On en déduit :

$$J = \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{5} \quad \text{puis} \quad I = \frac{\pi}{16} - \frac{13}{120}.$$

4. Changement de variables

4.1 – Formule du changement de variables dans les intégrales doubles

✎[51] Une partie d'aire nulle est, par exemple, une partie formée d'un ensemble fini de points A_i ou d'arcs Γ_j continus admettant un paramétrage de la forme $([a_j, b_j], \Phi_j)$.

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, D et Δ deux compacts simples tels que $D \subset U$, $\Delta \subset V$, $\varphi(D) = \Delta$. On suppose, de plus, que l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents dans D est d'aire nulle. ✎[51]

L'application $\varphi : D \to \Delta, (u, v) \mapsto (x, y)$ définit un changement de variables ;

le jacobien de φ, $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ induit une application continue de D dans $\mathbb{R}$.

Avec ces notations, pour $f \in \mathscr{C}(\Delta, \mathbb{K})$, on a la formule , dite du changement de variables :

✎[52] Noter la présence de la **valeur absolue** du jacobien de φ.
Ce résultat est admis.

$$\boxed{\iint_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$ ✎[52]

4.2 – Applications

a) Coordonnées polaires

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Le jacobien de φ est :

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

✎[53] Il est souvent judicieux de choisir D pour que r reste positif (quitte à faire un partage de Δ et utiliser la relation de Chasles).

La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|r|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$ ✎[53]

✎[54] Cas particuliers :
φ homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $\mathscr{A}[\varphi(D)] = |\lambda|^2 \mathscr{A}(D)$
φ affinité de rapport $\mu \in \mathbb{R}^*$: $\mathscr{A}[\varphi(D)] = |\mu| \mathscr{A}(D)$
φ isométrie de $\mathbb{R}^2$: $\mathscr{A}[\varphi(D)] = \mathscr{A}(D)$

b) Cas d'une application affine ✎[54]

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection affine.

Le jacobien de φ est le réel $\det L(\varphi)$ où $L(\varphi)$ désigne la partie linéaire de φ.

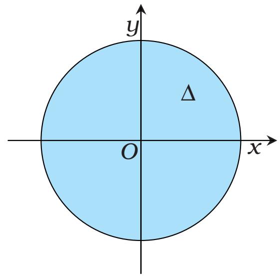
Si D est un compact simple, $\varphi(D)$ est un compact simple dont l'aire est :

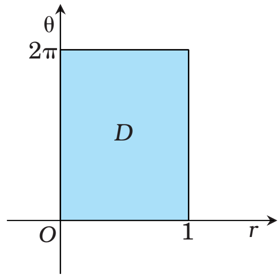
$$\mathscr{A}[\varphi(D)] = \mathscr{A}(D)\,|\det L(\varphi)|.$$

Exemple 12 Calculer $I = \displaystyle\iint_{\Delta} \frac{1}{\left(1 + 4x^2 + y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où Δ est le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Il est naturel d'utiliser les coordonnées polaires :

$\Delta : x^2 + y^2 \leqslant 1$ $\qquad$ $D : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$





L'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents dans D est :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\; y = 0\right\},$$

il est d'aire nulle. Le changement de variable donne :

$$I = \iint_D \frac{r}{\left(1 + r^2\left(1 + 3\cos^2\theta\right)\right)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Pour $a > 0$, le calcul de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{\left(1 + ar^2\right)^2} = \left[\frac{-1}{2a\left(1 + ar^2\right)}\right]_0^1 = \frac{1}{2(1 + a)}$$

donne :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\left(2 + 3\cos^2\theta\right)}\,\mathrm{d}\theta$$

soit aussi, puisque la fonction $\cos^2$ est paire et π-périodique :

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 + 3\cos^2\theta}.$$

Avec le changement de variable défini par $t = \tan\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, il vient alors :

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{5 + 2t^2} = \sqrt{\frac{2}{5}}\left[\operatorname{Arctan} t\sqrt{\frac{2}{5}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{10}}.$$

5. Formule de Green-Riemann – Calcul d'aires planes

Théorème 7

Soit Δ une partie de $\mathbb{R}^2$ bordée par un arc fermé, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sans point double, et soit $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant Δ.

On a alors :

$$\int_{\delta^+\Delta} \omega = \int_{\delta^+\Delta} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $\delta^+\Delta$ désigne la frontière de Δ parcourue dans le sens direct du plan.

Application au calcul d'aires planes

Soit D l'image de Δ en coordonnées polaires.

1) $\mathscr{A}(\Delta) = \iint_{\Delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$

2) $\mathscr{A}(\Delta) = \int_{\delta^+\Delta} x\mathrm{d}y = -\int_{\delta^+\Delta} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\delta^+\Delta} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\delta^+D} r^2\mathrm{d}\theta.$

Exemple 13 Aire d'une arche de cycloïde

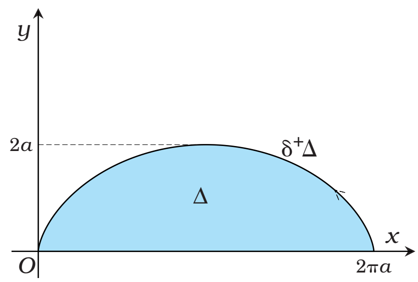
Δ est la partie du plan limitée par l'axe Ox et l'arc paramétré :

$$\gamma\ :\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x, y) = \big(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\big).$$

$$\mathscr{A}(\Delta) = -\int_{\delta^+\Delta} y\mathrm{d}x = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{A}(\Delta) = 3\,\pi\,a^2$$

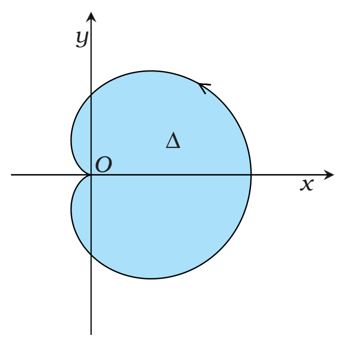
(noter que l'orientation de $\delta^+\Delta$ correspond à l'orientation de γ dans le sens des t décroissants).



Exemple 14 Aire limitée par la cardioïde d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$.

$$\mathscr{A}(\Delta) = \frac{1}{2}\int_{\delta^+D} r^2\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$\mathscr{A}(\Delta) = \frac{3\,\pi\,a^2}{2}.$$



D. Intégrale triple – Calcul de volumes

Cette section présente brièvement des outils utiles en sciences physiques, mais qui ne figurent pas au programme de mathématiques.

1. Brève extension

On considère une fonction réelle ou complexe f continue sur Δ, partie de $\mathbb{R}^3$, de l'un des types précisés dans la définition qui suit.

Définition 15

L'**intégrale triple** sur Δ de f notée $\displaystyle\int_\Delta f = \iiint_\Delta f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ est définie par :

a) Cas où Δ est un pavé : $\Delta = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^{a'} \left[\int_b^{b'} \left(\int_c^{c'} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

b) Cas où $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, u(x,y) \leqslant z \leqslant v(x,y),\ (x,y) \in D\}$, avec D compact simple de $\mathbb{R}^2$, u et v : $D \to \mathbb{R}$ continues.

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

c) Cas où $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y) \in D(z),\ a \leqslant z \leqslant b\}$, avec, pour tout $z \in [a,b]$, $D(z)$ compact simple de $\mathbb{R}^2$.

$$\iint_\Delta f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left[\iint_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z.$$

Définition 16

Le volume de Δ, noté $\mathcal{V}(\Delta)$, se calcule en choisissant $f = 1$

$$\mathcal{V}(\Delta) = \iiint_\Delta \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Remarques

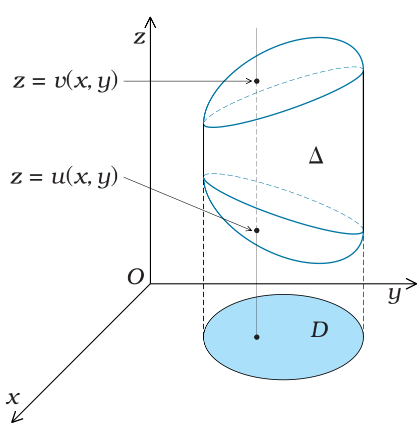
1) Dans a), on peut permuter l'ordre des intégrations et, si :

$$f(x,y,z) = \alpha(x)\,\beta(y)\,\gamma(z),$$

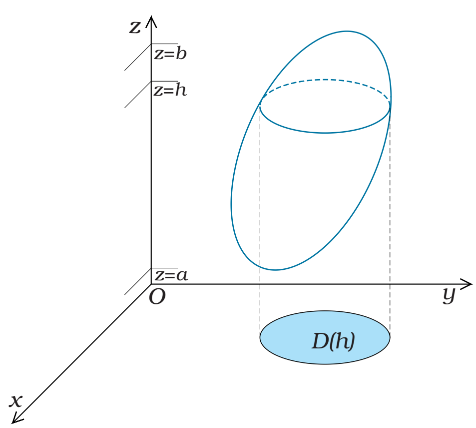
on a :

$$\iiint_\Delta \alpha(x)\,\beta(y)\,\gamma(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left[\int_a^{a'} \alpha(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_b^{b'} \beta(y)\mathrm{d}y\right]\left[\int_c^{c'} \gamma(z)\mathrm{d}z\right].$$

2) Le cas b) est appelé **sommation par piles**. Le cas c) est appelé **sommation par tranches**.



Sommation par piles



Sommation par tranches

Convention

Les parties de $\mathbb{R}^3$ sur lesquelles on définit une intégrale triple sont appelées les **compacts cubables** de $\mathbb{R}^3$.

Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés que pour l'intégrale double :

- linéarité par rapport à la fonction intégrée ;
- positivité, croissance ;
- additivité par rapport au compact d'intégration.

Exemple 15 Calculer $I = \iiint_\Delta \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où $\Delta\ : x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$.

Utilisons une sommation par piles avec $D : x^2+y^2 \leqslant a^2$.

$$I = \iint_D 2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D'} r^2\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

à l'aide des coordonnées polaires :

$$D'\ : 0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

on obtient : $I = \dfrac{8\pi}{15}a^5$, (moment d'inertie d'une boule par rapport à un de ses diamètres).

Exemple 16 Calculer $I = \iiint_\Delta z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où $\Delta\ :\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant 1.$

Utilisons une sommation par tranches avec $D(z)\ :\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant 1-\sqrt{z}.$

Notons que $D(z)$ se déduit de $D(0)$ par l'homothétie de centre $(0,0)$, de rapport $\left(1-\sqrt{z}\right)^2$, autrement dit :

$$\iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D(0)} (1-\sqrt{z})^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (1-\sqrt{z})^4\ \mathscr{A}\,(D(0)).$$

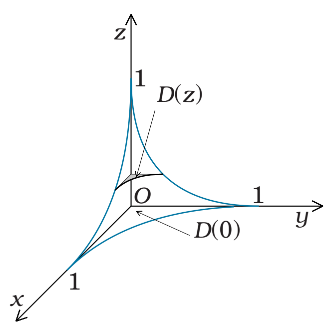
On a :

$$\mathscr{A}(D(0)) = \int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

d'où :

$$I = \int_0^1 z\left[\iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\int_0^1 z\left(1-\sqrt{z}\right)^4\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 t^3(1-t)^4\mathrm{d}t = \frac{1}{840}.$$



2. Changement de variables

2.1 – Formule du changement de variables dans les intégrales triples

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^3$, $\varphi\ :\ U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, D et Δ deux compacts cubables tels que $D \subset U,\ \ \Delta \subset V,\ \ \varphi(D) = \Delta$.

On suppose, de plus, que l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents dans D est de volume nul.

L'application $\varphi : D \to \Delta, (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ définit un changement de variables ;

le jacobien de φ :

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

induit une application continue de D dans $\mathbb{R}$.

Avec ces notations, pour $f \in \mathscr{C}(\Delta, \mathbb{K})$, on a la formule ✎

✎(55) Noter la présence de la valeur absolue du jacobien de φ.

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D f\Big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\Big)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\ \mathrm{d}w.$$ ✎

(55)

2.2 – Applications

a) Coordonnées cylindriques

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \mapsto (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Le jacobien de φ est $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = r$. La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

b) Coordonnées sphériques

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Le jacobien de φ est :

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi.$$

La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)r^2\,|\cos\varphi|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

d) Cas d'une application affine ✎(56)

✎(56) Cas particuliers
φ homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$:
$\mathscr{V}[\varphi(D)] = |\lambda|^3\mathscr{V}(D)$
φ homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$:
$\mathscr{V}[\varphi(D)] = |\lambda|^3\mathscr{V}(D)$
φ isométrie de $\mathbb{R}^3$:
$\mathscr{V}[\varphi(D)] = \mathscr{V}(D)$

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{bijection affine.}$$

Le jacobien de φ est $\det L(\varphi)$, où $L(\varphi)$ désigne la partie linéaire de φ, il est constant.

Si D est un compact cubable, $\varphi(D)$ l'est aussi, son volume est :

$$\mathscr{V}\Big[\ \varphi\,(D)\Big] = \mathscr{V}(D)\,|\det L(\varphi)|.$$

Exemple 17 Calculer $I = \iiint_\Delta z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où $\Delta \ : \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

Utilisons le changement de variables linéaire défini par :

$$x = aX \ , \ \ y = bY \ , \ \ z = cZ$$

$$D \ : X^2 + Y^2 + Z^2 \leqslant 1$$

$$I = \iiint_D abc^3 Z^2 \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z.$$

Puis on introduit les coordonnées sphériques :

$$D_1 \ : 0 \leqslant r \leqslant 1 \ , \ \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \ , \ \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$I = \iiint_{D_1} abc^3 r^4 \sin^2\varphi \cos\varphi \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\,\pi\,abc^3}{15}.$$

Exemple 18 Calculer :

$$I = \iiint_\Delta x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

où $(p, q, r, s) \in \mathbb{N}^4$ et $\Delta \ : \ x \geqslant 0, \, y \geqslant 0, \, z \geqslant 0, \, x + y + z \leqslant 1.$

Utilisons le changement de variables défini par :

$$x + y + z = u, \quad y + z = uv, \quad z = uvw.$$

L'image de Δ est $D = [0, 1]^3$, le jacobien est $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = u^2 v.$

$$I = \iiint_D u^{p+q+r+2} v^{q+r+1} w^r (1-u)^s (1-v)^p (1-w)^q \mathrm{d}u\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

$$I = \int_0^1 u^{p+q+r+2}(1-u)^s \mathrm{d}u \int_0^1 v^{q+r+1}(1-v)^p \mathrm{d}v \int_0^1 w^r(1-w)^q\,\mathrm{d}w.$$

Le calcul donne $\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^m \mathrm{d}t = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$ d'où $I = \dfrac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)!}$.

Remarque

On en déduit le volume du tétraèdre Δ, $(p = q = r = s = 0) \ : \ \mathcal{V}(\Delta) = \dfrac{1}{6}$.

Exemple 19 Volume de la partie du cylindre $x^2 + y^2 - ax \leqslant 0$ intérieure à la sphère de centre O et de rayon a.

Utilisons les coordonnées cylindriques. L'image réciproque de Δ est :

$$D : -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant a\cos\theta, \quad |z| \leqslant \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$\mathcal{V}(\Delta) = \iiint_D r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{a\cos\theta} 2r\sqrt{a^2 - r^2}\mathrm{d}r\right] \mathrm{d}\theta$$

$$\mathcal{V}(\Delta) = \frac{2a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left|\sin^3\theta\right|\right) \mathrm{d}\theta$$

$$\mathcal{V}(\Delta) = \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Index

D

E

Notations usuelles

$\mathbb{K}$	corps des réels ou des complexes
$\mathcal{B}(I, E)$	espace des applications bornées de I de E
$\mathcal{D}(I, E)$	espace des applications dérivables de I dans E
$\mathcal{C}(I, E)$	espace des applications continues de I dans E
$\mathcal{F}(I, E)$	espace des applications de I dans E
$\mathcal{D}^n(I, E)$	espace des applications n fois dérivables de I dans E
$\mathcal{C}^n(I, E)$	espace des applications n fois continûment dérivables de I dans E
$\mathcal{C}^\infty(I, E)$	espace des applications indéfiniment dérivables de I dans E
$\mathcal{M}(I, E)$	espace des applications continues par morceaux de I dans E
$\mathcal{M}^p(I, E)$	espace des applications de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux de I dans E
$\mathcal{E}(I, E)$	espace des applications en escalier de I dans E
$\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$	espace des applications affines par morceaux de I dans $\mathbb{R}$
$L_1(I, \mathbb{K})$	espace des fonctions intégrables sur I
$L_2(I, \mathbb{K})$	espace des fonctions de carré intégrable sur I
$\mathcal{L}(E, F)$	espace des applications linéaires de E dans F
$\mathcal{L}(E)$	espace des endomorphismes de E
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	espace des matrices carrées d'ordre n à éléments dans $\mathbb{K}$
$\Omega^k(U)$	espace des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ sur U
$\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(x_n\right)_{\mathbb{N}}$	suite de terme général x_n
$\sum x_n$	série de terme général x_n
$\sum a_n x^n$	série entière de terme général $x \mapsto a_n x^n$
$f(x+0)$ ou $f\left(x^+\right)$	limite à droite de f en x
$f(x-0)$ ou $f\left(x^-\right)$	limite à gauche de f en x
$J_f(a)$	matrice jacobienne de f en a
df_a	différentielle de f en a
$\mathrm{grad}\, f(a)$	gradient de f en a
$\mathcal{B}_o(a, r)$	boule ouverte de centre a et de rayon r
$\mathcal{B}_f(a, r)$	boule fermée de centre a et de rayon r
$\mathcal{S}(a, r)$	sphère de centre a et de rayon r
$\delta(A)$	diamètre de la partie A
$\lVert\!\vert \cdot \rVert\!\vert$	norme d'une application linéaire continue
$\lVert \cdot \rVert_\infty$ ou $\lVert \cdot \rVert_\infty^I$	norme de la convergence uniforme sur I