DEUG SCIENCES
2[E] ANNÉE

200 EXERCICES
ET PROBLÈMES CORRIGÉS
RAPPELS DE COURS

Analyse

G. A. Sedogbo

BELIN SUP
Sciences

Analyse
DEUG Sciences 2e année

G. A. Sedogbo
Docteur en mathématiques

BELIN 8, RUE FÉROU 75278 PARIS CEDEX 06
http://www.editions-belin.com

Avant-Propos

Cet ouvrage s'adresse en premier lieu aux étudiants de deuxième année de DEUG sciences. Il comporte de très nombreux exercices de difficulté progressive qui permettent la compréhension et la maîtrise des notions.

Notre objectif a été d'amener l'étudiant à trouver par lui-même les solutions des exercices. Pour cela, chaque chapitre est divisé en trois parties :
— les éléments de cours ;
— la liste des exercices ;
— des indications sur la démarche à adopter, suivies des solutions détaillées.
Chaque chapitre comprend deux types d'exercices : les premiers sont une application immédiate du cours et les seconds constituent un approfondissement et une synthèse.
Les erreurs à éviter sont clairement signalées.

Notre souhait est que l'étudiant se sente guidé dans son travail et qu'il étudie longuement chaque question. C'est la raison pour laquelle je lui recommande de limiter le recours à la solution afin de lui permettre de continuer seul la réflexion.

G. A. Sedogbo

L'éditeur remercie Catherine Schmidt pour sa participation à cet ouvrage.

ISSN 1158-3762 ISBN 2-7011-2570-7

Sommaire

1. ESPACES VECTORIELS NORMÉS 7
Éléments de cours 8
Énoncés des exercices 12
• Application immédiate
– *Normes et suites* 12
– *Fonctions vectorielles* 13
• Approfondissement et synthèse 14
Indications et solutions 16

2. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES 37
Éléments de cours 38
Énoncés des exercices 43
• Application immédiate
– *Limites, continuité, différentiabilité* 43
– *Généralités* 45
– *Difféomorphismes* 47
• Approfondissement et synthèse 47
Indications et solutions 49

3. SÉRIES NUMÉRIQUES 79
Éléments de cours 80
Énoncés des exercices 83
• Application immédiate

– *Nature de séries particulières* 83
– *Généralités* 83
• Approfondissement et synthèse 85
Indications et solutions 89

4. Intégrales généralisées 121
Éléments de cours 122
Énoncés des exercices 125
• Application immédiate
– *Nature d'intégrales* 125
– *Nature d'intégrales suivant des paramètres* 126
– *Intégrales et séries* 127
• Approfondissement et synthèse 128
Indications et solutions 130

5. Suites et séries de fonctions 165
Éléments de cours 166
Énoncés des exercices 169
• Application immédiate
– *Convergence uniforme* 169
– *Permutation des symboles lim et* $\int$ 170
– *Généralités sur les suites de fonctions* 170
– *Séries de fonctions* 171
• Approfondissement et synthèse 172
Indications et solutions 175

6. Séries entières et trigonométriques 203
Éléments de cours 204
Énoncés des exercices 209
• Application immédiate
– *Rayons de convergence et sommes* 209

– *Séries et équations différentielles* 210
– *Développements en séries entières* 211
– *Séries de Fourier* 211
• Approfondissement et synthèse 212
Indications et solutions 214

7. INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE 239
Éléments de cours 240
Énoncés des exercices 243
• Application immédiate
– *Intégrales définies sur un compact* 243
– *Intégrales généralisées* 243
• Approfondissement et synthèse 244
Indications et solutions 246

1

Espaces vectoriels normés

Éléments de cours

Tous les espaces vectoriels sont relatifs au corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Norme

Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant :

(i) $\forall\ u \in E, \quad N(u) = 0 \ \Leftrightarrow\ u = 0$;

(ii) $\forall\ \lambda \in K, \quad \forall\ u \in E, \ N(\lambda u) = |\lambda|\ N(u)$;

(iii) $\forall\ (u, v) \in E^2, \quad N(u+v) \leqslant N(u) + N(v)$.

Notation

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note :

$$N(u) = \|u\|.$$

Remarque

La propriété (iii) est appelée inégalité triangulaire.

exemple

En posant, pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$,

on définit une norme, appelée norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Espace vectoriel normé

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Normes équivalentes

Soient E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes définies sur E.

On dit que N_1 et N_2 sont des normes équivalentes si :

$\exists\ \alpha > 0, \quad \exists\ \beta > 0 \ /\ \forall\ u \in E, \quad \alpha N_1(u) \leqslant N_2(u) \leqslant \beta N_1(u)$.

On note : $N_1 \sim N_2$.

exemple

Les normes usuelles définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$\forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \|X\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad$ et $\quad \|X\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$

sont équivalentes.

Boule

Soient E un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$.
On appelle boule de centre a et de rayon r le sous-ensemble de E défini par :

$$B(a\,;r) = \{u \in E \,/\, \|u-a\| < r\}.$$

Partie bornée

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.
On dit que A est bornée si :

$$\exists\, M \geqslant 0 \,/\, \forall\, u \in A, \quad \|u\| \leqslant M.$$

Voisinage

Soient E un espace vectoriel normé et a un élément de E.
On dit qu'une partie V de E est un voisinage de a si :

$$\exists\, r > 0 \,/\quad B(a\,;r) \subset V.$$

Théorème 1

Soient E un espace vectoriel normé et a un élément de E.
(i) La réunion d'une famille (<u>même infinie</u>) de voisinages de a est un voisinage de a.
(ii) L'intersection d'une <u>famille finie</u> de voisinages de a est un voisinage de a.

Ouvert

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.
On dit que A est une partie ouverte si A est un voisinage de chacun de ses points.
C'est-à-dire : $\forall\, a \in A, \quad \exists\, r > 0 \,/\, B(a\,;r) \subset A.$

Fermé

Soit E un espace vectoriel normé.
On appelle partie fermée de E, le complémentaire d'une partie ouverte de E.

Intérieur

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.
On dit qu'un élément a de E est intérieur à A si A est un voisinage de a.
L'ensemble des éléments intérieurs à A est noté $\mathring{A}$.
Autrement dit : $a \in \mathring{A} \iff \exists\, r > 0 \,/\, B(a\,;r) \subset A.$

Remarque

$$\mathring{A} \subset A.$$

Adhérence

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

On dit qu'un élément a de E est adhérent à A si tout voisinage de a rencontre A ; c'est-à-dire :

$$\forall\ r > 0, \qquad B(a\ ;\ r) \cap A \neq \varnothing.$$

L'ensemble des éléments adhérents à A est noté $\overline{A}$.

Remarque

$$A \subset \overline{A}.$$

Recouvrement

Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et I une partie de $\mathbb{N}$.
On appelle recouvrement de A toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que :

$$A \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

On dit que le recouvrement est <u>fini</u> lorsque I est un ensemble fini.
Le recouvrement est dit <u>ouvert</u> lorsque, pour tout $i \in I$, A_i est un ouvert de E.

Partie compacte

Soit E un espace vectoriel normé.
On dit qu'une partie A de E est compacte si, de tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un recouvrement fini.

Théorème 2

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie de E.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) A est une partie compacte ;
(ii) A est fermée et bornée.

Remarque
Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles fermés et bornés.

Suite

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle suite de E toute application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans E.

Convergence, divergence

Soit (u_n) une suite d'un espace vectoriel normé E.
On dit que la suite (u_n) converge vers un élément ℓ de E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_0, \qquad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

C'est-à-dire : la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)$ converge vers 0.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

On appelle suite divergente toute suite qui ne converge pas.

Suite de Cauchy

Soit E un espace vectoriel normé.
On dit qu'une suite (u_n) de E est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall p \geqslant n_0, \quad \forall q \geqslant n_0, \quad \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 3

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Remarque
La réciproque du théorème 3 est vraie pour $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$.

Théorème 4

Soit E un espace vectoriel normé.
L'ensemble des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de E.

Application vectorielle

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie de E. On appelle application vectorielle, toute application de A vers F.

Continuité, continuité uniforme

Soient E et F deux espaces vectoriels normés respectivement par les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.
On considère l'application $f : A \subset E \to F$ et un élément a de A.

On dit que f est continue en a si :
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha_{a,\varepsilon} > 0 \,/\, \forall u \in A, \quad \|u - a\|_1 \leqslant \alpha \;\Rightarrow\; \|f(u) - f(a)\|_2 \leqslant \varepsilon.$
On dit que f est uniformément continue sur A si :
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 \,/\, \forall (u, v) \in A^2, \quad \|u - v\|_1 \leqslant \alpha \;\Rightarrow\; \|f(u) - f(v)\|_2 \leqslant \varepsilon.$

Application bornée

Soient E et F deux espaces vectoriels normés respectivement par les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.
On considère l'application $f : A \subset E \to F$.
On dit que f est bornée sur A si :

$$\exists\, M \geqslant 0 \,/\, \forall\, u \in A, \quad \|f(u)\|_2 \leqslant M.$$

Théorème 5

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie compacte de E.
Toute application continue de A dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercices

APPLICATION IMMÉDIATE

Normes et suites

1.1 Soient E un espace vectoriel et N une norme définie sur E.

Montrer que : $\forall (u, v) \in E^2, \quad |N(u) - N(v)| \leqslant N(u - v)$.

1.2 Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes définies sur E.

Montrer que la notion de normes équivalentes définit bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{N}$.

1.3 Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$\forall u \in E, \quad \exists! (u_1, \dots, u_n) \in K^n \,/\, u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$.

On considère :

$$N_1 : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ u \mapsto \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i| \end{array} \qquad N_2 : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ u \mapsto \sum_{i=1}^{n} |u_i| \end{array} \qquad N_3 : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ u \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}. \end{array}$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes équivalentes de E.
2. Montrer que les normes N_1, N_2 et N_3 sont équivalentes.

1.4 Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $I = [0 ; 1]$.

Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}\ .$$

Montrer que N est une norme sur E.

1.5 Soient n un entier non nul et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leqslant n$. Pour tout $P \in E$, on pose :

$$N_1(P) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left| \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \right|.$$

Si $\quad P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad$ on pose :

$$N_2(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \quad \text{et} \quad N_3(P) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i^2}\ .$$

Montrer que N_1, N_2 et N_3 définissent trois normes équivalentes de E.

1.6 Soient E un espace vectoriel réel normé et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications bornées de I dans E et on définit sur $\mathcal{F}$ l'application N par : $\forall f \in \mathcal{F}, \quad N(f) = \sup_{t \in I} \|f(t)\|.$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{F}$.

1.7 Soit $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Si $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}$, on pose :

$$\|M\|_1 = \max_{i,j} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|M\|_2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathcal{M}$.

2. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}^2$. Montrer que :

a. $\|MN\|_1 \leqslant n \, \|M\|_1 \, \|N\|_1$;

b. $\|MN\|_2 \leqslant n^3 \, \|M\|_2 \, \|N\|_2$.

1.8 Soient E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes équivalentes de E.

Montrer que toute suite convergeant pour l'une des normes converge également pour l'autre et que la limite est la même.

1.9 Soit E un espace vectoriel normé.

On considère (u_n) et (v_n) deux suites de E et (λ_n) une suite de K.

1. Montrer que : si (u_n) converge vers ℓ, alors $\lim_{n \to +\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$.

2. Montrer que si (u_n) converge, alors (u_n) est bornée.

3. On suppose que (λ_n) converge vers 0 et que la suite (u_n) est bornée.
Que peut-on dire de $(\lambda_n u_n)$?

4. On suppose que la suite (λ_n) converge vers λ et que la suite (u_n) converge vers ℓ.
Que peut-on dire de la suite $(\lambda_n u_n)$?

Fonctions vectorielles

1.10 Soient A un ensemble et E un espace vectoriel normé de dimension n.

On considère $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une application de A dans E.

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bornée ;

(ii) $\forall\, i \in [1\,;n]$, f_i est bornée.

1.11 **1.** Soients $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(F, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés, et f une application linéaire de E vers F.

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) f est continue ;

(*ii*) $\exists\, M \geqslant 0 \,/\, \forall\, u \in E, \quad \|f(u)\|_2 \leqslant M\|u\|_1$.

2. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 telles que les applications

$$\begin{array}{ll} \varphi : (E, N_1) \to (E, N_2) & \quad \text{et} \quad \psi : (E, N_2) \to (E, N_1) \\ \quad u \mapsto u & \quad\quad\quad\quad\quad u \mapsto u \end{array} \quad \text{soient continues.}$$

On suppose que $E \neq \{0\}$.

Que peut-on dire des normes N_1 et N_2 ?

1.12 Soient E et F deux espaces vectoriels normés tels que E soit de dimension finie.
Montrer que toute application linéaire de E vers F est continue.

1.13 **1.** Soient $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(F, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés.
Une application f de E vers F est dite lipschitzienne si :

$$\exists\, k \geqslant 0 \,/\, \forall\, (u, v) \in E^2, \quad \|f(u) - f(v)\|_2 \leqslant k\, \|u - v\|_1.$$

Montrer que toute application lipschitzienne est uniformément continue.

2. Montrer que toute norme sur un espace vectoriel E est une application uniformément continue de E sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.
On définit sur E l'application d par :

$$\forall\, x \in E, \quad d(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Montrer que d est uniformément continue sur E.

APPROFONDISSEMENT ET SYNTHÈSE

1.14 Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $I = [0\,;\,1]$.
Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N_1(f) = \sup_{t \in I} |f(t)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.

2. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

1.15 **1.** Soit E un espace vectoriel réel normé.

a. Montrer que l'application N de $\mathbb{R} \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :
$\forall\, (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E, \quad N(\lambda, u) = |\lambda| + \|u\|$ est une norme.

b. On considère l'application f de $\mathbb{R} \times E$, ainsi normé, dans E définie par :

$$f(\lambda, u) = \lambda u.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \times E$.

2. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1.16 Soient E un espace vectoriel réel normé, et $L(E)$ l'espace vectoriel réel des applications linéaires continues de E.

On pose : $B = \{x \in E \,/\, \|x\| \leqslant 1\}$ et pour tout $u \in L(E)$, $N(\text{u}) = \sup_{x \in B} \|u(x)\|$.

1. Soit u un endomorphisme de E.

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est nul ;

(ii) u est nul sur B.

2. Montrer que N est une norme.

3. Montrer que : $\forall\, u \in L(E)$, $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant N(u)\ \|x\|$.

4. Soit $(u, v) \in L(E) \times L(E)$.

Montrer que : $N\,(u \text{ o } v) \leqslant N(u)\, N(v)$.

1.17 Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et $I = [a\,;\,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

On désigne par $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E et on considère une application $f = \sum_{i=1}^{n} f_i\, u_i$ de I dans E telle que :

$$\forall\, i \in [1\,;\,n], \quad f_i \text{ est continue.}$$

1. Montrer que l'on peut définir l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t\right) u_i\,.$$

2. Montrer que :

$$\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

1.18 Soient E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes définies sur E.

On désigne par O_1 (resp. O_2) l'ensemble des ouverts de E pour N_1 (resp. N_2).

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) N_1 et N_2 sont équivalentes ;

(ii) $O_1 = O_2$.

1.19 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que deux normes quelconques définies sur E sont équivalentes.

1.20 Soient $E_1, \ldots, E_n$ n espaces vectoriels normés de dimensions finies, et $E = E_1 \times \ldots \times E_n$.

On note N_i la norme sur E_i et on pose :

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in E, \quad \|x\|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} N_i\,(x_i), \quad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} N_i\,(x_i).$$

Montrer que l'on définit ainsi deux normes équivalentes sur E.

indications et solutions

1.1

indications

• *Noter qu'il revient au même de démontrer que :*
$\forall (u, v) \in E^2, \quad -N(u-v) \leqslant N(u) - N(v) \leqslant N(u-v).$
• *Appliquer l'inégalité triangulaire.*

solution

La propriété à démontrer équivaut à :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad -N(u-v) \leqslant N(u) - N(v) \leqslant N(u-v).$$

Comme : $\quad u = v + (u - v), \quad$ on a :

$$N(u) \leqslant N(v) + N(u-v).$$

Ainsi : $\quad N(u) - N(v) \leqslant N(u-v).$

De même : $\quad N(v) - N(u) \leqslant N(u-v).$

En résumé :

$$\boldsymbol{\forall (u, v) \in E^2, \quad \left|N(u) - N(v)\right| \leqslant N(u-v).}$$

1.2

indication

Considérer la relation binaire R définie sur $\mathcal{N}$ *par :*
$\forall (N_1, N_2) \in \mathcal{N}^2, \quad N_1 \, R \, N_2 \iff N_1$ *et* N_2 *sont équivalentes.*

solution

• Soit R la relation binaire définie sur $\mathcal{N}$ par :

$$\forall (N_1, N_2) \in \mathcal{N}^2, \quad N_1 \, R \, N_2 \iff N_1 \sim N_2.$$

Montrons que R est réflexive, symétrique et transitive.

• Soit $\quad N \in \mathcal{N}$

$$\forall\, u \in E, \quad N(u) \leqslant N(u) \leqslant N(u).$$

Ainsi : $\quad N \, R \, N.$

D'où R est réflexive.

• Soit $\quad (N_1, N_2) \in \mathcal{N}^2.$

Supposons : $\quad N_1 \, R \, N_2, \quad$ c'est-à-dire : $\quad N_1 \sim N_2.$

On a : $\qquad \exists\, \alpha > 0, \quad \exists\, \beta > 0 \,/\, \forall\, u \in E, \quad \alpha N_1(u) \leqslant N_2(u) \leqslant \beta N_1(u).$

On en déduit : $\quad \dfrac{1}{\beta} N_2(u) \leqslant N_1(u) \leqslant \dfrac{1}{\alpha} N_2(u).$

Ce qui montre que : $N_2 \sim N_1$; c'est-à-dire : $N_2 \; R \; N_1$.
Ainsi R est symétrique.

• Soit $(N_1, N_2, N_3) \in \mathcal{N}^3$.

Supposons : $N_1 \; R \; N_2$ et $N_2 \; R \; N_3$.

On a :

(1) $\exists\, \alpha > 0, \quad \exists\, \beta > 0 \,/\, \forall\, u \in E, \quad \alpha N_1(u) \leqslant N_2(u) \leqslant \beta N_1(u)$;

(2) $\exists\, \gamma > 0, \quad \exists\, \lambda > 0 \,/\, \forall\, u \in E, \quad \gamma N_2(u) \leqslant N_3(u) \leqslant \lambda N_2(u)$.

La proposition (1) équivaut à :

(3) $\alpha\gamma N_1(u) \leqslant \gamma N_2(u)$ et $\lambda N_2(u) \leqslant \lambda\beta N_1(u)$.

La combinaison de (2) et (3) donne :

$$\forall\, u \in E, \quad \alpha\gamma N_1(u) \leqslant N_3(u) \leqslant \lambda\beta N_1(u).$$

Ainsi : $N_1 \sim N_3$; c'est-à-dire : $N_1 \; R \; N_3$.

D'où R est transitive.

En résumé :

la notion d'équivalence de deux normes définit bien une relation d'équivalence.

1.3

indications

1. Noter que : $\forall\, u \in E, \quad |u_i| \leqslant N_2(u)$.

2. Montrer que $N_1 \sim N_3$.

Pour cela, remarquer que : $\forall\, u \in E, \; |u_i| \leqslant N_3(u)$.

En déduire $N_2 \sim N_3$ *en appliquant le résultat de l'exercice 1.2.*

solution

1. • – Soit $u \in E$.

$N_1(u) = 0 \;\Leftrightarrow\; \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i| = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in [1\,;\,n], \quad u_i = 0.$

Ainsi :

$$N_1(u) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = 0.$$

– $\forall\, \lambda \in K, \quad \forall\, u \in E, \quad N_1(\lambda u) = |\lambda| \, N_1(u)$.

– Soit $(u, v) \in E^2$.

$\exists!\, (u_1, \ldots, u_n) \in K^n, \quad \exists!\, (v_1, \ldots, v_n) \in K^n \,/\, u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i e_i$ et $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i e_i$.

On a : $\forall\, i \in [1\,;\,n], \quad |u_i + v_i| \leqslant |u_i| + |v_i|$.

On en déduit : $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i + v_i| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i| + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$.

Ce qui montre que : $N_1(u + v) \leqslant N_1(u) + N_1(v)$.

En résumé :

$$\boldsymbol{N_1} \textbf{ est une norme.}$$

• – Soit $u \in E$.

$$N_2(u) = 0 \iff \forall\, i \in [1\,;n], \quad |u_i| = 0.$$

Ainsi : $N_2(u) = 0 \iff u = 0$.

– $\forall\, \lambda \in K, \quad \forall\, u \in E, \quad N(\lambda u) = |\lambda|\, N(u)$.

– Soit $(u, v) \in E^2$.

$\exists!\, (u_1, \ldots, u_n) \in K^n, \quad \exists!\, (v_1, \ldots, v_n) \in K^n \,/\, u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \quad$ et $\quad v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$.

On a : $N_2(u+v) = \sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i| \leqslant N_2(u) + N_2(v)$.

En résumé :

N_2 est une norme.

• Montrons que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Soit $u \in E$. $\quad \exists!\, (u_1, \ldots, u_n) \in K^n \,/\, u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$.

On a : $\forall\, i \in [1\,;n], \quad |u_i| \leqslant N_1(u)$.

On en déduit : $N_2(u) \leqslant n\, N_1(u)$.

Par ailleurs : $\forall\, i \in [1\,;n], \quad |u_i| \leqslant N_2(u)$.

Ainsi : $N_1(u) \leqslant N_2(u)$.

En résumé :

N_1 et N_2 sont des normes équivalentes.

2. Montrons que $N_1 \sim N_3$.

On a : $\forall\, u \in E, \quad \exists!\, (u_1, \ldots, u_n) \in K^n \,/\, u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$.

On obtient : $\forall\, u \in E, \quad |u_i| \leqslant N_1(u)$.

Ainsi : $\forall\, u \in E, \quad N_3(u) \leqslant \sqrt{n}\, N_1(u)$.

Par ailleurs : $\forall\, u \in E, \; |u_i| \leqslant N_3(u)$.

Ainsi : $\forall\, u \in E, N_1(u) \leqslant N_3(u)$.

D'où N_1 et N_3 sont équivalentes.

En résumé : $N_1 \sim N_2$ et $N_1 \sim N_3$.

D'après le résultat de l'exercice 1.2 : $N_2 \sim N_3$.

Conclusion :

les normes N_1, N_2 et N_3 sont équivalentes.

1.4

indications

• *Noter que : si f est une fonction continue et positive sur* $[0\,;1]$, *alors* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$.

• *Montrer que :* $\forall\, (f, g) \in E^2, \quad \left| \int_0^1 f(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t}$.

solution

• $\forall f \in E, \quad N(f) = 0 \iff \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0 \iff f^2 = 0 \iff f = 0.$

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in E, \quad N(\lambda f) = |\lambda|\, N(f).$

• Soit $(f, g) \in E^2$.

Considérons le trinôme suivant en λ pour $f \neq 0$:

$P(\lambda) = \int_0^1 (\lambda f(t) + g(t))^2\,\mathrm{d}t = \lambda^2 \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\lambda \int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$.

On a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geqslant 0.$

On en déduit que le discriminant du trinôme est négatif ou nul.

Par conséquent :

$$\left(\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette inégalité reste vraie pour $f = 0$.

Ainsi : (1) $\quad \forall (f, g) \in E^2, \left|\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t}$.

Par ailleurs :

$$N(f+g) = \sqrt{\int_0^1 (f^2(t) + 2f(t)\,g(t) + g^2(t))\,\mathrm{d}t}\ .$$

Or d'après (1) :

$$\int_0^1 (f^2(t) + 2\,f(t)\,g(t) + g^2(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t} + \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t}\right)^2 .$$

Donc :

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

Conclusion :

N est une norme.

1.5

indications

• *Montrer que N_1 est une norme.*

Pour cela, noter qu'un polynôme de degré n a au plus n racines.

• *Observer que :* $\quad \forall k \in [0\,;n], \quad P^{(k)}(0) = k!\,a_k.$

• *Appliquer les résultats de l'exercice 1.3 pour établir l'équivalence des normes.*

solution

• Montrons que N_1 est une norme.

– Soit $\quad P \in E.$

$$N_1(P) = 0 \iff \forall k \in [0\,;n], \quad P^{(k)}(0) = 0.$$

On en déduit : P a $n+1$ racines.
D'où : $P = 0$.
– $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall P \in E, \quad N_1(\lambda P) = |\lambda|\, N_1(P)$.
– Soit $(P, Q) \in E^2$.

$$N_1(P+Q) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left| \frac{P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)}{k!} \right| \leqslant N_1(P) + N_1(Q).$$

En résumé :

N_1 est une norme.

• E est un espace vectoriel de dimension $n+1$.
Considérons $(1, x, \ldots, x^n)$ la base canonique de E.

Tout élément $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de E a comme coordonnées : $(a_0, \ldots, a_n)$ dans cette base.

Par ailleurs : $\forall k \in [0\,;\,n], \quad \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = a_k$.

• D'après l'exercice 1.3, on peut conclure :

N_1, N_2 et N_3 sont des normes équivalentes sur E.

1.6

indication

Se servir des propriétés de la norme $\|\cdot\|$ sur E.

solution

• Soit $f \in \mathcal{F}$.

$$N(f) = 0 \iff \forall t \in I, \quad \|f(t)\| = 0.$$

Or $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
Donc :

$$N(f) = 0 \iff \forall t \in I, \quad f(t) = 0.$$

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}$.

$$N(\lambda f) = \sup_{t \in I} \|\lambda f(t)\|.$$

Or : $\|\lambda f(t)\| = |\lambda|\, \|f(t)\|$ car $\|\cdot\|$ est une norme.
Donc :

$$N(\lambda f) = |\lambda|\, N(f).$$

• Soit $(f, g) \in \mathcal{F}^2$.

$$N(f+g) = \sup_{t \in I} \|f(t) + g(t)\|.$$

Or : $\|f(t) + g(t)\| \leqslant \|f(t)\| + \|g(t)\|$

car $\|\cdot\|$ est une norme.

Donc : $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$.

En résumé :

N est une norme sur $\mathcal{F}$.

1.7

Indication

2. Noter que si $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$, alors

$MN = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

solution

1. • Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}$.

$\|M\|_1 = 0 \iff \forall i \in [1\,;n], \quad \forall j \in [1\,;n], \quad a_{ij} = 0.$

$\|M\|_2 = 0 \iff \forall i \in [1\,;n], \quad \forall j \in [1\,;n], \quad a_{ij} = 0.$

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall M \in \mathcal{M}, \quad \|\lambda M\|_1 = |\lambda|\,\|M\|_1$ et $\|\lambda M\|_2 = |\lambda|\,\|M\|_2$.

• Soit $(M, N) \in \mathcal{M}^2$.

Supposons : $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$.

$\|M+N\|_1 = \max_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \leqslant \|M\|_1 + \|N\|_1.$

$\|M+N\|_2 = \sum_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \leqslant \|M\|_2 + \|N\|_2.$

Conclusion :

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes.

2. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}^2$.

Supposons : $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$.

On a : $MN = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

a. On obtient : $\|MN\|_1 = \max |c_{ij}|$.

Or : $|a_{ik}| \leqslant \|M\|_1$ et $|b_{kj}| \leqslant \|N\|_1$.

Donc : $|c_{ij}| \leqslant n \|M\|_1 \, \|N\|_1$.

D'où :

$$\boldsymbol{\|MN\|_1 \leqslant n\ \|M\|_1\ \|N\|_1}.$$

b. $\|MN\|_2 = \sum |c_{ij}|$.

Or : $|a_{ik}| \leqslant \|M\|_2$ et $|b_{kj}| \leqslant \|N\|_2$.

Donc : $|c_{ij}| \leqslant n \ \|M\|_2 \ \|N\|_2$.

On en déduit : $\|MN\|_2 \leqslant \sum n \|M\|_2 \ \|N\|_2$.

Comme il y a n^2 termes dans la sommation, on obtient :

$$\boldsymbol{\|MN\|_2 \leqslant n^3 \|M\|_2 \ \|N\|_2.}$$

1.8

Indication

Noter qu'il revient au même de démontrer que pour toute suite (u_n) *de* E *:*

$\lim\limits_{n \to +\infty} N_1(u_n) = 0 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} N_2(u_n) = 0.$

solution

Soit (u_n) une suite de E.

D'après la définition, la suite (u_n) converge vers $\ell \in E$ si :

$$\lim_{n \to +\infty} N_1(u_n - \ell) = 0.$$

Il revient alors au même de montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} N_1(u_n) = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} N_2(u_n) = 0.$$

Comme N_1 et N_2 sont des normes équivalentes, on a :

(1) $\exists\, \alpha > 0, \quad \exists\, \beta > 0 \,/\, \forall x \in E, \quad \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x).$

Supposons : $\lim\limits_{n \to +\infty} N_1(u_n) = 0.$

Cela équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0, \quad N_1(u_n) \leqslant \alpha\varepsilon.$$

On en déduit, d'après (1) :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad N_2(u_n) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} N_2(u_n) = 0.$

Le même raisonnement donne :

$$\lim_{n \to +\infty} N_2(u_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} N_1(u_n) = 0.$$

Conclusion :

si deux normes sont équivalentes, alors toute suite convergeant pour l'une converge également pour l'autre vers la même limite.

1.9

Indications

1. Appliquer le résultat de l'exercice 1.1.
*2. Appliquer le résultat de la question **1**.*
3. Noter qu'une suite (u_n) est bornée si :
$\exists\, M \geqslant 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n \geqslant n_0, \quad \|u_n\| \leqslant M.$
4. Poser : $\quad \alpha_n = \lambda_n - \lambda \quad$ *et* $\quad v_n = u_n - \ell.$
Remarquer que : $\quad \lambda_n u_n = \lambda\ell + \lambda v_n + \alpha_n u_n.$
*Appliquer le théorème **4**.*

solution

1. D'après le résultat de l'exercice 1.1, on a :
$$\forall\, n \geqslant 0, \qquad \big|\, \|u_n\| - \|\ell\| \,\big| \leqslant \|u_n - \ell\|.$$
Or : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - \ell\| = 0.$
Donc : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n\| = \|\ell\|.$
D'où :
$$\textbf{si } (u_n) \textbf{ converge vers } \ell\textbf{, alors } \lim_{n \to +\infty} \|u_n\| = \|\ell\|.$$

2. Soit (u_n) une suite de E convergeant vers ℓ.
D'après la question **1** : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$;
c'est-à-dire : $\quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n \geqslant n_0, \quad \big|\, \|u_n\| - \|\ell\| \,\big| \leqslant \varepsilon.$
On en déduit : $\quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \|u_n\| \leqslant \|\ell\| + \varepsilon$;
ce qui montre que la suite (u_n) est bornée.
Conclusion :

toute suite convergente est bornée.

3. Montrons que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge vers 0.
Puisque la suite (u_n) est bornée, on a :
$$\exists\, M \geqslant 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n \geqslant n_0, \quad \|u_n\| \leqslant M.$$
On en déduit : $\quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad \|\lambda_n u_n\| \leqslant M\,|\lambda_n|.$
Par ailleurs, la suite (λ_n) converge vers 0.
Il en résulte que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge vers 0.
Conclusion :

si (λ_n) converge vers 0 et si (u_n) est bornée, alors $(\lambda_n u_n)$ converge vers 0.

4. Posons : $\forall\, n \geqslant 0, \quad \alpha_n = \lambda_n - \lambda \quad$ et $\quad v_n = u_n - \ell$.

On obtient : $\lambda_n u_n = \lambda\ell + \lambda v_n + \alpha_n u_n$.

• Par hypothèse : la suite (v_n) converge vers 0.

On en déduit (théorème **4**) que la suite (λv_n) converge vers 0.

• Le résultat de la question **2** donne : la suite (u_n) est bornée.

Comme (α_n) converge vers 0, en en déduit (question **3**) : $(\alpha_n u_n)$ converge vers 0.

D'où $(\lambda_n u_n)$ converge vers $\lambda\ell$.

Conclusion :

si (λ_n) converge vers λ et (u_n) vers ℓ, alors $(\lambda_n u_n)$ converge vers $\lambda\ell$.

1.10

Indication

Noter que E peut être muni d'une des normes définies à l'exercice 1.3.

solution

Comme E est de dimension finie, E peut être muni d'une des trois normes définies à l'exercice 1.3.

Supposons que f soit bornée, c'est-à-dire :

$$\exists\, M \geqslant 0 \,/\, \forall\, x \in A, \qquad \|f(x)\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i(x)| \leqslant M.$$

Ceci équivaut à :

$$\forall\, i \in [1\,;\,n], \qquad \exists\, M_i \geqslant 0 \,/\, \forall\, x \in A, \qquad |f_i(x)| \leqslant M_i.$$

Conclusion :

$f = (f_1, \ldots, f_n)$ est bornée si, et seulement si, pour tout $i \in [1\,;\,n]$, f_i est bornée.

1.11

Indications

1. *• Remarquer qu'une application linéaire de E vers F est continue si, et seulement si, elle est continue en* 0.

• Supposer (ii) et montrer que f est continue en 0.

• Supposer (i) : f est continue en 0.

En déduire : $\exists\, M > 0 \,/\, \forall\, t \in E, \qquad \|t\|_1 \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \|f(t)\|_2 \leqslant M.$

Poser : $t = \dfrac{u}{\|u\|_1}$ *pour* $u \in E - \{0\}$.

Conclure.

2. *Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.*

*Pour cela, appliquer le résultat de la question **1**.*

solution

1. Remarquons qu'une application linéaire de E vers F est continue si, et seulement si, elle est continue en 0.

La proposition (i) équivaut alors à :

$$f \text{ est continue en } 0.$$

• Supposons (ii).

– Remarquons que pour $M = 0$, on a f nulle et la proposition (i) est vérifiée.

– Si f n'est pas la fonction nulle, on obtient :

$$\exists\, M > 0 \,/\, \forall\, u \in E, \qquad \|f(u)\|_2 \leqslant M\|u\|_1.$$

Montrons que f est continue en 0.

Soient : $\quad \varepsilon > 0 \quad$ et $\quad u \in E$.

Si $\quad \|u\|_1 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}, \quad$ alors d'après (ii), $\quad \|f(u)\|_2 \leqslant \varepsilon$.

Ainsi f est continue en 0.

• Supposons (i) : f est continue en 0.

Cela équivaut à :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 \,/\, \|x\|_1 \leqslant \alpha \;\Rightarrow\; \|f(x)\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

En posant : $\quad t = \dfrac{x}{\alpha}, \quad$ on obtient :

$$\|t\|_1 \leqslant 1 \;\Rightarrow\; \|f(t)\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Par conséquent :

(1) $\quad \exists\, M > 0 \,/\, \forall\, t \in E, \quad \|t\|_1 \leqslant 1 \;\Rightarrow\; \|f(t)\|_2 \leqslant M.$

Soit $\quad u \in E - \{0\}$.

On obtient : $\quad \left\| \dfrac{u}{\|u\|} \right\|_1 = 1.$

D'après (1), on a : $\quad \left\| f\left(\dfrac{u}{\|u\|_1} \right) \right\|_2 \leqslant M.$

Ce qui équivaut à : $\quad \|f(u)\|_2 \leqslant M\|u\|_1.$

D'où :

(2) $\quad \exists\, M > 0 \,/\, \forall\, u \in E - \{0\}, \quad \|f(u)\|_2 \leqslant M\|u\|_1.$

La proposition (2) reste vraie pour $u = 0$.

Nous avons ainsi établi (ii).

Conclusion :

une application linéaire f de $(E, \|\cdot\|_1)$ vers $(F, \|\cdot\|_2)$ est continue si, et seulement si, $\quad \exists\, M \geqslant 0 \,/\, \forall\, u \in E, \quad \|f(u)\|_2 \leqslant M\,\|u\|_1$.

indications et solutions

2. Les applications φ et ψ sont linéaires.

Commes elles sont continues, on peut appliquer le résultat de la question **1** :

$$\exists\ \alpha \geqslant 0 \ / \ \forall\ u \in E, \qquad N_2(u) \leqslant \alpha N_1(u)\ ;$$
$$\exists\ \beta \geqslant 0 \ / \ \forall\ u \in E, \qquad N_1(u) \leqslant \beta N_2(u).$$

De plus α et β sont non nuls car $E \neq \{0\}$.

Par conséquent :

$$\exists\ \alpha > 0, \quad \exists\ \beta > 0 \ / \ \forall\ u \in E, \qquad \frac{1}{\alpha} N_2(u) \leqslant N_1(u) \leqslant \beta\, N_2(u).$$

On en déduit :

N_1 et N_2 sont des normes équivalentes.

1.12

Indications

• Noter que d'après le résultat de l'exercice 1.11, il suffit d'établir que toute application linéaire f de E vers F vérifie :

$\exists\ M \geqslant 0 \ / \ \forall\ u \in E, \qquad \| f(u) \| \leqslant M \| u \|.$

• Observer que E étant de dimension finie, E peut être muni d'une des normes définies à l'exercice 1.3.

solution

• Soit f une application linéaire de $(E, \| \cdot \|_1)$ vers $(F, \| \cdot \|_2)$.

Montrons que f est continue.

Pour cela, montrons que (cf. exercice 1.11) :

$$\exists\ \mathrm{M} \geqslant 0 \ / \ \forall\ u \in E, \qquad \| f(u) \|_2 \leqslant M \| u \|_1.$$

• E est de dimension finie.

Désignons par $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.

D'après l'exercice 1.3, E peut être muni de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par :

$$\forall\ u \in E, \qquad \exists!\ (u_1, \ldots, u_n) \in K^n \ / \ u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \qquad \text{et} \qquad \| u \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | u_i |.$$

On a :

$$(1) \qquad \forall\ u \in E, \qquad \| f(u) \|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i f(e_i) \right\|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} | u_i |\ \| f(e_i) \|_2.$$

Posons : $\quad M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \| f(e_i) \|_2.$

On déduit de (1) : $\quad \forall\ u \in E, \qquad \| f(u) \|_2 \leqslant M \sum\limits_{i=1}^{n} | u_i |.$

Ainsi : $\quad \exists\ M > 0 \ / \ \forall\ u \in E, \qquad \| f(u) \|_2 \leqslant M \| u \|_1.$

Conclusion :

si E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute application linéaire de E vers un espace vectoriel normé F est continue.

1.13

Indications

2. Appliquer le résultat de l'exercice 1.1.
*Conclure à l'aide de la question **1**.*
3. Montrer que d est lipschitzienne.
Pour cela, remarquer que : $x - a = (y - a) + (x - y)$.

solution

1. Par hypothèse, on a :

$$\exists\, k \geqslant 0 \;/\; \forall\, (u, v) \in E^2, \qquad \| f(u) - f(v) \|_2 \leqslant k\, \| u - v \|_1 .$$

• Si $k = 0$, f est constante et donc uniformément continue.

• Supposons : $k \neq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

On a :

$$\forall\, (u, v) \in E^2, \qquad \| u - v \|_1 \leqslant \varepsilon / k \;\Rightarrow\; \| f(u) - f(v) \|_2 \leqslant k\, \| u - v \|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui montre que f est uniformément continue.

Conclusion :

toute application lipschitzienne est uniformément continue.

2. Soit $N : E \to \mathbb{R}_+$ une norme.

D'après l'exercice 1.1, on a :

$$\forall\, (u, v) \in E^2, \qquad |N(u) - N(v)| \leqslant N(u - v).$$

On en déduit : N est lipschitzienne.

Par conséquent : N est uniformément continue.

Conclusion :

toute norme sur un espace vectoriel est une application uniformément continue.

3. Soit $(x, y) \in E^2$.

Remarquons que : $\forall\, a \in A, \quad x - a = y - a + (x - y)$.

On en déduit :

$$\| x - a \| \leqslant \| y - a \| + \| x - y \| .$$

Ce qui implique :

$$\inf_{a \in A} \| x - a \| \leqslant \inf_{a \in A} \| y - a \| + \| x - y \| \;;$$

c'est-à-dire :

$$d(x) \leqslant d(y) + \| x - y \| .$$

Ainsi, on obtient :

(1) $\qquad d(x) - d(y) \leqslant \|x - y\|.$

En permutant x et y dans (1), on a :

(2) $\qquad d(y) - d(x) \leqslant \|x - y\|.$

La combinaison de (1) et (2) donne :

$$|d(x) - d(y)| \leqslant \|x - y\|.$$

Ce qui montre que d est une application lipschitzienne.

D'après la question **1** :

d est uniformément continue sur E.

1.14

Indications

2. • Construire une suite de E convergeant pour N_2 et divergeant pour N_1.
• Appliquer le résultat de l'exercice 1.8.

solution

1. • Soit $\quad f \in E.$

$$N_1(f) = 0 \iff (\forall\, t \in I, \quad f(t) = 0) \iff f = 0.$$

Le raisonnement de l'exercice 1.4 donne :

$$N_2(f) = 0 \iff f = 0.$$

• Soient $\quad \lambda \in \mathbb{R} \quad$ et $\quad f \in \mathrm{E}.$

$$N_1(\lambda f) = |\lambda|\, N_1(f) \qquad \text{et} \qquad N_2(\lambda f) = |\lambda| N_2(f).$$

• Soit $\quad (f, g) \in E^2.$

$$N_1(f + g) = \sup_{t \in \mathrm{I}} |f(t) + g(t)| \leqslant N_1(f) + N_1(g)\ ;$$

$$N_2(f + g) = \int_0^1 |f(t) + g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant N_2(f) + N_2(g).$$

En résumé :

N_1 et N_2 sont des normes.

2. Considérons la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad f_n(t) = \begin{cases} 2nt & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2n}\ ; \\[2mm] 2 - 2nt & \text{si} \quad \dfrac{1}{2n} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}\ ; \\[2mm] 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

On a : $\forall\, n \geqslant 1, \quad f_n \in E, \quad N_1(f_n) = 1 \quad \text{et} \quad N_2(f_n) = \dfrac{1}{2n}.$
Par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} N_2(f_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_1(f_n) = 1.$$

On en déduit :
la suite (f_n) converge vers 0 pour N_2 alors que ce n'est pas le cas pour N_1.
D'après l'exercice 1.8, on peut conclure :

les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

1.15

Indications

1.b. Montrer que f est continue en $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E$.
Pour cela, remarquer que :
$\forall\, (\mu, v) \in \mathbb{R} \times E, \quad \mu v - \lambda u = (\mu - \lambda)\, u + \lambda\, (v - u) + (\mu - \lambda)(v - u).$
2. Appliquer le résultat de la question ***1.b.***

solution

1. a. • Soit $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E$.

$$N(\lambda, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; |\lambda| + \|u\| = 0 \;\Leftrightarrow\; (|\lambda| = 0 \quad \text{et} \quad \|u\| = 0).$$

Comme $\|\cdot\|$ est une norme : $\quad \|u\| = 0 \;\Leftrightarrow\; u = 0.$
Ainsi :

$$N(\lambda, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda, u) = (0, 0).$$

• Soient $\quad \alpha \in \mathbb{R} \quad$ et $\quad (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E.$

$$N(\alpha(\lambda, u)) = N(\alpha\lambda, \alpha u) = |\alpha|\, N(\lambda, u).$$

• Soient $\quad (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E \quad$ et $\quad (\mu, v) \in \mathbb{R} \times E.$

$$N((\lambda, u) + (\mu, v)) = N(\lambda + \mu, u + v) = |\lambda + \mu| + \|u + v\| \leqslant N(\lambda, u) + N(\mu, v).$$

En résumé :

***N* est une norme sur $\mathbb{R} \times E$.**

b. Soit $\quad (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E.$
Montrons que f est continue en (λ, u) ; c'est-à-dire :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 \,/\, \forall (\mu, v) \in \mathbb{R} \times E,$$
$$\mathrm{N}((\mu, v) - (\lambda, u)) \leqslant \alpha \;\Rightarrow\; \|f(\mu, v) - f(\lambda, u)\| \leqslant \varepsilon.$$

Cela équivaut à :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 \,/\, \forall (\mu, v) \in \mathbb{R} \times E,$$
$$|\lambda - \mu| + \|u - v\| \leqslant \alpha \;\Rightarrow\; \|\mu v - \lambda u\| \leqslant \varepsilon.$$

Remarquons que :

$$\mu v - \lambda u = (\mu - \lambda)\, u + \lambda(v - u) + (\mu - \lambda)(v - u).$$

On en déduit :

$$\|\mu v - \lambda u\| \leqslant |\mu - \lambda|\ \|u\| + |\lambda|\ \|v - u\| + |\mu - \lambda|\ \|v - u\|.$$

Par conséquent :

$$(1) \qquad \|\mu v - \lambda u\| \leqslant |\mu - \lambda|[\|u\| + \|v - u\|] + |\lambda|\ \|v - u\|.$$

Posons : $A = |\lambda - \mu| + \|u - v\|$.

On a : $|\lambda - \mu| \leqslant A$ et $\|u - v\| \leqslant A$.

On en déduit, d'après (1) :

$$\|\mu v - \lambda u\| \leqslant A^2 + (|\lambda| + \|u\|)\, A = A(A + |\lambda| + \|u\|).$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour : $\alpha = \min\left(1\,;\dfrac{\varepsilon}{1 + |\lambda| + \|u\|}\right)$, on a :

$$A = |\lambda - \mu| + \|u - v\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|\mu v - \lambda u\| \leqslant A(A + |\lambda| + \|u\|) \leqslant \varepsilon.$$

En effet :

• Si $\alpha = 1$, $\dfrac{\varepsilon}{1 + |\lambda| + \|u\|} \geqslant 1$ et $A \leqslant 1$.

Par suite : $\|\mu v - \lambda u\| \leqslant 1 + |\lambda| + \|u\| \leqslant \varepsilon$.

• Si $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{1 + |\lambda| + \|u\|}$, $\alpha \leqslant 1$ et $A \leqslant 1$.

Par suite : $\|\mu v - \lambda u\| \leqslant \alpha\,(1 + |\lambda| + \|u\|) = \varepsilon$.

En résumé :

f est continue sur $\mathbb{R} \times$ E.

2. Posons : $E = \mathbb{R}$ et $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = |x| + |y|$.

D'après la question **1.b** :

l'application $(x, y) \to xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1.16

Indications

1. Remarquer que : $\forall\, x \in E - \{0\}$, $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\| = 1.$

*2. Appliquer le résultat de la question **1**.*

3. Observer que : $\forall\, x \in E - \{0\}$, $\dfrac{u(x)}{\|x\|} = u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right).$

*4. Se servir du résultat de la question **3**.*

solution

1. • On a : $(i) \;\Rightarrow\; (ii)$.

• Supposons : (ii).

Soit $x \in E - \{0\}$.

On obtient : $\dfrac{x}{\|x\|} \in B$.

Par conséquent : $u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) = \left(\dfrac{1}{\|x\|}\right) u(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; u(x) = 0$.

Par ailleurs : $u(0) = 0$.

Ainsi u est nul.

En résumé :

u est nul si, et seulement si, u est nul sur B.

2. • Soit $u \in L(E)$.

On obtient :

$$N(u) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \in B, \quad \|u(x)\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \in B, \quad u(x) = 0.$$

D'après la première question, cela équivaut à : $u = 0$.

• $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, u \in L(E), \quad N(\alpha u) = |\alpha|\, N(u)$.

• $\forall\, (u, v) \in L(E) \times L(E), \quad N(u + v) \leqslant N(u) + N(v)$.

Conclusion :

N est une norme sur $L(E)$.

3. Soit $u \in L(E)$.

• La propriété est vraie pour $x = 0$.

• Soit $x \in E - \{0\}$.

Remarquons que : $\dfrac{u(x)}{\|x\|} = u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$.

Or : $\dfrac{x}{\|x\|} \in B$.

Donc : $\left\| u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant N(u)$.

On en déduit : $\|u(x)\| \leqslant \|x\| N(u)$.

Ainsi :

$$\boldsymbol{\forall\, u \in L(E), \quad \forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant N(u)\|x\|.}$$

4. Soient $(u, v) \in L(E) \times L(E)$ et $x \in B$.

D'après le résultat de la question **3** :

$$\|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| \leqslant N(u)\, \|v(x)\|.$$

De même : $\forall\, x \in B, \quad \|v(x)\| \leqslant N(v)$.

On en déduit :

$$\forall\, x \in B, \qquad \| u \circ v(x) \| \leqslant N(u)\, N(v).$$

D'où :

$$\boldsymbol{N(u \circ v) \leqslant N(u)\, N(v).}$$

1.17

Indications

1. Il s'agit de montrer que la définition de l'intégrale vectorielle ne dépend pas de la base choisie.
2. Considérer la norme suivante sur E :
$\forall\, x \in E, \quad \exists !(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum x_i\, u_i \quad$ *et* $\quad \|x\| = \sum |x_i|.$

solution

1. Montrons que l'intégrale vectorielle ainsi définie ne dépend pas de la base choisie.
Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ une autre base de E et $(g_1, \ldots, g_n)$ les coordonnées de f relativement à cette base.

$$\exists\, a_{ij} \in \mathbb{R} \,/\, \forall\, i \in [1\,;n], \qquad v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j.$$

On en déduit : $\quad \forall\, i \in [1\,;n], \quad f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, g_j.$

D'où :

$$\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \int_a^b g_j(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par suite :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) u_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \int_a^b g_j(t)\mathrm{d}t\; u_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\mathrm{d}t \right) v_j.$$

Conclusion :

l'intégrale vectorielle ne dépend pas de la base choisie et

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) u_i\,.}$$

2. Munissons E de la norme suivante :

$$\forall\, x \in E, \quad \exists !(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i \quad \text{et} \quad \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

D'après la définition de l'intégrale vectorielle, on a :

$$\left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right|.$$

Or f_i est une fonction numérique.

Donc : $\quad \left| \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b \left| f_i(t) \right| \mathrm{d}t.$

Il en résulte : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b \sum_{i=1}^{n} |f_i(t)|\,\mathrm{d}t.$

C'est-à-dire :

$$\left\| \int_a^b \boldsymbol{f(t)}\mathbf{d}\boldsymbol{t} \right\| \leqslant \int_a^b \|\boldsymbol{f(t)}\|\,\mathbf{d}\boldsymbol{t}.$$

1.18

Indications

• *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*

Établir que : $\forall\, B_1(a\,;r) \subset O_1, \quad \exists\, \alpha > 0 \,/\, \quad B_2(a\,;\alpha r) \subset B_1(a\,;r).$

• *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*

– *Remarquer que :* $B_1(0\,;1) \in O_1.$

– *En déduire :* $\exists\, r > 0\,/\, \quad B_2(0\,;r) \subset B_1(0\,;1).$

– *Noter que :* $\forall\, x \in E - \{0\}, \quad \dfrac{r}{2N_2(x)}x \in B_2(0\,;r).$

solution

Par convention, les boules d'indice i ($i = 1{,}2$) sont relatives à la norme N_i.

• Supposons : N_1 et N_2 sont équivalentes.

(1) $\quad \exists\, \alpha > 0, \quad \exists\, \beta > 0 \,/\, \forall\, x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$

Soient $\Omega_1 \in O_1$ et $a \in \Omega_1$.

Par définition, Ω_1 est un ouvert, donc un voisinage de a.

On a alors :

(2) $\quad \exists\; r > 0 \,/\, B_1\,(a\,;r) \subset \Omega_1.$

La combinaison de (1) et (2) donne :

$$B_2\,(a\,;\alpha r) \subset B_1\,(a\,;r).$$

Ainsi :

$$\forall\, a \in \Omega_1, \quad B_2\,(a\,;\alpha r) \subset \Omega_1.$$

D'où $\Omega_1 \in O_2$ et $O_1 \subset O_2$.

De même : $O_2 \subset O_1$.

Nous avons démontré que $O_1 = O_2$.

• Supposons (*ii*).

Remarquons que : $B_1\,(0\,;1) \in O_1$.

Comme : $O_1 \subset O_2$, on a :

(3) $\quad \exists\, r > 0 \,/\, B_2\,(0\,;r) \subset B_1\,(0\,;1).$

Soit $x \in E - \{0\}$.

On a :

(4) $\quad \dfrac{r}{2N_2(x)}x \in B_2\,(0\,;r).$

La combinaison de (3) et (4) donne :

$$N_1\left(\frac{rx}{2N_2(x)}\right) = \frac{r}{2N_2(x)}\,N_1(x) < 1.$$

D'où :

(5) $\quad \forall\, x \in E - \{0\}, \quad \frac{r}{2}\,N_1(x) < N_2(x).$

De plus, $N_1(x) = N_2(x) = 0$ pour $x = 0$.

Ainsi :

$$\exists\ \alpha > 0 \,/\, \forall\, x \in E, \quad \alpha\, N_1(x) \leqslant N_2(x).$$

De même : $\quad \exists\ \beta > 0 \,/\, \forall\, x \in E, \quad N_2(x) \leqslant \beta\, N_1(x).$

En résumé : $\quad N_1 \sim N_2.$

Conclusion :

**deux normes sont équivalentes si, et seulement si,
tout ouvert pour l'une est un ouvert pour l'autre.**

1.19

Indications

• *Considérer* $(e_1, \ldots, e_n)$ *la base canonique de E.*

Poser : $\quad N_1(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \quad$ *et* $\quad A = \{x \in E \,/\, N_1(x) = 1\}.$

• *Établir qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour toute autre norme* N_2*, on ait :* $\quad N_2 \leqslant \alpha\, N_1.$

En déduire que l'application N_2 *est continue de* (E, N_1) *dans* $\mathbb{R}_+$.

• *Appliquer les théorèmes* ***2*** *et* ***5****.*

solution

• Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.

Désignons par N_1 la norme suivante sur E (cf. exercice 1.3) :

$$\forall\, x \in E, \quad \exists!\ (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \,/\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i, \quad N_1(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

• Soit N_2 une autre norme de E.

Montrons que N_2 est une application continue de (E, N_1) dans $\mathbb{R}_+$.

$$\forall\, x \in E, \quad N_2(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, N_2(e_i) \leqslant N_1(x) \sum_{i=1}^{n} N_2(e_i).$$

On en déduit :

$$\exists\ \alpha > 0 \,/\, \forall\, x \in E, \quad N_2(x) \leqslant \alpha\, N_1(x).$$

D'où :

$$\forall\, (x, y) \in E^2, \quad |N_2(x) - N_2(y)| \leqslant N_2(x - y) \leqslant \alpha\, N_1(x - y).$$

Ce qui montre que N_2 est une application lipschitzienne.

D'après l'exercice 1.13 : $\qquad N_2$ est une application continue.

• Posons $A = \{x \in E \,/\, N_1(x) = 1\}$.
La partie A est fermée et bornée.
D'après le théorème **2**, A est une partie compacte.
Par conséquent, d'après le théorème **5** :
N_2 est bornée sur A et atteint ses bornes.
D'où :

$$\exists\, \alpha > 0, \quad \exists\, \beta > 0 \,/\, \alpha = \inf_{x \in A} N_2(x), \quad \beta = \sup_{x \in A} N_2(x).$$

α et β sont non nuls car $0 \notin A$.
Soit $x \in E - \{0\}$.
On a : $\dfrac{x}{N_1(x)} \in A$.
On en déduit : $\alpha \leqslant N_2\left(\dfrac{x}{N_1(x)}\right) \leqslant \beta$.
Ce qui équivaut à :

$$\alpha\, N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta\, N_1(x).$$

De plus, cette proposition reste vraie pour $x = 0$.
Ainsi N_1 et N_2 sont des normes équivalentes.
L'exercice 1.2 permet de conclure :

**dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
deux normes quelconques sont équivalentes.**

1.20

Indication

Se servir du résultat de l'exercice 1.19.

solution

• – Soit $x \in E$ avec $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$$\|x\|_1 = 0 \iff \forall\, i \in [1\,;\, n], \quad N_i(x_i) = 0.$$

Comme N_i est une norme, cela équivaut à : $x = 0$.
– $\forall\, \alpha \in K, \quad \forall\, x \in E, \quad \|\alpha x\|_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} N_i(\alpha x_i) \leqslant |\alpha|\ \|x\|_1$.
– $\forall\, (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} N_i(x_i + y_i) \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$.
D'où $\|\cdot\|_1$ est une norme.
• De même $\|\cdot\|_2$ est une norme.
• E est de dimension finie.
D'après l'exercice 1.19 :

les deux normes sont équivalentes sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$.

2

Fonctions de plusieurs variables

Éléments de cours

$\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne.

Limite

Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application, et $X_0 \in \overline{A}$.
On dit que la limite suivant A de f en X_0 existe et vaut L si :
$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \alpha > 0\ /\ \forall\ X \in A,\ \ \|X - X_0\| \leqslant \alpha\ \ \Rightarrow\ \ \|f(X) - L\| \leqslant \varepsilon.$
On note :

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in A}} f(X) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{X \to X_0} f(X) = L \quad \text{s'il n'y a pas de confusion possible.}$$

Théorème 1

La limite d'une fonction en un point, lorsqu'elle existe, est unique.

Continuité

Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application, et $X_0 \in A$.
On dit que f est continue en X_0 si $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$.
C'est-à-dire :
$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \alpha > 0\ /\ \forall\ X \in A,\ \ \|X - X_0\| \leqslant \alpha\ \ \Rightarrow\ \ \|f(X) - f(X_0)\| \leqslant \varepsilon.$

Théorème 2

Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application, et $X_0 \in A$.
On pose : $f = (f_1, \ldots, f_p)$, les coordonnées de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue en X_0 ;
(ii) $f_1, \ldots, f_p$ sont continues en X_0.

Théorème 3

Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g : A \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : A \to \mathbb{R}$ trois applications, et $X_0 \in A$.
On suppose que f, g et λ sont continues en X_0.
Alors, $f + g$ et λf sont continues en X_0.

Théorème 4

Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux applications, et $X_0 \in A$.
On suppose que f et g sont continues en X_0 et $g(X_0) \neq 0$.
Alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en X_0.

Continuité dans une direction

Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A vers $\mathbb{R}^p$.

On considère $\vec{X}_0 \in A$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, et on pose :

$$B = \{\vec{X} \in A \ / \ \exists\ t \in \mathbb{R},\quad \vec{X} = \vec{X}_0 + t\,\vec{u}\}.$$

On dit que f est continue en $\vec{X}_0$ dans la direction $\vec{u}$ si : $\displaystyle\lim_{\substack{\vec{X} \to \vec{X}_0 \\ \vec{X} \in B}} f(\vec{X}) = f(\vec{X}_0)$.

C'est-à-dire : $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(\vec{X}_0 + t\,\vec{u}) = f(\vec{X}_0)$.

Théorème 5

Si f est continue en $\vec{X}_0$, alors f est continue en $\vec{X}_0$ dans toute direction.

La réciproque du théorème 5 est fausse.

Continuité par rapport à une variable

Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$, f une application de A dans $\mathbb{R}^p$, et $\vec{X}_0 \in A$.

On désigne par $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On dit que f est continue en $\vec{X}_0$ par rapport à la variable x_i si f est continue en $\vec{X}_0$ dans la direction $\vec{\varepsilon}_i$.

Dérivée suivant un vecteur

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A dans $\mathbb{R}^p$.
On considère $\vec{X}_0 \in A$, et $\vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.
On dit que f admet une dérivée suivant $\vec{u}$ en $\vec{X}_0$ si :

$$\exists\ \vec{L} \in \mathbb{R}^p \ / \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{X}_0 + t\,\vec{u}) - f(\vec{X}_0)}{t} = \vec{L}.$$

On note : $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{X}_0) = \vec{L}.$$

Dérivée partielle

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de A dans $\mathbb{R}^p$, et $\vec{X}_0 \in A$.
On dit que f admet une dérivée partielle en $\vec{X}_0$ par rapport à la variable x_i si f est dérivable en $\vec{X}_0$ suivant $\vec{\varepsilon}_i$.

On note : $$\frac{\partial f}{\partial \vec{\varepsilon}_i}(\vec{X}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{X}_0).$$

Différentiabilité

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A dans $\mathbb{R}^p$.
On désigne par $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

On dit que f est différentiable en un point $\vec{X}_0$ de A, s'il existe $\ell \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que :

$$\lim_{\vec{H}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{X}_0+\vec{H})-f(\vec{X}_0)-\ell(\vec{H})}{\|\vec{H}\|} = \vec{0}.$$

Si on pose, pour $\vec{H} \neq \vec{0}$, $\varepsilon(\vec{H}) = \dfrac{f(\vec{X}_0+\vec{H})-f(\vec{X}_0)-\ell(\vec{H})}{\|\vec{H}\|}$, alors f est différentiable en $\vec{X}_0$ s'il existe $\ell \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel que :

$$f(\vec{X}_0+\vec{H}) = f(\vec{X}_0) + \ell(\vec{H}) + \|\vec{H}\|\,\varepsilon(\vec{H}) \quad \text{où} \quad \lim_{\vec{H}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{H}) = \vec{0}.$$

Dans le cas général d'une application définie sur un espace vectoriel normé E, ℓ doit être continue.
Cette condition est vérifiée pour $E = R^n$, d'après le résultat de l'exercice 1.12.

Différentielle

L'unique application linéaire ℓ (lorsqu'elle existe) vérifiant la définition d'une fonction différentiable en $\vec{X}_0$ est appelée différentielle de f en $\vec{X}_0$ et notée $d_{\vec{X}_0} f$.

Théorème 6

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\vec{X}_0 \in A$.
On considère $f : A \to \mathbb{R}^p$, $g : A \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : A \to \mathbb{R}$ trois applications différentiables en $\vec{X}_0$.
Alors $f+g$ et λf sont différentiables en $\vec{X}_0$.

Théorème 7

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de A dans $\mathbb{R}^p$, et $\vec{X}_0 \in A$.
On pose : $f = (f_1, \dots, f_p)$, les coordonnées de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est différentiable en $\vec{X}_0$;
(ii) $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables en $\vec{X}_0$.
De plus : $\quad \forall \vec{H} \in \mathbb{R}^n,\ d_{\vec{X}_0} f(\vec{H}) = (d_{\vec{X}_0} f_1(\vec{H}), \dots, d_{\vec{X}_0} f_p(\vec{H}))$.

Théorème 8

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A dans $\mathbb{R}^p$.
Si f est différentiable en $\vec{X}_0 \in A$, alors f admet des dérivées partielles en $\vec{X}_0$.
De plus :

$$\forall \vec{H} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,\ d_{\vec{X}_0} f(\vec{H}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{X}_0).$$

Théorème 9

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A dans $\mathbb{R}^p$.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ existe au voisinage de $\vec{X_0} \in A$, et est continue en $\vec{X_0}$, alors f est différentiable en $\vec{X_0}$.

Application de classe C^1

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A dans $\mathbb{R}^p$.
On dit que f est de classe C^1 sur A, si f est continue sur A et admet des dérivées partielles continues sur A.

Théorème 10

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A dans $\mathbb{R}^p$.
Soient B un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et g une application de B dans $\mathbb{R}^q$.
On suppose que f est différentiable en $\vec{X_0}$ et g différentiable en $\vec{Y_0} = f(\vec{X_0}) \in B$.
Alors $g \circ f$ est différentiable en $\vec{X_0}$ et
$d_{\vec{X_0}}\, g \circ f = d_{\vec{Y_0}}\, g \circ d_{\vec{X_0}}\, f.$

Matrice jacobienne, déterminant jacobien

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A dans $\mathbb{R}^p$.
On suppose que f est différentiable en $\vec{X_0} \in A$.
La matrice de l'application $d_{\vec{X_0}}\, f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, est appelée matrice jacobienne de f en $\vec{X_0}$.
On note : $J_f(\vec{X_0})$.
Si $p = q$, le déterminant de $J_f(\vec{X_0})$ est appelé déterminant jacobien de f en $\vec{X_0}$.

Théorème 11

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de A dans $\mathbb{R}^p$ et $\vec{X_0} \in A$.
On suppose que f est différentiable en $\vec{X_0}$, et on pose $f = (f_1, ..., f_p)$.
Alors

$$J_f(\vec{X_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{X_0}) & \text{--------} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{X_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(\vec{X_0}) & \text{--------} & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(\vec{X_0}) \end{pmatrix}.$$

Théorème 12 (difféomorphisme)

Soient A et B deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A vers B.
f est un difféomorphisme de A vers B si, et seulement si :

(i) f est bijective ;
(ii) f est différentiable en tout point de A ;
(iii) le déterminant jacobien de f en tout point de A est non nul.

Théorème 13

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
On considère une application f de $[a\,;\,b]$ dans $\mathbb{R}^p$.
On suppose que f est continue sur $[a\,;\,b]$ et admet en tout point de $]a\,;\,b[$ une dérivée majorée par $M \geqslant 0$; c'est-à-dire :
$\exists\ M \geqslant 0\ /\ \forall\ t \in\ ]a\,;\,b[,\quad \|f'(t)\| \leqslant M.$
Alors
$$\|f(a) - f(b)\| \leqslant M(b - a).$$

Exercices

APPLICATION IMMÉDIATE

Limites, continuité, différentiabilité

$\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

2.1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f admet-elle une limite en $\vec{0}$?
2. Étudier la continuité de f en $\vec{0}$ suivant toute direction.

2.2 Montrer, en appliquant la définition, que l'application

$$f : (x, y) \mapsto x$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2.4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en $\vec{0}$ suivant toute direction.
2. Étudier la continuité de f en $\vec{0}$.
3. Étudier l'existence des dérivées de f en $\vec{0}$ suivant tout vecteur.

2.5 On considère la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x + y} & \text{si } y \neq -x\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $\overrightarrow{0}$ suivant toute direction.
2. Étudier la continuité de f sur $\triangle = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}^*\}$.

2.6 On considère la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2\, e^{-\frac{y^2}{x^2}} & \text{si } x \neq 0\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la différentiabilité de f en $\overrightarrow{0}$.

2.7 On pose :
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2.8 On pose :
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2.9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 + xy^3} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } xy^3 \geqslant -1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la différentiabilité de f en $\overrightarrow{0}$.

2.10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la continuité puis la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2.11 Soit : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3 \ln(1+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2.12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(\ln(1+|xy|))^2}{x^2+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la dérivée de f en $\vec{0}$ suivant toute direction.
2. Étudier la différentiabilité de f en $\vec{0}$.

Généralités

2.13 Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que :

(1) $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, t > 0, \quad f(tx) = tf(x).$

On suppose f différentiable sur $\mathbb{R}^n$.
Montrer que la proposition (1) équivaut à :

(2) $\quad \forall\, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f(x).$

2.14 Montrer, en appliquant la définition que, l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \vec{X} &\mapsto \|\vec{X}\|^2 \end{aligned}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

2.15 Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}$ par :
$\forall\ M \in \mathcal{M}, f(M) = M^2$.
Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}$.

2.16 Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

Montrer que toute application linéaire et continue de E vers F est différentiable.

2.17 Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

Montrer que toute application différentiable de E vers F est continue.

2.18 Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$, f une application de A vers $\mathbb{R}^p$, et $X_0 \in \overline{A}$.

On suppose :
(i) il existe q parties A_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ telles que, $A = \bigcup_{i=1}^{q} A_i$;
(ii) $\forall\ j \in \{1, \dots, q\},\ X_0 \in \overline{A_j}$; et $\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in A_j}} f(X) = L$.

Montrer que : $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = L$.

2.19 Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$, f une application de A dans $\mathbb{R}^p$, et $X_0 \in \overline{A}$.

On suppose : $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = L$.

1. Montrer que : $L \in \overline{f(A)}$.
2. On considère une application g de $f(A)$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que : $\lim\limits_{Y \to L} g(Y) = M$.
Montrer que : $\lim\limits_{X \to X_0} g \circ f(X) = M$.

2.20 Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$, et f une application de A dans $\mathbb{R}^p$, différentiable en $\overrightarrow{X_0} \in A$.

Montrer que : $\forall\ \vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\overrightarrow{X_0}\right) = d_{\overrightarrow{X_0}} f\left(\vec{u}\right)$.

2.21 Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application différentiable de A dans $\mathbb{R}$.

On dit que f admet un extremum en $\overrightarrow{X_0} \in A$, s'il existe un voisinage de $\overrightarrow{X_0}$ inclus dans A, sur lequel, $\vec{X} \mapsto f\left(\vec{X}\right) - f\left(\overrightarrow{X_0}\right)$, garde un signe constant.
Montrer que si f admet un extremum en $\overrightarrow{X_0}$, alors la différentielle de f en $\overrightarrow{X_0}$ est nulle.

Difféomorphismes

2.22 Soient $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, \ \ r\sin\theta \sin\varphi, \ \ r\cos\theta)$$

et, $D = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \ / \ r > 0, \ \ \theta \in]0 \ ; \frac{\pi}{2}[\ \text{ et } \ \varphi \in]0 \ ; \frac{\pi}{2}[\}$.

Montrer que ϕ est un difféomorphisme de D sur un ensemble à préciser.

2.23 Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x + y).$$

Montrer que ϕ est un difféomorphisme de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > y\}$ sur un ensemble à préciser.

2.24 Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (y^2 - x, x + y^2).$$

Montrer que ϕ est un difféomorphisme de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$ sur un ensemble D' à préciser.

2.25 On pose : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0, \ \ y > 0 \ \text{ et } \ x > y\}$.

Montrer que : $(x, y) \overset{\phi}{\mapsto} (-x^2 + xy, \ \ y^2 - xy)$ est un difféomorphisme de D sur un ensemble D' à préciser.

APPROFONDISSEMENT ET SYNTHÈSE

2.26 Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$, et f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est convexe sur A si :

$$\forall \ (x, y) \in A^2, \ \forall \ t \in [0 \ ; 1], f(tx + (1 - t) \ y) \leqslant t f(x) + (1 - t) f(y).$$

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes (A étant convexe) :

(i) f est convexe sur A ;

(ii) $\forall \ (x, y) \in A^2, \ \ t \mapsto f(tx + (1 - t)y)$ est convexe sur $[0 \ ; 1]$.

2. Soient A un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, et f une application différentiable de A dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe ;

(iii) $\forall \ (a, x) \in A^2, \ \ f(x) \geqslant f(a) + d_a f(x - a)$.

exercices

2.27 On pose : $A =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

Soit $\varphi: \quad A \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \left(xy, \frac{y^2 - x^2}{2}\right).$$

Montrer que φ est un difféomorphisme de A sur un ensemble B à préciser.

2.28

$$\text{Soit} \quad f(x, y) = \begin{cases} |y|e^{-\frac{|y|}{x^2}} & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en $\vec{0}$.
2. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2.29 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} & \text{si } x \neq y\,; \\ \cos x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la différentiabilité de f sur $\triangle = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

2.30 Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists\ x \in \mathbb{R} \,/\, x + f(a - f(x)) = b$ et

(1) $\quad \exists\ k \in [0\,;1[\ /\ \forall\ t \in \mathbb{R}, \left|f'(t)\right| \leqslant k.$

Soit $\phi: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x + f(y), y + f(x)).$$

Montrer que ϕ est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.

2.31 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de U dans $\mathbb{R}^p$, et $(a, b) \in U^2$.

Soit : $\quad I = [a\,;b] = \{a + t(b - a), t \in [0\,;1]\}$, un segment de U.

On suppose que f est continue sur I et admet sur $]a\,;b[$ une différentielle majorée en norme par M.

Montrer que : $\left\|f(b) - f(a)\right\| \leqslant M \left\|b - a\right\|$.

2.32 Soient A un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, et f une application différentiable de A dans $\mathbb{R}^p$.

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\quad f$ est constante sur A ;

(ii) $\quad$ les dérivées partielles de f sont nulles sur A.

indications et solutions

2.1

indications

1. Déterminer deux parties de $\mathbb{R}^2$ suivant lesquelles f admet deux limites différentes en $\vec{0}$. Conclure à l'aide du théorème 1.

2. Considérer $\vec{u}(a, b) \neq \vec{0}$, et calculer $\lim\limits_{t \to 0} f\left(\vec{0} + t\,\vec{u}\right)$.

solution

1. Posons : $D_1 = \{(x, x), x \in \mathbb{R}^*\}$ et $D_2 = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}^*\}$.

On a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \to \vec{0} \\ (x,y) \in D_1}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \to \vec{0} \\ (x,y) \in D_2}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}\ .$$

Ainsi f admet en $\vec{0}$ deux limites distinctes suivant les ensembles D_1 et D_2.
D'après le théorème **1** :

f n'admet pas de limite en $\vec{0}$.

2. Soit $\vec{u}\,(a, b) \neq \vec{0}$.

Déterminons $\lim\limits_{t \to 0} f\left(\vec{0} + t\vec{u}\right)$.

Pour $t \neq 0$, $t\vec{u} \neq \vec{0}$.

Ainsi : $t \neq 0 \Rightarrow f\left(t\vec{u}\right) = \dfrac{t^2 ab}{t^2(a^2 + b^2)}$,

d'où $\lim\limits_{t \to 0} f\left(\vec{0} + t\vec{u}\right) = \dfrac{ab}{a^2 + b^2}$.

Or $f\left(\vec{0}\right) = 0$.
Donc f est continue en $\vec{0}$ suivant la direction $\vec{u}(a, b)$ si, et seulement si, $ab = 0$.
Conclusion :

f n'est continue en $\vec{0}$ que suivant les directions $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

indications et solutions

2.2

indications

Considérer $X_0 \in \mathbb{R}^2$.
Établir que :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ /\ \forall\ X \in \mathbb{R}^2,\ \|X - X_0\| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \|f(X) - f(X_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

Pour cela, remarquer que : si $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| = \|X\|$.

solution

Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Montrons que f est continue en X_0.
Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
On a : $|f(X) - f(X_0)| = |x - x_0| \leqslant \|X - X_0\|$.
D'où :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \|X - X_0\| \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(X) - f(X_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi f est continue en X_0.
Conclusion :

l'application $(x, y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.3

indications

- *Établir que f est continue en $\overrightarrow{X_0} \neq \overrightarrow{0}$.*

*Pour cela, appliquer le résultat de l'exercice 2.2 et les théorèmes **3** et **4**.*

- *Pour la continuité en $\overrightarrow{0}$, il s'agit de montrer que :*

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ /\ \|\overrightarrow{X}\| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(\overrightarrow{X}\right) - f\left(\overrightarrow{0}\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit alors de montrer que :

$$\forall\ \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^2,\ \left|f\left(\overrightarrow{X}\right) - f\left(\overrightarrow{0}\right)\right| \leqslant \varphi\left(\|\overrightarrow{X}\|\right)$$

où φ est une fonction numérique continue en 0 avec $\varphi(0) = 0$.
Ainsi :

$$\left(\lim_{\overrightarrow{X} \to \overrightarrow{0}} \varphi\left(\|\overrightarrow{X}\|\right) = \lim_{\|\overrightarrow{X}\| \to 0} \varphi\left(\|\overrightarrow{X}\|\right) = 0\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{\overrightarrow{X} \to \overrightarrow{0}} f\left(\overrightarrow{X}\right) = f\left(\overrightarrow{0}\right).$$

solution

- Montrons que f est continue en $\overrightarrow{X_0} \neq \overrightarrow{0}$.

D'après le résultat de l'exercice 2.2 :

$$(x, y) \mapsto x \quad \text{est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

D'après le théorème **3** :

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 \ \text{ et } \ (x, y) \mapsto x^2 y \ \text{ sont continues sur } \mathbb{R}^2.$$

On en déduit, d'après le théorème **4** :

f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.

• Étudions la continuité de f en $\vec{0}$.

Il s'agit de montrer que :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0 \ / \ \|\vec{X}\| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(\vec{X}) - f(\vec{0})| \leqslant \varepsilon.$$

$$\forall\ \vec{X} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}, |f(\vec{X}) - f(\vec{0})| = \frac{x^2|y|}{x^2 + y^2} \leqslant |y| \leqslant \|\vec{X}\|.$$

D'où $\lim\limits_{\vec{X} \to \vec{0}} f(\vec{X}) = f(\vec{0})$.

Il en résulte que f est continue en $\vec{0}$.

Conclusion : **f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**

2.4

indications

1. Considérer $\vec{u}\,(a, b) \neq \vec{0}$.

Calculer $\lim\limits_{t \to 0} f(\vec{0} + t\,\vec{u})$.

Distinguer deux cas : $b = 0$ *et* $b \neq 0$.

*2. Raisonner comme pour la question **1** de l'exercice 2.1.*

3. Calculer $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{0} + t\,\vec{u}) - f(\vec{0})}{t}$.

solution

1. Soit $\vec{u}\,(a, b) \neq \vec{0}$.

• Supposons $b = 0$.

Dans ce cas, $a \neq 0$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$.

On a : $\forall\ t \in \mathbb{R}^*, t\vec{u} \neq \vec{0}$.

D'où

$$\forall\ t \in \mathbb{R}^*, f(\vec{0} + t\vec{u}) = \frac{t\,a^2 b}{t^2 a^4 + b^2} = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{t \to 0} f(\vec{0} + t\vec{u}) = 0 = f(\vec{0})\ ;$$

ce qui montre que f est continue en $\vec{0}$ suivant $\vec{u}$.

• Supposons $b \neq 0$.

$\lim\limits_{t \to 0} f(\vec{0} + t\vec{u}) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t\,a^2 b}{t^2 a^4 + b^2} = 0 = f(\vec{0})$.

En résumé :

f est continue en $\vec{0}$ suivant toute direction.

2. Considérons :

$$P_1 = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}^*\} \quad \text{et} \quad P_2 = \{(x, -x^2),\ x \in \mathbb{R}^*\}.$$

f admet 1/2 et $-1/2$ comme limites respectives en $\vec{0}$ suivant P_1 et P_2.
Par conséquent :

f n'est pas continue en $\vec{0}$.

3. Soit $\vec{u}\,(a, b) \neq \vec{0}$.

Calculons $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{0} + t\vec{u}) - f(\vec{0})}{t}$.

On a :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(\vec{0} + t\vec{u}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{a^2 b}{t^2\, a^4 + b^2}.$$

Si $b = 0$, $\quad \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{0} + t\vec{u}) - f(\vec{0})}{t} = 0.$

Si $b \neq 0$, $\quad \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{0} + t\vec{u}) - f(\vec{0})}{t} = \dfrac{a^2}{b}.$

En résumé :

f admet en $\vec{0}$ une dérivée suivant tout vecteur non nul.

2.5

indications

1. Considérer $\vec{u}(a, b) \neq \vec{0}$, et calculer $\lim\limits_{t \to 0} f(\vec{0} + t\vec{u})$.
Distinguer deux cas : $b = -a$ et $b \neq -a$.
2. Étudier d'abord la continuité suivant toute direction.

solution

1. Considérons $\vec{u}\,(a, b) \neq \vec{0}$.

Calculons $\lim\limits_{t \to 0} f(\vec{0} + t\vec{u})$.

• Supposons $b = -a$.
On a : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t\vec{u}) = 0.$

Par suite $\lim\limits_{t \to 0} f(\vec{0} + t\vec{u}) = f(\vec{0})$.

• Supposons $b \neq -a$.
On a : $t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad tb \neq -ta.$

On en déduit :

$$\lim_{t \to 0} f(\vec{0} + t\vec{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 a^2 b^2}{a+b} = 0 = f(\vec{0}).$$

En résumé :

f est continue en $\vec{0}$ suivant toute direction.

2. Soit $x_0 \neq 0$.
Étudions la continuité de f en $\vec{X}_0 = (x_0, -x_0)$ suivant la direction $\vec{u}\,(a, b) \neq \vec{0}$.
Pour cela, calculons : $\lim_{t \to 0} f(\vec{X}_0 + t\vec{u})$.
Supposons $b \neq -a$.

$$t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -x_0 + tb \neq -(x_0 + ta).$$

Par conséquent :

$$\lim_{t \to 0} f(\vec{X}_0 + t\vec{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + ta)^2\,(-x_0 + tb)^2}{t(a+b)} = \infty.$$

On en déduit que f n'est pas continue en $\vec{X}_0$ suivant la direction considérée.
D'après le théorème **5** :

f n'est pas continue sur $\triangle$.

2.6

indications

• *Étudier l'existence des dérivées partielles en $\vec{0}$.*
Pour cela, calculer :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{i}) - f(\vec{0})}{t} \quad \textit{et} \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{j}) - f(\vec{0})}{t}.$$

• *Considérer* $\vec{H} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Poser : $$\forall \vec{H} \neq \vec{0}, \quad \varepsilon(\vec{H}) = \frac{f(\vec{0} + \vec{H}) - f(\vec{0}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{X}_0)\,h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{X}_0)\,h_2}{\|\vec{H}\|}.$$

Calculer $\lim_{\vec{H} \to \vec{0}} \varepsilon(\vec{H})$.
Pour cela, se reporter aux indications de l'exercice 2.3.

solution

• Déterminons l'existence des dérivées partielles de f en $\vec{0}$.
On obtient :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{i}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(t, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = 0.$$

D'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) = 0.$

De même :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{j}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(0, t)}{t} = 0.$$

Par suite : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = 0.$

• Soit $\vec{H} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Posons :

$$\forall \vec{H} \neq \vec{0},\ \varepsilon(\vec{H}) = \frac{f(\vec{0} + \vec{H}) - f(\vec{0}) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{0})\, h_1 - \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{0})\, h_2}{\|\vec{H}\|}.$$

f est différentiable en $\vec{0}$ si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{\vec{H} \to \vec{0}} \varepsilon(\vec{H}) = 0$.

On obtient :

$$\forall \vec{H} \neq \vec{0},\ \varepsilon(\vec{H}) = \begin{cases} \dfrac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\, e^{\frac{-h_2^2}{h_1^2}} & \text{si } h_1 \neq 0\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\forall \vec{H} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\},\ |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant |h_1| \leqslant \|\vec{H}\|.$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{\vec{H} \to \vec{0}} \varepsilon(\vec{H}) = 0.$

Conclusion : ***f* est différentiable en $\vec{0}$, et la différentielle de *f* en $\vec{0}$ est l'application nulle.**

2.7

indications

• *Étudier la différentiabilité de f en $\vec{0}$ en raisonnant comme pour l'exercice 2.6.*

• *Appliquer le théorème **9** pour la différentiabilité de f en $\vec{X}_0 \neq \vec{0}$.*

solution

• Étudions la différentiabilité de f en $\vec{0}$.

Pour cela, raisonnons comme pour l'exercice 2.6.

On obtient : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = 0.$

Pour $\vec{H} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$, posons :

$$\varepsilon(\vec{H}) = \frac{f(\vec{0} + \vec{H}) - f(\vec{0}) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{0})\, h_1 - \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{0})\, h_2}{\|\vec{H}\|}.$$

On a :

$$\forall \vec{H} \neq \vec{0}, \quad \varepsilon(\vec{H}) = \frac{h_1^3 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}.$$

D'où

$$\forall \vec{H} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}, \quad |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant |h_2|^2 \leqslant \|\vec{H}\|^2$$

ce qui montre que f est différentiable en $\vec{0}$.

• Étudions la différentiabilité de f en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.

Pour y fixé non nul, $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $y = 0$, $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On en déduit : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.

De plus :

$$\text{si } (x, y) \neq \vec{0}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2y^2(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

D'après les théorèmes **3** et **4**, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.

Le même raisonnement donne :

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.

On en déduit, d'après le théorème **9** :

f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.

En résumé :

f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2.8

indications

• *Raisonner comme pour l'exercice 2.7.*

• *Pour la différentiabilité en $\vec{0}$, on notera que :*

$\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leqslant |t|$.

solution

• En raisonnant comme pour l'exercice 2.7, on obtient :

f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.

• Étudions la différentiabilité de f en $\vec{0}$.

On a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{i}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t^4)}{t^3} = 0.$$

De même : $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{j}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t)}{t} = 0.$

indications et solutions

D'où $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = 0.$

Par ailleurs :

$$\forall \vec{H} \neq \vec{0}, \quad \varepsilon(\vec{H}) = \frac{\sin(h_1^4)}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}.$$

Or $\quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t| \leqslant |t|.$

Donc

$$\forall \vec{H} \neq \vec{0}, \quad |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant |h_1| \leqslant \|\vec{H}\|.$$

Il en résulte que f est différentiable en $\vec{0}$.

Conclusion : **f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.**

2.9

indication

Noter que :

$$\forall\, t \geqslant -1, \sqrt{1+t} - 1 = \frac{t}{\sqrt{1+t}+1}.$$

solution

• $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{0}+t\vec{i}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = 0.$

D'où $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) = 0.$

• $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{0}+t\vec{j}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = 0.$

On en déduit : $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = 0.$

• On obtient :

$$\forall \vec{H} \neq \vec{0}, \quad \varepsilon(\vec{H}) = \frac{\sqrt{1+h_1 h_2^3} - 1}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} \quad \text{si} \quad h_1 h_2^3 \geqslant -1.$$

• Déterminons $\displaystyle\lim_{\vec{H}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{H})$.

Posons $\quad V = \{\vec{H} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 + h_1 h_2^3 \geqslant 0\}.$

On obtient :

$$\forall \vec{H} \in V - \{\vec{0}\}, \quad \varepsilon(\vec{H}) = \frac{h_1 h_2^3}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}\left(\sqrt{1+h_1 h_2^3} + 1\right)}.$$

On en déduit :

$$\forall \vec{H} \in V - \{\vec{0}\}, \quad |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant |h_1| \leqslant \|\vec{H}\|.$$

Ce qui montre que :

f est différentiable en $\vec{0}$.

indications et solutions

2.10

indication

$\forall \vec{X} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x + y)^2 \leqslant 4\|\vec{X}\|^2.$

solution

• Le raisonnement de l'exercice 2.3 donne :
f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.

• Étudions la continuité de f en $\vec{0}$.
On a :

$$\forall \vec{X} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(\vec{X})| \leqslant (x + y)^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \leqslant 4\|\vec{X}\|^2.$$

Ainsi, f est continue en $\vec{0}$.
• Le raisonnement de l'exercice 2.7 donne :
f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.

• Étudions la différentiabilité de f en $\vec{0}$.
On a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{i}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} t \sin \frac{1}{|t|} = 0.$$

De même : $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{j}) - f(\vec{0})}{t} = 0.$

D'où $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = 0.$

Posons : $\displaystyle \forall \vec{H} \neq \vec{0}, \quad \varepsilon(\vec{H}) = \frac{(h_1 + h_2)^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$

On obtient :

$$\forall \vec{H} \neq \vec{0}, \quad |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant 4\|\vec{H}\|.$$

Par conséquent, f est différentiable en $\vec{0}$.
Conclusion :

f est continue sur $\mathbb{R}^2$;
f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2.11

indications

• *Montrer que f est différentiable en $\vec{X}_0 \neq \vec{0}$ en procédant comme pour l'exercice 2.7.*

• *Pour la différentiabilité en $\vec{0}$, on pourra noter que :*

$$\forall\ t \geqslant 0,\ \ln(1 + t) \leqslant t.$$

indications et solutions

solution

• Le raisonnement de l'exercice 2.7 donne :
f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$.
• Étudions la différentiabilité de f en $\vec{0}$.

On obtient : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = 0.$

Posons :

$$\forall \vec{H} \neq \vec{0}, \quad \varepsilon(\vec{H}) = \frac{h_1^3 \ln(1+h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}.$$

Remarquons que :

(1) $\quad \forall\, t \geqslant 0, \quad \ln(1+t) \leqslant t.$

L'inégalité (1) peut être établie par l'étude des variations de $t \mapsto \ln(1+t) - t$ sur $[0\,;+\infty[$.
On en déduit :

$$\forall \vec{H} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}, |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant h_2^2 \leqslant \|\vec{H}\|^2.$$

D'où : f est différentiable en $\vec{0}$.
En résumé :

f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2.12

indication

2. Noter que : $\ln(1+t) = t + t\varphi(t)$ *où* $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 0.$

solution

1. Soit $\vec{u}(a, b) \neq \vec{0}$.

Calculons $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{0} + t\vec{u}) - f(\vec{0})}{t}.$

• Supposons $b \neq 0$.
On a :

$$\forall\, t \neq 0, \quad \frac{f(t\vec{u})}{t} = \frac{[\ln(1+t^2|ab|)]^2}{t\,|t|\,(|t|\,a^2+|b|)}.$$

Or $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

Donc $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t\vec{u})}{t} = 0.$

• Pour $b = 0$, on obtient également :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t\vec{u})}{t} = 0.$$

En résumé :

f admet en $\vec{0}$ une dérivée suivant tout vecteur non nul.

2. On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = 0.$

Posons :

$$\forall \vec{H} \neq \vec{0}, \quad \varepsilon(\vec{H}) = \frac{(\ln(1 + |h_1 h_2|))^2}{(h_1^2 + |h_2|)(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}}.$$

Si $\vec{H} = (h_1, h_2)$ tend vers $\vec{0}$, alors h_1 et h_2 tendent vers 0, puisque $|h_1| \leqslant \|\vec{H}\|$ et $|h_2| \leqslant \|\vec{H}\|$.

Or

$$\ln(1+t) = t + t\varphi(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0,$$

donc $\quad (\ln(1 + |h_1 h_2|))^2 = h_1^2 h_2^2 (1 + \varphi(h_1 h_2))^2.$

On obtient :

$$\forall \vec{H} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}, \quad |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant |h_1|^2 (1 + \varphi(h_1 h_2))^2.$$

Il existe alors un voisinage V de $\vec{0}$ tel que :

$$\forall \vec{H} \in V, \quad |\varphi(h_1 h_2)| \leqslant 1 \quad \text{car} \quad \lim_{\vec{H} \to \vec{0}} \varphi(h_1 h_2) = 0.$$

On en déduit : $\quad \forall \vec{H} \in V - \{\vec{0}\}, |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant 4 \|\vec{H}\|^2.$

D'où **f est différentiable en $\vec{0}$.**

2.13

indication

Remarquer que : (2) ⇔ $d_x f(x) = f(x)$.

solution

• Supposons (1).

Par hypothèse, les fonctions $t \mapsto f(tx)$ et $t \mapsto tf(x)$ sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0, \quad d_{tx} f(x) = f(x).$$

En particulier pour $t = 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad d_x f(x) = f(x).$$

Or $\quad d_x f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x).$

Donc nous avons établi (2).

• Supposons (2).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$\forall t > 0, \quad d_{tx} f(tx) = f(tx).$$

ce qui équivaut à :

(3) $\quad \forall t > 0, \quad t\, d_{tx} f(x) = f(tx)$;

Considérons $t \mapsto \varphi(t) = f(tx)$.

On obtient : $\forall\ t > 0,\quad \varphi'(t) = d_{tx} f(x)$.
Ainsi la proposition (3) équivaut à :
$$\forall\ t > 0,\quad t\,\varphi'(t) = \varphi(t).$$
Ce qui équivaut à :
$$\forall\ t > 0,\quad \left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)' = 0.$$
On en déduit :
$$\forall\ t > 0,\quad \frac{\varphi(t)}{t} = \frac{\varphi\ (1)}{1} = f(x).$$
D'où
$$\forall\ t > 0,\quad f(tx) = tf(x).$$
En résumé :

si f est un application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, alors
$\{\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ t > 0, f(tx) = tf(x)\} \Leftrightarrow \{\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ d_x f(x) = f(x)\}$.

2.14

indications

Considérer $\vec{X}_0 \in \mathbb{R}^n$.
Déterminer une application linéaire ℓ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*
$$\varepsilon\left(\vec{H}\right) = \frac{f\left(\vec{X}_0 + \vec{H}\right) - f\left(\vec{X}_0\right) - \ell\left(\vec{H}\right)}{\|\vec{H}\|}$$
tende vers 0 *lorsque* $\vec{H}$ *tend vers* $\vec{0}$.
Pour cela noter que : $f\left(\vec{X}_0 + \vec{H}\right) - f\left(\vec{X}_0\right) = \|\vec{H}\|^2 + 2\vec{X}_0 \cdot \vec{H}$.

solution

Soit $\vec{X}_0 \in \mathbb{R}^n$.
Montrons qu'il existe une application linéaire ℓ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$\lim_{\vec{H} \to \vec{0}} \varepsilon\left(\vec{H}\right) = \vec{0}, \quad \text{où} \quad \varepsilon\left(\vec{H}\right) = \frac{f\left(\vec{X}_0 + H\right) - f\left(\vec{X}_0\right) - \ell\left(\vec{H}\right)}{\|\vec{H}\|} \quad \text{pour} \quad \vec{H} \neq \vec{0}.$$
On a :
$$\forall\ \vec{H} \in \mathbb{R}^n,\quad f\left(\vec{X}_0 + \vec{H}\right) - f\left(\vec{X}_0\right) = \|\vec{H}\|^2 + 2\vec{X}_0 \cdot \vec{H}.$$
car $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, $\quad\cdot$ désignant le produit scalaire.
Posons : $\quad \forall\ \vec{H} \in \mathbb{R}^n,\ \ell\left(\vec{H}\right) = 2\vec{X}_0 \cdot \vec{H}$.
ℓ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
On en déduit :
$$\forall\ \vec{H} \neq \vec{0},\quad \varepsilon\left(\vec{H}\right) = \|\vec{H}\|.$$
Ce qui montre que f est différentiable en $\vec{X}_0$.

Conclusion :

$$\vec{X} \overset{f}{\mapsto} \|\vec{X}\|^2 \textbf{ est différentiable sur } \mathbb{R}^n \textbf{ et}$$
$$\forall \vec{X_0} \in \mathbb{R}^n, \forall \vec{H} \in \mathbb{R}^n, d_{\vec{X_0}} f(\vec{H}) = 2\ \vec{X_0} \cdot \vec{H}.$$

2.15

indications

- *Raisonner comme pour l'exercice 2.14.*
- *Noter que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel de dimension finie.*
- *Appliquer le résultat de l'exercice 1.19.*
- *Ne pas oublier que le produit matriciel n'est pas commutatif.*

solution

$\mathcal{M}$ est un espace vectoriel réel de dimension n^2.

Par conséquent, d'après l'exercice 1.19, deux normes quelconques de $\mathcal{M}$ sont équivalentes.

Considérons par exemple une des normes définies à l'exercice 1.7.

On a :

(1) $\exists\, k > 0 \,/\, \forall\, (M, N) \in \mathcal{M}^2, \quad \|MN\| \leqslant k\, \|M\|\, \|N\|.$

Soit $H_0 \in \mathcal{M}$.

Montrons que f est différentiable en H_0.

Pour cela, il faut établir qu'il existe un endomorphisme ℓ de $\mathcal{M}$ tel que :

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(H_0 + H) - f(H_0) - \ell(H)}{\|H\|} = 0.$$

On obtient :

$$\forall\, H \in \mathcal{M}, \quad f(H_0 + H) - f(H_0) = H_0H + HH_0 + H^2.$$

Posons :

$$\forall\, H \in \mathcal{M}, \quad \ell(H) = H_0H + HH_0.$$

ℓ est un endomorphisme de $\mathcal{M}$.

De plus :

$$\forall\, H \in \mathcal{M} - \{0\},\ \varepsilon\,(H) = \frac{H^2}{\|H\|}.$$

Or, d'après (1) :

$$\|H^2\| \leqslant k\, \|H\|^2.$$

Donc

$$\forall\, H \in \mathcal{M} - \{0\}, \quad \|\varepsilon\,(H)\| \leqslant k\, \|H\|.$$

D'où $$\lim_{H \to 0} \|\varepsilon\,(H)\| = 0.$$

Ce qui équivaut à : $\lim\limits_{H \to 0} \varepsilon\,(H) = 0.$

Il en résulte :

f différentiable en H_0 et $d_{H_0} f(H) = H_0 H + H H_0$.

Conclusion :

$$\boldsymbol{M \overset{f}{\mapsto} M^2} \textbf{ est différentiable sur } \mathcal{M} \textbf{ et}$$
$$\boldsymbol{\forall\ (H, H_0) \in \mathcal{M}^2,\ d_{H_0} f\,(H) = H_0 H + H H_0.}$$

2.16

indications

Considérer $X_0 \in E$.

Déterminer une application linéaire continue ℓ de E vers F telle que :

$$f(X_0 + H) - f(X_0) - \ell(H) = \|H\|\ \varepsilon(H) \text{ où } \lim_{H \to 0} \varepsilon(H) = 0.$$

solution

Soit $X_0 \in E$.

On a : $\forall\ H \in E,\quad f(X_0 + H) - f(X_0) = f(H)$.

Posons : $\ell = f$.

On obtient alors :

$$f(X_0 + H) - f(X_0) - \ell(H) = \|H\|\ \varepsilon(H) \quad \text{où} \quad \forall\ H \in E,\quad \varepsilon(H) = 0.$$

De plus, par hypothèse, ℓ est linéaire et continue.

Conclusion :

si *E* et *F* sont deux espaces vectoriels normés, toute application linéaire et continue de *E* vers *F* est différentiable.

2.17

indications

Considérer $X_0 \in E$.

Noter que :

$$f(X_0 + H) - f(X_0) - \ell(H) = \|H\|\ \varepsilon(H)$$

où ℓ est une application linéaire continue et $\lim_{H \to 0} \varepsilon(H) = 0$.

solution

Soit $X_0 \in E$.

Pour tout élément H de E tel que $X_0 + H$ soit dans une voisinage de X_0, on a :

$$f(X_0 + H) - f(X_0) - \ell(H) = \|H\|\ \varepsilon(H) \quad \text{où} \quad \lim_{H \to 0} \varepsilon(H) = 0.$$

Or ℓ est linéaire et continue,

donc $\lim_{H \to 0} \ell(H) = \ell(0) = 0.$

D'où $\lim_{H \to 0} f(X_0 + H) = f(X_0)$,

ce qui montre que f est continue en X_0.

Conclusion :

toute application différentiable est continue.

2.18

indications

• *Traduire :* $\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in A_j}} f(X) = L$.

• *Noter que :* $\forall\, X \in A, \quad \exists\, j \in [1; q] \,/\, X \in A_j$.

solution

Soit $\varepsilon > 0$.

D'après (ii), on a :

(iii) $\quad \exists\, \alpha_j > 0 \,/\, \forall\, X \in A_j, \quad \|X - X_0\| \leqslant \alpha_j \quad \Rightarrow \quad \|f(X) - L\| \leqslant \varepsilon.$

D'après (i), on a :

$$\forall\, X \in A, \quad \exists\, j \in [1 ; q] \,/\, X \in A_j.$$

Posons $\alpha = \min_{1 \leqslant i \leqslant q} \alpha_j$.

On obtient alors :

$$\forall\, X \in A, \|X - X_0\| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\, j \in [1 ; q] \,/\, X \in A_j \quad \text{et} \quad \|X - X_0\| \leqslant \alpha_j.$$

Par suite, d'après (iii) : $\|f(X) - L\| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi

$$\exists\, \alpha > 0 \,/\, \forall\, X \in A, \quad \|X - X_0\| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \|f(X) - L\| \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui montre que $\lim_{X \to X_0} f(X) = L$.

Conclusion

$$\textbf{si} \quad \boldsymbol{A = \bigcup_{i=1}^{q} A_i} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in A_i}} f(X) = L} \quad \textbf{pour tout} \quad \boldsymbol{i \in [1 ; q]},$$

$$\textbf{alors} \quad \boldsymbol{\lim_{X \to X_0} f(X) = L}.$$

2.19

indications

1. • *Traduire l'hypothèse :* $\lim_{X \to X_0} f(X) = L$.

• *Noter que :* $L \in \overline{f(A)} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad B(L ; \varepsilon) \cap f(A) \neq \varnothing$.

solution

1. • L'hypothèse $X_0 \in \overline{A}$ assure :

(1) $\quad \forall\, \alpha > 0, \quad \exists\, X \in A \,/\, \|X - X_0\| < \alpha.$

• Nous avons par hypothèse : $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = L.$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a alors :

(2) $\quad \exists\, \alpha > 0 \,/\, X \in A$ et $\|X - X_0\| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \|f(X) - L\| < \varepsilon.$

Remarquons que :

$$X \in A \quad \Rightarrow \quad f(X) \in f(A).$$

Par ailleurs : $\| f(X) - L\| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad f(X) \in B\,(L\,;\,\varepsilon).$

Ainsi la proposition (2) équivaut à :

(3) $\quad \exists\, \alpha > 0 \,/\, X \in A$ et $\|X - X_0\| < \alpha \quad \Rightarrow \quad f(X) \in B\,(L\,;\,\varepsilon) \cap f(A).$

Par conséquent, la combinaison de (1) et (3) donne :

$$B(L\,;\,\varepsilon) \cap f(A) \neq \varnothing.$$

Conclusion :

$$\textbf{si} \quad \boldsymbol{X_0 \in \overline{A}} \quad \textbf{et} \quad \lim_{X \to X_0} \boldsymbol{f(X) = L}, \quad \textbf{alors} \quad \boldsymbol{L \in \overline{f(A)}}.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$.

On a : $\lim\limits_{Y \to L} g(Y) = M.$

Cela équivaut à :

(4) $\quad \exists\, \alpha > 0 \,/\, \quad \|Y - L\| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \|g(Y) - M\| < \varepsilon.$

Comme $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = L$, on obtient :

$$\exists\, ß > 0 \,/\, \|X - X_0\| < ß \quad \Rightarrow \quad \|f(X) - L\| < \alpha.$$

On en déduit, d'après la proposition (4) :

$$\exists\, ß > 0 \,/\, \|X - X_0\| < ß \quad \Rightarrow \quad \|g(f(X)) - M\| < \varepsilon.$$

D'où

$$\lim_{X \to X_0} \boldsymbol{g \circ f(X) = M}.$$

2.20

indications

Noter que : $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{X_0}) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{X_0} + t\vec{u}) - f(\vec{X_0})}{t}$ *et* $f(\vec{X_0} + \vec{H}) - f(\vec{X_0}) = \ell(\vec{H}) + \|\vec{H}\|\, \varepsilon\,(\vec{H}).$

Poser $\vec{H} = t\vec{u}.$

solution

Par définition : $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{X}_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{X}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{X}_0)}{t}$.

Par ailleurs, f étant différentiable en $\vec{X}_0$, on a :

(1) $\quad f(\vec{X}_0 + \vec{H}) - f(\vec{X}_0) = \ell(\vec{H}) + \|\vec{H}\|\ \varepsilon(\vec{H})$

où $\lim\limits_{\vec{H} \to \vec{0}} \varepsilon(\vec{H}) = \vec{0}$ et $\ell(\vec{H}) = d_{\vec{X}_0} f(\vec{H})$.

Posons $\vec{H} = t\vec{u}$.

La proposition (1) devient :

$$f(\vec{X}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{X}_0) = t\ \ell(\vec{u}) + |t|\ \|\vec{u}\|\ \varepsilon(t\vec{u}) \quad \text{où} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t\vec{u}) = \vec{0}.$$

On en déduit :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{X}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{X}_0)}{t} = \ell(\vec{u}).$$

Il en résulte :

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{X}_0) = d_{\vec{X}_0} f(\vec{u}).}$$

2.21

indications

Établir que : $\quad \forall\ \vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}, \quad d_{\vec{X}_0} f(\vec{u}) = 0.$

Pour cela, appliquer le résultat de l'exercice 2.20.

solution

Supposons que f admette un maximum en $\vec{X}_0$, c'est-à-dire :
il existe un voisinage V de $\vec{X}_0$ inclus dans A tel que :

$$\forall\ \vec{X} \in V, f(\vec{X}) - f(\vec{X}_0) \leqslant 0.$$

Soient $\vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ et $t \in \mathbb{R}^*$, tels que $\vec{X}_0 + t\vec{u} \in V$.

On a :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(\vec{X}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{X}_0)}{t} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 0^-} \frac{f(\vec{X}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{X}_0)}{t} \geqslant 0.$$

Or $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{X}_0)$ existe, car f est différentiable en $\vec{X}_0$.

Donc $\quad \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{X}_0) = 0.$

D'après le résultat de l'exercice 2.20 : $\quad d_{\vec{X}_0} f(\vec{u}) = 0.$

Ainsi : $\forall\ \vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}, d_{\vec{X}_0} f(\vec{u}) = 0.$

De plus $d_{\vec{X}_0} f(\vec{0}) = 0$ car $d_{\vec{X}_0} f$ est une application linéaire.
Conclusion :

si f admet un extremum en $\vec{X}_0$, alors la différentielle de f en $\vec{X}_0$ est nulle.

2.22

indication

*Appliquer le théorème **12**.*

solution

• Montrons que f est bijective.
Soit $(r, \theta, \varphi) \in D$.
Posons : $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$ et $z = r \cos\theta$.
On a, par hypothèses :

$$r > 0, \quad \theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \varphi \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[.$$

On en déduit : $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$.
Posons $\triangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x > 0,\ y > 0 \text{ et } z > 0\}$.
Pour tout $(x, y, z) \in \triangle$, étudions l'équation vectorielle :

(1) $(x, y, z) = \phi\,(r, \theta, \varphi)$,

les inconnues étant r, θ et φ.
L'équation (1) équivaut à :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta. \end{cases}$$

On en déduit :

(2) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$;

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$;

(4) $\cos\theta = \dfrac{z}{r}$.

On déduit de (2) : $\varphi = \operatorname{Arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Or $\dfrac{y}{x} > 0$; donc $\varphi \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On déduit de (3) :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{car} \quad r > 0.$$

De plus : $z < r$.

Par suite : $0 < \dfrac{z}{r} < 1$ et $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{z}{r}\right)$,

d'où $\theta \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

En résumé :

$$\forall\ (x, y, z) \in \triangle, \quad \exists!\ (r, \theta, \varphi) \in D\ /\ (x, y, z) = \phi\ (r, \theta, \varphi)\ ;$$

ce qui montre que ϕ est une bijection de D sur $\triangle$.

• Montrons que ϕ est différentiable en tout point de D.

Pour tout $(r, \theta, \varphi) \in D$, posons :

$$\phi_1\ (r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \cos\varphi, \quad \phi_2\ (r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \sin\varphi, \quad \phi_3\ (r, \theta, \varphi) = r \cos\theta.$$

Pour $\theta \in \left]0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi \in \left]0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$, $r \mapsto \phi_1\ (r, \theta, \varphi)$ est dérivable sur $]0\ ; +\infty[$.

De plus $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}$ est continue sur D.

De même $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\theta}$ et $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\varphi}$ existent et sont continues sur D.

On en déduit, d'après le théorème **9** :

ϕ_1 est différentiable sur D.

Le même raisonnement donne :

ϕ_2 et ϕ_3 sont différentiables sur D.

D'après le théorème **7** :

ϕ est différentiable sur D.

• Déterminons le déterminant jacobien de ϕ en tout point $(r, \theta, \varphi) \in D$.

On a :

$$J_\phi\ (r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\det J_\phi\ (r, \theta, \varphi) = r^2 \sin\theta.$$

Ainsi

$$\forall\ (r, \theta, \varphi) \in D,\ \ \det J_\phi\ (r, \theta, \varphi) \neq 0.$$

En résumé :

$\boldsymbol{\phi}$ **est un difféomorphisme de D =** $\boldsymbol{\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3\ /\ r > 0,\ \ \theta \in \left]0\ ;\frac{\pi}{2}\right[}$ **et** $\boldsymbol{\varphi \in \left]0\ ;\frac{\pi}{2}\right[\}}$ **sur** $\boldsymbol{\triangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x > 0,\ \ y > 0}$ **et** $\boldsymbol{z > 0\}}$**.**

2.23

indication

Raisonner comme pour l'exercice 2.22.

solution

• Montrons que ϕ est bijective.

$\forall\ (x, y) \in D, \qquad x^2 + y^2 \geqslant 0.$

Soient $u \geqslant 0$ et $v \in \mathbb{R}$.
Résolvons le système d'équations :

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = u \\ x + y = v. \end{cases}$$

Ce système d'équations équivaut à :

$$\begin{cases} y = v - x \\ 2x^2 - 2vx + v^2 - u = 0. \end{cases}$$

Si $2u - v^2 > 0$, alors il y a deux solutions :

$$(2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{v + \sqrt{2u - v^2}}{2} \\ \\ y = \dfrac{v - \sqrt{2u - v^2}}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad (3) \quad \begin{cases} x = \dfrac{v - \sqrt{2u - v^2}}{2} \\ \\ y = \dfrac{v + \sqrt{2u - v^2}}{2}. \end{cases}$$

La solution (2) est unique dans D.
Ainsi
ϕ est une bijection de D sur $\triangle = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;/\; u \geqslant 0,\ \ 2u > v^2\}$.

• En procédant comme pour l'exercice 2.22, on obtient :

ϕ est différentiable en tout point de D.

• Pour tout $(x, y) \in D$, on a :

$$\det J_\phi\,(x, y) = 2\,(x - y) \neq 0.$$

En résumé :

ϕ est un difféomorphisme de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > y\}$ sur $\triangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geqslant 0$ et $2x > y^2\}$.

2.24

indication

Raisonner comme pour l'exercice 2.22.

solution

• Soit $(x, y) \in D$.
Posons : $u = -x + y^2$ et $v = x + y^2$.
On en déduit : $u + v > 0$.
Considérons $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ avec $u + v > 0$ et résolvons le système :

$$(1) \quad \begin{cases} y^2 - x = u \\ x + y^2 = v \\ (x, y) \in D. \end{cases}$$

Ce système a une solution unique :

$$x = \frac{v-u}{2} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{\frac{u+v}{2}}.$$

D'où

ϕ est une bijection de D sur $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u + v > 0\}$.

• Le raisonnement de l'exercice 2.22 donne :

ϕ est différentiable en tout point de D.

• Le déterminant jacobien est non nul en tout point de D.

Conclusion :

ϕ est un difféomorphisme de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$
sur $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > -y\}$.

2.25

indications

• *Raisonner comme pour l'exercice 2.23.*
• *Noter que : si* $u = -x^2 + xy$ *et* $v = y^2 - xy$, *alors* $v > u$.

solution

• Étudions la bijection de f.
Soit $(x, y) \in D$.
Posons : $u = -x^2 + xy$ et $v = y^2 - xy$.
On a : $u < 0$ et $v < 0$.
De plus : $v - u > 0$ et $u + v < 0$.
Considérons $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u < v < 0$ et $u + v < 0$ et résolvons le système d'équations :

$$(1) \quad \begin{cases} x\,(y-x) = u \\ y\,(y-x) = v \\ (x, y) \in D. \end{cases}$$

On en déduit :

$$(1) \quad \begin{cases} y = \dfrac{xv}{u} \\ x^2\,(v-u) = u^2 \\ (x, y) \in D. \end{cases}$$

On obtient la solution unique :

$$x = \frac{-u}{\sqrt{v-u}} \quad \text{et} \quad y = \frac{-v}{\sqrt{v-u}}.$$

Si on pose $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u < v < 0 < -u\}$, alors ϕ est une bijection de D sur D'.

• Le raisonnement de l'exercice 2.22 fournit :

ϕ est différentiable en tout point de D.

• En tout point de D, le déterminant jacobien est non nul.

En résumé :

$$\boldsymbol{\phi \text{ est un difféomorphisme de } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > y > 0\}}$$
$$\boldsymbol{\text{sur } D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < y < 0 < -x\}.}$$

2.26

indications

2. Noter que :

si ψ est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I, alors ψ est convexe sur I si, et seulement si,

$$\forall\ (a, x) \in I^2,\quad \psi(x) \geqslant \psi(a) + \psi'(a)(x - a).$$

solution

1. • Supposons (ii).

Soit $(x, y) \in A^2$.

Posons $\varphi(t) = f(tx + (1 - t)y)$.

Comme φ est convexe sur $[0 ; 1]$, on a :

$$\forall\ t \in [0 ; 1],\quad \varphi(t) = \varphi(t \times 1 + (1 - t) \times 0) \leqslant t\,\varphi(1) + (1 - t)\,\varphi(0).$$

Or

$$t\,\varphi(1) + (1 - t)\,\varphi(0) = t\,f(x) + (1 - t)\,f(y).$$

Donc

$$\forall\ t \in [0 ; 1],\quad f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t)\,f(y).$$

D'où

$$f \text{ est convexe sur } A.$$

• Supposons que f soit convexe sur A.

Soit $(x, y) \in A^2$.

Montrons que :

$$\forall\ (a, b, t) \in [0 ; 1]^3,\quad \varphi(ta + (1 - t)b) \leqslant t\,\varphi(a) + (1 - t)\,\varphi(b).$$

Posons : $x_1 = ax + (1 - a)y$ et $y_1 = bx + (1 - b)y$.

On a : $(x_1, y_1) \in A^2$ car A est convexe ; de plus

$$\varphi(a) = f(x_1) \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(y_1).$$

Par ailleurs :

$$\varphi(ta + (1 - t)b) = f(tx_1 + (1 - t)y_1).$$

Or f est convexe.

Donc $\quad f(tx_1 + (1 - t)y_1) \leqslant tf(x_1) + (1 - t)\,f(y_1).$

D'où $\quad \varphi(ta + (1 - t)b) \leqslant t\varphi(a) + (1 - t)\,\varphi(b).$

Ce qui montre que φ est convexe.

Conclusion :

les propositions (*i*) et (*ii*) sont équivalentes.

2. Rappelons que :

(1) si ψ est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I, alors ψ est convexe sur I si, et seulement si :

$$\forall\ (a, x) \in I^2,\ \ \psi(x) \geqslant \psi(a) + \psi'(a)(x-a).$$

D'après la question **1**, on a l'équivalence des propositions :

(i) f est convexe sur A ;

(ii) $\forall\ (a, x) \in A^2,\ \ t \mapsto \varphi(t) = f(tx + (1-t)\,a)$ est convexe sur [0 ;1].

• Supposons que f soit convexe sur A.

D'après (1), on en déduit :

(2) $\varphi(1) \geqslant \varphi(0) + \varphi'(0)$.

Or $\varphi'(\mathrm{t}) = d_{tx+(1-t)\,a} f(x-a)$.

Donc la proposition (2) équivaut à :

$$f(x) \geqslant f(a) + d_a f(x-a).$$

D'où (i) $\Rightarrow$ (iii).

• Supposons (iii).

Soit $(x, y) \in A^2$.

Posons $\forall\ t \in [0\ ;\ 1],\ \varphi(t) = f(tx + (1-t)\,y)$.

On a alors : $\forall\ (\alpha, \beta) \in [0\ ;\ 1]^2$,

$$f(\beta x + (1-\beta)\,y) \geqslant f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) + d_{\alpha x + (1-\alpha)\,y}\, f[(\beta-\alpha)(x-y)].$$

Ce qui équivaut à :

$$\varphi(\beta) \geqslant \varphi(\alpha) + (\beta-\alpha)\,\varphi'(\alpha).$$

D'après (1), on en déduit :

$$\varphi \text{ est convexe sur } [0\ ;\ 1].$$

Par suite, f est convexe sur A.

Conclusion :

si A est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, et f une application différentiable de A dans $\mathbb{R}$, alors f est convexe sur A si, et seulement si, $\forall\ (a, x) \in A^2,\ \ f(x) \geqslant f(a) + d_a f(x-a)$.

2.27

indication

Raisonner comme pour l'exercice 2.22.

solution

• On a : $\varphi(A) \subset\ ]0\ ;+\infty[\times\mathbb{R}$.

Soit $(u,v) \in\ ]0\ ;+\infty[\times\mathbb{R}$.

Résolvons le système d'équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y^2 - x^2}{2} = v \\ (x, y) \in A. \end{cases}$$

Ce système d'équations équivaut à :

$$\begin{cases} y = \dfrac{u}{x} \\ X = x^2 \\ X^2 + 2vX - u^2 = 0 \\ (x, y) \in A. \end{cases}$$

Résolvons : $\quad X^2 + 2vX - u^2 = 0.$

On obtient : $\quad X = -v + \sqrt{u^2 + v^2}$ ou $X = -v - \sqrt{u^2 + v^2}$.

De plus :

$$\forall\ (u, v) \in \left]0\,;+\infty\right[\times \mathbb{R},\ v < \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{et} \quad -v < \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Ainsi (1) équivaut à :

$$\begin{cases} y = \dfrac{u}{x} \\ x = \sqrt{-v + \sqrt{u^2 + v^2}}. \end{cases}$$

On en déduit : $\quad y = \dfrac{u}{\sqrt{-v + \sqrt{u^2 + v^2}}}.$

Cela équivaut à : $\quad y^2 = \dfrac{u^2}{-v + \sqrt{u^2 + v^2}} = \dfrac{u^2\,(v + \sqrt{u^2 + v^2})}{u^2}.$

Par suite : $\quad y = \sqrt{v + \sqrt{u^2 + v^2}}.$

D'où : φ est une bijection de A sur $B = \left]0\,;+\infty\right[\times \mathbb{R}$.

• Le raisonnement de l'exercice 2.22 permet de conclure :
  φ est un difféomorphisme de $A = \left]0\,;+\infty\right[\times \left]0\,;+\infty\right[$ sur $B = \left]0\,;+\infty\right[\times \mathbb{R}$.

2.28

indications

1. Se servir des variations de la fonction $t \mapsto te^{-t}$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. Étudier la différentiabilité de f en $\overrightarrow{X_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Pour cela, distinguer plusieurs cas : $(x_0 \neq 0, y_0 \neq 0)$, $(0, y_0 \neq 0)$, $(x_0 \neq 0, 0)$ et $(0, 0)$.

solution

1. Déterminons $\lim\limits_{\vec{X} \to \vec{0}} f(\vec{X})$.

On a :

$$\forall\, x \neq 0, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 \left(\frac{|y|}{x^2}\, e^{-\frac{|y|}{x^2}} \right).$$

L'étude des variations de $t \mapsto te^{-t}$ sur $[0\,; +\infty[$ donne :

(1) $\quad \forall\, t \in [0\,; +\infty[,\ te^{-t} \leqslant \dfrac{1}{e}.$

On en déduit :

$$\forall\, x \neq 0, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant f(x, y) \leqslant \frac{x^2}{e} \leqslant x^2 \leqslant \|(x, y)\|^2.$$

D'où

$$\lim_{\vec{X} \to \vec{0}} f(\vec{X}) = 0 = f(\vec{0}).$$

Ce qui montre que :

$$\boldsymbol{f \text{ est continue en } \vec{0}.}$$

2. • Posons $\triangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \neq 0 \ \text{ et } \ y \neq \{0\}$.

Pour $y \neq 0$, $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\vec{0}\}$.

De plus : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\triangle$.

De même : $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur $\triangle$.

D'après le théorème **9**, on obtient :

f est différentiable en tout point de $\triangle$.

• Étudions la différentiabilité de f en $\vec{X_0} = (x_0, 0)$, avec $x_0 \neq 0$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{X_0} + t\vec{j}) - f(\vec{X_0})}{t} = \lim_{t \to 0} |t| \frac{e^{-|t|/x_0^2}}{t}.$$

Il en résulte que f n'est pas dérivable en $\vec{X_0}$ suivant $\vec{j}$.

Par conséquent, f n'est pas différentiable en $(x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$.

• Étudions la différentiabilité de f en $\vec{X_0}\ (0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$.

On obtient : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{X_0}) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{X_0}) = 0.$

Soit $\vec{H} = (h_1, h_2)$ avec $h_1 \neq 0$.

Considérons

$$\varepsilon(\vec{H}) = \frac{f(\vec{X_0} + \vec{H}) - f(\vec{X_0})}{\|\vec{H}\|}.$$

On a :

$$\varepsilon\left(\vec{H}\right) = \frac{h_1^2\, te^{-t}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}},$$

$$\text{avec} \quad t = \left|\frac{y_0 + h_2}{h_1^2}\right|.$$

Ainsi

$$\forall\, \vec{H} = (h_1, h_2) \text{ avec } h_1 \neq 0, \quad |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant \frac{h_1^2}{e\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leqslant \|\vec{H}\|.$$

Par ailleurs, $\varepsilon(\vec{H}) = 0$ si $h_1 = 0$ et $h_2 \neq 0$.

Par conséquent : $\forall\, \vec{H} \neq 0, \quad |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant \|\vec{H}\|$.

D'où $\lim\limits_{\vec{H} \to \vec{0}} \varepsilon\left(\vec{H}\right) = 0.$

Il en résulte :
f est différentiable en $(0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$, et sa différentielle est l'application nulle.

• Étudions la différentiabilité de f en $\vec{0}$.
On obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\vec{0}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\vec{0}\right) = 0.$$

Considérons pour $\vec{H} = (h_1, h_2) \neq \vec{0}$.

$$\varepsilon\left(\vec{H}\right) = \frac{f\left(\vec{0} + \vec{H}\right) - f\left(\vec{0}\right)}{\|\vec{H}\|}.$$

On obtient :

$$\varepsilon\left(\vec{H}\right) = \begin{cases} \dfrac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\, te^{-t} & \text{avec} \quad t = \dfrac{|h_2|}{h_1^2} \quad \text{si} \quad h_1 \neq 0\,; \\[2ex] 0 & \text{si } h_1 = 0 \quad \text{et} \quad h_2 \neq 0. \end{cases}$$

D'où $\forall\, \vec{H} \neq 0, \quad |\varepsilon(\vec{H})| \leqslant \|\vec{H}\|$.

Ce qui montre que f est différentiable en $\vec{0}$.
Conclusion :

f n'est différentiable que sur $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0), x \in \mathbb{R}^*\}$.

2.29

indications

• *Étudier la différentiabilité de f en* (x_0, x_0), $x_0 \in \mathbb{R}$.
Pour cela, considérer, pour tout réel x :

$\psi(x) = \sin x - (x - x_0)\cos x_0 + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \sin x_0.$

• *Établir à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange et du théorème des accroissements finis que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \forall y \in \mathbb{R},\quad |\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|\,\|(x - x_0, y - x_0)\|^2.$$

solution

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

• Étudions la différentiabilité de f en $\vec{X_0} = (x_0, x_0)$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{X_0} + t\vec{i}\,) - f(\vec{X_0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\sin(x_0 + t) - \sin x_0}{t} - \cos x_0}{t}.$$

Or : $\sin(x_0 + t) = \sin x_0 \cos t + \cos x_0 \sin t,$

$$\sin t = t + t^2 \varphi_1(t) \quad \text{et} \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2 \varphi_2(t).$$

Donc : $\sin(x_0 + t) - \sin x_0 = t\cos x_0 - \dfrac{t^2}{2}\sin x_0 + t^2 \varphi(t)$ où $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 0.$

Ainsi : $$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\vec{X_0}\right) = -\frac{1}{2}\sin x_0.$$

De même : $$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\vec{X_0}\right) = -\frac{1}{2}\sin x_0.$$

• Soit $\vec{H} = (h_1, h_2)$ où $h_1 \neq h_2$ et $\vec{H} \neq \vec{0}$.
Considérons :

$$\varepsilon\left(\vec{H}\right) = \frac{f\left(\vec{X_0} + \vec{H}\right) - f\left(\vec{X_0}\right) + \dfrac{1}{2}(h_1 + h_2)\sin x_0}{\|\vec{H}\|}.$$

Pour tout réel x, posons :

$$\psi(x) = \sin x - (x - x_0)\cos x_0 + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \sin x_0.$$

La formule de Taylor-Lagrange donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x - \cos x_0 + (x - x_0)\sin x_0| \leqslant \frac{1}{2}(x - x_0)^2.$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, |\psi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}(x - x_0)^2.$

On en déduit, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ |\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x-y|\ \|(x-x_0,\, y-x_0)\|^2.$$

Or $\quad \varepsilon\left(\overrightarrow{H}\right) = \dfrac{\psi(x_0+h_1) - \psi(x_0+h_2)}{(h_1-h_2)\,\|\overrightarrow{H}\|}.$

Donc $\quad \forall\, \overrightarrow{H} = (h_1, h_2) \neq \overrightarrow{0} \quad$ avec $\quad h_1 \neq h_2, \quad |\varepsilon\left(\overrightarrow{H}\right)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,\|\overrightarrow{H}\|.$

Cette inégalité reste vraie pour $\quad \overrightarrow{H} = (h, h) \quad$ avec $\quad h \neq 0.$

D'où

$$\lim_{\overrightarrow{H} \to \overrightarrow{0}} \varepsilon\left(\overrightarrow{H}\right) = 0.$$

En résumé :

f est différentiable en tout point de $\triangle$.

2.30

indication

Établir que :

$$\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ x \mapsto x + f(a - f(x)) + b \text{ est une bijection sur } \mathbb{R}.$$

solution

- Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Résolvons le système d'équations suivant :

$$(2) \qquad \begin{cases} x + f(y) = u \\ y + f(x) = v. \end{cases}$$

Ce système d'équations équivaut à : $\begin{cases} y = v - f(x) \\ x + f(v - f(x)) - u = 0. \end{cases}$

Pour tout réel x, posons $\varphi(x) = x + f(v - f(x)) - u$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = 1 - f'(v - f(x))\, f'(x).$

D'après (1) : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) > 0.$

Par conséquent : φ est une bijection sur $\mathbb{R}$.

D'où

$$\exists!\, x \in \mathbb{R} \,/\, \varphi(x) = x + f(v - f(x)) - u = 0.$$

Il en résulte que le système d'équations (2) a une solution unique.

Nous avons démontré que ϕ est une bijection sur $\mathbb{R}^2$.

- Le raisonnement de l'exercice 2.22 fournit :

$$\phi \text{ est différentiable en tout point de } \mathbb{R}^2.$$

• En tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a, d'après (1) :

$$\det J_\phi(x, y) = 1 - f'(x) f'(y) \neq 0.$$

En résumé :

ϕ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2.31

indication

*Appliquer le théorème **13**.*

solution

Posons $h = b - a$ et $\varphi(t) = f(a + th)$.
φ est une application de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}^p$.
Par ailleurs, φ est continue sur $[0 ; 1]$ et dérivable en tout point de $]0 ; 1[$.
De plus : $\forall\, t \in\,]0 ; 1[,\ \varphi'(t) = d_{a+th}f(h)$; et $\|\varphi'(t)\| \leqslant \|d_{a+th}f\|\,\|h\| \leqslant M\,\|h\|$.
D'après le théorème **13** :
$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| = \|f(a+h) - f(a)\| \leqslant M\,\|h\|$, ce qui équivaut à : $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\,\|b - a\|$.
Nous avons établi :

l'inégalité des accroissements finis pour une application vectorielle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

2.32

indication

Appliquer le résultat de l'exercice 2.31.

solution

• Si f est constante sur A, alors en tout point de A, les dérivées partielles sont nulles.
• Si les dérivées partielles de f sont nulles sur A, alors la différentielle de f en tout point de A est l'application nulle.
Soit $(a, b) \in A^2$; le segment $I = [a ; b]$ est inclus dans A car A est convexe.
En appliquant le résultat de l'exercice 2.31 avec $M = 0$, on a :

$$\|f(a) - f(b)\| = 0.$$

On en déduit : f est constante sur A.
Conclusion :

si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur un ouvert convexe A, alors f est constante sur A si, et seulement si, les dérivées partielles de f sont nulles sur A.

3

Séries numériques

Éléments de cours

E est un espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Série

Soit (u_n) une suite de (E).
Pour tout entier n, on pose : $S_n = u_0 + ... + u_n$.
S_n est appelé somme partielle, et on dit que la suite (S_n) définit la série de E de terme général u_n.
On appelle **série numérique** toute série de nombres réels.

Convergence

Soit (u_n) une suite de E.
On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) converge vers un élément S de E.
S est appelé somme de la série et on note :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

On dit que la série de terme général u_n diverge lorsque la suite (S_n) diverge.

Théorème 1

Soit (u_n) une suite de E. Pour que la série de terme général u_n converge, il est nécessaire mais non suffisant que la suite (u_n) converge vers 0.

Théorème 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de E.
(i) On suppose que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent.
Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in K^2$, la série de terme général $\alpha u_n + \beta v_n$ converge.
(ii) On suppose que les séries de termes généraux u_n et v_n sont respectivement convergente et divergente.
Alors, la série de terme général $u_n + v_n$ diverge.

Théorème 3

(i) La série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$, converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

(ii) La série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, diverge.

Théorème 4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques à termes positifs telles que :
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \leqslant v_n$.

(i) Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si la série de terme général u_n diverge, il en est de même de la série de terme général v_n et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

Théorème 5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques strictement positives telles que : $\exists\, k > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k$.

Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.
Ce résultat, est vrai, en particulier, lorsque les suites (u_n) et (v_n) strictement positives vérifient : $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$.

Séries de Riemann

On appelle série de Riemann toute série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lorsque la série converge, sa somme est appelée somme de Riemann.

Théorème 6

La série de Riemann converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leqslant 1$.

Théorème 7

Soit (u_n) une suite numérique à termes positifs.

(i) S'il existe $k < 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\sqrt[n]{u_n} \leqslant k$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors la série de terme général u_n converge.

(ii) Si on a $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors la série de terme général u_n diverge.

Théorème 8

Soit (u_n) une suite numérique à termes strictement positifs.

(i) S'il existe $k < 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors la série de terme général u_n converge.

(ii) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors la série de terme général u_n diverge.

Théorème 9 (Règle de D'ALEMBERT)

Soit (u_n) une suite numérique à termes strictement positifs.

On suppose : $\exists\ \ell \geqslant 0 \ / \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

(i) Si $\ell < 1$, alors la série de terme général u_n converge.

(ii) Si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

Théorème 10 (Règle de CAUCHY)

Soit (u_n) une suite numérique à termes positifs.

On suppose : $\exists\ \ell \geqslant 0 \ / \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

(i) Si $\ell < 1$, alors la série de terme général u_n converge.

(ii) Si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

Série alternée

On appelle série alternée une série numérique dont le terme général u_n est de la forme :

$$u_n = (-1)^n v_n$$

où (v_n) est une suite positive.

Théorème 11

Soit $u_n = (-1)^n v_n$ le terme général d'une série alternée telle que la suite (v_n) soit décroissante et de limite nulle.

(i) La série de terme général u_n converge, et si

$S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, alors : $\forall\ p \geqslant 0,\ S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p}$.

(ii) $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |S - S_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Convergence absolue

On dit que la série numérique de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Théorème 12

Toute série numérique absolument convergente est convergente.

Remarque

Une série peut être convergente sans l'être absolument.

Exercices

APPLICATION IMMÉDIATE

Nature de séries particulières

3.1 Soit a un réel. Étudier la nature de la série de terme général a^n.

3.2 Déterminer la nature de la série de terme général u_n défini par :

1. $u_n = e^{\frac{1}{n}}$ **2.** $u_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ **3.** $u_n = \dfrac{e^n}{n^2}$

4. $u_n = \dfrac{1}{n^n}$ **5.** $u_n = \dfrac{\ln(2 + e^{-n})}{n^2}$.

3.3 Montrer que la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)},\ n \geqslant 1,$$

converge, et préciser sa somme.

3.4 Déterminer la nature de la série de terme général u_n défini par :

1. $u_n = \dfrac{\cos^2 n}{n^3}$ **2.** $u_n = \dfrac{\ln n}{n^3}$ **3.** $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

4. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5.** $u_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ **6.** $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

7. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **8.** $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

3.5 **1.** Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n!}$, $n \geqslant 0$, converge. Soit S sa somme.

2. Montrer que : $2 < S < 3$.

Généralités

3.6 **1.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques de même signe telles que les séries de termes généraux u_n et v_n divergent.

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n + v_n$?

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives vérifiant :
(1) $\exists\, a > 0,\ \ \exists\, b > 0,\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\ \ a v_n \leqslant u_n \leqslant b v_n.$
Que peut-on dire des séries de termes généraux u_n et v_n ?

3. Pour tout entier n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{e - \sin n}{n}.$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

3.7 Soit (u_n) une suite numérique positive et décroissante définie sur $\mathbb{N}^*$. On suppose que la série de terme général u_n converge ; soit S sa somme.
Pour tout entier n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,\ \ v_n = n\,(u_n - u_{n+1})\ \ \text{et}\ \ T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

1. Vérifier que la suite (v_n) est positive.

2. a. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ T_n \leqslant S_n \leqslant S.$

b. En déduire que la série de terme général v_n converge.

3. En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, u_n.$

3.8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques strictement positives telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Montrer que :
(*i*) si (Σv_n) converge, alors (Σu_n) converge ;
(*ii*) si (Σu_n) diverge, alors (Σv_n) diverge.

3.9 Soit (u_n) une suite positive telle que la série de terme général u_n converge.
Quelle est la nature de la série de terme général u_n^2 ?

3.10 **1.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques strictement positives telles que :

$$(1) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Montrer que :
(*i*) si (Σu_n) converge, alors (Σv_n) converge ;
(*ii*) si (Σv_n) diverge, alors (Σu_n) diverge.

2. Soit (u_n) une suite numérique strictement positive.
Montrer que :

a. si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$, alors (Σu_n) diverge ;

b. si $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1^+$, alors (Σu_n) diverge.

3.11 Soit (u_n) une suite strictement positive.

1. On suppose : $\exists\ \alpha > 1$ et $\ell \in \mathbb{R} \,/\, \lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha}\, u_n = \ell$.

Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

2. On suppose : $\exists\ \alpha \leqslant 1 \,/\, \lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha}\, u_n = +\infty$.

Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

APPROFONDISSEMENT ET SYNTHÈSE

3.12 Déterminer la nature de la série de terme général u_n défini par :

1. $u_n = e^{-n} \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$ **2.** $u_n = \dfrac{2 \operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2}$

3. $u_n = \dfrac{n}{(-3)^n}$ **4.** $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - e$ **5.** $u_n = \dfrac{n+1}{(-1)^n \sqrt{n} - n}$

6. $u_n = (\ln n)^{-2n}$ **7.** $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ **8.** $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

3.13 Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}.$$

3.14 Pour tout entier n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}.$$

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

3.15 Pour tout entier n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{n^{n+1}}{e^n\,(n+1)!}.$$

1. Montrer que : $\forall\ n \geqslant 1,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$,

où v_n est le terme général d'une série divergente.

2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

3.16 Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = 1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

3.17 **1.** Soit a un réel strictement positif. Étudier suivant les valeurs de a, la convergence de la série de terme général :

$$u_n = 1 - (n + a)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. Pour tout entier n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{e}\right)^{-n}.$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

3.18 Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \ln n\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

3.19 **1.** Pour tout entier n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \, dx$.

Étudier la nature de la série de terme général u_n.

2. On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{\pi}{2}, & v_1 = 1 \\ \forall\ n \geqslant 0, & v_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, v_n. \end{cases}$$

Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

3.20 **1.** Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout réel x :

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1 + x^2}.$$

2. En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n - 1}.$$

3.21 Soit (u_n) une suite positive.

On suppose que la série de terme général u_n converge.

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n}\sqrt{u_n}$.

3.22 Soit (u_n) une suite strictement positive. Montrer que les séries de termes généraux u_n et $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ sont de même nature.

3.23 Soit (u_n) une suite convergente.

Étudier la nature comparée des séries de termes généraux u_n et $\sin u_n$.

3.24 Déterminer toutes les valeurs du réel x pour lesquelles la série de terme général $u_n(x)$ converge :

1. $u_n(x) = \dfrac{1}{(n + |x|)^2}$ **2.** $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

3. $u_n = \dfrac{(-x)^n}{n}$ **4.** $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n)}$

5. $u_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}\,(1 + nx^2)}$ **6.** $u_n(x) = \dfrac{x}{1 + |x|\sqrt{n}}$.

3.25 Soit (a_n) une suite numérique strictement positive telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Discuter suivant les valeurs du réel x, la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n x^n$.

3.26 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}.$$

Déterminer, suivant les valeurs du réel x, la convergence de la série de terme général $(-1)^n v_n x^n$.

3.27 Le but de cet exercice est de proposer une autre démonstration du résultat de l'exercice 3.7.

Montrer que : $\left.\begin{array}{l} (\Sigma u_n) \text{ converge} \\ (u_n) \text{ positive et décroissante} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n\,u_n = 0.$

3.28 **1.** Soient (u_n) une suite strictement positive et un réel α.

On pose : $\forall\, n \geqslant 0,\ \Delta_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}.$

Montrer que :

(i) s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \Delta_n < 0,$$

alors la série de terme général u_n converge ;

(ii) s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha \leqslant 1$ tels que :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \ \Delta_n > 0,$$

alors la série de terme général u_n diverge.

2. Soient (u_n) une suite strictement positive et un réel β.

On suppose : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{1}{n}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Montrer que :

(i) si $\beta > 1$, la série de terme général u_n converge ;

(ii) si $\beta < 1$, la série de terme général u_n diverge.

3.29 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

3.30 Démontrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$

On notera que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$

3.31 Soit (a_n), $n \geqslant 1$, une suite numérique telle que la série de terme général $\dfrac{a_n}{n}$ converge.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$

3.32 **1.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

Pour tout entier n, on pose :

$S_n = u_0 + \ldots + u_n$ et $a_n = v_n - v_{n+1}$.

On suppose :

(i) $\exists\, M > 0 \,/\, \forall\, n \geqslant 0,\ \ |S_n| \leqslant M$;

(ii) la série de terme général a_n converge absolument ;

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Montrer que la série de terme général $u_n\, v_n$ converge.

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

(iv) la série de terme général u_n converge ;

(v) la suite (v_n) est monotone et bornée.

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n\, v_n$?

indications et solutions

3.1

indications

• *Étudier suivant les valeurs de a, la limite de a^n.*
• *Calculer la somme partielle.*

solution

• On a : $\lim_{n \to +\infty} a^n = 0 \;\Leftrightarrow\; |a| < 1$.

Par conséquent, d'après le théorème **1**, la série de terme général a^n diverge pour $|a| \geqslant 1$.

• Soit a un réel tel que $|a| < 1$.

Posons : $u_n = a^n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On a :

$$\forall\, n \geqslant 0,\; S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

et $\lim_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{1-a}$.

Conclusion :

la série numérique de terme général a^n converge si,
et seulement si, $|a| < 1$, et sa somme vaut $\dfrac{1}{1-a}$.

3.2

indications

1. *Calculer* $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
2. *Noter que la série de terme général* $\dfrac{1}{n^2}$ *converge.*
Appliquer le théorème ***5****.*
3. *Calculer* $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
4. *Appliquer le théorème* ***4****.*
5. *Raisonner comme pour la question* ***2****.*

solution

Remarquons que dans chaque cas, la suite (u_n) est positive.

1. On a : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

D'après le théorème **1** :

$$\textbf{la série de terme général } e^{\frac{1}{n}} \textbf{ diverge.}$$

2. La série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (théorème **6**).

On obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{4}$.

Comme les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives, le théorème **5** donne :

les séries sont de même nature.

D'où

$$\textbf{la série de terme général } \frac{1}{(2n+1)^2} \textbf{ converge.}$$

3. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^n}{n^2} = +\infty$.

Il résulte du théorème **1** que :

$$\textbf{la série de terme général } \frac{e^n}{n^2} \textbf{ diverge.}$$

4. On a : $\forall\, n \geqslant 2, \quad n^n \geqslant n^2$.

En effet, pour tout $a \geqslant 1$, $x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge.

Donc

$$\textbf{la série de terme général } \frac{1}{n^n} \textbf{ converge.}$$

5. Le raisonnement de la question **2** donne :

$$\textbf{la série de terme général } \frac{\ln(2+e^{-n})}{n^2} \textbf{ converge.}$$

3.3

indication

Décomposer $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *en éléments simples.*

solution

• Posons $v_n = \dfrac{1}{n^3}$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

De plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

D'après le théorème **5** : la série de terme général u_n converge.

• Décomposons $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ en éléments simples.

On a : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$.

Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

La sommation donne :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Il en résulte que la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{4}$.

Conclusion :

la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge, et sa somme vaut $\frac{1}{4}$.

3.4

indications

2. Noter que : $\forall\, x > 0,\ \ \ln x < x$.

*3. 4. Appliquer le théorème **5**.*

solution

1. La suite (u_n) est positive.

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente.

Donc

la série de terme général $\frac{\cos^2 n}{n^3}$ converge.

2. La suite (u_n) est positive.

Or $\forall\, x > 0,\ \ \ln x < x$.

Donc $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n < \frac{1}{n^2}$.

D'où

la série de terme général $\frac{\ln n}{n^3}$ converge.

3. La suite (u_n) est strictement positive.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

On en déduit :

la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge.

4. La suite (u_n) est strictement positive.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Par conséquent :

la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

5. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

On en déduit, d'après le théorème **2** :

la série de terme général $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

6. La suite (u_n) est strictement positive.

En effet : $\forall\ n \geqslant 1,\ \frac{1}{n^4} \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Par ailleurs : $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^4}} = 1$.

Ainsi :

la série de terme général $\sin\left(\frac{1}{n^4}\right)$ converge.

Autre solution

On a : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$.

On en déduit que la série de terme général u_n converge absolument.

7. La suite (u_n) est strictement positive.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Ainsi

la série de terme général $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

8. La suite (u_n) n'est pas positive.

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi la série de terme général u_n converge absolument.
Par suite :

la série de terme général $\frac{\sin n}{n^2}$ converge.

On a : $\forall\ n \geqslant 1,\quad u_n = \frac{\sin n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$.
*Mais le théorème de comparaison (théorème **4**) ne permet pas de conclure car la suite (u_n) n'est pas positive.*

3.5

indications

- *Remarquer que : $\forall\ n > 3,\quad n! \geqslant n\,(n+1)$.*
- *Appliquer les thorèmes **3** et **4**.*

solution

1. Une démonstration par récurrence donne :

$$\forall\ n > 3,\quad n! > n\,(n+1).$$

On en déduit :

(1) $\qquad \forall\ n > 3,\quad u_n < \frac{1}{n\,(n+1)}.$

Or, d'après le théorème **3**, la série de terme général $\frac{1}{n\,(n+1)}$ converge et sa somme vaut 1.
Donc, d'après le théorème **4** :

la série de terme général $\frac{1}{n!}$ converge.

2. On a : $S = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$

Par conséquent, $S > 2$.
D'après (1), on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}.$$

On en déduit :

$$S - u_0 - u_1 - u_2 - u_3 \leqslant 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}.$$

D'où $S < 3$.
Conclusion : $\mathbf{2 < S < 3.}$

En négligeant les premiers termes d'une série, on ne modifie pas sa nature, mais sa somme si elle converge.

3.6

indications

1. *Noter que : si une série de terme général* u_n *positif diverge, alors* $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.
3. *Appliquer le résultat de la question **2**.*

solution

1. • Supposons que les suites (u_n) et (v_n) soient strictement positives.

Posons : $\forall\, n \geqslant 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

La suite (S_n) diverge car la série de terme général u_n diverge.
De plus, la suite (S_n) est strictement croissante car la suite (u_n) est strictement positive.
On en déduit : $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.
De même : $\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty$.
Par suite, la suite $(S_n + T_n)$ diverge.
D'où :

la série de terme général $u_n + v_n$ diverge.

• Le raisonnement est identique pour deux suites (u_n) et (v_n) strictement négatives.
En résumé :

si (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques de même signe telles que les séries de termes généraux u_n et v_n divergent, alors la série de terme général $u_n + v_n$ diverge.

2. Posons : $\forall\, n \geqslant n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$.

On déduit de (1) :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad aT_n \leqslant S_n \leqslant bT_n,$$

ce qui montre que les suites (S_n) et (T_n) sont de même nature.
Ainsi

si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives telles que :

$$\exists\, a > 0, \ \exists\, b > 0, \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0, \ av_n \leqslant u_n \leqslant bv_n,$$

alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

3. Remarquons que la suite (u_n) est positive.

De plus :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 < \frac{e-1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{e+1}{n}.$$

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge.

Donc, d'après le résultat de la question **2** :

$$\textbf{la série de terme général } \boldsymbol{\frac{e - \sin n}{n}} \textbf{ diverge.}$$

3.7

indications

2.a. Noter que :

- *(1)* $\quad \forall n \geqslant 1, \quad T_n = S_n - n\, u_{n+1}$ *;*
- *la suite* (T_n) *est croissante.*

3. • Se servir de (1).

- *Vérifier que* $S = T$ *où* $T = \lim\limits_{n \to +\infty} T_n$. *Pour cela raisonner par l'absurde à l'aide du théorème **5**.*

solution

1. On a : $\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n - u_{n+1} \geqslant 0.$

Car la suite (u_n) est décroissante.

D'où

la suite (v_n) est positive.

2.a. La sommation donne :

(1) $\quad \forall\, n \geqslant 1, \quad T_n = S_n - n\, u_{n+1}.$

On en déduit : $\forall\, n \geqslant 1, \quad T_n \leqslant S_n.$

Par ailleurs, la suite (S_n) est croissante et converge vers S.

On en déduit :

(2) $\quad \boldsymbol{\forall\, n \geqslant 1, \quad T_n \leqslant S_n \leqslant S.}$

b. La suite (T_n) est croissante d'après le résultat de la question **1**.

De plus, d'après (2), (T_n) est majorée.

On en déduit que la suite (T_n) converge vers un réel T.

Par suite :

la série de terme général v_n converge.

3. D'après (1), on a :

(3) $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} n\, u_{n+1} = S - T.$

Or $S = T$.

En effet, supposons $S \neq T$.
La proposition (3) équivaut à :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{\frac{1}{n}} = S - T.$$

D'après le théorème **5**, la série de terme général u_{n+1} divergerait ; ce qui est absurde.
Donc

(4) $\quad \lim_{n \to +\infty} n\, u_{n+1} = 0.$

Enfin :

$$\forall\ n \geqslant 0, \quad (n+1)\, u_{n+1} = n\, u_{n+1} + u_{n+1}.$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1)\, u_{n+1} = 0.$$

Conclusion :

pour toute suite numérique (u_n) positive et décroissante telle que la série de terme général u_n converge, la suite $(n\, u_n)$ converge vers 0.

3.8

indications

• *Traduire l'hypothèse :* $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$

• *Appliquer le théorème* ***4****.*

solution

Soit $\varepsilon > 0$.
On a, par hypothèse :

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall\ n \geqslant n_0, \quad \frac{u_n}{v_n} \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit :

(1) $\quad \forall\ n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant \varepsilon\, v_n.$

• Supposons que la série de terme général v_n converge. D'après le théorème **2**, la série de terme général εv_n converge.
Par suite, le théorème **4** permet de dire que la série de terme général u_n converge.

• Supposons que la série de terme général u_n diverge.
Le raisonnement précédent indique que la série de terme général v_n diverge.
En résumé :

pour toutes suites (u_n) et (v_n) strictement positives et vérifiant $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, la convergence de la série de terme général v_n implique celle de u_n et la divergence de la série de terme général u_n implique celle de v_n.

3.9

indications

• *Noter que :* $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$
• *Appliquer le théorème* ***4****.*

solution

On a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\ \ |u_n| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\ \ 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

On en déduit :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\ \ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n.$$

D'après le théorème **4**, la série de terme général u_n^2 converge.

Conclusion :

si la série de terme général u_n positif converge, alors il en est de même de la série de terme général u_n^2.

3.10

indications

1. • *Noter que : (1)* $\Rightarrow \forall\, n \geqslant 0,\ \ u_0 v_n \leqslant v_0 u_n.$
• *Appliquer le théorème* ***4****.*

2. • *Noter que* $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+ \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\ \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$

• *Appliquer le théorème* ***1****.*

solution

1. Remarquons que la proposition (1) implique :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ u_0 v_n \leqslant v_0 u_n.$$

D'après le théorème **4** :

si la série de terme général u_n converge, alors la série de terme général v_n converge ;
si la série de terme général v_n diverge, alors la série de terme général u_n diverge.

2. a. On a, par hypothèse :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0,\ \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0.

Or la suite (u_n) est strictement positive.

Donc la suite (u_n) ne converge pas vers 0.
D'après le théorème **1**, la série de terme général u_n diverge.
Ainsi

si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$, alors la série de terme général u_n diverge.

b. On a, par hypothèse :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\quad \sqrt[n]{u_n} \geqslant 1.$$

On en déduit :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\quad u_n \geqslant 1.$$

D'après le théorème **1**, la série de terme général u_n diverge.
Conclusion :

si $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1^+$, alors la série de terme général u_n diverge.

3.11

indications

1. Distinguer deux cas : $\ell = 0$ et $\ell \neq 0$.
*• Pour $\ell \neq 0$, appliquer le théorème **5**.*
• Pour $\ell = 0$, se servir du résultat de l'exercice 3.8.

solution

1. • Supposons $\ell \neq 0$.
On a, par hypothèse :

$$\exists\, \alpha > 1 \,/\, \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\dfrac{1}{n^\alpha}} = \ell.$$

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.
Donc d'après le théorème **5** :
la série de terme général u_n converge.

• Supposons $\ell = 0$.

On a : $\exists\, \alpha > 1 \,/\, \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n^\alpha}} = 0.$

D'après le résultat de l'exercice 3.8 :
la série de terme général u_n converge.
Conclusion :

si (u_n) est une suite strictement positive telle qu'il existe $\alpha > 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = \ell$, alors la série de terme général u_n converge.

2. On a :

$$\forall\, M > 0,\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\ \ n^\alpha u_n \geqslant M.$$

On en déduit : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \ u_n \geqslant \dfrac{M}{n^\alpha}$.

D'après le théorème **4** :

si (u_n) est une suite positive telle qu'il existe $\alpha \leqslant 1$ vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$,
alors la série de terme général u_n diverge.

3.12

indications

La démarche suivante pourra être adoptée afin de déterminer la nature d'une série de terme général u_n.

***A.** Calculer la limite de u_n.*
Abandonner ce calcul s'il s'avère difficile.

***B.** Étudier le signe de u_n.*

- ***a.** Si $u_n \geqslant 0$, appliquer l'un des théorèmes sur les séries à termes positifs.*
- ***b.** Si la série est alternée, appliquer le théorème correspondant.*
- ***c.** Si le signe de u_n est difficile à établir ou si le signe est quelconque, alors passer à C.*

***C.** Étudier la série de terme général $|u_n|$*

ou

trouver une série de terme général v_n dont la nature est connue et vérifiant : $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$.

solution

1. La suite (u_n) est positive.

On a : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

On a : $v_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

D'après le théorème **5**, la série de terme général v_n converge.

En appliquant le théorème **4**, on obtient:

la série de terme général $e^{-n} \ln\left(\dfrac{1+n^2}{n^2}\right)$ converge.

2. La suite (u_n) est positive.

De plus : $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

Il en résulte :

la série de terme général $\dfrac{2\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2}$ converge.

3. La série est alternée.

Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\quad v_n = \dfrac{n}{3^n}.$

On obtient :

(1) $\qquad \forall\, n \geqslant 1,\quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{3n} < 1.$

Ainsi la suite (v_n) est décroissante.

Par ailleurs, la suite (v_n) converge vers 0.

On en déduit, d'après le théorème **11** :

$$\textbf{la série de terme général } \frac{n}{(-3)^n} \textbf{ converge.}$$

Autre solution

On obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3}.$$

D'après le critère de D'Alembert, la série de terme général u_n converge absolument.

Par conséquent :

la série de terme général u_n converge.

4. Remarquons que : $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - e.$

On a, au voisinage de l'infini :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) \text{ où } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

On en déduit :

$$e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e \cdot e^{-\frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{n}\right)\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Par suite :

$$e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e\left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{où } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

D'où

(2) $\qquad u_n \underset{\infty}{\approx} -\dfrac{e}{2n}.$

Le résultat (2) indique que la suite (u_n) est strictement négative à partir d'un certain rang.

Ainsi $\qquad -u_n \underset{\infty}{\approx} \dfrac{e}{2n}.$

D'après le théorème **5** : la série de terme général $-u_n$ diverge.

Conclusion :

$$\textbf{la série de terme général } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e \textbf{ diverge.}$$

5. La suite (u_n) converge vers -1.

D'où

$$\textbf{la série de terme général } \frac{n+1}{(-1)^n\sqrt{n} - n} \textbf{ diverge.}$$

6. On a : $\forall\, n \geqslant 2,\ \ u_n > 0$.

Par ailleurs : $\forall\, n \geqslant 2,\ \ \sqrt[n]{u_n} = u_n^{\frac{1}{n}} = (\ln n)^{-2}$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$.

On en déduit :

la série de terme général $(\ln n)^{-2n}$ converge.

7. La suite (u_n) est strictement positive pour tout $n \geqslant 2$.

On obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\frac{3}{2}}\, u_n = 0$.

D'après le résultat de l'exercice 3.11 :

la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$ converge.

8. La suite (u_n) est strictement positive.

Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\ v_n = \ln(n^2 u_n)$.

On obtient :

$\forall\, n \geqslant 1,\ v_n = 2\ln n + \ln u_n = 2\ln n + \ln(e^{-\sqrt{n}}) = 2\ln n - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(2\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} - 1\right)$.

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\, u_n = 0$.

D'après le résultat de l'exercice 3.11 :

la série de terme général $e^{-\sqrt{n}}$ converge.

3.13

indication

Remarquer que : $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

solution

On a : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (théorème **11**).

On en déduit, d'après le théorème **2** :

la série de terme général u_n diverge.

La série de terme général u_n diverge et pourtant : $u_n \underset{\infty}{\approx} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

3.14

indication

2. Déterminer une suite (v_n) *telle que :*

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

solution

1. Remarquons que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Par suite :

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

D'où

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.}$$

2. On a : (1) $\quad \forall\, n \geqslant 1,\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{n}{n+1}.$

Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\ v_n = \dfrac{1}{n}.$

La proposition (1) équivaut à :

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

La série de terme général v_n diverge.

Le résultat de l'exercice 3.10 permet d'affirmer que :

la série de terme général $\boldsymbol{\dfrac{1.3.\ \ldots\ (2n-1)}{2.4.\ \ldots\ (2n)}}$ diverge.

3.15

indications

1. Observer que : $\forall\, x \geqslant 0,\quad \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}.$

2. Appliquer le résultat de l'exercice 3.10.

solution

1. On a : $\forall\, n \geqslant 1,\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} \dfrac{n+1}{n+2}.$

Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\ \alpha_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Remarquons que :

(1) $\quad \forall\, x \geqslant 0,\ \ \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

Ce résultat peut être établi à l'aide des variations de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0;\ +\infty[$.

D'après (1), on a :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ \alpha_n \geqslant e^{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}.$$

On en déduit : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ \alpha_n \geqslant e$.

Par conséquent :

$$\boldsymbol{\forall\, n \geqslant 1,\ \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}\ \ \textit{avec}\ \ v_n = \frac{1}{n+1}.}$$

2. En appliquant le résultat de l'exercice 3.10, on obtient :

$$\textbf{la série de terme général } \boldsymbol{\frac{n^{n+1}}{e^n\,(n+1)!}} \textbf{ diverge.}$$

3.16

indication

Déterminer un équivalent de u_n au voisinage de l'infini.

solution

Au voisinage de l'infini, on a :

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n^3}\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{où} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Par suite : $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$,

ce qui montre que la suite (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang.

Ainsi

$$\textbf{la série de terme général } \boldsymbol{1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)} \textbf{ converge.}$$

3.17

indications

1. *Déterminer un équivalent de u_n au voisinage de l'infini.*

2. • *Poser $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.*

• *Déterminer la nature de la série de terme général v_n.*

• *En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln u_n$.*

solution

1. On obtient :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - a\right) - \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

• Supposons $a \neq \frac{1}{2}$.

Dans ce cas : $u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - a\right)$.

Si $\frac{1}{2} - a > 0$, alors la suite (u_n) est positive, et la série de terme général u_n diverge.

Si $\frac{1}{2} - a < 0$, alors $-u_n \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - a\right)$.

D'où : la suite $(-u_n)$ est positive et la série de terme général $-u_n$ diverge.
On en déduit que la série de terme général u_n diverge.

• Supposons $a = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas : $-u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.

Par conséquent, la série de terme général $-u_n$ converge. On en déduit la convergence de la série de terme général u_n.
En résumé :

la série de terme général $1 - (n + a)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge si, et seulement si, $a = \frac{1}{2}$.

2. Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\ v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.

On obtient : $v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On en déduit :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} v_k = -1 + \ln u_{n+1},$$

ce qui équivaut à :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ln u_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

D'après le résultat de la question **1**, la série de terme général v_n converge.
D'où

$$\lim_{n \to +\infty} \ln u_{n+1} = \ell \quad \text{où} \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la suite (u_n) ne converge pas vers 0.
Conclusion :

la série de terme général $\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{e}\right)^{-n}$ diverge.

3.18

indications

- *Faire un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de l'infini.*
- *Appliquer le théorème* **2**.

solution

On a :

$$(1) \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2}\left[1 - 2\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{où} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Posons : $v_n = -\dfrac{1}{2n^2}\left[1 - 2\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$, pour n assez grand.

On obtient : $|v_n| \underset{\infty}{\approx} \dfrac{1}{2n^2}$.

Par conséquent, la série de terme général v_n converge absolument.
Par suite, la série de terme général v_n converge.

Or la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge.

Donc d'après (1), la série de teme général u_n converge. Ainsi :

$$\textbf{la série de terme général } \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \textbf{ converge.}$$

3.19

indications

1. • *Remarquer que :* $\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \leqslant 1$.

• *En déduire une suite* (v_n) *telle que :* $\forall\, n \geqslant 0$, $u_n \geqslant v_n$.

solution

1. Remarquons que : $\forall\, x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \leqslant 1$.

On en déduit : $\forall\, n \geqslant 0$, $\forall\, x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n x \cos x \leqslant \sin^n x$.

Par suite : $\forall\, n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos x\, dx \leqslant u_n$.

Le calcul de l'intégrale donne :

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent :

$$\textbf{la série de terme général } \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx \textbf{ diverge.}$$

2. On a : $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_1 = 1$.

De plus, une intégration par parties donne :

$$\forall\, n \geqslant 0,\quad u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, u_n.$$

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) sont identiques.

Il en résulte :

la série de terme général v_n diverge.

indications et solutions

3.20

indication

*2. Intégrer membre à membre l'égalité de la question **1**.*

solution

1. On a : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} = \frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$.

On en déduit :

$$\textbf{(1)} \qquad \boldsymbol{\forall\, n \geqslant 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.}$$

2. Il résulte de (1) :

$$(2) \qquad \forall\, n \geqslant 1,\ \ \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx.$$

Posons :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx.$$

On a : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

La proposition (2) donne alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Or $\qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Donc

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.}$$

3.21

indications

Montrer d'abord que si u_n et v_n sont les termes généraux positifs de deux séries convergentes, alors la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge.
Pour cela, remarquer que : $\forall\ a \geqslant 0,\ \ \forall\ b \geqslant 0,\ \ \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b).$

solution

Soient u_n et v_n les termes généraux positifs de deux séries convergentes.
Montrons que la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge.

Remarquons que : $\forall\ a \geqslant 0,\ \ \forall\ b \geqslant 0,\ \ \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b).$

On en déduit : $\forall\ n \geqslant 0,\ \ \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + v_n).$

Or les séries de termes généraux u_n et v_n convergent.

Donc la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge.

Appliquons ce résultat avec : $\forall n \geqslant 1,\ \ v_n = \frac{1}{n^2}.$
On obtient :

si la série de terme général positif u_n converge,

alors la série de terme général $\frac{1}{n}\sqrt{u_n}$ converge.

3.22

indications

• *Supposer que la série de terme général u_n converge.*
Montrer que la série de terme général v_n converge.
Pour cela appliquer le théorème **5**.
• *Supposer que la série de terme général u_n diverge.*
Distinguer plusieurs cas pour $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

solution

Montrer que deux séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature, ne revient pas à établir :
(1) $(\sum u_n)$ *converge* $\Rightarrow (\sum v_n)$ *converge ;*
(2) $(\sum v_n)$ *diverge* $\Rightarrow (\sum u_n)$ *diverge.*
En effet, la proposition (2) est la contraposée de (1).
Par conséquent, ces deux propositions sont équivalentes.

• Supposons que la série de terme général u_n converge.
D'après le théorème **1** : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
De plus, les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.
Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$,
il résulte du théorème **5** que la série de terme général v_n converge.
• Supposons que la série de terme général u_n diverge.

Notons que $(\sum u_n)$ *diverge* $\not\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$.

On sait que la suite (u_n) est positive.
– Supposons : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \geqslant 0$.
Le raisonnement précédent indique que la série de terme général v_n diverge.
– Supposons : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
Dans ce cas : $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$.
Par conséquent, la série de terme général v_n diverge.
– Supposons : $\lim_{n \to +\infty} u_n$ n'existe pas.
Dans ce cas : $\lim_{n \to +\infty} v_n$ n'existe pas car $x \to \frac{x}{1+x}$ est continue et bijective sur $[0 ; +\infty[$.
Par suite, la série de terme général v_n diverge.
Dans tous les cas, la série de terme général v_n diverge.
En résumé :

si la suite (u_n) est strictement positive, alors les séries de termes généraux u_n et $\frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

3.23

indications

Poser $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$.
Distinguer deux cas : $\ell \neq 0$ *et* $\ell = 0$.

solution

• Supposons que la série de terme général u_n converge absolument.
Dans ce cas, la série de terme général $\sin u_n$ converge absolument.
En effet, $\forall\, n \geqslant 0$, $|\sin u_n| \leqslant |u_n|$.
• Supposons que la suite (u_n) soit strictement positive et que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
Dans ce cas : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant 0,\ 0 < u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$.

indications et solutions

Ainsi : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \sin u_n > 0$.

Par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin u_n}{u_n} = 1$.

D'après le théorème **5**, les séries de termes généraux u_n et $\sin u_n$ sont de même nature.

En résumé :

• si la série de terme général u_n converge absolument, il en est de même pour $\sin u_n$;

• si la suite (u_n) est strictement positive et de limite nulle, alors les séries de termes généraux u_n et $\sin u_n$ sont de même nature.

3.24

indications

• Déterminer les valeurs de x pour lesquelles : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = 0$.

• Appliquer les critères de convergence à la série $(\Sigma\, |u_n(x)|)$ *;*

ou

trouver un équivalent de $u_n(x)$*, au voisinage de l'infini ;*

ou

appliquer le théorème sur les séries alternées.

solution

1. Pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout réel x, $u_n(x) > 0$.

De plus : $u_n(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

D'où

pour tout réel x, la série de terme général $u_n(x)$ converge.

2. • Pour $x = 0$, la série de terme général $u_n(x)$ converge.

• On a : $\forall\, x \neq 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = 0$.

Par conséquent, la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument.

Conclusion :

la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x.

3. • Pour $|x| > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) \neq 0$.

Par suite, la série de terme général $u_n(x)$ diverge.

• $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|$ et la série est nulle pour $x = 0$.

Ainsi, pour $|x| < 1$, la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument.

• Si $x = -1$, $u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, et la série de terme général $u_n(x)$ diverge.

• Si $x = 1$, la série de terme général $u_n(x)$ est une série alternée convergente.

En résumé :

la série de terme général $\dfrac{(-x)^n}{n}$ converge si, et seulement si, $x \in]-1\,;\,1]$.

4. • Si $x^2 > 1$, la série de terme général $u_n(x)$ diverge car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) \neq 0$.

• Si $|x| \leqslant 1$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(2n-1)(2n)}$.

Or la série de terme général $\dfrac{1}{(2n-1)(2n)}$ converge.

Donc la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument.

En résumé :

la série de terme général $\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n)}$ converge si, et seulement si $|x| \leqslant 1$.

5. • Pour $x = 0$, la série converge.

• Soit $x \neq 0$.

On a : $u_n(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{n}\,x}$.

On en déduit : $|u_n(x)| \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{n}\,|x|}$.

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge.

Donc la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument.

Conclusion :

la série de terme général $\dfrac{x}{\sqrt{n}\,(1 + nx^2)}$ converge pour tout réel x.

6. • Pour $x = 0$, la série converge.

• Soit $x \neq 0$.

Posons : $\forall\, n \geqslant 0$, $v_n(x) = \dfrac{1}{1 + |x|\sqrt{n}}$.

La suite $(v_n(x))$ est positive et $v_n(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{|x|\sqrt{n}}$.

Or la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc la série de terme général $v_n(x)$ diverge.

Par suite la série de terme général $u_n(x)$ diverge.

Conclusion :

la série de terme général $\dfrac{x}{1 + |x|\sqrt{n}}$ ne converge que pour $x = 0$.

3.25

indications

Étudier la convergence absolue de la série.
Pour cela, appliquer le critère de D'Alembert.

solution

Posons : $\forall\ n \geqslant 0,\ \ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \ u_n(x) = (-1)^n a_n x^n.$

• Pour $x = 0$, la série converge.

• Soit $x \neq 0$.

On a :

$$(1) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x|.$$

– Si $|x| < 1$, la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument.

Si $|x| > 1$, la série de terme général $|u_n(x)|$ diverge d'après (1), et on ne peut rien en déduire pour la série de terme général $u_n(x)$.

– Si $|x| > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |x|^n = +\infty$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n x^n| = +\infty$.

D'où la série de terme général $u_n(x)$ diverge.

– Si $|x| = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n(x)| = +\infty$ et la série de terme général $u_n(x)$ diverge.

En résumé :

la série de terme général $u_n(x)$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$.

3.26

indication

Se servir du résultat de l'exercice 3.25.

solution

• Étudions la nature de la suite (v_n).

On a :

$$\forall\ k \geqslant 1,\ \ \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

On en déduit, par sommation :

$$\forall\ n \geqslant 2,\ \ \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant \ln n.$$

Par suite :

$$\forall\, n \geqslant 2,\quad u_n \leqslant 1 + \ln n.$$

Or $\forall\, n \geqslant 1,\ \ln n \leqslant n$.

Donc

(1) $\qquad \forall\, n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{u_n} \geqslant \dfrac{1}{n+1}.$

D'après (1), la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ diverge.

D'où la suite (v_n) diverge.

De plus :

(2) $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$

• Étudions la limite de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

On a : $\forall\, n \geqslant 1,\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{u_{n+1}}.$

On en déduit:

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}\, v_n}.$$

Or

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

Donc

(3) $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1.$

• Les propositions (2) et (3) permettent d'appliquer le résultat de l'exercice 3.25.

Il en résulte :

la série de terme général $(-1)^n\, v_n\, x^n$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$.

3.27

indications

• *Poser :* $\forall\, n \geqslant 1,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k.$

• *Noter que :* $\forall\, n \geqslant 1,\ n\, u_{2n} \leqslant S_{2n} - S_n.$

• *En déduire :* $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, u_{2n}.$

solution

Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k.$

On a : $\forall\, n \geqslant 1,\ S_{2n} - S_n = u_{n+1} + \ldots + u_{2n}.$

Or $\forall\, i \in [1\ ;\ n],\ u_{n+i} \geqslant u_{2n}$ car (u_n) décroît.

Donc

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad S_{2n} - S_n \geqslant n\, u_{2n}.$$

Ainsi

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad 0 \leqslant n\, u_{2n} \leqslant S_{2n} - S_n.$$

Comme la série de terme général u_n converge, la suite (S_n) converge.
On en déduit :

(1) $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, u_{2n} = 0.$

Le même raisonnement donne :

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\, u_{2n+1} = 0.$

La proposition (1) équivaut à :

(3) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n\, u_{2n} = 0.$

Remarquons que :

$$(2n+1)\, u_{2n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\,(n+1)\, u_{2n+1}.$$

Ainsi, d'après (2), on a :

(4) $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n+1)\, u_{2n+1} = 0.$

Posons : $\forall\ n \geqslant 1,\quad v_n = n\, u_n.$

Les propositions (3) et (4) deviennent :

$$\lim_{n \to +\infty} v_{2n} = \lim_{n \to +\infty} v_{2n+1} = 0.$$

Il en résulte que la suite (v_n) converge vers 0.
Conclusion :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} n\, u_n = 0.}$$

3.28

indications

*1. Appliquer le résultat de l'exercice 3.10 (question **1**).*

2. Faire le développement limité de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$ *(au voisinage de l'infini) et appliquer le résultat de la question **1**.*

solution

1. Posons : $\forall\ n \geqslant 1,\quad v_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}.$

On a : $\forall\ n \geqslant 1,\quad \triangle_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}.$

• (i) Supposons : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\quad \exists\ \alpha > 1\ /\ \forall\ n \geqslant n_0,\quad \triangle_n < 0.$

D'une part, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ converge.

D'autre part, d'après l'exercice 3.10, la série de terme général u_n converge.

D'où

$$\textbf{s'il existe } n_0 \geqslant 0 \textbf{ et } \alpha > 1 \textbf{ tels que : } \forall\, n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha},$$

alors la série de terme général u_n converge.

• (*ii*) Le même raisonnement donne :

$$\textbf{s'il existe } n_0 \geqslant 0 \textbf{ et } \alpha \leqslant 1 \textbf{ tels que : } \forall\, n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha},$$

alors la série de terme général u_n diverge.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_1\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

Ainsi

$$(1) \qquad \triangle_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = \frac{\alpha - \beta}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_2\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

Il résulte de (1) que $\triangle_n$ a le signe de $\alpha - \beta$ pour n assez grand.

• Si $\beta > 1$, pour un choix de $\alpha > 1$ tel que $\beta > \alpha$, on a $\triangle_n < 0$.

D'après le résultat de la question **1**, la série de terme général u_n converge.

• De même, si $\beta < 1$, un choix de $\alpha < 1$ avec $\beta < \alpha$ indique que la série de terme général u_n diverge.

En résumé :

$$\textbf{(}u_n\textbf{) étant une suite strictement positive telle que } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right),$$

– si $\beta > 1$, la série de terme général u_n converge ;

– si $\beta < 1$, la série de terme général u_n diverge

3.29

indications

1. *Il s'agit de déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles la série converge.*

2. *Noter que :* $\forall\, x \neq 0,\ \dfrac{1}{n+n^2x} \underset{\infty}{\approx} \dfrac{1}{n^2x}.$

solution

Posons : $\forall\, n \geqslant p,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2 x}$

avec $p = 1$ si $x \neq -\dfrac{1}{n}$ et $p = n+1$ sinon.

1. • Pour $x = 0$, la série de terme général $u_n(x)$ diverge.

Par conséquent, f n'est pas définie en 0.

• Soit $x \neq 0$.

On a : $u_n(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x}$.

On en déduit : $|u_n(x)| \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 |x|}$.

Par conséquent, la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument.

Conclusion : $\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}^*$.

2. Soit $x > 0$.

Remarquons que : $u_n(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x}$.

On a :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ u_n(x) - \frac{1}{n^2 x} = \frac{-1}{nx(n + n^2 x)}.$$

On en déduit :

$$f(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n + n^2 x)}.$$

Or $\forall\, n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{n(n + n^2 x)} \leqslant \dfrac{1}{n^3 x}$.

Donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n + n^2 x)} \leqslant \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Par suite, on a :

$$(2) \qquad \forall\, x > 0,\ 0 < -\left(f(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Posons : $\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\beta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

La proposition (2) équivaut à :

$$\forall\, x > 0,\ -\frac{\beta}{\alpha x} \leqslant \frac{f(x)}{\frac{\alpha}{x}} - 1 < 0.$$

D'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{\alpha}{x}} = 1$.

Ce qui montre que :

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}.$$

3.30

indication

*Se servir du résultat de l'exercice 3.20 (question **1**).*

solution

D'après l'exercice 3.20, on a :

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad \forall\ x \in \mathbb{R},\quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.$$

On en déduit :

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad \forall\ x > 0,\quad \frac{\ln x}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} \ln x + \frac{(-1)^n x^{2n} \ln x}{1+x^2}.$$

Soit $a \in]0\,;1]$.

On a :

$$(1) \qquad \forall\ n \geqslant 1,\quad \int_a^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_a^1 x^{2k} \ln x\,dx + (-1)^n \int_a^1 \frac{x^{2n} \ln x}{1+x^2}\,dx.$$

Posons : $\forall\ k \geqslant 0,\ I_k(a) = \displaystyle\int_a^1 x^{2k} \ln x\,dx.$

Une intégration par parties donne :

$$\forall\ k \geqslant 0,\ I_k(a) = -\frac{a^{2k+1} \ln a}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)^2}\,(a^{2k+1} - 1).$$

D'où

$$(2) \qquad \forall\ k \geqslant 0,\ \lim_{a \to 0} I_k(a) = -\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Posons :

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{2n} \ln x}{1+x^2} & \text{si } x \in]0\,;\,1]\,; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, φ_n est continue sur $[0\,;\,1]$.

Par conséquent :

$$(3) \qquad \forall\ n \geqslant 1,\ \lim_{a \to 0} \int_a^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx.$$

Remarquons que la proposition (1) équivaut à :

$$(4) \qquad \forall\ n \geqslant 1, \int_a^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_k(a) + (-1)^n \int_a^1 \varphi_n(x)\,dx.$$

Faisons tendre a vers 0 dans (4).

La combinaison de (2) et (3) donne :

$$(5) \qquad \forall\ n \geqslant 1,\ \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + (-1)^n \int_0^1 x^{2n} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

L'égalité (5) montre que le réel $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ *existe même si la fonction* $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ *n'est pas définie en* 0.
Cette intégrale est dite généralisée.

Posons : $\forall\ n \geqslant 1,\ \ J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}\ln x}{1+x^2}\,dx.$

On a : $\forall\ n \geqslant 1,\ \ |J_n| \leqslant \int_0^1 x^{2n}\,|\ln x|\,dx = -\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx.$

Or

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx = \lim_{a\to 0} I_n(a) = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.$$

Il en résulte, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (5) :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}.$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.}$$

3.31

indications

- *Poser :* $\forall\ n \geqslant 1,\ w_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}$ *et* $w_0 = 0.$
- *Remarquer que :* $\forall\ n \geqslant 1,\ w_n - w_{n-1} = \frac{a_n}{n}.$
- *Noter que si une suite* (u_n) *converge vers* ℓ, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = \ell.$$

solution

Posons : $\forall\ n \geqslant 1,\ w_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}$ et $w_0 = 0.$

On a : $\forall\ n \geqslant 1,\ w_n - w_{n-1} = \frac{a_n}{n}.$

On en déduit :

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = -(w_0 + \ldots + w_{n-1}) + nw_n.$$

Par suite :

$$(1)\qquad \forall\ n \geqslant 1,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = -\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} w_i + w_n.$$

Rappelons que :

(2) si (u_n) converge vers ℓ, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = \ell$.

Or la série de terme général $\dfrac{a_n}{n}$ converge.

Donc

(3) la suite (w_n) converge.

La combinaison de (1), (2) et (3) donne : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$.

Conclusion :

si une suite (a_n) est telle que la série de terme général $\dfrac{a_n}{n}$ converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$.

3.32

indications

1. Poser $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k$.

Vérifier que : $\forall\ (p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q > p$,

$$T_{q+1} - T_p = \sum_{p+1}^{q} S_n a_n + S_{q+1} v_{q+1} - S_p v_{p+1}.$$

2. • Établir d'abord que toute suite monotone et bornée vérifie la propriété (ii) de la première question.

*• Appliquer le résultat de la question **1** aux suites (u_n) et $(v_n - \ell)$ où $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.*

solution

1. Posons : $\forall\ n \geqslant 0$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k$.

Montrons que la suite (T_n) est une suite de Cauchy.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q > p$.

On a :

$$T_{q+1} - T_p = \sum_{p+1}^{q+1} u_n v_n = \sum_{p+1}^{q+1} (S_n - S_{n-1}) v_n = \sum_{p+1}^{q+1} S_n v_n - \sum_{p}^{q} S_n v_{n+1}.$$

Ce qui équivaut à :

$$T_{q+1} - T_p = \sum_{p+1}^{q} S_n a_n + S_{q+1} v_{q+1} - S_p v_{p+1}.$$

On déduit de l'hypothèse (i) :

(1) $$\left|T_{q+1} - T_p\right| \leqslant M\Big(\sum_{p+1}^{q} |a_n| + |v_{q+1}| + |v_{p+1}|\Big).$$

Par ailleurs, la suite (v_n) converge vers 0.

Par conséquent :

(2) $\exists\, n_0 \geqslant 0 \,/\, \forall\, p \geqslant n_0,\;\; \forall\, q \geqslant p+1,\;\; |v_{q+1}| + |v_{p+1}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}.$

D'après l'hypothèse (ii), la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right)$ est une suite de Cauchy.

D'où

(3) $\exists\, n_1 \geqslant 0 \,/\, \forall\, p \geqslant n_1,\;\; \forall\, q \geqslant p+1,\;\; \sum\limits_{p+1}^{q} |a_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}.$

La combinaison de (1), (2) et (3) donne :

$$\forall\, (p, q) \in \mathbb{N}^2,\;\; q > p \geqslant \max\,(n_0, n_1) \Rightarrow |T_{q+1} - T_p| \leqslant \varepsilon.$$

Il en résulte que la suite (T_n) est une suite de Cauchy.

Conclusion :

la série de terme général $u_n\, v_n$ converge.

2. • Montrons d'abord que la suite (v_n) monotone et bornée vérifie la propriété (ii) de la question **1**.

Rappelons que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ.

Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\;\; a_n = v_{n+1} - v_n.$

Si la suite (v_n) est croissante, alors : $\forall\, n \geqslant 0,\;\; |a_n| = v_{n+1} - v_n.$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \lim_{n \to +\infty} (v_{n+1} - v_0) = \ell - v_0.$$

Le même raisonnement peut être fait si (v_n) est décroissante.

Ainsi

(4) toute suite monotone et bornée vérifie la propriété (ii) de la question **1**.

• Appliquons le résultat de la première question aux suites (u_n) et $(v_n - \ell)$.

On a alors la convergence de la série de terme général $u_n\,(v_n - \ell)$.

Or, pour tout $n \geqslant 0$,

$u_n\,(v_n - \ell) = u_n\, v_n - u_n\, \ell$, et la série de terme général u_n converge.

Donc la série de terme général $u_n\, v_n$ converge.

Conclusion :

si la série de terme général u_n converge, et si la suite (v_n) est monotone et bornée, alors la série de terme général $u_n\, v_n$ converge.

4

Intégrales généralisées

Éléments de cours

Intégrale généralisée sur un ensemble borné

Soit f une fonction numérique définie sur $I = [a\ ;\ b[$ et intégrable sur tout compact inclus dans I.

La fonction $\quad x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est définie sur I.

Si $\int_a^x f(t)\, dt$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers b, on dit que f est intégrable sur I.

On note : $\quad \int_a^b f(t)\, dt = \ell$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ converge vers ℓ, et cette intégrale est dite généralisée ou impropre.

L'intégrale généralisée est dite divergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ n'a pas une limite finie lorsque x tend vers b.

Théorème 1

Soit f une fonction numérique définie sur $I = [a\ ;\ b[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I.

L'intégrale de f sur I converge si, et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, c \in [a\ ;\ b[\quad / \quad \forall\, (u, v) \in [c\ ;\ b[\times [c\ ;\ b[,\ \left| \int_u^v f(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 2

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$.

L'intégrale $\quad \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^r}$ converge si, et seulement si, $r < 1$.

Théorème 3

Soient f et g deux fonctions définies et positives sur $I = [a\ ;\ b[$.

On suppose que f et g sont intégrables sur tout compact inclus dans I, et que $f \leqslant g$.

(i) Si $\int_a^b g(t)\, dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ converge.

(ii) Si $\int_a^b f(t)\, dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\, dt$ diverge.

Théorème 4

Soit f une fonction numérique positive sur $I = [a\ ;\ b[$ et intégrable sur tout compact inclus dans I.

On suppose : $\exists\, r \in \mathbb{R}, \exists\, \ell \in \mathbb{R} \quad / \quad \lim\limits_{x \mapsto b} (b-x)^r f(x) = \ell.$

(i) Si $r < 1$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge.

(ii) Si $r \geqslant 1$ et $\ell \neq 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ diverge.

Intégrale généralisée sur un ensemble non borné

Soit f une fonction numérique définie sur $I = [a\,;+\infty[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I.

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ est définie sur I.

Si $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que f est intégrable sur I.

On note : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \ell.$

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge vers ℓ et cette intégrale est dite généralisée ou impropre.

L'intégrale généralisée est dite divergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ n'a pas une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Le théorème 1 reste valable pour un ensemble non borné.

Théorème 5

Soit a un réel strictement positif.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^r}$ converge si, et seulement si, $r > 1$.

Théorème 6

Soient f et g deux fonctions définies et positives sur $I = [a\,;+\infty[$. On suppose que f et g sont intégrables sur tout compact inclus dans I, et que $f \leqslant g$.

(i) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

(ii) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ diverge.

Théorème 7

Soit f une fonction numérique positive sur $I = [a\,;+\infty[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I.

On suppose : $\exists\, r \in \mathbb{R}, \exists\, \ell \in \mathbb{R} \quad / \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^r f(x) = \ell.$

(i) Si $r > 1$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

(ii) Si r $\leqslant 1$ et $\ell \neq 0$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Convergence absolue

Soit f une fonction définie sur $I = [a\,;\,b[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I.

Si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument.

Théorème 8

Soit f une fonction définie sur $I = [a\,;\,b[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I.

Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Une intégrale peut être convergente sans l'être absolument.

Exercices

APPLICATION IMMÉDIATE

Nature d'intégrales

4.1 Étudier la convergence des intégrales suivantes.

1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^4}\, dx$ **2.** $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$ **3.** $I = \int_{-1}^{0} \frac{x \ln |x|\, dx}{\sqrt{1+x}}$

4. $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}\, dx.$

4.2 Soit a un réel strictement positif.

1. On considère une fonction positive et intégrable f sur tout compact inclus dans $[a\,;+\infty[$.
On suppose qu'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que :
$\lim_{x \mapsto +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty.$
Quelle est la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$?

2. En déduire un résultat analogue pour une fonction positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;a]$.

4.3 Étudier la convergence de l'intégrale : $I = \int_0^1 e^{\frac{1}{x}}\, dx.$

4.4 Étudier la convergence de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx.$

4.5 Étudier la convergence de l'intégrale : $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx.$

4.6 Étudier la nature de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\, dt.$

4.7 Étudier la convergence de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$

4.8 Déterminer la nature de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt.$

4.9 Étudier la convergence absolue de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t}\, dt.$$

4.10 Soient a un réel et b un réel pouvant être infini.

On considère une fonction φ strictement positive et intégrable sur tout compact inclus dans $[a\,;\,b[$.
On suppose qu'il existe une fonction ψ telle que : $\varphi \underset{b}{\sim} \psi$.

Montrer que les intégrales $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ et $\int_a^b \psi(x)\, dx$ sont de même nature.

Nature d'intégrales suivant des paramètres

4.11 Étudier suivant les valeurs du réel α la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x}\, dx.$$

4.12 Étudier suivant les valeurs des réels α et β la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-t)^\alpha\, t^\beta\, dt.$$

4.13 On considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Montrer que le domaine de définition de φ est $]0\,;\,+\infty[$.

4.14 **1.** Étudier suivant les valeurs du réel α la nature de l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_0^1 t^\alpha (\ln t)^2\, dt.$$

2. Déterminer $I(n)$ pour tout entier n.

4.15 Pour tous réels α et x on pose :

$$I_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{\alpha-1}\, dt.$$

1. Étudier suivant les valeurs de α et x la convergence de $I_\alpha(x)$.
2. Déterminer $I_p(x)$ pour tout entier p non nul et pour tout réel $x > 0$.

Intégrales et séries

4.16 **1.** Soient p un entier, et f une fonction continue, positive et décroissante sur $[p\,;+\infty[$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ et la série de terme général $f(n)$ ont la même nature.

2. Discuter suivant les valeurs du réel α la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$.

4.17 Soient a et b deux réels strictement positifs.

Pour tout entier n, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{a+nb} \qquad \text{et} \qquad S\,(a,b) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

1. Soit α un réel strictement positif.

Montrer que : $\displaystyle S(\alpha,1) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx.$

2. En déduire :

$$S\,(a,b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx.$$

4.18 On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall\, n \geqslant 0, \qquad I_n = \int_0^1 t^n\,(\ln t)^2\,dt.$$

On pose : $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,dt.$

1. Montrer que : $\displaystyle I = \sum_{k=0}^{n} I_k + R_n$, où (R_n) est une suite que l'on précisera.

2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} R_n = 0.$

3. Exprimer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}$ à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

4.19 Pour tout entier $p \geqslant 2$ et pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$I_p(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,t^{p-1}\,dt.$$

1. Écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ à l'aide de $I_p(n)$.

2. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t-1}\,dt.$

APPROFONDISSEMENT ET SYNTHÈSE

4.20 Soit x un réel strictement positif.

On pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2}\, dt.$

1. Montrer que $I(x)$ est bien défini.

2. Calculer $I(x)$.

4.21 Montrer que l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2}\, dx$ converge et préciser sa valeur.

4.22 Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $[a\,;+\infty[$.

On suppose : $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty.$

Étudier suivant les valeurs du réel $\alpha \geqslant -1$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^\alpha f(t)\, dt.$

4.23 Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ où b peut être infini.

Soit f une fonction positive, intégrable sur tout compact inclus dans $[a\,;b[$ et vérifiant :

$\exists\, \ell \in \mathbb{R} \quad / \quad \displaystyle\lim_{x \mapsto b} f(x) = \ell.$

On suppose : $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\, dx$ diverge.

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$?

4.24 Soit a un réel. On considère une fonction f définie sur $[a\,;+\infty[$, décroissante et positive.

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} x f(x) = 0.$

4.25 On pose : $I(p, q) = \displaystyle\int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q dx.$

Étudier suivant les valeurs des réels p et q l'existence de $I(p, q)$.

4.26 Discuter suivant les valeurs du réel x non nul, la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^{tx} - 1}\, dt.$$

4.27 Étudier suivant les valeurs des réels α et β, la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(1 + e^{\beta x})\, dx.$$

4.28 Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x \ln t}{1+t}\, dt.$

Déterminer l'ensemble de définition de f.

4.29 Étudier suivant les valeurs des réels a et b la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2+t)}{t^b(1+t)}\, dt\,.$$

4.30 On considère la fonction f définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt.$$

Déterminer un équivalent de f au voisinage de 0.

4.31 Soit f une fonction continue sur $[0\,;+\infty[$ et telle que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge.}$$

Montrer que pour tout $y \geqslant 0$, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} f(x)\, dx \text{ converge.}$$

4.32 Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ où b peut être infini.

1. On considère deux fonctions f et g, intégrables sur tout compact inclus dans $[a\,;b[$ et telles que :

(i) f est monotone sur $[a\,;b[$;

(ii) $\lim_{x \mapsto b} f(x) = 0$;

(iii) $\exists\, M > 0 \quad / \quad \forall\, x \in [a\,;b[, \ \left|\int_a^x g(t)\, dt\right| \leqslant M.$

Montrer que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ converge.

2. Montrer que si f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;b[$ et vérifiant :

(i) f est monotone et bornée sur $[a\,;b[$;

(ii) $\int_a^b g(t)\, dt$ converge ;

alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ converge.

1. $I = f\int$

indications et solutions

4.1

indications

Noter que toute fonction continue sur un compact y est intégrable.

1. *Poser :* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{1+x^4} & \text{si } x > 0\ ; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Remarquer que f est continue en 0.

2. • *Remarquer que :* $x \mapsto \sqrt{tgx}$ *est une fonction positive sur* $[0\ ; \dfrac{\pi}{2}[$.

• *Poser :* $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

3. • *Observer que :* $\forall\, x \in]-1\ ; 0[, \quad x \ln |x| > 0$.

• *Poser* $t = 1 + x$ *pour l'étude du voisinage de* -1.

4. • *Poser* $f(x) = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

• *Étudier la nature de* $I_1 = \displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$ *et* $I_2 = \displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$.

solution

1. Posons :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{1+x^4} & \text{si } x > 0\ ; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

D'une part, la fonction f est continue en 0.
D'autre part, f est continue sur $[0\ ; +\infty[$.

Par conséquent, f est intégrable sur tout compact inclus dans $[0\ ; +\infty[$.

Le problème de convergence de l'intégrale se pose alors uniquement au voisinage de l'infini.
On a : $\forall\, x \geqslant 1, \quad f(x) \geqslant 0$.

De plus : $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

Il résulte du théorème **7** :

$$\textbf{l'intégrale} \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^4}\, dx \ \textbf{converge.}$$

2. La fonction $x \mapsto \sqrt{\operatorname{tg} x}$ est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Posons : $\quad t = \frac{\pi}{2} - x.$

On obtient :

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos t}{\sin t}}\, dt.$$

Le problème de la convergence de l'intégrale I se pose en 0.

On a : $\quad \lim\limits_{t \mapsto 0} \sqrt{t} \sqrt{\frac{\cos t}{\sin t}} = 1$ car $\sin t \underset{0}{\sim} t.$

On en déduit, d'après le théorème **4** :

$$\textbf{l'intégrale } I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx \ \textbf{converge.}$$

3. Posons :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln|x|}{\sqrt{1+x}} & si\ x \in\ ]-1 ; 0[\ ; \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

La fonction f est continue en 0.
De plus, f est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]-1 ; 0]$.
Le problème de convergence de l'intégrale I se pose seulement en -1.
Posons : $\quad t = 1 + x.$
On obtient :

$$I = \int_0^1 \frac{(t-1)\ln(1-t)}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Or $\lim\limits_{t \mapsto 0} \sqrt{t}\, \frac{(t-1)\ln(1-t)}{\sqrt{t}} = 0.$

Donc, d'après le théorème **4** :

$$\textbf{l'intégrale} \int_{-1}^{0} \frac{x \ln|x|}{\sqrt{1+x}}\, dx \ \textbf{converge.}$$

4. La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$ est positive et intégrable sur tout compact inclus

dans $]1 ; +\infty[$.

Posons : $I_1 = \int_1^2 f(x)\,dx$ et $I_2 = \int_2^{+\infty} f(x)\,dx.$

On a : $\lim\limits_{x \mapsto 1} (x-1)^{\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{\ln 2}{\sqrt{2}}.$

D'après le théorème **4** : I_1 converge.

Par ailleurs : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}.$

Cela équivaut à : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^2 f(x) = 1.$

D'après le théorème **7** : I_2 converge.
En résumé :

$$\textbf{l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \textbf{ converge.}$$

4.2

indications

1. Traduire l'hypothèse : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty.$

Appliquer le théorème ***6****.*

solution

1. On a : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty.$

Cela équivaut à :

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, b > a \quad / \quad \forall\, x \geqslant b,\quad x^\alpha f(x) \geqslant M.$$

On en déduit : $\forall\, M > 0,\ \exists\, b > a \quad / \quad \forall\, x \geqslant b,\quad f(x) \geqslant \dfrac{M}{x^\alpha}.$

Or l'intégrale $\int_b^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ diverge (théorème **5**).

Donc l'intégrale $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge (théorème **6**).

Par suite : l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

En effet : $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$

Conclusion :

si f est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $[a\,;+\infty[$, $a>0$ et vérifiant : $\exists\ \alpha \leqslant 1 \quad / \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^{\alpha} f(x) = +\infty$,

alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

2. On a : $\lim\limits_{x \mapsto 0} x^{\alpha} f(x) = +\infty$.

Cela équivaut à :

$$\forall\ M > 0, \quad \exists\ b \in\ ]0\,;a[\quad / \quad 0 < x \leqslant b \quad \Rightarrow \quad x^{\alpha} f(x) \geqslant M.$$

On en déduit : $\forall\ M > 0, \quad \exists\ b \in]0\,;a[\quad / \quad \forall\ x \in\ ]0\,;b], \quad f(x) \geqslant \dfrac{M}{x^{\alpha}}$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x^{\alpha}}$ diverge (théorème **2**).

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx$ diverge (théorème **3**).

Par suite : l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ diverge.

Conclusion :

si f est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;a]$ et vérifiant :

$\exists\ \alpha \geqslant 1 \quad / \quad \lim\limits_{x \mapsto 0} x^{\alpha} f(x) = +\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ diverge.

4.3

indications

- *Poser* $t = \dfrac{1}{x}$.
- *Appliquer le résultat de l'exercice 4.2.*

solution

La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;1]$.

Posons : $t = \dfrac{1}{x}$.

On a : $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t^2}\,dt$.

Posons : $\forall\ t \geqslant 1, \quad \varphi(t) = \dfrac{e^t}{t^2}$.

On obtient : $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} \varphi(t) = +\infty$.

D'après le résultat de l'exercice 4.2 :

l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{1}{x}}\,dx$ diverge.

4.4

indications

- *Poser* $I_1 = \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ *et* $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx.$
- *Étudier la convergence absolue de* I_1.
- *Appliquer le théorème 7 pour* I_2.

solution

- La fonction $x \mapsto \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;\,+\infty[$.

  Posons :
$$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

- Étudions la convergence de I_1.
  On obtient :
$$\forall\, x \in\,]0\,;\,1], \qquad \frac{\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

  Or $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge (théorème **2**).

  Donc, d'après le théorème **6**, l'intégrale I_1 converge absolument.
  Par suite, l'intégrale I_1 converge (théorème **8**).
- Étudions la convergence de I_2.

  On a : $\forall\, x \geqslant 1, \quad \frac{1}{x} \in\,]0\,;\,\frac{\pi}{2}[.$

  Par conséquent : $\forall\, x \geqslant 1, \quad \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} > 0.$

  De plus :
$$\lim_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\right) = 1.$$

  D'après le théorème **7**, l'intégrale I_2 diverge.
  En résumé :

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge.

4.5

indications

- *Noter que :* $\forall\, x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \ln(\sin x) \leqslant 0.$
- *Remarquer que :* $\forall\, \alpha > 0$, $\quad \lim\limits_{u \mapsto 0^+} u^\alpha \ln u = 0.$

solution

Posons : $\quad \forall\, x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \ln(\sin x).$

Remarquons d'abord que : $\quad \forall\, x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) \leqslant 0.$

Par ailleurs, f est intégrable sur tout compact inclus dans $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Étudions la convergence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} - f(x)\, dx$.

On obtient :

$$\lim_{x \mapsto 0^+} \sqrt{x}\,[-\ln(\sin x)] = 0$$

car $\quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad$ et $\quad \forall\, \alpha > 0, \quad \lim\limits_{u \mapsto 0^+} u^\alpha \ln u = 0.$

En fait, nous avons : $\sin x \underset{0}{\sim} x \quad \Rightarrow \quad \ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln x.$

En effet, si φ et ψ sont deux fonctions strictement positives au voisinage de x_0 avec $\varphi \underset{x_0}{\sim} \psi$ et $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \mapsto x_0} \psi(x) = \infty$ (ou $a \neq 1$) alors $\ln \varphi(x) \underset{x_0}{\sim} \ln \psi(x)$.

On en déduit, d'après le théorème **4**, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} -f(x)\, dx$ converge.

Par suite :

$$\textbf{l'intégrale } \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx \textbf{ converge.}$$

Autre solution

La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est intégrable sur tout compact inclus dans $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

De plus : $\quad \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \sqrt{x}\,\left|\ln(\sin x)\right| = 0.$

D'après le théorème **4** : $\quad \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left|\ln(\sin x)\right|\, dx$ converge.

Le théorème **8** permet de conclure :

$$\textbf{l'intégrale } \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx \textbf{ converge.}$$

4.6

indications

• *Poser :* $I_1 = \int_0^a \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,dt$ *et* $I_2 = \int_a^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,dt$

avec $a \in]0\,;1[$.

• *Noter que :* $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \mapsto 0^+} t\,(\ln t)^{\alpha} = 0.$

solution

Soit $a \in]0\,;1[$.

Posons : $I_1 = \int_0^a \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,dt$ et $I_2 = \int_a^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,dt.$

La fonction $t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{1-t}$ est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;1[$.

• On a : $\lim_{t \mapsto 0^+} \sqrt{t}\,\frac{(\ln t)^2}{1-t} = 0.$

D'après le théorème **4**, l'intégrale I_1 converge.

• Considérons I_2.

Posons $x = 1 - t.$

On obtient : $I_2 = \int_0^{1-a} \frac{(\ln(1-x))^2}{x}\,dx.$

Or $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x.$

Donc $\lim_{x \mapsto 0} \frac{(\ln(1-x))^2}{x} = 0.$

Par conséquent, l'intégrale I_2 converge d'après le théorème **4**.

Conclusion :

l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,dt$ converge.

4.7

indications

• *Noter que le problème de la convergence de l'intégrale ne se pose pas en* 0.

• *Considérer* $\int_1^a \frac{\sin t}{t}\,dt$, *pour* $a > 1$.

Intégrer par parties.

Faire tendre a vers $+\infty$.

solution

Posons : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \,; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte :

(1) f est intégrable sur tout compact inclus dans $[0 \,; +\infty[$.

Posons : $I_1 = \int_0^1 f(t)\, dt$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$

• D'après (1), l'intégrale I_1 converge.

• Remarquons que : $I_2 = \lim\limits_{a \mapsto +\infty} \int_1^a f(t)\, dt.$

Soit $a \geqslant 1$.
Intégrons par parties.
On obtient :

(2) $\int_1^a f(t)\, dt = \cos 1 - \dfrac{\cos a}{a} - \int_1^a \dfrac{\cos t}{t^2}\, dt.$

Or $\forall\, t \geqslant 1, \left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$ converge.

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^2}\, dt$ converge absolument.

Par suite, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^2}\, dt$ converge.

Ce qui équivaut à :

(3) $\exists\, \ell \in \mathbb{R} \quad / \quad \lim\limits_{a \mapsto +\infty} \int_1^a \dfrac{\cos t}{t^2}\, dt = \ell.$

Par ailleurs, on a :

(4) $\lim\limits_{a \mapsto +\infty} \dfrac{\cos a}{a} = 0$ car $\left|\dfrac{\cos a}{a}\right| \leqslant \dfrac{1}{a}.$

La combinaison de (2), (3) et (4) donne :

$$\lim_{a \mapsto +\infty} \int_1^a f(t)\, dt = \cos 1 - \ell.$$

Ce qui montre que l'intégrale I_2 converge.
En résumé :

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\, dt$ converge.

4.8

indications

Considérer $I_2 = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt.$

Faire un changement de variable pour ramener I_2 à une intégrale semblable à celle de l'exercice 4.7.

solution

La fonction $t \mapsto \cos(t^2)$ est intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Posons : $I_1 = \int_0^1 \cos(t^2)\, dt$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt.$

• L'intégrale I_1 converge.

• Étudions la convergence de I_2.

Pour cela, posons : $t = \sqrt{x}.$

On obtient :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

La démarche de l'exercice 4.7 assure la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$

Par suite, l'intégrale I_2 converge.

Conclusion :

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt$ converge.

4.9

indications

• *Poser :* $\forall\, n \geqslant 0, \quad u_n = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin^3 t|}{t}\, dt.$

• *Montrer que la suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.*

Pour cela, considérer : $u_{2n+1} - u_n.$

solution

Posons : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{|\sin^3 t|}{t} & \text{si } t \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Posons : $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \int_0^{n\pi} |f(t)|\, dt$ et $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\, dt.$

On a :

$$\forall\ n \geqslant 0, \qquad a_n \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\sin^3 t\right| \, dt.$$

Or $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\sin^3 t\right| \, dt = \int_0^{\pi} \sin^3 t \, dt = \frac{4}{3}.$

Donc

(1) $\qquad \forall\ n \geqslant 0, \qquad a_n \geqslant \dfrac{4}{3\pi\,(n+1)}.$

Remarquons que :

(2) $\qquad \forall\ n \geqslant 0, \qquad u_{2n+1} - u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(2n+1)\pi} |f(t)| \, dt = \sum_{k=n}^{2n} a_k.$

La combinaison de (1) et (2) donne :

$$\forall\ n \geqslant 0, \qquad u_{2n+1} - u_n > \frac{1}{3\pi}.$$

Il en résulte que la suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin^3 t|}{t} \, dt$ diverge.

Conclusion :

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t} \, dt$ diverge absolument.

4.10

indications

- *Traduire l'hypothèse :* $\varphi \underset{b}{\sim} \psi$.
- *Appliquer le théorème **3**.*

solution

On a par hypothèse : $\quad \varphi \underset{b}{\sim} \psi$.

(1) $\qquad$ Soit $0 < \varepsilon < 1$.

On a alors :

(2) $\qquad \exists\ \alpha > 0 \ / \ \forall\ x \in [a\,;b[, \quad 0 < b - x \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon.$

Comme ψ est une fonction strictement positive, la proposition (2) équivaut à :

(3) $\qquad \exists\ \alpha > 0 \ / \ \forall\ x \in [a\,;b[,$

$\qquad 0 < b - x \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad (1-\varepsilon)\,\psi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant (1+\varepsilon)\,\psi(x).$

- Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \psi(x) \, dx$ converge.

La combinaison de (3) et du théorème **3** indique que l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ converge.

• Supposons que l'intégrale $\int_a^b \psi(x)\,dx$ diverge.

D'après (1) et (3) :

si $x \geqslant a$ et $0 < b - x \leqslant \alpha$, alors $\varphi(x) \geqslant (1 - \varepsilon)\,\psi(x) > 0$.

On en déduit, d'après le théorème **3** :

l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ diverge.

• Le raisonnement est similaire pour b infini.

Conclusion :

si φ et ψ sont deux fonctions strictement positives et intégrables sur tout compact inclus dans $[a\,;\,b[$ (b fini ou infini), vérifiant $\varphi \underset{b}{\sim} \psi$, alors les intégrales $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ et $\int_a^b \psi(x)\,dx$ sont de même nature.

4.11

indications

• *Considérer* $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x}\,dx$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x}\,dx$.

• *Se servir du résultat de l'exercice 4.10.*

solution

Pour tout réel α la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x^\alpha}{1+x}$ est strictement positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;+\infty[$.

Posons : $I_1 = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x}\,dx$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x}\,dx$.

• On a : $f(x) = \frac{x^\alpha}{1+x} \underset{0}{\sim} x^\alpha$.

Or $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ converge si, et seulement si, $-\alpha < 1$.

Donc, d'après le résultat de l'exercice 4.10, I_1 converge si, et seulement si, $\alpha > -1$.

• On obtient : $f(x) \underset{\infty}{\sim} x^{\alpha - 1}$.

Or $\int_1^{+\infty} x^{\alpha - 1}\,dx$ converge si, et seulement si, $-\alpha + 1 > 1$.

Donc, d'après le résultat de l'exercice 4.10, I_2 converge si, et seulement si, $\alpha < 0$.

Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x}\, dx \text{ converge si, et seulement si, } \alpha \in]-1\,;0[.$$

4.12

indications

• *Noter que suivant le signe de α, le problème de la convergence de l'intégrale peut se poser en 1.*
• *Raisonner comme pour l'exercice 4.11.*

solution

La fonction $t \mapsto f(t) = (1-t)^\alpha\, t^\beta$ est strictement positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;1[$.

Posons : $I_1 = \int_0^{1/2} f(t)\, dt$ et $I_2 = \int_{1/2}^1 f(t)\, dt.$

• On a : $f(t) \underset{0}{\sim} t^\beta.$

On en déduit que I_1 converge si, et seulement si, α est quelconque et $\beta > -1$.

• On a : $f(t) \underset{1}{\sim} (1-t)^\alpha.$

Par conséquent, I_2 converge si, et seulement si, β est quelconque et $\alpha > -1$.
Conclusion :

$$\int_0^1 (1-t)^\alpha\, t^\beta\, dt \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > -1 \text{ et } \beta > -1.$$

4.13

indication

Il s'agit de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\, dt$ *converge si, et seulement si,* $x > 0$.

solution

Étudions l'existence de $\varphi(x)$ pour tout réel x.

Pour cela posons : $\forall\, t > 0,\quad f(t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}},\ I_1 = \int_0^1 f(t)\, dt$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$

Remarquons que f est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;+\infty[$.

• Soit $x > 0$.

– On a : $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$

Or $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge. Donc I_1 converge.

– On a : $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} t^2 f(t) = 0.$

On en déduit que I_2 converge.

Ainsi, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

D'où $\varphi(x)$ existe pour tout $x > 0$.

• Supposons : $x < 0$.
– L'intégrale I_1 reste convergente.
– On a : $\lim_{t \mapsto +\infty} \sqrt{t}\, f(t) = +\infty$.
D'après le résultat de l'exercice 4.2, I_2 diverge.
Par conséquent $\varphi(x)$ n'existe pas.

• Pour $x = 0$, l'intégrale I_2 diverge, tandis que I_1 converge.
D'où $\varphi(0)$ n'existe pas.
En résumé :

le domaine de définition de $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,dt$ est $]0\,;\,+\infty[$.

4.14

indications

1. • Supposer : $\alpha > -1$.
Montrer que l'intégrale converge.
Pour cela, appliquer le théorème ***4****.*
• Montrer que pour $\alpha < -1$*, l'intégrale diverge.*
Pour cela, appliquer le résultat de l'exercice 4.2.

solution

1. La fonction $t \mapsto t^{\alpha}(\ln t)^2$ est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;\,1]$.

• Supposons $\alpha > -1$.
Soit β un réel vérifiant : $-\alpha < \beta < 1$.

On a : $\lim_{t \mapsto 0^+} t^{\beta}[t^{\alpha}(\ln t)^2] = \lim_{t \mapsto 0^+} t^{\alpha+\beta}(\ln t)^2\,dt = 0$, car $\alpha + \beta > 0$.

Comme $\beta < 1$, le théorème **4** permet d'affirmer que l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha}(\ln t)^2\,dt$ converge.

• L'intégrale $I(\alpha)$ diverge pour $\alpha = -1$.

• Supposons $\alpha < -1$.

Soit β un réel vérifiant : $1 < \beta < -\alpha$.

On obtient :

$$\lim_{t \mapsto 0^+} t^{\beta}[t^{\alpha}(\ln t)^2] = +\infty, \quad \text{car } \alpha + \beta < 0.$$

Comme $\beta > 1$, le résultat de l'exercice 4.2 donne :

l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha (\ln t)^2 \, dt$ diverge.

Conclusion :

$$\textbf{l'intégrale } \int_0^1 t^\alpha (\ln t)^2 \textbf{ converge si, et seulement si, } \alpha > -1.$$

2. Deux intégrations par parties successives fournissent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I(n) = \frac{2}{(n+1)^3}.$$

4.15

indications

1. Poser : $A = \int_0^1 e^{-xt}\, t^{\alpha-1}\, dt$ *et* $B = \int_1^{+\infty} e^{-xt}\, t^{\alpha-1}\, dt.$

•Étudier la convergence de A.

•Pour B, discuter suivant le signe de x.

2. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{p+1}(x)$ et $I_p(x)$.

solution

1. La fonction $t \mapsto e^{-xt}\, t^{\alpha-1}$ est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;+\infty[$.

Posons : $A = \int_0^1 e^{-xt}\, t^{\alpha-1}\, dt$ et $B = \int_1^{+\infty} e^{-xt}\, t^{\alpha-1}\, dt.$

• Considérons A.

On a : $e^{-xt}\, t^{\alpha-1} \underset{0}{\sim} t^{\alpha-1}.$

Ainsi, A converge si, et seulement si, x est quelconque et $\alpha > 0$.

• Considérons B.

– Si $x > 0$, le raisonnement de l'exercice 4.13 donne :

B converge si, et seulement si, α est quelconque.

– Si $x = 0$, B converge si, et seulement si, $\alpha < 0$.

– Supposons $x < 0$.

On a : $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \sqrt{t}\, e^{-xt}\, t^{\alpha-1} = +\infty.$

Le résultat de l'exercice 4.2 fournit :

B diverge pour tout réel α.

En résumé :

$$\textbf{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{\alpha-1}\, dt \textbf{ converge si, et seulement si , } (x > 0 \textbf{ et } \alpha > 0).$$

2. Une intégration par parties fournit :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall\, x > 0, \qquad I_{p+1}(x) = \frac{p}{x}\, I_p(x).$$

D'où

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > 0, \qquad I_p(x) = \frac{(p-1)!}{x^p}.$$

4.16

indications

1. •*Noter que :* $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ *existe* $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \int_p^n f(x)\,dx$ *est finie.*

•*Remarquer que :* $\displaystyle\forall\, k > p, \quad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leqslant f(k-1).$

2. Distinguer deux cas : $\alpha > 0$ *et* $\alpha \leqslant 0$.

solution

1. Soit $k > p$.

Comme f est décroissante, on a :

$$\forall\, t \in [k-1\,;\,k], \qquad f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1).$$

D'où

$$(1) \qquad \forall\, k > p, \quad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leqslant f(k-1).$$

La sommation des inégalités (1) donne :

$$(2) \qquad \forall\, n \geqslant p+1, \quad \sum_{k=p+1}^{n} f(k) \leqslant \int_p^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} f(k).$$

• Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Cela équivaut à :

$$(3) \qquad \exists\, \ell \in \mathbb{R} \quad / \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \int_p^n f(x)\,dx = \ell.$$

Posons : $\displaystyle\forall\, n \geqslant p+1, \quad S_n = \sum_{k=p+1}^{n} f(k).$

La suite (S_n) est croissante.

La combinaison de (2) et (3) donne la majoration de (S_n) par ℓ.

Ainsi la série de terme général $f(n)$ converge.

• Supposons que l'intégrale $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Le même raisonnement fournit :

la série de terme général $f(n)$ diverge.

En résumé :

si p est un entier et f une fonction continue, positive et décroissante sur $[p\ ;\ +\infty[$, alors l'intégrale $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ et la série de terme général $f(n)$ ont la même nature.

2. • Supposons $\alpha \leqslant 0$.

On a : $\quad \forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{(\ln n)^{-\alpha}}{n}.$

Par conséquent : $\quad \forall\, n \geqslant 3, \quad u_n \geqslant \dfrac{1}{n}.$

Ainsi la série de terme général u_n diverge.

• Soit $\quad \alpha > 0$.

La fonction $\quad x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ est continue et décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

D'après le résultat de la première question, la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ est celle de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

Or, par le calcul, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Donc

la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Autre solution

1. Posons : $\quad \forall\, n \geqslant p, \quad v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx.$

Remarquons que la série de terme général v_n converge si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

En effet, $\quad \displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \left(\sum_{k=p}^{n} v_k\right) = \lim_{n \mapsto +\infty} \int_p^{n} f(x)\,dx.$

Or $\quad \forall\, n \geqslant p, \quad f(n+1) \leqslant v_n \leqslant f(n).$

Donc les séries de termes généraux v_n et $f(n)$ ont la même nature.

D'où

$\displaystyle\int_p^{+\infty}$ ***f(x) dx* est de même nature que la série de terme général $f(n)$.**

4.17

indications

1. Remarquer que : $\forall\ \alpha > 0,\quad \forall\ n \geqslant 0,\quad \dfrac{1}{\alpha+n} = \displaystyle\int_0^1 x^{\alpha+n-1}\,dx.$

2. Observer que : $\forall\ a > 0,\quad \forall\ b > 0,\quad S(a, b) = \dfrac{1}{b}\, S\!\left(\dfrac{a}{b}, 1\right).$

solution

1. Remarquons que : $\forall\ \alpha > 0,\quad \forall\ n \geqslant 0,\quad \dfrac{1}{\alpha+n} = \displaystyle\int_0^1 x^{\alpha+n-1}\,dx.$

On en déduit :

$$\forall\ \alpha > 0,\quad \forall\ n \geqslant 0,\quad \frac{(-1)^n}{\alpha+n} = \int_0^1 x^{\alpha-1}\,(-x)^n\,dx.$$

Par suite :

$$\forall\ n \geqslant 0,\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} = \int_0^1 \left[x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n} (-x)^k\right] dx.$$

D'où

$$(1)\qquad \forall\ n \geqslant 0,\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}\,dx.$$

Posons : $\forall\ n \geqslant 0,\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}\,dx.$

On a : $\forall\ n \geqslant 0,\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+\alpha+1}.$

Ce qui montre que :

$$(2)\qquad \lim_{n \mapsto +\infty} I_n = 0.$$

Puisque $S(\alpha, 1) = \displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$,

la combinaison de (1) et (2) donne :

$$S(\alpha, 1) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx.$$

Conclusion :

si $\alpha > 0$, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\alpha+n}$ converge

et sa somme $S(\alpha, 1)$ vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$.

2. On a :

$$S(a,\, b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} \qquad \text{et} \qquad S(\alpha,\, 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}.$$

Par conséquent :

$$S(a,\, b) = \frac{1}{b}\, S\left(\frac{a}{b},\, 1\right).$$

D'après le résultat de la question **1**, on a :

$$S(a,\, b) = \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{x^{a/b\,-1}}{1+x}\, dx.$$

Posons : $\quad x = t^b.$

On obtient : $\quad S(a,\, b) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\, dx.$

Conclusion :

si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{a+nb}$ converge et sa somme $S(a,\, b)$ vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\, dx$.

Ces résultats assurent la convergence des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx \quad et \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\, dx \quad pour \quad a > 0 \ \ et \ \ b > 0.$$

4.18

indications

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} I_k$.

3. Se servir du résultat de l'exercice 4.14 (question **2***).*

solution

Rappelons que la convergence des intégrales I et I_n a été étudiée aux exercices 4.6 et 4.14.

1. Calculons : $\quad \sum_{k=0}^{n} I_k.$

On obtient : $\quad \forall n \geqslant 0, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 (\ln t)^2\, \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\, dt.$

D'où

$$\textbf{(1)} \qquad \forall n \geqslant 0, \quad I = \sum_{k=0}^{n} I_k + R_n \text{ où } R_n = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2\, t^{n+1}}{1-t}\, dt.$$

Remarquons que l'intégrale R_n converge.

En effet, posons :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t(\ln t)^2}{1-t} & \text{si } t \in]0\,;1[\,; \\ 0 & \text{si } t = 0 \text{ ou } t = 1. \end{cases}$$

La fonction φ est alors continue sur $[0\,;1]$.
Il en est de même de la fonction $\quad t \mapsto t^n\, \varphi(t)$.

2. On a : $\quad \forall\, n \geqslant 0, \quad R_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\, \varphi(t)\, dt.$

Or φ est continue sur $[0\,;1]$.

Donc :

$$\exists\, M \geqslant 0 \quad / \quad \forall\, t \in [0\,;1],\ |\varphi(t)| \leqslant M.$$

On en déduit :

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant R_n \leqslant \frac{M}{n+1}.$$

Ainsi

$$\boldsymbol{\lim_{n \mapsto +\infty} R_n = 0.}$$

3. D'après le résultat de l'exercice 4.14, on obtient:

$$(2) \qquad \forall\, k \geqslant 0, \quad I_k = \frac{2}{(k+1)^3}.$$

La combinaison de (1) et (2) donne : $\quad I = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} I_k + \lim_{n \mapsto +\infty} R_n.$

On en déduit, d'après le résultat de la question **2** :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(k+1)^3} = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\, dt.$$

Par suite :

$$\boldsymbol{\sum_{p}^{+\infty} \frac{1}{p^3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\, dt.}$$

4.19

indications

1. Appliquer le résultat de l'exercice 4.15 (question 2).

2. • Vérifier que :

$$\forall\, N \geqslant 1, \qquad \sum_{n=1}^{N} I_p(n) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt - S_N,$$

où $\quad S_N = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-Nt}\, t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt.$

• Montrer que : $\quad \displaystyle\lim_{N \mapsto +\infty} S_N = 0.$

Pour cela, remarquer que : $\quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^t - 1 \geqslant t.$

solution

1. D'après le résultat de l'exercice 4.15 (question **2**), on a :

$$\forall\, p \geqslant 2, \qquad \forall\, n \geqslant 1, \qquad \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!}\, I_p(n).$$

D'où

$$\textbf{(1)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{N \mapsto +\infty} \sum_{n=1}^{N} I_p(n).$$

2. Soit $\quad N \geqslant 1.$

• Considérons $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{N} I_p(n).$

On a : $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{N} I_p(n) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}\, e^{-t}\, \frac{1 - e^{-Nt}}{1 - e^{-t}}\, dt.$

Ce qui équivaut à :

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{N} I_p(n) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt - S_N$$

où $\quad S_N = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\, e^{-Nt}}{e^t - 1}\, dt.$

• Par ailleurs : $\quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^t - 1 \geqslant t.$

Le résultat peut être établi à l'aide des variations de la fonction $t \mapsto e^t - t - 1$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit :

$$\forall\, N \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant S_N \leqslant \int_0^{+\infty} t^{p-2}\, e^{-Nt}\, dt.$$

Or $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-2}\, e^{-Nt}\, dt = I_{p-1}(N) = \frac{(p-2)!}{N^{p-1}}.$

Donc

$$(3) \qquad \lim_{N \mapsto +\infty} S_N = 0, \text{ car } p \geqslant 2.$$

La combinaison de (1), (2) et (3) permet de conclure :

$$\textbf{pour tout entier } \boldsymbol{p \geqslant 2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

4.20

indications

1. Établir la convergence des intégrales $\int_0^1 f(t)\, dt$ *et* $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ *où* $f(t) = \dfrac{\ln t}{x^2 + t^2}$.

2. Poser $u = \dfrac{x^2}{t}$.

solution

1. La fonction $t \xrightarrow{f} \dfrac{\ln t}{x^2 + t^2}$ est intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;+\infty[$.

Posons : $I_1 = \int_0^1 f(t)\, dt$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

• f est négative sur $]0\,;1]$.

On a : $-f(t) \underset{0}{\approx} -\dfrac{\ln t}{x^2}$.

Or $\int_0^1 (-\ln t)\, dt$ converge.

Donc I_1 converge.

• f est positive sur $[1\,;+\infty[$.

De plus : $f(t) \underset{\infty}{\approx} \dfrac{\ln t}{t^2}$.

Or $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^2}\, dt$ converge.

Donc I_2 converge.

Conclusion :

$$\textbf{pour tout } \boldsymbol{x > 0}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2}\, dt \textbf{ converge.}$$

2. Posons : $u = \dfrac{x^2}{t}$.

On obtient :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln (x^2/u)}{x^2 + u^2}\, du = 2 \ln x \int_0^{+\infty} \frac{du}{x^2 + u^2} - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{x^2 + u^2}\, du.$$

Ce qui équivaut à : $\quad 2\,I(x) = 2\ln x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{x^2+u^2}.$

Or $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{x^2+u^2} = \frac{\pi}{2\,x}.$

Donc

$$\boldsymbol{\forall\, x > 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi \ln x}{2\,x}.}$$

4.21

indications

• *Poser* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} & si\ x \in\,]0\,;1[\,; \\ -1 & si\ x = 0. \end{cases}$

Remarquer que f est continue en 0.

• *Considérer* $\quad a \in\,]0\,;1[.$

Étudier la nature de $\quad \displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx$ *au voisinage de* 1.

Pour cela, poser $\quad t = 1-x.$

• *Pour le calcul de I, observer que :* $\quad I = \displaystyle\lim_{\substack{\alpha \mapsto 0 \\ \beta \mapsto 1}} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$

solution

• Posons $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} & \text{si } x \in\,]0\,;1[\,; \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

La fonction f est continue et négative sur tout compact inclus dans $[0\,;1[$.

• Soit $\quad a \in\,]0\,;1[.$

Étudions la nature de $\quad \displaystyle\int_a^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx.$

Pour cela, posons : $\quad t = 1-x.$

On a :

$$\int_a^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx = \int_0^{1-a} \frac{\ln(2-t)}{(1-t)^2}\,dt + \int_0^{1-a} \frac{\ln t}{(1-t)^2}\,dt.$$

L'intégrale $\quad \displaystyle\int_0^{1-a} \frac{\ln(2-t)}{(1-t)^2}\,dt$ converge car $t \mapsto \dfrac{\ln(2-t)}{(1-t)^2}$ est continue sur $[0\,;1-a]$.

Par ailleurs :

$$\frac{-\ln t}{(1-t)^2} \underset{0}{\sim} -\ln t.$$

Or $\displaystyle\int_0^{1-a} (-\ln t)\, dt$ converge.

Donc $\displaystyle\int_0^{1-a} \frac{\ln t}{(1-t)^2}\, dt$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_a^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\, dx$ converge.

En résumé :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\, dx \text{ converge.}$$

• Calculons I.

On a : $\displaystyle I = \lim_{\substack{\alpha \mapsto 0 \\ \beta \mapsto 1}} \int_\alpha^\beta \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\, dx.$

Une intégration par parties et une décomposition en éléments simples fournissent :

$\forall\, \alpha \in]0\,;1[,\qquad \forall\, \beta \in]0\,;1[,$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\, dx = -\frac{(1-\beta)\ln(1-\beta)}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}+1\right)\ln(1+\beta) + \frac{\ln(1-\alpha^2)}{\alpha} + \ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{u \mapsto 0} u \ln u = 0$, on en déduit : $\quad I = -2\ln 2.$

Ce résultat confirme le signe de f sur $[0\,;1[$.
Conclusion :

$$\textbf{l'intégrale } \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\, dx \textbf{ converge vers } -2\ln 2.$$

4.22

indication

Raisonner comme pour l'exercice 4.2.

solution

La fonction f est intégrale sur tout compact inclus dans $[a\,;+\infty[$.

On a : $\displaystyle\lim_{t \mapsto +\infty} f(t) = +\infty.$

Cela équivaut à :

(1) $\quad \forall\, M > 0, \quad \exists\, c > a \quad / \quad \forall\, t \geqslant c, \quad f(t) \geqslant M.$

Il en résulte :

(2) $\quad \forall\, t \geqslant c, \quad t^{\alpha} f(t) \geqslant t^{\alpha} M = \dfrac{M}{t^{-\alpha}}.$

D'après (1), $\quad \forall\, t \geqslant c, \quad f(t) > 0.$

De plus, d'après le théorème **5** :

(3) $\quad \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ diverge.

La combinaison de (2) et (3) donne :

$$\int_a^{+\infty} t^{\alpha} f(t)\, dt \text{ diverge.}$$

Conclusion :

si une fonction f est continue sur $[a\,;\,+\infty[$, $a > 0$, et $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} f(t) = +\infty$, alors pour tout $\alpha \geqslant -1$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^{\alpha} f(t)\, dt$ diverge.

Autre solution

La fonction f est intégrable sur tout compact inclus dans $[a\,;\,+\infty[$.

De plus : $\quad \exists\, c > a \quad / \quad \forall\, t \geqslant c, \quad f(t) > 0$

car $\quad \lim\limits_{t \mapsto +\infty} f(t) = +\infty.$

• Supposons $\quad \alpha = -1.$

On a : $\quad \lim\limits_{t \mapsto +\infty} t \left(\dfrac{f(t)}{t} \right) = +\infty.$

D'après le résultat de l'exercice 4.2 : $\quad \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ diverge.

• Supposons $\quad \alpha > -1.$

Cela équivaut à : $\quad -\alpha < 1.$

Considérons un réel β tel que :

(1) $\quad -\alpha < \beta < 1.$

On obtient :

$$\lim_{t \mapsto +\infty} t^{\beta} \left(t^{\alpha} f(t) \right) = +\infty$$

car d'après (1), $\quad \alpha + \beta > 0 \quad$ *et* $\quad \lim\limits_{t \mapsto +\infty} f(t) = +\infty.$

Il résulte de l'exercice 4.2 : $\quad \displaystyle\int_a^{+\infty} t^{\alpha} f(t)\, dt$ diverge.

Conclusion :

si une fonction f est continue sur $[a\,;\,+\infty[$, $a > 0$, et $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} f(t) = +\infty$, alors pour tout $\alpha \geqslant -1$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^{\alpha} f(t)\, dt$ diverge.

4.23

indications

Établir que : $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge* $\Rightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx$ *converge.*

Pour cela, traduire l'hypothèse : $\lim_{x \mapsto b} f(x) = \ell$.

solution

Montrons que : $\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx$ converge.

• On a : $\lim_{x \mapsto b} f(x) = \ell$.

Ce qui équivaut à :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0 \quad / \quad \forall\, x \in [a, b[, \quad 0 < b - x \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon.$

On en déduit :

$\forall\, x \in [a\,;\, b[, \quad 0 < b - x \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad f^2(x) \leqslant (\ell + \varepsilon)\, f(x).$

Or $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

Donc, d'après le théorème **3** : $\int_a^b f^2(x)\,dx$ converge.

Ainsi : $\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\quad\Rightarrow\quad \int_a^b f^2(x)\,dx$ converge.

Ce qui équivaut à :

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \text{ diverge.}$$

• Le raisonnement est similaire pour b infini.

Conclusion :

si f est une fonction positive, intégrable sur tout compact inclus dans $[a\,;\, b[$,

telle que $\lim_{x \mapsto b} f(x) = \ell$ et $\int_a^b f^2(x)\,dx$ diverge, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

4.24

indications

• *Établir que :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 \quad / \quad x \geqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_\alpha^x f(t)\,dt \leqslant \varepsilon.$$

*Pour cela appliquer le théorème **1**.*

• *Noter que :* $\forall\, x \geqslant \alpha, \quad \int_\alpha^x f(t)\,dt \geqslant (x - \alpha)\, f(x).$

• *Remarquer que :* $\exists\, \beta > 0 \quad / \quad \forall\, x \geqslant \beta, \quad x\, f(x) \leqslant 2\,(x - \alpha)\, f(x).$

• *Conclure.*

indications et solutions

solution

- Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, le théorème **1** donne :

$$(1) \qquad \exists\ \alpha > 0, \quad \alpha \geqslant a \ / \ \forall\ x \geqslant \alpha, \qquad \int_\alpha^x f(t)\,dt \leqslant \varepsilon.$$

- Or $\forall\ t \in [\alpha\,;x]$, $f(t) \geqslant f(x)$
car f est décroissante.
Donc

$$(2) \qquad \int_\alpha^x f(t)\,dt \geqslant (x-\alpha)\,f(x).$$

- De plus :

$$(3) \qquad x \geqslant 2\,\alpha \Rightarrow x\,f(x) \leqslant 2\,(x-\alpha)\,f(x).$$

- La combinaison de (1), (2) et (3) donne :

$\forall\ x \geqslant 2\,\alpha$, $\quad x\,f(x) \leqslant 2\,\varepsilon$.
Ce qui montre que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x\,f(x) = 0$.

Conclusion :

si f est une fonction décroissante et positive sur $[a\,;+\infty[$ telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x\,f(x) = 0$.

4.25

indications

- *Noter que la fonction* $x \xrightarrow{f} x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q$ *est positive sur* $]0\,;1[$.
- *Considérer* $a \in]0\,;1[$, $\quad I_1 = \int_0^a f(x)\,dx \quad$ *et* $\quad I_2 = \int_a^1 f(x)\,dx$.
- *Poser* $t = \ln \frac{1}{x}$ *pour* I_1, *et appliquer le résultat de l'exercice 4.15.*
- *Poser* $t = 1-x$ *pour* I_2.

solution

- La fonction $x \xrightarrow{f} x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q$ est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;1[$.
- Soit $a \in]0\,;1[$.

Posons : $\quad I_1 = \int_0^a f(x)\,dx \quad$ et $\quad I_2 = \int_a^1 f(x)\,dx$.

• Étudions la nature de I_1.

Posons : $t = \ln \frac{1}{x}$.

On obtient :

$$I_1 = \int_{-\ln a}^{+\infty} e^{-(p+1)t}\, t^q\, dt.$$

D'après la démonstration de l'exercice 4.15 (question **1**), I_1 converge si, et seulement si, ($p > -1$ et q quelconque), ou ($p = -1$ et $q < -1$).

• Étudions la nature de I_2.

Pour cela, posons : $t = 1 - x$.

On a : $I_2 = \int_0^{1-a} (1-t)^p\, (-\ln(1-t))^q\, dt$.

Or $(1-t)^p\, (-\ln(1-t))^q \underset{0}{\sim} t^q$.

Donc :

I_2 converge si, et seulement si, $q > -1$.

En résumé :

l'intégrale $\int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q dx$ converge si, et seulement si, $p > -1$ et $q > -1$.

4.26

indications

• *Poser :* $I_1 = \int_0^1 f(t)\, dt$ *et* $I_2 = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$

où $f(t) = \dfrac{t^x}{e^{tx} - 1}$.

• *Étudier le signe de f puis procéder par équivalence.*

solution

Posons : $\forall\, x \neq 0$, $\forall\, t > 0$, $f(t) = \dfrac{t^x}{e^{tx} - 1}$.

f est intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;+\infty[$.

• Étudions la nature de $I_1 = \int_0^1 f(t)\, dt$.

– Supposons $x > 0$.

La fonction f est positive sur $]0\,;1]$.

De plus : $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^{x-1}}{x}$.

Par conséquent, I_1 converge.

– Supposons $x < 0$.
La fonction f est négative sur $]0\ ;\ 1]$.

On a : $-f(t) \underset{0}{\sim} -\dfrac{t^{x-1}}{x}$.

D'où I_1 diverge.

Ainsi I_1 converge si, et seulement si, $x > 0$.

• Étudions la nature de I_2.
– Pour $x < 0$, I_2 a le même signe que I_1.

Or I_1 diverge.

Donc I diverge quelle que soit la nature de I_2.
– Supposons $x > 0$.
La fonction f est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Comme $f(t) \underset{+\infty}{\sim} t^x\, e^{-xt}$, I_2 converge d'après la solution de l'exercice 4.15.

• Conclusion :

$$\textbf{l'intégrale} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^{tx}-1}\, \mathrm{d}t \ \textbf{converge si, et seulement si, } x > 0.$$

4.27

indication

Procéder comme pour l'exercice 4.26

solution

Posons : $\forall\, x > 0,\quad f(x) = x^{\alpha} \ln(1 + e^{\beta x})$.
La fonction f est positive et intégrable sur tout compact inclus dans $]0\ ;\ +\infty[$.

• Étudions la nature de $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

On a : $f(x) \underset{0}{\sim} x^{\alpha} \ln 2$.

D'où I_1 converge si, et seulement si, $\alpha > -1$ et β quelconque.

• Étudions la nature de $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

– Supposons $\beta = 0$.
On a : $f(x) = x^{\alpha} \ln 2$.
D'où I_2 converge si, et seulement si, $\alpha < -1$.
– Supposons $\beta > 0$.

On a : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \beta\, x^{\alpha+1}$ car $1 + e^{\beta x} \underset{+\infty}{\sim} e^{\beta x}$.

Par conséquent, I_2 converge si, et seulement si, $\alpha < -2$.

indications et solutions

– Supposons $\beta < 0$.

On obtient : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{\alpha} e^{\beta x}$

car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^{\beta x} = 0$ et $\ln(1 + e^{\beta x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{\beta x}$.

D'après la solution de l'exercice 4.15, I_2 converge.

Conclusion :

l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\alpha} \ln(1 + e^{\beta x})\, dx$ converge si, et seulement si, $\alpha > -1$ et $\beta < 0$.

4.28

indications

• *Poser :* $I_1 = \int_0^1 f(t)\, dt$ *et* $I_2 = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$

avec $f(t) = \dfrac{t^x \ln t}{1 + t}$.

• *Remarquer que* I_1 *est de même nature que* $\int_0^1 t^x \ln t\, dt$.

• *Faire le même raisonnement pour* I_2, *et noter que :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geqslant e, \quad f(t) \geqslant \dfrac{t^x}{1 + t}$.

solution

• Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in]0\,;+\infty[, \quad f(t) = \dfrac{t^x \ln t}{1 + t}$.

La fonction f est intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;+\infty[$.

• Étudions la nature de $I_1 = \int_0^1 f(t)\, dt$.

La fonction f est négative sur $]0\,;1]$.

De plus : $-f(t) \underset{0}{\sim} -t^x \ln t$.

Ainsi I_1 est de même nature que $J = \int_0^1 t^x \ln t\, dt$.

– Si $x = -1$, J diverge.

– Supposons $x \neq -1$.

Une intégration par parties fournit :

$$J = -\frac{1}{x+1} \int_0^1 t^x\, dt - \frac{1}{x+1} \lim_{a \to 0} a^{x+1} \ln a.$$

Par conséquent, I_1 converge si, et seulement si, $x > -1$.

• Étudions la nature de $I_2 = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

La fonction f est positive sur $[1\,;+\infty[$.

De plus : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} t^{x-1} \ln t$.

On en déduit que I_2 est de même nature que :

$$K = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \ln t \, dt.$$

– Si $x = 0$, K diverge.

– Supposons $x < 0$.

On a $K = \lim_{A \mapsto +\infty} \int_1^A t^{x-1} \ln t \, dt.$

Une intégration par parties donne :

$$K = \frac{1}{x} \lim_{A \mapsto +\infty} \left(A^x \ln A - \int_1^A t^{x-1} \, dt\right).$$

Par conséquent, si $x < 0$ alors I_2 converge.

– Supposons $x > 0$.

On a : $\forall\, t \geqslant e, \quad f(t) \geqslant \dfrac{t^x}{1+t}.$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^x \, dt}{1+t}$ diverge pour $x > 0$ (exercice 4.11).

Donc I_2 diverge.

En résumé :

la fonction $\boldsymbol{x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x \ln t}{1+t} \, dt}$ **n'est définie que sur** $\boldsymbol{]-1\,;\,0[}$**.**

4.29

indication

Se servir des résultats établis dans la solution de l'exercice 4.28.

solution

Posons : $\forall\, t > 0, \quad f(t) = \dfrac{\ln(a^2 + t)}{t^b (1+t)}.$

La fonction f est intégrable sur tout compact inclus dans $]0\,;+\infty[$.

• Étudions la nature de $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt.$

– Supposons $a = 0$.

On a : $\forall\, t > 0, \quad f(t) = \dfrac{\ln t}{t^b (1+t)}.$

I_1 est de même nature que $\displaystyle\int_0^1 t^{-b} \ln t \, dt$ et d'après la solution de l'exercice 4.28, cette intégrale converge si, et seulement si, $b < 1$.

– Supposons $a \neq 0$.

Si $a^2 = 1$, $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{b-1}}$. D'où I_1 converge si et seulement si, $b < 2$.

Si $a^2 \neq 1$, $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln a^2}{t^b}$. Ainsi I_1 converge si, et seulement si, $b < 1$.

En résumé, I_1 converge si, et seulement si, ($a^2 = 1$ et $b < 2$) ou ($a^2 \neq 1$ et $b < 1$).

• Étudions la nature de $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

I_2 est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-b-1} \ln t\, dt$.

D'après la solution de l'exercice 4.28, I_2 converge si, et seulement si, $b > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Conclusion :

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2 + t)}{t^b(1+t)}\, dt$ converge si, et seulement si,

($a^2 = 1$ et $b \in]0\,;\,2[$) ou ($a^2 \neq 1$ et $b \in]0\,;\,1[$).

4.30

indications

• *Poser* $u = \dfrac{1}{t}$.

• *Vérifier, à l'aide d'une intégration par parties que :*

$\forall\, x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u^{-x}\, du}{(1+u)^2}$.

• *Montrer que :* $\displaystyle\lim_{x \mapsto 0} \int_1^{+\infty} \frac{u^{-x}\, du}{(1+u)^2} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2}$.

solution

Notons que, d'après la démonstration de l'exercice 4.11 :
la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

• Posons : $u = \dfrac{1}{t}$.

On a : $\forall\, x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u^{-x}}{1+u}\, du = \int_1^{+\infty} u^{-x-1}\left(\frac{u}{1+u}\right) du$.

• Une intégration par parties donne :

$$(1) \qquad \forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\, g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{u^{-x}\, du}{(1+u)^2}.$$

• Montrons que $\displaystyle\lim_{x \mapsto 0} g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2}$.

On obtient :

$$\forall\, x > 0, \qquad g(x) - \int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = \int_1^{+\infty} \frac{u^{-x} - 1}{(1+u)^2}\, du.$$

Remarquons que : $\quad \forall\, u \geqslant 1, \quad \forall\, x > 0, \quad u^{-x} \leqslant 1.$

Par suite :

$$\forall\, x > 0, \qquad \left| g(x) - \int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} \right| = \int_1^{+\infty} \frac{1 - u^{-x}}{(1+u)^2}\, du.$$

Soit $\quad \varepsilon > 0.$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2}$ converge, on obtient, d'après le théorème **1** :

$$\exists\, A > 1 \quad / \quad \forall\, v \geqslant A, \quad \int_A^{v} \frac{du}{(1+u)^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit :

$$\exists\, A > 1 \quad / \quad \lim_{v \mapsto +\infty} \int_A^{v} \frac{du}{(1+u)^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ce qui équivaut à :

$$\exists\, A > 1 \quad / \quad \int_A^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus : $\quad \forall\, x > 0, \quad \forall\, a > 1, \quad \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1 - u^{-x}}{(1+u)^2}\, du \leqslant \int_a^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2}.$

Par suite, on obtient :

$$(2) \qquad \exists\, A > 1 \quad / \quad \forall\, x > 0, \quad \int_A^{+\infty} \frac{1 - u^{-x}}{(1+u)^2}\, du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons : $\quad \varphi\,(u, x) = \dfrac{1 - u^{-x}}{(1+u)^2}.$

Pour tout $\quad u \in [1\,;A]$, la fonction $\quad x \mapsto \varphi\,(u, x)$ est continue en 0.

Par conséquent :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad / \quad 0 < x \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \varphi\,(u, x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,(A-1)}.$$

D'où

$$(3) \qquad \exists\, \alpha > 0 \quad / \quad 0 < x \leqslant \alpha \Rightarrow \int_1^{A} \varphi\,(u, x)\, du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

La combinaison de (2) et (3) donne :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad / \quad 0 < x \leqslant \alpha \Rightarrow \int_1^{+\infty} \varphi\,(u, x)\, du \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui montre que :

$$\lim_{x \mapsto 0} g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2}.$$

Par ailleurs : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = \frac{1}{2}.$

On en déduit : (4) $\lim_{x \mapsto 0} g(x) = \frac{1}{2}$.

Il résulte alors de (1) et (4) :

$$\lim_{x \mapsto 0} x f(x) = 1.$$

Ce qui équivaut à : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Conclusion :

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

4.31

indications

• *Remarquer que* $x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt - \int_0^x f(t)\, dt$ *est une primitive de* $-f$ *et que* $\lim_{x \mapsto +\infty} F(x) = 0$.

• *Appliquer le théorème* ***1***.

Pour cela, considérer $\int_u^v e^{-xy} f(x)\, dx$, *et intégrer par parties.*

solution.

• Posons : $\forall\, x \geqslant 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt - \int_0^x f(t)\, dt.$

F est une primitive de $-f$.

De plus, on a :

(1) $\lim_{x \mapsto +\infty} F(x) = 0.$

• Soient $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

Une intégration par parties donne :

(2) $$\int_u^v e^{-xy} f(x)\, dx = -\, F(v)\, e^{-vy} + F(u)\, e^{-uy} - y \int_u^v F(x)\, e^{-xy}\, dx.$$

• Soit $\varepsilon > 0$.

La proposition (1) équivaut à :

(3) $\exists\, \alpha > 0 \quad / \quad \forall\, u \geqslant \alpha, \quad |F(u)| \leqslant \varepsilon.$

On déduit de (2) :

(4) $\forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad v \geqslant u \geqslant 0,$

$$\left| \int_u^v e^{-xy} f(x)\, dx \right| \leqslant |F(v)|\, e^{-vy} + |F(u)|\, e^{-uy} + y \int_u^v |F(x)|\, e^{-xy}\, dx.$$

La combinaison de (3) et (4) donne :

$$v \geqslant u \geqslant \alpha, \quad \Rightarrow \quad \left| \int_u^v e^{-xy} f(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon \left(e^{-vy} + e^{-uy} + y \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx\right).$$

Or $\quad \forall\, u \geqslant 0, \quad \forall\, v \geqslant 0, \quad \forall\, y \geqslant 0, \quad e^{-uy} \leqslant 1$

et $\quad y \displaystyle\int_u^v e^{-xy}\, dx \leqslant y \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx \leqslant 1.$

En effet, si $\quad y = 0, \quad y \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx = 0$, et si $\quad y > 0, \quad y \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx = 1.$

Donc :

$$v \geqslant u \geqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \left| \int_u^v e^{-xy} f(x)\, dx \right| \leqslant 3\, \varepsilon.$$

Ceci montre, d'après le théorème **1**, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy} f(x)\, dx$ converge.

Conclusion :

si f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge,

alors pour tout $y \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy} f(x)\, dx$ converge.

4.32

indications

1. • Noter que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 \quad / \quad 0 < b - x \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\,M}.$$

*• Appliquer le théorème **1**. Pour cela, considérer $\displaystyle\int_u^v f(t)\, g(t)\, dt$ avec $0 < b - u \leqslant \alpha$, $0 < b - v \leqslant \alpha$, $u \leqslant v$ et se servir du second théorème de la moyenne :*
si f et g sont intégrables sur $[\beta\,;\gamma]$, et si f est monotone sur $[\beta\,;\gamma]$ alors

$$\exists\, \lambda \in [\beta\,;\gamma] \quad / \quad \int_\beta^\gamma f(t)\, g(t)\, dt = f(\beta) \int_\beta^\lambda g(t)\, dt + f(\gamma) \int_\lambda^\gamma g(t)\, dt.$$

solution

1. Soit $\quad \varepsilon > 0$.

• D'après l'hypothèse *(ii)*, on a :

(1) $\quad \exists\, \alpha > 0 \quad / \quad x \in [a\,; b[, \quad 0 < b - x \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4\,M}.$

D'après l'hypothèse *(iii)*, on obtient :

(2) $\quad \forall\, u \in [a\,; b[, \quad \forall\, v \in [a\,; b[, \quad \left| \displaystyle\int_u^v g(t)\, dt \right| = \left| \int_a^v g(t)\, dt - \int_a^u g(t)\, dt \right| \leqslant 2\, M.$

• Soit $\quad (u, v) \in [a\,; b[\times [a\,; b[$ tel que :

$$0 < b - u \leqslant \alpha, \quad 0 < b - v \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad u \leqslant v.$$

Le second théorème de la moyenne fournit :

(3) $\quad \exists\, \eta \in [u, v] \;/\; \left| \displaystyle\int_u^v f(t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant |f(u)| \left| \int_u^\eta g(t)\, dt \right| + |f(v)| \left| \int_\eta^v g(t)\, dt \right|.$

indications et solutions

La combinaison de (1), (2) et (3) donne :

$$\exists\, \alpha > 0 \quad / \quad \forall\, (u, v) \in [a\,;b[\times [a\,;b[$$
$$0 < b - u \leqslant \alpha, \quad 0 < b - v \leqslant \alpha,$$
$$u \leqslant v, \quad \left| \int_u^v f(t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, d'après le théorème **1**, $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ converge.
Conclusion :

si f et g sont deux fonctions intégrables sur tout compact inclus dans $[a\,;b[$ vérifiant:

(i) **f est monotone sur $[a\,;b[$;**

(ii) **$\lim\limits_{x \mapsto b} f(x) = 0$;**

(iii) **$\exists\, M > 0 \quad / \quad \forall\, x \in [a\,;b[, \quad \left| \int_a^x g(t)\, dt \right| \leqslant M$;**

alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ converge.

2. • Il résulte de l'hypothèse *(i)* :

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R} \quad / \quad \lim_{x \mapsto b} f(x) = \ell.$$

• Notons que la convergence de $\int_a^b g(t)\, dt$ assure :

$$\exists\, M > 0 \quad / \quad \forall\, x \in [a\,;b[, \quad \left| \int_a^x g(t)\, dt \right| \leqslant M.$$

• Appliquons le résultat de la première question aux fonctions $f - \ell$ et g.
On obtient :

$$\int_a^b \Big(f(t) - \ell \Big)\, g(t)\, dt \text{ converge.}$$

Or $\int_a^b g(t)\, dt$ converge.

Donc $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ converge.

Conclusion :

si f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;b[$ et vérifiant :

(i) **f est monotone et bornée sur $[a\,;b[$;**

(ii) **$\int_a^b g(t)\, dt$ converge ;**

alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ converge.

5

Suites et séries de fonctions

Éléments de cours

Convergence simple d'une suite de fonctions

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite (f_n) de fonctions numériques définies sur A converge simplement sur A si, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge.
On définit ainsi une application f de A dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in A, \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f.$

f est appelée la limite de la suite de fonctions (f_n).

Bien que ce chapitre traite des suites et séries de fonctions numériques, les définitions subsistent pour les suites et séries de fonctions vectorielles.
Ainsi, si E et F sont deux espaces vectoriels réels normés et A une partie de E, on dit qu'une suite (f_n) de fonctions définies de A vers F converge simplement sur A si, pour tout élément x de A, la suite $(f_n(x))$ converge.

Convergence uniforme

Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur A.
On dit que (f_n) converge uniformément vers f si :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0, \quad x \in A \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

(i) Dans la définition précédente, l'entier n_0 ne dépend que de ε.
(ii) La convergence uniforme implique la convergence simple.

Théorème 1

Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur A.
La suite (f_n) converge uniformément vers f sur A si, et seulement si :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Théorème 2

Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions numériques continues sur A.
On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur A vers une fonction f.
Alors f est continue sur A.

Si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction f, alors f n'est pas nécessairement continue.

Théorème 3

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques continues sur un intervalle $I = [a\,;b]$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f.
Alors, la suite (g_n) de fonctions définies sur I par :

$$\forall\, x \in I, \qquad g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

converge uniformément sur I vers $\quad x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

Ainsi :

$$\forall\, x \in I, \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Séries de fonctions

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite de fonctions numériques définies sur A.
On appelle série de fonctions associée à la suite (u_n), la suite de fonctions (s_n) définies sur A par :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\,,$$

où u_n est le terme général de la série de fonctions, et s_n la somme partielle.

Convergence simple, convergence uniforme

Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et (u_n) une suite de fonctions numériques définies sur A.
On dit que la série de fonctions de terme général u_n converge (resp. uniformément) sur A si, la suite de fonctions (s_n) converge simplement (resp. uniformément) sur A.

Convergence normale

Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et (u_n) une suite de fonctions numériques définies sur A.
On dit que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur A, s'il existe une série numérique convergente de terme général v_n telle que :

$$\forall\, x \in A, \qquad |u_n(x)| \leqslant v_n.$$

La convergence normale implique la convergence uniforme.

Théorème 4

Soient A une partie de $\mathbb{R}$, et (u_n) une suite de fonctions numériques continues sur A.
On suppose que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément vers une fonction s.
Alors, s est continue sur A.

Théorème 5

Soit (u_n) une suite de fonctions numériques continues sur un intervalle $\quad I = [a\,;b]$.

On suppose que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur I vers s. Alors la série de fonctions de terme général v_n défini par :

$$\forall\, x \in I, \qquad v_n(x) = \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

converge uniformément sur I vers $\quad x \mapsto \int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t.$

Ainsi :

$$\forall\, x \in I, \qquad \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 6

Soit (u_n) une suite de fonctions numériques de classe C^1 sur un intervalle $\quad I = [a\,;\,b]$.
On suppose que :

(i) la série de fonctions de terme général u'_n converge uniformément (resp. normalement) sur I vers φ ;

(ii) il existe $x_0 \in I$ tel que la série numérique de terme général $u_n(x_0)$ converge (resp. absolument) vers un réel k.

Alors, la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément (resp. normalement) sur I vers la fonction $\quad x \mapsto k + \int_{x_0}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$

Ainsi :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \qquad \text{est dérivable sur } I,$$

et $\quad \forall\, x \in I, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$

Exercices

APPLICATION IMMÉDIATE

Convergence uniforme

5.1 Pour tout entier n et pour tout réel x, on pose :

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2}.$$

Soit α un réel strictement positif.
Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur
$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| \geqslant \alpha\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| \leqslant \alpha\}$.

5.2 Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions f_n définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}.$$

5.3 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I =]0\,;+\infty[$.
Étudier la convergence uniforme sur I de la suite de fonctions f_n définies par :

$$f_n(x) = n^\alpha\, xe^{-nx}.$$

5.4 Pour tout entier n et pour tout réel x, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}.$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n).

5.5 Pour tout entier n non nul, on pose :

$$f_n(x) = e^{-nx}\cos(nx).$$

Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de (f_n).

5.6 Pour tout entier n, on pose :

$$f_n(x) = \frac{2e^{-nx}}{1 + e^{-nx}}.$$

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-1\,;1]$.
2. Soit $a \in]0\,;1[$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-1\,;-a] \cup [a\,;1]$.

Permutation des symboles lim et $\int$

5.7 Soient a et b deux réels vérifiant : $0 < a < b$.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \frac{n\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}{n+x}$,

où φ est une fonction de classe C^1 sur $[a\,;\,b]$.

5.8 Soient a et b deux réels vérifiant : $0 < a < b < 1$.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sin\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right)\mathrm{d}x.$

5.9 Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \cos\frac{nx}{n+x}\,\mathrm{d}x.$

5.10 Pour tout entier n non nul, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x > 0\,; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$

5.11 Pour tout entier n non nul, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n^2}\,; \\ -n^3x + 2n & \text{si } \dfrac{1}{n^2} \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{n^2}\,; \\ 0 & \text{si } \dfrac{2}{n^2} \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

1. Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue sur $I = [0\,;\,2]$.
2. Vérifier que (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.
3. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur I.

4. Vérifier que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^2 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Généralités sur les suites de fonctions

5.12 Soit (f_n) une suite de fonctions numériques bornées convergeant uniformément vers une fonction f. Montrer que f est bornée.

5.13 Soit f une fonction numérique continue sur $I = [a\ ;\ b]$.

Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier sur I convergeant uniformément vers f.

On rappelle que toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

5.14 Soient $I = [a\ ;\ b]$ et (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 sur I. On suppose que :

(i) (f'_n) converge uniformément sur I vers φ ;

(ii) $\exists\, \alpha \in I, \exists\, \beta \in \mathbb{R} \,/ \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\alpha) = \beta$.

Montrer que (f_n) converge uniformément.

Séries de fonctions

5.15 Soient (a_n) une suite numérique, et $x_0 \neq 0$.

1. Montrer que si la série de terme général $a_n\, x_0^n$ converge, alors pour tout réel x tel que $|x| < |x_0|$, la série de terme général $a_n\, x^n$ converge absolument.
2. Montrer que si la série de terme général $a_n\, x_0^n$ diverge, alors la série de terme général $a_n\, x^n$ diverge pour tout réel x tel que $|x| > |x_0|$.

5.16 Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel x, on pose :

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1}\, x e^{\frac{-nx^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

1. Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est dérivable sur $I =]0\ ;\ +\infty[$.

5.17 Étudier la convergence uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ de la série de fonctions de terme général $u_n(x) = (-1)^n\, x^{n+1} \ln x$.

5.18 Pour tout entier n et pour tout réel x, on pose :

$$u_n(x) = e^{-nx}\,(1 - e^{-2x}).$$

1. Étudier la convergence uniforme sur $I = [0\ ;\ 1]$ de la série de fonctions de terme général u_n.
2. Vérifier que : $$\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

5.19 Soient I un intervalle ouvert contenant 0, et f une fonction numérique de classe C^∞ sur I. On suppose que la suite de fonctions $(f^{(n)})$ est bornée sur I.

Montrer que la série de fonctions de terme général $\dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ converge sur I, et préciser sa somme.

5.20 Pour tout entier n, on pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} e^{-nx}$.

Montrer que f est continue sur $[0 ; +\infty[$.

5.21 **1.** Soient a un réel strictement positif, et $I = [-a ; a]$.

Pour tout entier n, on pose :

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

a. Montrer que S est dérivable sur I.

b. Soit $x \in I$. Déterminer une relation entre $S'(x)$ et $S(x)$.

c. En déduire S.

2. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

5.22 Pour tout entier n non nul, on pose :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n} \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}.$$

1. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $I = [-1 ; 1]$ vers une fonction S à préciser.

2. a. Montrer que la série de fonctions de terme général v_n converge normalement sur I vers une fonction T.

b. Déterminer T.

3. En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n)}$.

5.23 Pour tout entier n non nul, et pour $x \in \mathrm{I} = [0 ; 1]$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{(-x)^{3n}}{n}.$$

Soit $x \in I$. Exprimer $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ à l'aide des fonctions élémentaires.

5.24 On considère la fonction f définie par :

$$\forall\, x \in I = [0 ; +\infty[, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur I.

APPROFONDISSEMENT ET SYNTHÈSE

5.25 Pour tout entier n, et pour tout $x \in I = [0 ; \frac{\pi}{2}]$, on pose :

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

Étudier la convergence uniforme sur I de la suite de fonctions (f_n).

5.26 Étudier la convergence uniforme sur $I = [0\,;\,1]$ de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall\, n \geqslant 0, \qquad \forall\, t \in I, \qquad f_n(t) = (1-t)^2\, t^{2n+1}.$$

5.27 Pour tout entier n non nul, et pour $x \in I = [0\,;\,1]$, on pose :

$$f_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - \ln(1+x).$$

Étudier la convergence uniforme sur I de la suite (f_n).

5.28 Pour tout entier n, on pose : $\qquad u_n(t) = (-1)^n (1-t)^2\, t^{2n+1}.$

Déterminer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(2n+3)}$$

à l'aide de la série de fonctions de terme général u_n.

5.29 Soit a un réel strictement positif.
Pour tout entier n, on pose :

$$u_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}\,(1+nx^2)}.$$

Étudier la convergence normale sur $I = [a\,;\,+\infty[$ de la série de fonctions de terme général u_n.

5.30 On considère la fonction f définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur I.
2. Déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

3. Montrer que : $\qquad \forall\, x \in I, \qquad f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt.$

4. Montrer que :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - f(x)\right) = \ln 2.$$

5. a. Montrer que : $\qquad \forall\, x > 0, \qquad 2f(x+1) \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 2f(x).$

b. En déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

5.31 Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et $I = [a\,;b]$.

Soit f une fonction continue sur I.

Pour tout entier n, on pose :

$$c_n = \int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la suite (c_n) converge et préciser sa limite.

5.32 Soient $I = [a\,;b]$, et (f_n) une suite de fonctions continues sur I. On suppose que (f_n) est une suite monotone, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))$ est monotone.

On suppose de plus que (f_n) converge vers une fonction f continue sur I.

Montrer que la convergence est uniforme sur I.

indications et solutions

5.1

indications

La démarche suivante peut être adoptée pour l'étude de la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) définies sur une partie A de $\mathbb{R}$.

(i) Étudier la convergence simple.

Pour cela, déterminer pour tout $x \in A$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

(ii) Étudier pour tout $n \geqslant 0$: $\sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ par :

– la majoration de $|f_n(x) - f(x)|$ sur A indépendamment de x ;

– l'étude des variations de $f_n - f$ sur A.

solution

• Étudions la convergence simple de (f_n) sur A.

Soit $x \in A$.

On a : $$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{nx^2}{nx^2} = 1$$

car $\forall\, x \in A, x \neq 0$.

Posons : $\forall\, x \in A,\ f(x) = 1$.

Nous avons établi que la suite (f_n) converge simplement sur A vers f.

• $\forall\, n \geqslant 0,\ \forall\, x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{1 + nx^2}$.

Or $\quad \forall\, x \in A,\ \dfrac{1}{1 + nx^2} \leqslant \dfrac{1}{1 + n\alpha^2}$.

Donc $\quad \forall\, n \geqslant 0,\ \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{1 + n\alpha^2}$.

Par suite, $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

D'après le théorème **1** :

la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur A vers $x \mapsto 1$.

• Étudions la convergence simple de (f_n) sur B.

Soit $x \in B - \{0\}$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$.

De plus : $f_n(0) = 0$.

Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur B vers la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B - \{0\} \,; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

• Étudions : $\forall\, n \geqslant 0, \ \sup\limits_{x \in B} |f_n(x) - g(x)|$.

Pour $x = 0, \ f_n(x) - g(x) = 0.$

Pour $x \in B - \{0\}, \ |f_n(x) - g(x)| = \dfrac{1}{1 + nx^2}.$

Il en résulte : $\sup\limits_{x \in B} |f_n(x) - g(x)| = 1.$

On en déduit, d'après le théorème **1** :

la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur B.

5.2

indication

Se reporter aux indications de l'exercice 5.1.

Solution

• On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0.$

Par conséquent, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

• De plus : $\forall\, n \geqslant 1, \forall\, x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}.$

On en déduit : $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}.$

Il en résulte : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 0.$

Conclusion :

la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

5.3

indications

• *Se reporter aux indications de l'exercice 5.1.*
• *Discuter suivant les valeurs de α.*

Solution

• On a : $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in I, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0.$

D'où la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle.

• L'étude des variations de f_n, pour tout entier n, donne :

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| = \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

Par conséquent, la convergence est uniforme sur I si, et seulement si, $\alpha < 1$.
En résumé :

la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I, si et seulement si, $\alpha < 1$.

5.4

indication

Se reporter aux indications de l'exercice 5.1.

Solution

• La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
• La convergence n'est pas uniforme car

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 1.$$

Ainsi

la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

5.5

indication

Appliquer le théorème **2**.

Solution

– Pour $x = 0$, on a $\quad f_n(0) = 1.$
– Pour $x > 0$, $\quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0.$

Il en résulte que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0\,;+\infty[\,; \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Remarquons que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$.
Or pour tout $n \geqslant 0$, $\quad f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Donc, d'après le théorème **2**, la convergence n'est pas uniforme.
Car si la suite (f_n) convergeait uniformément sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f serait continue sur $\mathbb{R}_+$.
D'où

la convergence de (f_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

5.6

indication

Raisonner comme pour l'exercice 5.5.

Solution

indications et solutions

1. – Soit $x \in [-1\ ;\ 0[$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 2.$

– Si $x = 0$, $f_n(x) = 1$, pour tout $n \geqslant 0$.

– Si $x \in]0\ ;\ 1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

Il en résulte que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[-1\ ;\ 1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [-1\ ;\ 0[\ ; \\ 1 & \text{si } x = 0\ ; \\ 0 & \text{si } x \in]0\ ;\ 1]. \end{cases}$$

Observons que la fonction f ainsi définie n'est pas continue en 0, alors que pour tout $n \geqslant 0$, f_n est continue sur $[-1\ ;\ 1]$.

On en déduit, d'après le théorème **2** :

la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[-1\ ;\ 1]$.

2. • Étudions la convergence uniforme de (f_n) sur $[-1\ ;\ -a]$.

On a : $\forall\, x \in [-1\ ;\ -a]$, $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{2}{1 + e^{-nx}} \leqslant \dfrac{2}{1 + e^{na}}$.

Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[-1\ ;\ -a]$.

• Étudions la convergence uniforme de (f_n) sur $[a\ ;\ 1]$.

On obtient : $\forall\, x \in [a\ ;\ 1]$, $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{2\,e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} \leqslant \dfrac{2\,e^{-na}}{1 + e^{-n}}$.

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a\ ;\ 1]$.

En résumé :

la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[-1\ ;\ -a] \cup [a\ ;\ 1]$ avec $a \in]0\ ;\ 1[$.

5.7

indications

Appliquer le théorème ***3****.*

Pour cela, poser $f_n(x) = \dfrac{n\varphi'(x)}{n + x}$, *et étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions* (f_n) *sur* $[a\ ;\ b]$.

Solution

Posons :

$$\forall\, n \geqslant 0,\quad \forall\, x \in [a\ ;\ b],\quad f_n(x) = \frac{n\varphi'(x)}{n+x}.$$

• La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[a\ ;\ b]$ vers φ'.

• On a :

$$\forall\, n \geqslant 0,\quad \forall\, x \in [a\ ;\ b],\quad |f_n(x) - \varphi'(x)| = \frac{x|\varphi'(x)|}{n+x} \leqslant \frac{x|\varphi'(x)|}{n+a}.$$

Or $\quad x \mapsto x|\varphi'(x)|$ est continue sur $[a\ ;\ b]$.

Donc

$$\exists\, M \geqslant 0 \;/\; \forall\, x \in [a\ ;\ b],\quad x|\varphi'(x)| \leqslant M.$$

D'où

$$\forall\, n \geqslant 0,\quad \sup_{x \in [a\ ;\ b]} |f_n(x) - \varphi'(x)| \leqslant \frac{M}{n+a}.$$

Il en résulte que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a\ ;\ b]$.

• Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction f_n est continue sur $[a\ ;\ b]$.

D'après le théorème **3** :

si φ est de classe C^1 sur $[a\ ;\ b]$, alors $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \frac{n\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}{n+x} = \varphi(b) - \varphi(a).$

5.8

indications

• *Raisonner comme pour l'exercice 5.7.*

• *Noter que :* $\forall\, t \in \mathbb{R},\ |\sin t| \leqslant |t|.$

Solution

• $\forall\, x \in [a\ ;\ b],\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^{2n} = 0.$

Par suite, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[a\ ;\ b]$ vers la fonction nulle.

• On a :

$$\forall\, n \geqslant 0,\quad \forall\, x \in [a\ ;\ b],\quad \left|\sin \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \leqslant x^{2n} \leqslant b^{2n}.$$

On en déduit que la convergence est uniforme sur $[a\ ;\ b]$.

• Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction f_n est continue sur $[a\ ;\ b]$.

D'après le théorème **3** :

$$\textbf{si}\quad 0 < a < b < 1,\qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

5.9

indications

Raisonner comme pour l'exercice 5.7.
Noter que : $\forall\ (p, q) \in \mathbb{R}^2$, $\cos p - \cos q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{q-p}{2}$.

Solution

Posons : $\forall\ n \geqslant 1,\ \ \forall\ x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}],\ \ f_n(x) = \cos \dfrac{nx}{n+x}$.

• Pour $x = 0,\ \ f_n(x) = 1$.

• Pour $x \neq 0,\ \ \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \cos(x)$.

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction $f :\ x \mapsto \cos(x)$.

• De la formule

$$\forall\ (p, q) \in \mathbb{R}^2,\ \ \cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2},$$

on déduit :

$$\forall\ (p, q) \in \mathbb{R}^2,\ \ |\cos p - \cos q| \leqslant 2 \left| \sin \frac{q-p}{2} \right|.$$

Par conséquent : $\forall\ n \geqslant 1,\ \ \forall\ x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}],\ \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant 2 \left| \sin \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{x^2}{n+x} \right) \right|$.

Or $\ \forall\ t \in \mathbb{R},\ \ |\sin t| \leqslant |t|$.

Donc

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \ \forall\ x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}],\ \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{x^2}{n+x} \leqslant \frac{\pi^2}{4n}.$$

Ce qui montre la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$.

Puisque, pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, le théorème **3** donne :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \cos \frac{nx}{n+x}\, dx = 1.}$$

5.10

indications

• *Raisonner comme pour l'exercice 5.7.*

• *Noter que :* $\ \forall\ t \geqslant 0,\ \ \ln(1+t) \leqslant t$.

Solution

• Soit $x > 0$.

On a : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0\ \ $ car $\ \ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$.

• Pour $x = 0,\ \ f_n(0) = 0$.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

• Soit $n \geqslant 1$. On a : $f_n(0) = 0$.
Par ailleurs, $\forall\, t \geqslant 0,\ \ln(1+t) \leqslant t$.
Ce résultat peut être établi grâce aux variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(1+t)$ sur $[0\,;+\infty[$.

Ainsi, $\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in\,]0\,;1],\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

D'où $\forall\, n \geqslant 1,\ \sup\limits_{x \in [0\,;\,1]} |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0\,;1]$.

• On a :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x > 0,\ |f_n(x)| \leqslant \frac{x}{n}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$.
Ainsi pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue en 0.

Par suite, f_n est continue sur $[0\,;1]$ pour tout $n \geqslant 1$.
Le théorème **3** permet alors de conclure :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$$

5.11

indication

2. Noter que : $\forall\, x \in\,]0\,;2],\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \ /\ \dfrac{2}{n^2} \leqslant x.$

Solution

1. On a :

pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue sur $I = [0\,;2]$.

2. Observons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Par conséquent : $\forall\, x \in\,]0\,;2],\ \exists\, n \geqslant 1 \ /\ \dfrac{2}{n^2} \leqslant x$.

D'où

$$\forall\, x \in\,]0\,;2], \qquad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0.$$

Par ailleurs, $\forall\, n \geqslant 1,\ f_n(0) = 0$.
Il en résulte :

la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle.

3. Étudions pour tout $n \geqslant 1$, $\sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

• La fonction $x \mapsto n^3 x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où $\sup_{x \in [0\,;\,\frac{1}{n^2}]} |f_n(x)| = n.$

• De même : $\sup_{x \in [\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}]} |f_n(x)| = n.$

On en déduit : $\sup_{x \in I} |f_n(x)| = n.$

Ainsi

la convergence n'est pas uniforme sur *I*.

4. Le calcul donne : $\int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}.$

D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nous venons de voir que :

(i) une suite de fonctions continues peut converger vers une fonction continue sans qu'il y ait convergence uniforme ;

(ii) la convergence uniforme n'est pas nécessaire pour permuter les symboles lim *et* $\int$.

5.12

indications

Noter que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \geqslant n_0,\ \sup |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$

En déduire que $f_{n_0} - f$ est bornée.

Conclure.

Solution

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et bornées sur une partie A de $\mathbb{R}$.

La convergence uniforme de (f_n) équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0,\ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que la fonction $f_{n_0} - f$ est bornée.

Or f_{n_0} est bornée.

Donc f est bornée.

Conclusion :

la limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est une fonction bornée.

5.13

indications

Considérer $\varepsilon > 0$.

Noter que f est uniformément continue sur I, ce qui équivaut à :

$$\exists\, \alpha > 0 \,/\, \forall\, (u, v) \in I^2,\ |u - v| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

Considérer pour toute subdivision de I en n parties
($a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *et* $\forall\, i \in [1\,;\, n-1]$, $|x_{i+1} - x_i| \leqslant \alpha$*) la fonction* f_n *définie sur I par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1]\ ; \\ f(x_1) & \text{si} \quad x \in]x_1, x_2]\ ; \\ \vdots & \\ f(x_{n-1}) & \text{si} \quad x \in]x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

Solution

Soit $\varepsilon > 0$.

f est uniformément continue sur I car I est compact.

D'où

$$(1) \qquad \exists\, \alpha > 0 \,/\, \forall\, (u, v) \in I^2, |u - v| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons, pour toute subdivision de I en n ($n \geqslant m$) parties,
($a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ et $\forall\, i \in [1\,;\, n-1]$, $|x_{i+1} - x_i| \leqslant \alpha$) la fonction f_n définie sur I par :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1]\ ; \\ f(x_1) & \text{si} \quad x \in]x_1, x_2]\ ; \\ \vdots & \\ f(x_{n-1}) & \text{si} \quad x \in]x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

D'après (1), on a :

$$\forall\, i \geqslant 0,\ \ \forall\, (u, v) \in [x_i, x_{i+1}],\quad |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent :

$$\forall\, n \geqslant m,\ \ \sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite de fonctions en escalier (f_n) converge uniformément vers f.

Nous avons établi que :

toute fonction continue sur un compact est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

indications et solutions

5.14

indications

• *Poser :* $\forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, x \in I,\ \ g_n(x) = \int_\alpha^x f_n'(t)\, dt.$

Remarquer que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément.
*Pour cela, appliquer le théorème **3**.*

• *En déduire que la suite (f_n) converge vers $x \mapsto \beta + \int_\alpha^x \varphi(t)\, \mathrm{d}t$.*

Solution

• Posons :

$$(iii) \qquad \forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, x \in I,\ \ g_n(x) = \int_\alpha^x f_n'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Comme les fonctions f_n sont de classe C^1 sur I, les fonctions f_n' sont continues sur I.
D'après l'hypothèse (*i*), on peut appliquer le théorème **3**.
On obtient :

$$(iv) \qquad \text{la suite } (g_n) \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } x \overset{\psi}{\mapsto} \int_\alpha^x \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

• Montrons que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers $\psi + \beta$.
On a :

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - \psi(x) - \beta| = \sup_{x \in I} |g_n(x) + f_n(\alpha) - \psi(x) - \beta|$$

car, d'après (*iii*) : $g_n(x) = f_n(x) - f_n(\alpha)$.
D'où

$$(v) \qquad \sup_{x \in I} |f_n(x) - \psi(x) - \beta| \leqslant \sup_{x \in I} |g_n(x) - \psi(x)| + \sup_{x \in I} |f_n(\alpha) - \beta|.$$

La combinaison de (*ii*), (*iv*) et (*v*) donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - \psi(x) - \beta| = 0.$$

Ainsi, (f_n) converge uniformément vers $\psi + \beta$.
Conclusion :

si (f_n) est une suite de fonctions de classe C^1 sur $I = [a\,;\,b]$ vérifiant :

(*i*) $\quad$ **(f_n') converge uniformément vers φ ;**

(*ii*) $\quad$ **$\exists\, \alpha \in I,\ \ \exists\, \beta \in \mathbb{R} \,/\, \lim_{n \to +\infty} f_n(\alpha) = \beta$;**

alors (f_n) converge uniformément vers $x \mapsto \beta + \int_\alpha^x \varphi(t)\, \mathrm{d}t$.

$$\textbf{Ainsi} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x).$$

5.15

indications

1. Remarquer que la suite $(a_n\, x_0^n)$ est bornée.

Noter que : $a_n\, x^n = a_n\, x_0^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n$.

2. Raisonner par contraposée.

Solution

1. Puisque la série de terme général $a_n\, x_0^n$ converge, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n\, x_0^n = 0.$$

Par conséquent, la suite $(a_n\, x_0^n)$ est bornée.
C'est-à-dire :

$$(1) \qquad \exists\, M \geqslant 0 \,/\quad \forall\, n \geqslant 0, \quad |a_n\, x_0^n| \leqslant M.$$

Notons que :

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad |a_n\, x^n| = |a_n\, x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

D'après (1) :

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad |a_n\, x^n| \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Or, la série de terme général $\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n$ converge car c'est une série géométrique avec $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$.

Donc la série de terme général $a_n\, x^n$ converge absolument.
Conclusion :

si, pour $x_0 \neq 0$, la série de terme général $a_n\, x_0^n$ converge, alors pour tout x tel que $|x| < |x_0|$, la série de terme général $a_n\, x^n$ converge absolument.

Ce résultat indique que si pour $x_0 \neq 0$, la série de terme général $a_n\, x_0^n$ converge, alors la série de fonctions de terme général $a_n\, x^n$ est définie sur $]-|x_0|\,;\,|x_0|[$.

2. Raisonnons par contraposée.
Supposons qu'il existe x vérifiant $|x| > |x_0|$ tel que la série de terme général $a_n\, x^n$ converge.
En raisonnant comme pour la question **1**, on a :

$$\exists\, M \geqslant 0 \,/\quad \forall\, n \geqslant 0, \quad |a_n\, x_0^n| \leqslant M \left|\frac{x_0}{x}\right|^n.$$

Ainsi la série de terme général $a_n x_0^n$ converge.

Conclusion :

si, pour $x_0 \neq 0$, la série de terme général $a_n x_0^n$ diverge, alors la série de terme général $a_n x^n$ diverge pour tout réel x tel que $|x| > |x_0|$.

5.16

indications

*1. Appliquer le théorème **4**.*
Pour cela, étudier, pour tout $n \geqslant 1$, les variations de la fonction u_n.
2. Montrer d'abord que S est dérivable en tout point de $[a\,;\,b]$ avec $0 < a < b$.
*Pour cela, appliquer le théorème **6**.*

Solution

1. • Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$.

• Soit $n \geqslant 1$.

L'étude des variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction u_n donne :

$$(1) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

Or $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Donc la série de terme général $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ converge.

Par conséquent, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement vers S sur $\mathbb{R}$.

Par suite, la convergence est uniforme.

D'après le théorème **4** :

S est continue sur $\mathbb{R}$.

2. • Soient a et b deux réels vérifiant : $0 < a < b$.

Montrons que S est dérivable sur $[a\,;\,b]$.

– Pour tout $n \geqslant 1$, u_n est de classe C^1 sur $[a\,;\,b]$.

– D'après la question **1**, il existe $x_0 \in [a\,;\,b]$ tel que la série de terme général $u_n\,(x_0)$ converge.

– $\forall\, n \geqslant 1,\ \ \forall\, x \in [a\,;\,b],\ \ |u_n'\,(x)| \leqslant \dfrac{e^{-\frac{na^2}{2}}}{1+n}\ \alpha_n,$

où $\alpha_n = max\left(|1 - nb^2|, |1 - na^2|\right)$.

De plus, la série de terme général $\dfrac{e^{-\frac{na^2}{2}}\alpha_n}{1+n}$ converge,

car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \dfrac{e^{-\frac{na^2}{2}}\alpha_n}{1+n} = 0$.

On en déduit, d'après le théorème **6** :
S est dérivable sur $[a ; b]$.
• Il en résulte :

$$\boldsymbol{S \text{ est dérivable sur }]0 ; +\infty[.}$$

5.17

indications

• *Poser :* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ *et* $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.
Établir que :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, x \in [0 ; 1],\ \ |S_n - S| \leqslant \left|u_{n+1}(x)\right|.$$

*Pour cela, appliquer le théorème **11** du chapitre 3.*
• *Étudier les variations de* $x \mapsto \left|u_{n+1}(x)\right|$ *sur* $[0 ; 1]$.

Solution

Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, x \in [0 ; 1],\ \ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.

• Pour tout $x \in [0 ; 1]$, la suite $(u_n(x))$ est alternée.

De plus : $\forall\, x \in [0 ; 1],\ \ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$, et la suite $(|u_n(x)|)$ est décroissante.

D'après le théorème **11** du chapitre 3 on a :
pour tout $x \in [0 ; 1]$, la série de terme général $u_n(x)$ converge vers $S(x)$.
De plus :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, x \in [0 ; 1],\ \ |S_n(x) - S(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|.$$

• On a : $\forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, x \in [0 ; 1],\ \ |u_{n+1}(x)| = -\,x^{n+2}\ln x$.

L'étude des variations de $x \mapsto -\,x^{n+2}\ln x$ sur $[0 ; 1]$ donne :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, x \in [0 ; 1],\ \ |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{e(n+2)}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ \sup\limits_{x\in[0 ; 1]} |S_n(x) - S(x)| = 0$.

Ceci montre que la suite de fonctions de terme général S_n converge uniformément sur $[0\ ;\ 1]$.
Par suite, la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément.
Conclusion :

la série de fonctions de terme général $(-1)^n x^{n+1} \ln x$ converge uniformément sur $[0\ ;\ 1]$.

5.18

indications

1. Déterminer : $\forall\, n \geqslant 0,\ \forall\, x \in I,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ *et* $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

2. Établir que : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (S_n(x) - S(x))\,\mathrm{d}x = 0$.

Solution

1. • Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\ \forall\, x \in I,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ et $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.
On obtient :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ S_n(x) = \begin{cases} (1+e^{-x})(1-e^{-(n+1)x}) & \text{si} \quad x \in \,]0\ ;\ 1]\ ; \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\ ; \end{cases}$$

$$\text{et} \quad S(x) = \begin{cases} 1+e^{-x} & \text{si} \quad x \in \,]0\ ;\ 1]\ ; \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

• Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction u_n est continue sur $[0\ ;\ 1]$.
Or la fonction S n'est pas continue sur $[0\ ;\ 1]$.
Donc, d'après le théorème **4** :

la convergence de la série de fonctions n'est pas uniforme.

2. On a : $\forall\, n \geqslant 0,\ \forall\, x \in [0\ ;\ 1],\ |S_n(x) - S(x)| \leqslant (1+e^{-x})\, e^{-(n+1)x}$.
Par suite : $\forall\, n \geqslant 0,\ \forall\, x \in [0\ ;\ 1],\ |S_n(x) - S(x)| \leqslant 2\, e^{-(n+1)x}$.
Il en résulte :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ \left|\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 (S_n(x) - S(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |S_n(x) - S(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{n+1}.$$

D'où $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x$,

c'est-à-dire : $$\boldsymbol{\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Cet exercice montre que la convergence uniforme n'est pas une condition nécessaire pour permuter les symboles $\int$ *et* Σ.

5.19

indication

Appliquer la formule de Maclaurin.

Solution

La formule de Maclaurin donne :

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I,\ \exists\, \theta \in]0\,;1[\ /\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$

Posons : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

Par ailleurs, on a :

(2) $\exists\, a \geqslant 0\ /\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I,\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant a.$

La combinaison de (1) et (2) fournit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I,\ |S_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\, a.$$

Or la série de terme général $\frac{|x|^n}{n!}$ converge pour tout réel x (chapitre 3, théorème **9**).

Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Conclusion :

soient I un intervalle ouvert contenant 0, et f une fonction numérique de classe C^∞ sur I ; si la suite de fonctions $(f^{(n)})$ est bornée sur I, alors la série de fonctions de terme général $\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ converge sur I, et sa somme est f.

5.20

indications

• *Remarquer que :* $f(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} (x\, e^{-x})^n.$

• *Étudier les variations de la fonction* $x \mapsto x\, e^{-x}$ *sur* $[0\,; +\infty[$.

Solution

• Remarquons que : $f(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} (x\, e^{-x})^n.$

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ sur $[0\,; +\infty[$ donne :

(1) $\forall\, x \in [0\,; +\infty[,\quad x\, e^{-x} \in \left[0\,; \frac{1}{e}\right].$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, la série de terme général $(x\, e^{-x})^n$ est une série géométrique convergente.

On en déduit que f est définie sur $[0\,;+\infty[$.

• Pour tout $n \geqslant 0$, $x \mapsto x^n\, e^{-nx}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

Par ailleurs, il résulte de (1) :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\quad 0 \leqslant x^n\, e^{-nx} \leqslant \frac{1}{e^n},$$

ce qui assure la convergence normale sur $[0\,;+\infty[$.

On en déduit, d'après le théorème **4** :

$$\boldsymbol{x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}\, e^{-nx}} \ \textbf{est continue sur } \boldsymbol{[0\,;+\infty[}.$$

5.21

indications

*1. Appliquer le théorème **6**.*

2. Noter que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, a > 0 \,/\ x \in [-a\,;a]$.

Solution

1. ***a.*** • La fonction u_n est de classe C^1 sur I pour tout entier n.

• La série numérique de terme général $u_n(0)$ converge.

• $\forall\, n \geqslant 1,\quad \forall\, x \in I,\quad |u_n'(x)| \leqslant \dfrac{|a|^{n-1}}{(n-1)\,!}.$

Or la série de terme général $\dfrac{|a|^{n-1}}{(n-1)\,!}$ converge.

Donc la série de fonctions de terme général u_n' converge normalement.

D'après le théorème **6** :

$$\boldsymbol{S} \textbf{ est dérivable sur } \boldsymbol{I}.$$

b. On obtient :

$$\textbf{(1)}\qquad \boldsymbol{\forall\, x \in I,\ \ S'(x) = S(x).}$$

c. On a : $S(0) = 1$.

Il résulte de (1) :

$$\boldsymbol{\forall\, x \in I,\ \ S(x) = e^x.}$$

2. Nous venons d'établir que :

$$\forall\, x \in I,\quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Or $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, a > 0 \,/\ x \in [-a\,;a]$.

Donc

$$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.}$$

5.22

indications

*1. • Appliquer le théorème **11** du chapitre 3 pour convergence uniforme.*
• Considérer $|a| < 1$.
Déterminer S sur $[-a\,;a]$.
*Pour cela, appliquer le théorème **6**.*
2. b. Exprimer T à l'aide de S.

Solution

1. • Pour tout $x \in [-1\,;1]$, la série numérique de terme général $u_n(x)$ est alternée et convergente.

Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ \forall\, x \in [-1\,;1],\ \ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ et $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$.

D'après le théorème **11** du chapitre 3, on a :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ \forall\, x \in [-1\,;1],\ \ |S_n(x) - S(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|.$$

Or

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ \forall\, x \in [-1\,;1],\ \ |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{2n+2}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| = 0.$$

Ainsi

la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur I.

Par ailleurs, S est continue sur I, car pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est continue sur I.

• Déterminons S.

Soit a un réel tel que : $0 < a < 1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $[-a\,;a]$.

De plus, la série de fonctions de terme général u_n' converge normalement sur $[-a\,;a]$.

D'après le théorème **6** :

S est dérivable sur $[-a\,;a]$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-1}$.

On a : $\forall\, x \in [-a\,;0[\, \cup\,]0, a],\ \ S'(x) = \dfrac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n = -\dfrac{x}{1+x^2}$.

On en déduit :

$$\forall\, x \in [-a\,;0[\, \cup\,]0, a],\ \ S(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k.$$

Or S est continue en 0 et $S(0) = 0$.

Donc $\lim_{x\to 0} S(x) = 0$.

Ainsi $k = 0$.

D'où :

$$\forall\, x \in [-\,a\,;\,a],\quad S(x) = -\,\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Puisque S est continue sur $[-\,1\,;\,1]$, on a :

$$\boldsymbol{\forall\, x \in [-\,1\,;\,1],\quad S(x) = -\,\frac{1}{2}\ln(1+x^2).}$$

2. ***a.*** On a : $\forall\, x \in I,\ \ |v_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(2n-1)(2n)}.$

Or la série numérique de terme général $\dfrac{1}{(2n-1)(2n)}$ converge.

Donc

la série de fonctions de terme général v_n converge normalement vers une fonction T sur I.

b. Remarquons que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \frac{1}{(2n-1)(2n)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

On en déduit :

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \forall\, x \in [-\,1\,;\,1],\quad v_n(x) = x\,\frac{(-1)^n\,x^{2n-1}}{2n-1} - u_n(x).$$

Le raisonnement de la question **1** donne :

$$\forall\, x \in [-\,1\,;\,1],\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2n-1}}{2n-1} = -\,\mathrm{Arctg}\,x.$$

Ainsi

$$\boldsymbol{\forall\, x \in [-\,1\,;\,1],\quad T(x) = -\,x\,\mathrm{Arctg}\,x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).}$$

3. Comme $T(1) = -\,\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$, on a :

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)} = -\,\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.}$$

5.23

indication

*Se servir du résultat de l'exercice 5.22 (question **1**).*

Solution

Nous avons établi à l'exercice 5.22 :

$$\forall\, x \in [-\,1\,;\,1],\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1+x^2).$$

Ceci équivaut à :

$$\forall\, t \in [0\,;1],\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n} = -\ln(1+t).$$

On en déduit :

$$\boldsymbol{\forall\, x \in [0\,;1],\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^{3n}}{n} = -\ln(1+x^3).}$$

5.24

indication

*Appliquer les théorèmes **4** et **6**.*

Solution

Soit a un réel strictement positif.

Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ u_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

• Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $[0\,;a]$.

On a :

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \forall\, x \in [0\,;a],\quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2},$$

ce qui montre que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[0\,;a]$.

On en déduit, d'après le théorème **4**, que f est continue sur $[0\,;a]$.

Par suite :

$$\boldsymbol{f \text{ est continue sur } [0\,;+\infty[.}$$

• On a également :

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \forall\, x \in [0\,;a],\quad |u_n'(x)| \leqslant \frac{2}{n^3}.$$

Ainsi la série de fonctions de terme général u_n' converge normalement.

D'après le théorème **6**, f est dérivable sur $[0\,;a]$.

D'où

$$\boldsymbol{f \text{ est dérivable sur } [0\,;+\infty[.}$$

5.25

indication

Déterminer les variations de la fonction f_n sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Solution

• Si $x = 0$, pour tout $n \geqslant 0$, $f_n(0) = 0$.

Si $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \in [0\,;1[$, par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

En résumé, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle.

• Soit n un entier non nul.

Étudions les variations de f_n sur I.

On obtient :

$$\forall\, x \in I,\ f_n'(x) = n\,(\cos x)^{n-1}\,[-(n+1)\sin^2 x + 1].$$

Posons : $t = \sin^2 x$.

On a : $t \in [0\,;1]$.

L'étude du signe de la fonction $t \mapsto -(n+1)\,t + 1$ indique que f_n admet un maximum en $\alpha_n \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin^2 \alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$.

D'où :

$$\sin \alpha_n = \sqrt{\frac{1}{n+1}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

On en déduit :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ \sup f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Mais $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = e^{-\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}}.$

Ainsi

$$\sup_{x \in I} f_n(x) \underset{\infty}{\sim} \sqrt{n}\, e^{-\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte :

la convergence de (f_n) n'est pas uniforme sur I.

5.26

indication

Étudier les variations de la fonction f_n.

Solution

• Pour $t \in [0\,;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t^{2n+1} = 0.$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0.$

• $\forall\, n \geqslant 0,\ f_n(1) = 0.$

D'où la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle.

• L'étude des variations de la fonction f_n sur [0 ; 1] fournit :

$$\forall\, n \geqslant 0,\quad \forall\, t \in [0\,;\,1],\quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \left(\frac{2}{2n+3}\right)^2 \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n+1}.$$

D'où $\forall\, n \geqslant 0,\quad \sup\limits_{t \in [0\,;\,1]} f_n(t) \leqslant \left(\dfrac{2}{2n+3}\right)^2 \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n+1}.$

Or $\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n+1} = e^{(2n+1)\ln\frac{2n+1}{2n+3}} = e^{(2n+1)\ln\left(1-\frac{2}{2n+3}\right)} \underset{\infty}{\sim} e^{-2}.$

Donc, **la convergence de (f_n) est uniforme sur [0 ; 1].**

5.27

indications

• *Déterminer* $\sup\limits_{x \in I} |f_n(x)|$ *à l'aide des variations de la fonction* f_n *sur* [0 ; 1].

• *Noter que :* $\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *(méthode de l'exercice 3.20).*

Solution

Soit $n \geqslant 1$.
Étudions les variations de la fonction f_n.

On obtient : $\forall\, x \in [0\,;\,1],\ f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{1+x}.$

On en déduit : f_n est monotone sur [0 ; 1].
De plus : $f_n(0) = 0$.
Par conséquent :

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| = |f_n(1)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2\right|.$$

Or

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{(méthode de l'exercice 3.20).}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)| = 0.$$

Il en résulte :

la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur [0 ; 1] vers la fonction nulle.

5.28

indication

*Appliquer le résultat de l'exercice 5.26 et le théorème **5**.*

Solution

• Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, t \in [0\,;1],\ \ S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t)$ et $S(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(t)$.

• Pour tout $t \in [0\,;1]$, la suite $(u_n(t))$ est alternée.

De plus, pour tout $t \in [0\,;1]$, la suite $(|u_n(t)|)$ est décroissante et de limite nulle.

On en déduit, d'après le théorème **11** du chapitre 3 :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, t \in [0\,;1],\ \ |S_n(t) - S(t)| \leqslant |u_{n+1}(t)|.$$

Le résultat de l'exercice 5.26 donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\ \sup_{t\in[0\,;1]}\ |u_{n+1}(t)| = 0.$$

Il en résulte que : $\lim_{n\to+\infty} \sup |S_n(t) - S(t)| = 0.$

Ainsi la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $[0\,;1]$.

• Déterminons la fonction S.

On a : $\forall\, n \geqslant 0,\ \ \forall\, t \in [0\,;1],\ \ u_n(t) = t(1-t)^2\,(-t^2)^n.$

On en déduit :

$$\forall\, t \in [0\,;1[,\ \ S(t) = \frac{t(1-t)^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad S(1) = 0.$$

Par suite :

$$\forall\, t \in [0\,;1],\ \ S(t) = \frac{t(1-t)^2}{1+t^2}.$$

• Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction u_n est continue sur $[0\,;1]$.

En appliquant le théorème **5**, on a :

$$(1) \qquad \int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties donne :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ \ \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^n}{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}\ .$$

Ainsi (1) équivaut à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)} = 2\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus : $\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi - 3}{2}.$

Conclusion :

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(2n+3)} = \pi - 3.}$$

5.29

indications

• *Observer que :* $\exists\, N > 0 \,/\, \forall\, n \geqslant N,\ \frac{1}{\sqrt{n}} < a.$

• *Étudier les variations de la fonction* u_n.

Solution

• Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a :

$$(1) \qquad \exists\, N > 0 \,/\, \forall\, n \geqslant N,\ \frac{1}{\sqrt{n}} < a.$$

• L'étude des variations de la fonction u_n fournit :

$$(2) \qquad \forall\, n \geqslant 1, \text{ la fonction } u_n \text{ est décroissante sur } \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,+\infty\right[.$$

La combinaison de (1) et (2) donne :

$$\forall\, n \geqslant N,\quad \forall\, x \in [a\,;\,+\infty[,\quad |u_n(x)| \leqslant \frac{a}{\sqrt{n}\,(1 + na^2)}.$$

Or

$$\frac{a}{\sqrt{n}\,(1 + na^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{an\sqrt{n}}.$$

Donc

la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[a\,;\,+\infty[$.

5.30

indications

1. • *Noter que la série est alternée.*
• *Appliquer le théorème* ***6****.*
3. *Appliquer le résultat de l'exercice 4.17.*
4. *Se servir du résultat de la question* ***2****.*
5. a. *Déterminer d'abord le sens de variation de f.*
b. *En déduire :* $\forall\, x > 1,\ \frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2x - 2}.$

Solution

1. • Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\ \forall\, x > 0,\ S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x + k}.$

Pour tout $x > 0$, la suite $\left(\frac{1}{x + n}\right)$ converge vers 0 en décroissant.

Le théorème **11** du chapitre 3 donne :

$$\forall\, n \geqslant 0,\quad \forall\, x > 0,\quad |S_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{x+n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément sur $]0\,;+\infty[$.

• Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$.

Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n+x}$ est continue sur $[a\,;b]$.

Il en résulte, d'après le théorème **4**, que f est continue sur $[a\,;b]$.
Par suite :

f est continue sur $]0\,;+\infty[$.

• Pour tout $n \geqslant 1$, $x \mapsto \dfrac{1}{n+x}$ est de classe C^1 sur $[a\,;b]$.

• $\forall\, n \geqslant 1,\quad \forall\, x \in [a\,;b],\quad \dfrac{1}{(n+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

• La série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge.

On en déduit, d'après le théorème **6**, que la fonction f est dérivable sur $[a\,;b]$.
Il en résulte :

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

2. Soit $x > 0$.

On a : $\quad f(x+1) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\left(f(x) - \frac{1}{x}\right).$

Ainsi

$$\textbf{(1)}\qquad \forall\, \boldsymbol{x} > \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{f(x+1) = \frac{1}{x} - f(x)}.$$

3. D'après le résultat de l'exercice 4.17, on a :

$$\forall\, \boldsymbol{x} > \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t}.$$

4. On déduit de (1) :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - f(x)\right) = \lim_{x \to 0} f(x+1).$$

Or f est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x+1) = f(1)$.

indications et solutions

D'où :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - f(x) \right) = \ln 2.$$

Nous retrouvons le résultat de l'exercice 4.30 :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

5. a. • Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < x < y$.

On obtient : $t^x \geqslant t^y$,

car pour $t \in]0\,;1]$, la fonction $\alpha \mapsto t^\alpha$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit :

$$f(x) \geqslant f(y).$$

Par conséquent :

$$(2) \qquad f \text{ est décroissante sur } I.$$

• D'après (2), on a :

$$(3) \qquad \forall\, x > 0,\ f(x+1) \leqslant f(x).$$

La combinaison de (1) et (3) donne :

$$\mathbf{(4)} \qquad \forall\, x > 0,\ 2f(x+1) \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 2f(x).$$

b. • Il résulte de (4) :

$$(5) \qquad \forall\, x > 1,\ 2f(x) \leqslant \frac{1}{x-1} \leqslant 2f(x-1).$$

• La combinaison de (4) et (5) fournit :

$$\forall\, x > 1,\ \frac{1}{x} \leqslant 2f(x) \leqslant \frac{1}{x-1}.$$

Conclusion :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

5.31

indications

• *Établir que : si f est une fonction en escalier, alors* $\lim_{n \to +\infty} c_n = 0$.
• *Appliquer le résultat de l'exercice 5.13.*

Solution

• Montrons d'abord que si f est une fonction en escalier sur I, alors $\lim_{n \to +\infty} c_n = 0$.

Puisque f est une fonction en escalier, il existe un entier p non nul et une subdivision de I en p intervalles $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$, $(1 \leqslant k \leqslant p)$ tels que :

$$\forall\, t \in]\alpha_{k-1}, \alpha_k[,\quad f(t) = \beta_k.$$

Ainsi

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad \int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{n}\left(\sin n\alpha_k - \sin n\alpha_{k-1}\right).$$

D'où

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad \left|\int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{p}\left|\beta_k\right|.$$

Il en résulte que : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0.$

Nous avons établi :

(1) si f est une fonction en escalier sur $[a\,;\,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = 0.$

• Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$.

D'après l'exercice 5.13 :

(2) il existe une suite de fonctions en escalier (f_n) convergeant uniformément vers f sur $[a\,;\,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

D'après (2) :

(3) $\exists\ m \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n \geqslant m,\quad \sup\limits_{t\in I}|f(t) - f_n(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}.$

Par ailleurs :

(4) $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f(t) - f_m(t))\cos nt\,\mathrm{d}t + \int_a^b f_m(t)\cos nt\,\mathrm{d}t.$

De plus, f_m est une fonction en escalier.

Par conséquent, d'après (1) :

(5) $\exists\ q \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n \geqslant q,\quad \left|\displaystyle\int_a^b f_m(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}.$

La combinaison de (3), (4) et (5) donne :

$$\forall\ n \geqslant \max(m, q),\quad \left|\int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0.$

Conclusion :

si f est une fonction continue sur $[a\,;\,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = 0.$

5.32

indications

• *Supposer que la suite* (f_n) *est croissante, c'est-à-dire :*

$$\forall\, x \in I,\quad \forall\, n \geqslant 0,\quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x).$$

• *Poser :* $\forall\, n \geqslant 0,\quad g_n = f - f_n.$

• *Montrer par l'absurde que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x \in I} |g_n(x)| = 0.$

Pour cela, supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ *et une suite* (x_n) *tels que :*

$$\forall\, n \geqslant 0,\quad x_n \in [a\,;b] \quad \text{et} \quad g_n(x_n) > \varepsilon.$$

• *Établir à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass :*

$$\exists\, \ell \in [a\,;b] \,/\, \forall\, m \geqslant 0,\quad g_m(\ell) > \varepsilon.$$

• *Conclure.*

Solution

• Supposons que la suite de fonctions (f_n) soit croissante :

(1) $\quad \forall\, x \in I,\ \ \forall\, n \geqslant 0,\ \ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x).$

On en déduit :

(2) $\quad \forall\, x \in I,\ \ f_n(x) \leqslant f(x).$

• Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\ \ g_n = f - f_n.$

La combinaison de (1) et (2) donne :

la suite (g_n) est décroissante et positive.

• Montrons par l'absurde que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x \in I} |g_n(x)| = 0.$

Pour cela, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, et une suite (x_n) tels que :

(3) $\quad \forall\, n \geqslant 0,\ \ x_n \in I \ \text{ et } \ g_n(x_n) > \varepsilon.$

Comme la suite (x_n) est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass donne :

$\exists\, \varphi$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $\ell \in I$ tels que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \ell.$

Soit $m \geqslant 0$.

Puisque φ est strictement croissante, il existe $n \geqslant 0$ tel que :

$$\varphi(n) \geqslant m.$$

On en déduit :

$$g_m(x_{\varphi(n)}) \geqslant g_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})$$

car la suite (g_n) est décroissante.

Il résulte de (3) :

$$g_m(x_{\varphi(n)}) > \varepsilon.$$

Or

$$g_m \text{ est continue sur } I \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \ell.$$

Donc $\qquad g_m(\ell) \geqslant \varepsilon.$

Nous avons établi :
$\exists\ \varepsilon > 0 \ / \ \forall\ m \geqslant 0, \ \ g_m(\ell) \geqslant \varepsilon.$
Ce qui est absurde, car $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(\ell) = 0.$
Conclusion :

si (f_n) est une suite monotone de fonctions continues sur $I = [a\ ;\ b]$, et convergeant sur I vers une fonction continue f sur I, alors la convergence est uniforme.

6

Séries entières et trigonométriques

Éléments de cours

Série entière

Soit (a_n) une suite numérique. On appelle série entière la série de fonctions de terme général $a_n\, x^n$.

Les réels a_n sont appelés coefficients de la série.

Rayon de convergence

Soit (a_n) une suite numérique.

On appelle rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n\, x^n$, l'unique élément $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |x| < r$ implique que la série de terme général $a_n\, x^n$ converge absolument ;

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |x| > r$ implique que la série de terme général $a_n\, x^n$ diverge.

Théorème 1

Soit (a_n) une suite numérique telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Alors, le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n\, x^n$ est :

(i) $r = \dfrac{1}{\ell}$ si ℓ est fini ;

(ii) $r = +\infty$ si $\ell = 0$;

(iii) $r = 0$ si $\ell = +\infty$.

Théorème 2

Soit (a_n) une suite numérique telle que :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall\, n \geqslant n_0,\ a_n \neq 0.$$

On suppose que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Alors, le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n\, x^n$ est :

(i) $r = \dfrac{1}{\ell}$ si ℓ est fini ;

(ii) $r = +\infty$ si $\ell = 0$;

(iii) $r = 0$ si $\ell = +\infty$.

*Les théorèmes **1** et **2** ne sont pas toujours applicables car $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ n'existent pas nécessairement.*

Par conséquent, si r est le rayon de convergence d'une série entière de coefficient a_n,
cela n'implique pas : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{r}$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{r}$.

Disque de convergence

Soit $a_n x^n$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence r. On appelle disque de convergence de la série entière, la boule de centre 0 et de rayon r, c'est-à-dire l'intervalle $]-r\,;r[$.

Toute série entière est normalement convergente sur tout compact inclus dans son disque de convergence.

Théorème 3

Soient r et r' les rayons de convergence respectifs des séries de termes généraux $a_n x^n$ et $b_n x^n$.

Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\ \ c_n = a_n + b_n$.

Si $r < r'$, le rayon de convergence de la série entière de coefficient c_n est r.

Théorème 4

La somme d'une série entière est continue dans le disque de convergence.

Théorème 5

Soit (a_n) une suite numérique.

(i) Les séries entières de termes généraux $a_n x^n$ et $\dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ ont le même rayon de convergence r.

(ii) $\forall\, \alpha \in\,]-r\,;r[,\ \forall\, \beta \in\,]-r\,;r[,\ \ \displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta a_n x^n \,\mathrm{d}x.$

Théorème 6

La série entière de coefficient a_n est de classe C^∞ sur son disque de convergence D.

En particulier : $\forall\, x \in D,\ \ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}.$

Théorème 7 - Produit de deux séries entières

Soient r un réel strictement positif, $a_n\, x^n$ et $b_n\, x^n$ les termes généraux de deux séries entières absolument convergentes de sommes f et g sur $I =]-r\,;\,r[$.

La série entière de terme général $c_n\, x^n$ avec $c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, b_1 + a_n\, b_0$ converge absolument sur I et

$$\forall\, x \in I,\ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n = f(x)\, g(x).$$

Développement en série de Taylor

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I contenant 0.
On appelle développement en série de Taylor de f, la série entière de terme général

$$\frac{x^n\, f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Théorème 8

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I contenant 0.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\quad \forall\, x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n\, f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$;

(ii) $\quad$ le reste de Maclaurin $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$, $\theta \in \left]0\,;\,1\right[$, tend vers 0, pour tout $x \in I$, quand n tend vers l'infini.

En particulier si : $\quad \exists\, M \geqslant 0 \quad / \quad \forall\, n \geqslant 0,\ \forall\, x \in I,\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M,$

alors $\quad \forall\, x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\, f^{(n)}(0).$

Développements en série de Taylor des fonctions usuelles

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall\, x \in]-1\,;\,1[,\ \forall\, \alpha \notin \mathbb{N},\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$$

$$\forall\, x \in]-1\,;\,1],\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in [-1\,;\,1], \quad \text{Arctg}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Série trigonométrique

Soient (a_n) et (b_n) deux suites numériques.
La série de fonctions de terme général $u_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$ est appelée série trigonométrique.

Convention

Le terme de $u_0(t)$ est noté $\dfrac{a_0}{2}$ au lieu de a_0.

Théorème 9

Si les séries de termes généraux a_n et b_n convergent absolument, alors la série trigonométrique associée converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Théorème 10

Si la série trigonométrique converge uniformément vers f sur un intervalle de longueur 2π, alors

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \,\mathrm{d}t.$$

Série de Fourier d'une fonction

Soit f une fonction numérique périodique, de période 2π et continue sur un compact de longueur 2π.
On appelle série de Fourier de f, la série trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

où $\quad \forall n \geqslant 0, \quad a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \,\mathrm{d}t.$

Fonction réglée

Une fonction numérique définie sur un intervalle I est dite réglée si elle admet, en tout point de I, une limite à droite et une limite à gauche.

Théorème 11

Toute fonction numérique réglée sur un compact est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Théorème 12

Soit f une fonction numérique réglée définie sur $[0 ; 2\pi]$.
Alors, le terme général u_n de la série de Fourier de f tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Théorème 13

Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, admettant en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite.
Alors la série de Fourier de f converge, et sa somme est f.

Dérivabilité d'une fonction réglée

Une fonction réglée f définie sur un intervalle I est dérivable à droite et à gauche en tout point x de I si :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t}$$

sont finies.
Rappelons que : $f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$ et $f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t)$.

Théorème 14

Soit f une fonction numérique réglée définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{R}$.
Alors la série de Fourier de f converge, et sa somme, pour tout réel x, est :

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Exercices

APPLICATION IMMÉDIATE

Rayons de convergence et sommes

6.1 Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

1. $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^{3n}}$; **2.** $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1+n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

6.2 Pour tout entier n on pose : $a_n = n + 2^n$ et $b_n = n - 2^n$.
Déterminer les rayons de convergence des séries entières de coefficients
a_n, b_n et $a_n + b_n$.

6.3 Soient $a_n\, x^n$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence R, et p un entier non nul.
Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général $a_n\, x^{np}$.

6.4 Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général $u_n(x)$ et préciser sa somme :

1. $u_n(x) = (-1)^n\, x^{2n}$; **2.** $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1}$.

6.5 On considère la série de terme général $\dfrac{x^{4n}}{4n+1}$.

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Préciser sa somme $S(x)$ pour $x \in]-R\,;R[$.
3. Étudier les cas $x = R$ et $x = -R$.

6.6 Soient a un réel non nul tel que $|a| < 1$, et u_0 un réel strictement positif.

On définit la suite (u_n) par : $\forall\, n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \ln\left(1 + \left|a^n\, u_n\right|\right)$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient u_n.

6.7 **1.** Soit (a_n) une suite numérique telle que :

(i) la série de terme général a_n diverge ;
(ii) $\forall\, n \geqslant 0,\ |a_n| \leqslant 1$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient $\sin n$.

6.8 On considère la série de fonctions de terme général :

$$\frac{x^n}{n\,(n+1)},\ n \geqslant 1.$$

1. Vérifier que cette série converge normalement sur $I = [0\,;1]$; soit S sa somme.

2. Déterminer S.

6.9 Soient a un réel strictement positif, f une fonction strictement positive, dérivable sur $I = [-a\,;a]$, et u_0 donné appartenant à I.

Pour tout entier n, on pose : $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

On suppose : $\quad f(I) \subset I$ et (u_n) converge vers 0.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient u_n.

6.10 Soit $a_n\, x^n$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence r et de somme f.

Montrer que :

$$f = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, n \geqslant 0,\ \ a_n = 0.$$

6.11 Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites numériques telles que :

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall\ n \geqslant n_0,\ \ |a_n| \leqslant |b_n| \leqslant |c_n|.$$

On suppose que les séries entières de coefficients a_n et c_n ont le même rayon de convergence R.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient b_n.

6.12 Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\quad a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.

6.13 Soit $a_n\, x^n$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence $r > 0$. On suppose : $\quad a_0 \neq 0$.

Montrer que :

$$\exists\ \alpha > 0 \quad / \quad |x| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,|x|^n \leqslant |a_0|.$$

Séries et équations différentielles

6.14 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' = y.$$

Déterminer une solution de (E) sous forme de série entière.

6.15 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y'' + y = 0, \;\; y(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 0.$$

1. Déterminer la solution de (E) sous forme de série entière.
2. En déduire le développement en série entière de la fonction cosinus.

6.16 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad xy'' + y' + xy = x.$$

Déterminer une solution de (E) sous forme d'une série entière dont on précisera le rayon de convergence.

6.17 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y'' = xy.$$

Déterminer, à l'aide de séries entières, toutes les solutions de (E).

Développements en séries entières

6.18 Soit p un entier. Développer en série entière la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^x t^p \, e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

6.19 Pour tout réel x, on pose : $\quad f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$

Développer la fonction f en série entière.

On rappelle que : $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

6.20 Développer en série entière : $\quad \ln\left(\dfrac{1+x}{1-2x}\right).$

6.21 Développer en série entière : $\quad \dfrac{e^{-x}}{1+x}.$

Séries de Fourier

6.22 Soit f la fonction périodique, de période 2π, définie par $(f(0) = f(-\pi) = 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left]-\pi \, ; 0\right[\, ; \\ 1 & \text{si } x \in \left]0 \, ; \pi\right[. \end{cases}$$

Déterminer $\quad \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ à l'aide de f.

6.23 Soit f la fonction périodique, de période 2π, paire et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall\ t \in [0;\pi],\ \ f(t) = t.$

1. Déterminer la série de Fourier de f.

2. Étudier la convergence de cette série.

3. En déduire :

a. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$; **b.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$;

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

6.24 Démontrer que : $\displaystyle\forall\ x \in [0\,;\pi],\ \ \pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)\,x}{(2k+1)^2}.$

APPROFONDISSEMENT ET SYNTHÈSE

6.25 Soit x un réel vérifiant $|x| < 1$.

On admet que : $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

1. Vérifier que : $\displaystyle\forall\ t \in [0\,;1],\ \ \frac{1-t}{1-xt^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\, t^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\, t^{3n+1}.$

2. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}.$

6.26 Soit $a_n\, x^n$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f.

Pour tout entier n, on pose : $\displaystyle s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$

Déterminer le rayon de convergence r de la série entière de coefficient s_n, et exprimer sa somme g à l'aide de f.

6.27 Pour tout entier n, on pose : $\displaystyle s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$

1. a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $(-1)^{n+1}\, s_n\, x^n$, et la nature de cette série pour $x = \pm R$.

Pour $x \in\ ]-R, R[$, on pose : $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, s_n\, x^n.$

b. Déterminer f.

2. En déduire le développement en série entière de : $\big(\ln(1+x)\big)^2$.

6.28 Soit (a_n) une suite numérique vérifiant :

$$(1) \qquad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall\, n \geqslant n_0,\ \frac{1}{n^3} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n^2\sqrt{n}}.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de coefficient a_n, et montrer que sa somme est continue et dérivable sur $[-R\,;R]$.

6.29 Soient $a_n\, x^n$ le terme général d'une série entière de somme S, et p un entier non nul.

On suppose : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{a_n}{n+p}.$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient b_n. Exprimer sa somme f à l'aide de S.

2. Déterminer le rayon de convergence, et la somme g de la série entière de coefficient :

$$\frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}.$$

6.30 Soit $a_n\, x^n$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence R.

Pour tout entier n, on pose : $u_n = \dfrac{p(n)}{q(n)}\, a_n$, où p et q sont des polynômes tels que $d^\circ p < d^\circ q$, et n'ayant aucune racine entière.

Déterminer le rayon de convergence r de la série entière de coefficient u_n.

6.31 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad xy'' + 2y' + xy = 0,\ \ y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$

1. Déterminer une solution f de (E) sous forme de série entière.

2. En déduire l'expression de f à l'aide de fonctions élémentaires.

6.32 On considère la suite (a_n) définie par :

$$a_0 = \frac{\pi}{2},\ \ a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 0,\ a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, a_n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.

2. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - x\sin t}$, et préciser le rayon de convergence.

indications et solutions

6.1

indication

*Appliquer les théorèmes **1** ou **2**.*

solution

1. Posons : $\forall\, n \geqslant 1,\;\; a_n = \dfrac{1}{n^{3n}}.$

On a : $\forall\, n \geqslant 1,\;\; \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{n^3}.$

Par conséquent, d'après le théorème **1** :

$$\boldsymbol{r = +\infty.}$$

2. Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\;\; a_n = \dfrac{1}{1+n^{\alpha}}.$

• Si $\alpha < 0,\;\; \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1.$

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$

D'après le théorème **1** : $r = 1.$

• Si $\alpha = 0$, alors : $\forall\, n \geqslant 0,\;\; a_n = \dfrac{1}{2}.$

On obtient également : $r = 1.$

• Si $\alpha > 0,\;\; \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = 1.$

D'après le théorème **2** : $r = 1.$

En résumé :

pour tout réel α, 1 est le rayon de convergence

de la série entière de coefficient $\dfrac{1}{1+n^{\alpha}}$.

6.2

indication

*Noter que le théorème **3** n'est pas applicable.*

solution

D'après le théorème **1** :

les rayons de convergence des séries entières de coefficients a_n, b_n et $a_n + b_n$ sont respectivement : $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ et 1.

6.3

indications

Poser $t = x^p$.

Revenir à la définition du rayon de convergence R.

solution

Posons $t = x^p$.

On a : $\forall\, n \geqslant 0,\ a_n\, x^{np} = a_n\, t^n$.

D'après la définition de R, on a :

– si $|t| = |x^p| < R$ alors la série de terme général $a_n\, x^{np}$ converge absolument ;

– si $|t| = |x^p| > R$ alors la série de terme général $a_n\, x^{np}$ diverge.

On en déduit:

– si $|x| < R^{\frac{1}{p}}$ alors la série de terme général $a_n\, x^{np}$ converge absolument ;

– si $|x| > R^{\frac{1}{p}}$ alors la série de terme général $a_n\, x^{np}$ diverge.

Conclusion :

si R est le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n\, x^n$ et p un entier non nul, alors $R^{\frac{1}{p}}$ est le rayon de convergence de la série de terme général $a_n\, x^{np}$.

6.4

indications

1. *Se servir du résultat de l'exercice 6.3.*

2. *Noter que :* $\dfrac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2\,n+1} = x\,\dfrac{(-1)^n\, x^{2n}}{2\,n+1}$.

solution

1. D'après le résultat de l'exercice 6.3, le rayon de convergence de la série de terme général u_n est 1.

De plus, cette série étant géométrique, on a :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in\,]-1\ ;\ 1[,\quad \sum_{n\,=\,0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. • Remarquons que :

$$\forall\, n \geqslant 0,\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\quad \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2\,n+1} = x\,\frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2\,n+1}.$$

• Le rayon de convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n\, x^n}{2\,n+1}$ est 1. Il en est de même pour la série de terme général u_n (exercice 6.3).
Soit T sa somme.
• D'après le théorème **6** :

$$\forall\, x \in \,]-1;\,1[,\quad T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n.$$

D'où :

$$\forall\, x \in \,]-1\,;\,1[,\quad T'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit : $\forall\, x \in \,]-1\,;\,1[,\quad T(x) = \operatorname{Arctg} x + k.$
Comme $T(0) = 0$, on obtient : $k = 0$.
D'où

$$\forall\, x \in \,]-1\,;\,1[,\quad T(x) = \operatorname{Arctg} x.$$

Remarquons que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1}$ converge pour $x = \pm 1$.

Conclusion :

$$\boldsymbol{\forall\, x \in \,]-1\,;\,1[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2\,n+1} = \operatorname{Arctg} x.}$$

6.5

indications

1. Appliquer le résultat de l'exercice 6.3.
2. Déterminer d'abord la somme de la série de terme général $\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$.
Pour cela, raisonner comme pour l'exercice 6.4 (question ***2****).*

solution

1. Le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{x^n}{4n+1}$ est 1.
Le résultat de l'exercice 6.3 donne :

le rayon de convergence est $R = 1$.

2. Soit $x \in \,]-1\,;\;1[\, \cup\,]0\,;\,1[$.

On a : $S(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$

Le raisonnement de l'exercice 6.4 donne :

$$\forall\, x \in]-1\,;1[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{2}\left(\text{Arctg}\, x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot$$

D'où

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\left(\text{Arctg}\, x + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in]-1\,;0[\ \cup\ ]0\,;1[, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. **La série diverge pour $x = \pm 1$.**

6.6

indications

• *Remarquer que :* $\forall\, x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x.$
• *Appliquer le théorème* ***2****.*

solution

• On a : (1) $\forall\, x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x.$
Ce résultat est immédiat grâce aux variations de $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $[0\,;+\infty[$.
• On a, par définition : $\forall\, n \geqslant 0,\ u_n > 0.$
On obtient, d'après (1) :

$$\forall\, n \geqslant 0,\ u_{n+1} \leqslant |a|^n\, u_n.$$

Il en résulte :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

D'après le théorème **2** : $r = +\infty$.
Conclusion :

le rayon de convergence de la série est infini.

6.7

indications

1. • *Noter que : la série entière converge pour tout réel x tel que* $|x| < 1$.
• *Appliquer le résultat de l'exercice 5.15.*

solution

1. • L'hypothèse *(i)* équivaut à :
la série entière diverge pour $x = 1$.
D'après le résultat de l'exercice 5.15, on a :
la série entière diverge pour tout réel x tel que $|x| > 1$.

• D'après *(ii)*, on a :

$$\forall\, n \geqslant 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |a_n\, x^n| \leqslant |x|^n.$$

Ainsi la série entière converge absolument pour $|x| < 1$.

Conclusion :

si une suite (a_n) vérifiant : $\forall\, n \geqslant 0,\ |a_n| \leqslant 1$, est telle que la série de terme général a_n diverge, alors le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n est 1.

2. Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\ a_n = \sin n$.

La série numérique de terme général a_n diverge car $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \neq 0$.

De plus : $\forall\, n \geqslant 0,\ |a_n| \leqslant 1$.

D'après la question **1** :

le rayon de convergence de la série entière de coefficient sin n est 1.

Observer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin(n+1)}{\sin n}$ *n'existe pas.*

6.8

indications

2. • Décomposer $\dfrac{1}{n(n+1)}$ *en éléments simples.*

*• Raisonner comme pour l'exercice 6.4 (question **2**).*

solution

1. $\forall\, n \geqslant 1, \qquad \forall\, x \in [0\,;1],\ 0 \leqslant \dfrac{x^n}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}.$

Il s'ensuit :

la série de terme général $\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ converge normalement sur $[0\,;1]$.

2. • Remarquons que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ \forall\, x \in [0\,;1],\ \ \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}.$$

Posons : $\forall\, x \in [0\,;1[,\ S_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ et $S_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$.

• Le raisonnement de l'exercice 6.4 (question **2**)donne:

$\forall\, x \in [0\,;1],\ S_1(x) = -\ln(1-x)$

et $S_2(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{1}{x}\ln(1-x) & \text{si } x \in\,]0\,;1[\,; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

• On en déduit :

$$S(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in \,]0\,;1[\,; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

• La convergence normale assure la continuité de S sur $[0\,;1]$.
Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = S(1) = 1.$
Conclusion :

$$\boldsymbol{S(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & \textbf{si } x \in \,]0\,;1[\,; \\ 0 & \textbf{si } x = 0; \\ 1 & \textbf{si } x = 1. \end{cases}}$$

6.9

indication

*Appliquer le théorème **2**.*

solution

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(u_n)}{u_n}.$

Or f est dérivable en 0.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$ car $f(0) = 0.$

Par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(u_n)}{u_n} = f'(0),$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.$

Conclusion :

- **si $f'(0) \neq 0$, le rayon de convergence est $\dfrac{1}{f'(0)}$;**
- **si $f'(0) = 0$, le rayon de convergence est infini.**

6.10

indications

• *Raisonner par contraposée.*
• *Remarquer :* $\exists\, m \geqslant 0$ *avec* $a_m \neq 0$ / $|x| < r \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^m (a_m + a_{m+1}x + \ldots).$
• *Noter que :*
si une fonction φ est continue en 0 avec $\varphi(0) \neq 0$, alors φ ne s'annule pas sur un voisinage de 0.

solution

• Raisonnons par contraposée.
Pour cela, supposons que les coefficients a_n ne soient pas tous nuls.
• Par conséquent :

$$\exists\ m \geqslant 0 \quad avec \quad a_m \neq 0 \ \ / \ \ |x| < r \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^m (a_m + a_{m+1}x + ...).$$

Posons : $\forall\ x \in\ ]-r\ ;\ r[,\ \ g(x) = a_m + a_{m+1}x + ...$

r est le rayon de convergence de cette série.
D'où :
pour tout α tel que $0 < \alpha < r$, g est continue sur $[-\alpha\ ;\ \alpha]$.
En particulier :
(1) g est continue en 0.
De plus :
(2) $g(0) = a_m \neq 0$.
• Notons que :
(3) si une fonction φ continue en 0 est telle que $\varphi(0) \neq 0$, alors φ ne s'annule pas sur un voisinage de 0.
En effet :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \eta > 0 \ \ / \ \ |x| \leqslant \eta \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit :

$$|x| \leqslant \eta \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \geqslant -\varepsilon + \varphi(0).$$

En choisissant ε de sorte que $\quad -\varepsilon + \varphi(0) > 0$, (si $\varphi(0) > 0$) on a :

$$\varphi \text{ ne s'annule pas sur } [-\ \eta\ ;\ \eta].$$

• La combinaison de (1), (2) et (3) donne :

$$g \text{ est non nulle.}$$

Par conséquent, f est non nulle.
Conclusion :

si $a_n\, x^n$ est le terme général d'une série entière de somme nulle, alors les coefficients sont tous nuls.

6.11

indications

Considérer r le rayon de convergence de la série entière de coefficient b_n.
Comparer r et R sachant que : $\quad \forall\ n \geqslant n_0,\ \ |b_n| \leqslant |c_n|$.

solution

Désignons par r le rayon de convergence de la série entière de coefficient b_n.

On a :

(1) $\forall\ n \geqslant n_0,\quad |b_n| \leqslant |c_n|.$

Soit ρ tel que : $0 \leqslant \rho < R$.

On obtient, d'après (1) :

$$\forall\ n \geqslant n_0,\quad |x| < \rho \quad \Rightarrow \quad |b_n\, x^n| \leqslant c_n\, \rho^n.$$

Or la série numérique de terme général $c_n\, \rho^n$ converge.

Donc la série de terme général $b_n\, x^n$ converge absolument.

D'où $r \geqslant R$.

De même, on obtient : $r \leqslant R$.

En résumé :

si les séries entières de coefficients a_n et c_n ont le même rayon de convergence R, alors ce rayon est aussi celui de la série entière de coefficient b_n tel que : $\forall\ n \geqslant n_0,\quad |a_n| \leqslant |b_n| \leqslant |c_n|$.

6.12

indications

- *Vérifier que :* $\forall\ n \geqslant 1,\quad 1 \leqslant a_n \leqslant n.$
- *Appliquer le résultat de l'exercice 6.11.*

solution

On a : $\forall\ n \geqslant 1,\quad 1 \leqslant a_n \leqslant n.$

Or les séries entières de coefficients 1 et n ont le même rayon de convergence, à savoir : 1.

Donc, d'après le résultat de l'exercice 6.11 :

le rayon de convergence de la série entière de coefficient

$$a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \text{ est 1.}$$

6.13

indication

Noter que : $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\ |x|^n$ *est continue sur tout compact inclus dans* $]-r\,;\,r[$.

solution

La série de fonctions de terme général $a_n\, x^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans $]-r\,;\,r[$.

Par conséquent la fonction $x \overset{\varphi}{\mapsto} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \; |x|^n$ est continue sur tout compact inclus dans $]-r \,; r[$.

En particulier, φ est continue en 0.

On en déduit :

$$\boldsymbol{\exists\, \alpha > 0 \quad / \quad |x| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \; |x|^n \leqslant |a_0|.}$$

6.14

indications

La démarche suivante, conséquence de l'exercice 6.10, peut être adoptée pour déterminer la solution d'une équation différentielle sous forme de série entière.

- *Supposer que* $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *vérifie (E).*
- *En déduire qu'une fonction développée en série entière est nulle.*
- *Déterminer le terme général de cette série.*
- *Appliquer le résultat de l'exercice 6.10.*
- *Déterminer* a_n *et le rayon de convergence de la série entière.*

solution

Supposons que $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E).

On a :

$$\forall\, x \in I, \;\; y' = y.$$

Ce qui équivaut à : $\forall\, x \in I, \; \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n.$

On en déduit :

$$\forall\, x \in I, \;\; \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)\, a_{n+1} - a_n \right] x^n = 0.$$

D'après l'exercice 6.10, on a :

$$\forall\, n \geqslant 0, \;\; (n+1)\, a_{n+1} - a_n = 0.$$

Il en résulte :

$$\forall\, n \geqslant 0, \;\; a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

D'où

$$\forall\, n \geqslant 0, \;\; a_n = \frac{a_0}{n!}.$$

Le rayon de convergence est infini.

En résumé :

pour a_0 donné, $y = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ de rayon de convergence infini, est solution de : $y' = y$.

6.15

indications

1. Procéder comme pour l'exercice 6.14.
2. Résoudre d'abord l'équation différentielle (E).

solution

1. Supposons que $y = \sum a_n x^n$ soit solution de (E).

On a : $\forall x \in I, \quad y'' + y = 0,$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in I, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = 0.$$

On en déduit:

$$\forall x \in I, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0.$$

D'après l'exercice 6.10 :

$$\forall n \geqslant 0, \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n = 0.$$

D'où

$$(1) \qquad \forall n \geqslant 0, \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}.$$

On a :

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1.$$

Par ailleurs, $y'(0) = 0$ implique :

$(2) \qquad a_1 = 0.$

La combinaison de (1) et (2) donne :

$$\forall p \geqslant 0, \quad a_{2p+1} = 0.$$

Soit $p \geqslant 0$. Déterminons a_{2p}.

La relation (1) fournit :

$$\forall p \geqslant 0, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}.$$

Le rayon de la série de coefficient a_n est infini.

En résumé :

$$\boldsymbol{y = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}}$$ **de rayon de convergence infini est la solution de (E).**

2. On vérifie que :

$x \mapsto \cos x$ est l'unique solution de (E).

D'après la première question :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}}.$$

6.16

indication

Raisonner comme pour l'exercice 6.14.

solution

Supposons que $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E).

On a :

$$\forall x \in I, \ a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}\right] x^n = x.$$

On en déduit :

(1) $a_1 = 0$;

(2) $4a_2 + a_0 = 1$;

(3) $\forall n \geqslant 2, \ (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0.$

La combinaison de (1) et (3) donne :

$$\forall p \geqslant 0, \ a_{2p+1} = 0.$$

La combinaison de (2) et (3) fournit :

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{4}(1 - a_0) \ ; \\ \forall p \geqslant 2, \ a_{2p} = \dfrac{(-1)^{p+1} a_2}{(p!)^2 \, 2^{2p-2}}. \end{cases}$$

Conclusion :

$$\textbf{pour } \boldsymbol{a_0} \textbf{ donné,} \quad \boldsymbol{y = a_0 + \frac{1}{4}(1 - a_0)x^2 + (1 - a_0)\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} x^{2p}}{(p!)^2 \, 2^{2p}}}$$

de rayon de convergence infini est solution de (*E*).

6.17

indication

Raisonner comme pour l'exercice 6.14 pour déterminer deux séries indépendantes solutions de (E).

solution

Supposons que $y = \sum a_n x^n$ soit solution de (E).

On obtient :

(1) $a_2 = 0$;

(2) $\forall n \geqslant 0, \ (n+3)(n+2)\, a_{n+3} = a_n.$

On en déduit :

a_0 et a_1 étant donnés,

$$\forall\, p \geqslant 1,\ \ a_{3p} = \frac{1.4.7...(3p-2)}{(3p)!}\, a_0,\ \ a_{3p+1} = \frac{2.5.8...(3p-1)}{(3p+1)!}\, a_1,\ \ a_{3p+2} = 0.$$

Déterminons deux solutions particulières :

pour $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, on a : $y_1 = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1.4.7...(3p-2)}{(3p)!} x^{3p}$;

pour $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on a : $y_2 = x + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2.5.8...(3p-1)}{(3p+1)!} x^{3p+1}$.

Les rayons de convergence des deux séries sont infinis.

De plus, y_1 et y_2 sont deux fonctions linéairement indépendantes.

Il en résulte :

la solution générale de (E) est

$$\boldsymbol{y = \alpha\left(1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1.4.7...(3p-2)}{(3p)!} x^{3p}\right) + \beta\left(x + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2.5.8...(3p-1)}{(3p+1)!} x^{3p+1}\right)}$$

où y est définie sur $\mathbb{R}$, α et β étant des constantes.

6.18

indication

Se servir du développement en série entière de e^{-t}.

solution

On a : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \ e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, t^n}{n!}$.

On en déduit :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \ t^p\, e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, t^{n+p}}{n!}.$$

Or la série de terme général $\frac{t^{n+p}}{n!}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \int_0^x t^p\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{n+p}\, \mathrm{d}t.$$

D'où

$$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \int_0^x t^p\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+p+1}}{(n!)\,(n+p+1)}.}$$

6.19

indications

• *Noter que :* $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

• *Raisonner comme pour l'exercice 6.18.*

solution

On a : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

De plus :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Le raisonnement de l'exercice 6.18 donne :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(n!)(2n+1)}.$$

Or $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Donc

$$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(n!)(2n+1)}.}$$

6.20

indication

Se servir du développement en série entière de $\ln(1+u)$.

solution

On a : $\quad \forall\, |u| < 1,\ \ln(1+u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}.$

Le rayon de convergence de la série entière de somme $\ln(1+x)$ est 1.

Le rayon de convergence de la série entière de somme $\ln(1-2x)$ est $\dfrac{1}{2}$.

D'après le théorème **3** :

On a : $\quad \forall\, |x| < \dfrac{1}{2},\ \ln\left(\dfrac{1+x}{1-2x}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n}.$

D'où

$$\boldsymbol{|x| < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-2x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+2^n}{n} x^n.}$$

6.21

indications

• *Développer e^{-x} et $\dfrac{1}{1+x}$ en séries entières.*

• *Faire le produit des deux séries ainsi obtenues.*

solution

• On a :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\ ;$$

$$\forall\ x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

• Le produit donne :

$$\boldsymbol{\forall\ x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\quad \frac{e^{-x}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) x^n.}$$

6.22

indications

• *Noter que la fonction f est impaire.*

• *Déterminer la série de Fourier de f.*

• *Etudier sa convergence.*

solution

Déterminons la série de Fourier de f.

Comme f est impaire, on a :

$$\forall\ n \geqslant 0,\quad a_n = 0.$$

On obtient :

$$\forall\ n \geqslant 0,\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nt\ \mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}\Big(1-(-1)^n\Big).$$

D'où

$$\forall\ p \geqslant 0,\quad b_{2p} = 0 \qquad \text{et} \qquad b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\ \pi}.$$

Par conséquent :

la série de Fourier de f est : $\quad \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin\,(2p+1)\,x}{2p+1}.$

D'après le théorème **14** :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin\,(2p+1)\,x}{2p+1}.$$

En particulier pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

6.23

indications

1. Remarquer que : $\forall\, n \geqslant 0, \quad b_n = 0$ *car f est paire.*

3. b. Observer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

c. Noter que la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$.

solution

1. • Comme f est paire, on a :

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad b_n = 0.$$

• On a : $\quad a_0 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \pi$

et $\quad \forall\, n \geqslant 1, \quad a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} t \cos nt\,\mathrm{d}t.$

• Le calcul donne :

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad a_{2p} = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, p \geqslant 0, \quad a_{2p+1} = \frac{-4}{\pi\,(2p+1)^2}.$$

On en déduit :

la série de Fourier de f est : $\quad \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \cos(2n+1)\,x.$

Ainsi

la série de Fourier de f est : $\quad \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos(2n+1)\,x}{(2n+1)^2}}.$

2. D'après le théorème **13**, on a :

$$\mathbf{(1)} \qquad \boldsymbol{\forall\, x \in [0\,;\pi], \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)\,x}{(2n+1)^2}}.$$

3. a. En remplaçant x par 0 dans (1), on a :

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

b. Remarquons que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Il en résulte :

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

c. La série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème **5** du chapitre 5, on a :

$$\forall\, x \in [0\,;\,\pi],\quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\int_0^x \cos\,(2n+1)\,t\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$(2) \qquad \forall\, x \in [0\,;\,\pi],\quad \frac{x}{2}(x-\pi) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\,(2n+1)\,x}{(2n+1)^3}.$$

En remplaçant x par $\frac{\pi}{2}$, la formule (2) devient :

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}}.$$

6.24

indications

Il s'agit d'utiliser le développement en série de Fourier d'une fonction f à déterminer.
Noter que la fonction f est paire.

solution

Considérons la fonction f périodique, de période 2π, définie sur $[0\,;\,\pi]$ par :
$f(x) = \pi - x$.

La série trigonométrique étant paire, on va supposer la fonction f paire ; c'est-à-dire :

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in [0\,;\,\pi]\,; \\ \pi + x & \text{si } x \in [-\pi\,;\,0]. \end{cases}$$

La série de Fourier de f est :

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\,(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Le théorème **13** permet de conclure :

$$\boldsymbol{\forall x \in [0\,;\,\pi],\quad \pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\,(2n+1)x}{(2n+1)^2}}.$$

6.25

indications

1. Vérifier que $t \mapsto \dfrac{1}{1 - xt^3}$ est développable en série entière, et préciser le rayon de convergence de la série.

*2. Appliquer le théorème **5**.*

solution

1. On a : $\dfrac{1}{1 - xt^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (xt^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^{3n}$.

Le rayon de convergence de cette série est $\dfrac{1}{|x|^{\frac{1}{3}}}$ (exercice 6.3).

On en déduit :

$$\forall\ t \in \left] \frac{-1}{|x|^{\frac{1}{3}}} \ ; \ \frac{1}{|x|^{\frac{1}{3}}} \right[, \quad \frac{1 - t}{1 - xt^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^{3n+1}.$$

Or $\quad |x| < 1$,

donc $\quad [0 \ ; 1] \subset \left] \dfrac{-1}{|x|^{\frac{1}{3}}} \ ; \ \dfrac{1}{|x|^{\frac{1}{3}}} \right[$.

D'où

$$\boldsymbol{\forall\ t \in [0 \ ; 1], \quad \frac{1 - t}{1 - xt^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^{3n+1}.}$$

2. Comme $\quad [0 \ ; 1] \subset \left] \dfrac{-1}{|x|^{\frac{1}{3}}} \ ; \ \dfrac{1}{|x|^{\frac{1}{3}}} \right[$, le théorème **5** donne :

$$\int_0^1 \frac{1 - t}{1 - xt^3}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{3n + 1} - \frac{x^n}{3n + 2} \right).$$

Il s'ensuit :

$$\lim_{x \to 1^-} \int_0^1 \frac{1 - t}{1 - xt^3}\, \mathrm{d}t = \lim_{x \to 1} \varphi(x) \qquad \text{où} \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n + 1)(3n + 2)}.$$

Or la série de terme général $\dfrac{x^n}{(3n + 1)(3n + 2)}$ converge normalement sur $[0 \ ; 1]$.

Donc la fonction φ est continue sur $[0 \ ; 1]$.

D'où $\quad \displaystyle\lim_{x \to 1^-} \int_0^1 \frac{1 - t}{1 - xt^3}\, \mathrm{d}t = \varphi(1)$.

Conclusion :

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n + 1)(3n + 2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

6.26

indications

- *Appliquer le théorème 7.*
- *Montrer que $r \leqslant 1$.*

Pour cela, noter que si $|x| < r$, alors la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument.

solution

• Remarquons que la série entière de coefficient s_n est le produit des séries entières de coefficients respectifs 1 et a_n.
D'après le théorème **7**, on a : $\quad r \geqslant 1.$

• On a : $\quad \forall\, n \geqslant 0,\ a_n = s_{n+1} - s_n.$

Il en résulte : $\quad \forall\, n \geqslant 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |a_n|\ |x|^n \leqslant |s_{n+1}|\ |x|^n + |s_n|\ |x|^n.$

Ainsi

(1) pour $|x| < r$, la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument car r est le rayon de convergence de la série de coefficient s_n.

Or 1 est le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.
Donc, d'après (1) : $\quad r \leqslant 1.$

En résumé : $\quad r = 1.$

Ainsi

si la série entière de coefficient a_n a pour rayon de convergence 1,

il en est de même de la série entière de coefficient $\boldsymbol{s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}$.

• D'après le théorème **7**, on a :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right).$$

Or $\quad \forall\, x \in\,]-1\,;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}.$

Donc

$$\boldsymbol{\forall\, x \in\,]-1\,;1[,\quad g(x) = \frac{f(x)}{1-x}.}$$

6.27

indications

__1.__ Appliquer le résultat de l'exercice 6.26.
__2.__ Appliquer le théorème __5__.

solution

1. a. Remarquons que : $\forall\, n \geqslant 1,\ s_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$ où $a_p = \dfrac{1}{p}$.

Le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n est 1, et la somme de cette série vaut $-\ln(1-x)$ pour $x \in\,]-1\,;1[$. On déduit de l'exercice 6.26 :

$$\boldsymbol{R = 1 \text{ et la série diverge pour } x = \pm 1 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty.}$$

b. D'après le résultat de l'exercice 6.26 :

$$\forall\, x \in\,]-1; 1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} s_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} s_n x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} s_n (-x)^n.$

Donc

$$\boldsymbol{\forall\, x \in\,]-1\,; 1[,\ f(x) = +\frac{\ln(1+x)}{1+x}.}$$

2. D'après le théorème **5**, on a :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[,\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} s_n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t.$$

D'où

$$\boldsymbol{\forall\, x \in\,]-1\,; 1[,\ \Big(\ln(1+x)\Big)^2 = -2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{s_n x^{n+1}}{n+1}.}$$

6.28

indications

- *Appliquer le résultat de l'exercice 6.11.*
- *Étudier la convergence normale de la série.*

solution

- Les séries entières de coefficients $\dfrac{1}{n^3}$ et $\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$ ont le même rayon de convergence, à savoir : 1.
- D'après le résultat de l'exercice 6.11 : $R = 1$.
- Il vient de (1) que la série entière de coefficient a_n converge normalement sur $[-1; 1]$.
- D'après le théorème **4** du chapitre 5, on obtient la continuité de la somme sur $[-1\,;1]$.
- De même, la série de terme général $n\, a_n\, x^{n-1}$ converge normalement sur $[-1\,;1]$.

D'après le théorème **6** du chapitre 5, la somme de la série entière de coefficient a_n est dérivable sur $[-1\,;1]$.

En résumé :

le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n est 1,
et sa somme est continue et dérivable sur $[-1\,;1]$.

6.29

indications

1. S'inspirer de la démarche de l'exercice 6.5.
2. Appliquer le résultat de la question 1.

solution

1. • On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Par conséquent :

les séries entières de coefficients a_n et b_n ont le même rayon de convergence R.

• Désignons par S la somme de la série de coefficient a_n.

On a : $\forall\, x \in\,]-R\,;0[\, \cup\,]0\,;R[,\ f(x) = x^{-p} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+p}}{n+p}$.

Posons : $\forall\, x \in\,]-R\,;R[,\ \varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+p}}{n+p}$.

On obtient : $\forall\, x \in\,]-R\,;R[,\ \varphi'(x) = x^{p-1} S(x)$.

On en déduit : $\forall\, x \in\,]-R\,;R[,\ \varphi(x) = \int_0^x t^{p-1} S(t)\,\mathrm{d}t$.

Conclusion :

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^{-p} \displaystyle\int_0^x t^{p-1} S(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \in\,]-R\,;0[\, \cup\,]0\,;R[\,; \\[2mm] \dfrac{a_0}{p} & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

2. • Le rayon de convergence de la série entière est 1.

• On a : $\forall\, n \geqslant 0,\ \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+3}$.

Considérons : $\forall\, n \geqslant 0,\ a_n = 1$.

On obtient : $\forall\, |x| < 1,\ S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Posons : $\forall\, |x| < 1,\ \varphi_i(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+i},\ i \in \{1, 2, 3\}$.

Le résultat de la question **1** fournit :

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in\,]-1\,;0[\, \cup\,]0\,;1[\,; \\[2mm] 1 & \text{si } x = 0\,; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}\left[x + \ln(1-x)\right] & \text{si } x \in\ ]-1\,;0[\ \cup\ ]0\,;1[\ ; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0\ ; \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^3}\left[x + \dfrac{1}{2}x^2 + \ln(1-x)\right] & \text{si } x \in\ ]-1\,;0[\ \cup\ ]0\,;1[\ ; \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 0\ ; \end{cases}$$

En résumé :

$$\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^3}\left[-x + \dfrac{3}{2}x^2 - (1-x)^2\ln(1-x)\right] & \text{si } x \in\ ]-1\,;0[\ \cup\ ]0\,;1[\ ; \\ \dfrac{1}{6} & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

6.30

indications

• *Noter que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *n'existe pas nécessairement.*

• *Comparer r et R.*
Pour cela, observer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p(n)}{q(n)}$.

solution

Posons : $\forall\, n \geqslant 0,\ \ \alpha_n = \dfrac{p(n)}{q(n)}$.

• On a, par hypothèse : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$.

On en déduit :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall\, n \geqslant n_0,\ \ |\alpha_n| \leqslant 1.$$

Ainsi

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \ |u_n| \leqslant |a_n|.$$

D'après le résultat de l'exercice 6.11 :

$$r \geqslant R.$$

• Supposons $r > R$.
C'est-à-dire : il existe un réel x_0 vérifiant $|x_0| > R$,
et tel que la série de terme général $u_n\,x_0^n$ converge absolument.

Considérons un réel x_1 vérifiant :

$$R < |x_1| < |x_0|.$$

On a :

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad |a_n x_1^n| = |u_n x_0|^n \left|\frac{q(n)}{p(n)}\right| \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n.$$

Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{q(n)}{p(n)}\right| \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n = 0$

d'après les croissances comparées.

Donc

$$\exists\, n_1 \geqslant 0 \quad / \quad \forall\, n \geqslant n_1, \quad |a_n x_1^n| \leqslant |u_n x_0^n|.$$

Ainsi la série numérique de terme général $a_n x_1^n$ converge absolument avec $|x_1| > R$, ce qui est absurde, car R est le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.

Par conséquent : $r \leqslant R$.

Conclusion :

$$\boldsymbol{r = R.}$$

6.31

indication

2. Se reporter aux développements des séries entières des fonctions usuelles.

solution

1. Si $y = \sum a_n x^n$ est solution de (E), alors on a :

$$\begin{cases} a_0 = 1\ ; \\ a_1 = 0\ ; \\ \forall\, n \geqslant 0,\ a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{(n+2)(n+3)}. \end{cases}$$

On en déduit :

la fonction $\boldsymbol{x \mapsto f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}}$,

définie sur $\mathbb{R}$, est l'unique solution de (E).

2. Le développement en série entière de $\sin x$ indique :

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0\ ; \\ 1 & \text{si } x = 0\ ; \end{cases}}$$

est l'unique solution de (E).

6.32

indications

1. Vérifier que : $\forall\, n \geqslant 0,\ a_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\, dt.$

*2. Se servir du résultat de la question **1**.*

solution

1. On reconnait l'intégrale de Wallis : $a_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\, \mathrm{d}t.$

On a : (1) $\quad \forall\, n \geqslant 0,\ a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n.$

De plus, une intégration par parties donne :

$$(2) \qquad \forall\, n \geqslant 0,\ a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, a_n.$$

La combinaison de (1) et (2) fournit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Il s'ensuit :

le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n est 1.

2. On a :

$$\forall\, x \in\,]-1;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} (x \sin t)^n\, \mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire :

$$\forall\, x \in\,]-1;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{\pi/2} (x \sin t)^n\, \mathrm{d}t = \lim_{N \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{N} (x \sin t)^n\, \mathrm{d}t.$$

Soient $\quad x \in\,]-1;1[\ $ et $\ t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right].$

On obtient :

$$\sum_{n=0}^{N} (x \sin t)^n = \frac{1}{1 - x \sin t} - \frac{(x \sin t)^{N+1}}{1 - x \sin t}.$$

On en déduit :

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{N} (x \sin t)^n\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x \sin t} - x^{N+1} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{N+1}}{1 - x \sin t}\, \mathrm{d}t.$$

Or : $\quad \forall\, t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ |\sin t| \leqslant 1,$

donc

$$\left| x^{N+1} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{N+1}}{1 - x \sin t}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant |x|^{N+1} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x \sin t}.$$

Ainsi

$$\lim_{N \to +\infty} x^{N+1} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{N+1}}{1 - x \sin t} \, \mathrm{d}t = 0.$$

Par conséquent :

$$\forall\, x \in \,]-1;\,1[, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x \sin t} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^n.$$

En résumé :

$$\boldsymbol{\forall\, x \in \,]-1\,;\,1[, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x \sin t} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, x^n \text{ avec}}$$

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{\pi}{2},\ a_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geqslant 1,}$$

$$\boldsymbol{a_{2n} = \frac{\pi\,(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n+1}} \qquad \text{et} \qquad a_{2n+1} = \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

indications et solutions

7

Intégrales dépendant d'un paramètre

Éléments de cours

Intégrale dépendant d'un paramètre

Soient $I = [a\,;\,b]$, et E une partie de $\mathbb{R}$.

Soit
$$\begin{array}{rcl} f : I \times E & \to & \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto & f(t, x). \end{array}$$

On considère la fonction
$$\begin{array}{rcl} \phi : E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

$\phi(x)$ est une intégrale dépendant d'un paramètre.

Théorème 1

Si f est continue sur $I \times E$, (E étant un intervalle) alors ϕ est continue sur E.

Théorème 2

Soient $I = [a\,;\,b]$, et J un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit
$$\begin{array}{rcl} f : I \times J & \to & \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto & f(t, x). \end{array}$$

Si f est continue sur $I \times J$ et si $(t, x) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue sur $I \times J$, alors la fonction
$$\begin{array}{rcl} \phi : J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe C^1 sur J.

De plus, $\forall\, x \in J,\ \ \phi'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,\mathrm{d}t.$

Intégrale impropre dépendant d'un paramètre

Soient a un réel, E une partie de $\mathbb{R}$, et f une application de $[a\,;\,+\infty[\, \times E$ dans $\mathbb{R}$.

On considère la fonction
$$\begin{array}{l} \phi : E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t, x)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

ϕ est une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.

Convergence simple

On dit que l'intégrale converge simplement sur E si :

$$\forall\, x \in E,\quad \lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^{\alpha} f(t, x)\, \mathrm{d}t \quad \text{existe et est finie.}$$

Convergence uniforme

On dit que l'intégrale converge uniformément sur E si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\quad \exists\, c \geqslant a \,/\, \forall\, \alpha \geqslant c,\quad \forall\, \beta \geqslant c,\ \sup_{x \in E} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon.$$

Convergence normale

On suppose que pour tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(t, x)$ de $[a\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est localement intégrable.
S'il existe une application localement intégrable

$$g : [a\,;+\infty[\to \mathbb{R}_+$$

vérifiant :

(*i*) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t$ converge ;

(*ii*) $\forall\, (t, x) \in [a\,;+\infty[\times E,\quad |f(t, x)| \leqslant g(t)$;

alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t, x)\, \mathrm{d}t$ est dite normalement convergente.

Théorème 3

La convergence normale implique la convergence uniforme.

Théorème 4

Soient a un réel, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une application continue de $[a\,;+\infty[\times I$ dans $\mathbb{R}$.
Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t, x)\, \mathrm{d}t$ converge uniformément sur I, alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^{+\infty} f(t, x)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

est continue sur I.

Théorème 5

Soient a un réel, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une application de $[a\,;+\infty[\times I$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(*i*) $(t, x) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue sur $[a\,;+\infty[\times I$;

(*ii*) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t, x)\, \mathrm{d}t$ converge simplement sur I ;

(*iii*) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, \mathrm{d}t$ converge uniformément sur I.

Alors, l'application

$$\begin{aligned} \phi : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^{+\infty} f(t, x)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

est de classe C^1 sur I.

De plus, $\quad \forall\, x \in I, \;\; \phi'(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, \mathrm{d}t.$

Exercices

APPLICATION IMMÉDIATE

Intégrales définies sur un compact

7.1 Pour tout réel x, on pose : $\phi(x) = \int_0^1 e^{-xt^2}\mathrm{d}t$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de ϕ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \neq 0$. Déterminer une relation entre $\phi'(x)$ et $\phi(x)$.

7.2 Soit a un réel tel que : $0 < a < 1$.

On pose : $f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que f est définie et dérivable sur $I = [-a\,;\,a]$.

7.3 Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f vérifie une équation différentielle du second ordre.

7.4 Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel x, on pose :

$$\phi_n(x) = \int_0^1 (e^x + t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, ϕ_n vérifie une équation différentielle à préciser.

Intégrales généralisées

7.5 $\forall\, x \geqslant 0$, on pose : $\phi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que ϕ est de classe C^1 sur tout compact inclus dans $[0\,;\,+\infty[$.

7.6 Pour tout réel $x \geqslant 0$, on pose : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer que f vérifie une équation différentielle à préciser.

On admettra que : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7.7 Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1 + t^2} \, dt.$

Déterminer l'ensemble de définition de f.

7.8 Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) \, dt.$

Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

7.9 Soit $\alpha > 0$. On pose : $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(x+\alpha)}}{x + \alpha} \sin x \, dx.$

1. Montrer que φ est continue sur $]0 \,;\, +\infty[$.
2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t)$.

7.10 Pour tout réel x, on pose : $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} \, dt.$

Déterminer le développement en série entière de φ.

APPROFONDISSEMENT ET SYNTHÈSE

7.11 Pour tout entier n et pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t) \cos(tx) \, dt,$$

où φ est une fonction continue sur $[0 \,;\, 1]$.

1. ***a.*** Montrer que f est lipschitzienne.
b. Que peut-on en déduire pour f ?
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

7.12 Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \int_0^{+\infty} p(t) \, e^{-t} \sqrt{t+x} \, dt$, où p est un polynôme de degré n.

Montrer que f est de classe C^1 sur $]0 \,;\, +\infty[$.

7.13 Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $I = [0 \,;\, 1]$ muni de la norme :

$$\forall f \in E, \quad \|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Soit k une fonction continue de $I \times I$ dans $\mathbb{R}$.
Pour toute fonction f de E, on pose :

$$F(x) = \int_0^1 k(x, t) \, f(t) \, dt.$$

1. Montrer que : $\forall f \in E, \quad F \in E$.

2. En déduire que l'application $f \mapsto F$ est continue.

7.14 Soient deux réels a et b vérifiant $0 < a < b$.

On pose $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \;/\; a \leqslant x \leqslant t \leqslant b\}$ et $I = [a\,;b]$.

Soit K une application continue de D dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\sup\{|K(x, t)|, \quad (x, t) \in D\} < a.$$

On désigne par B l'ensemble des fonctions numériques bornées sur I.

Pour toute application h de B, on pose :

$$\|h\| = \sup_{x \in I} |h(x)| \quad \text{et} \quad Th(x) = \int_x^b \frac{K(x, t)\, h(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que : $\forall\, h \in B, \quad Th \in B$.

2. Montrer que l'application $T : h \mapsto Th$ est continue de B dans B.

3. Pour toute application h de B, on pose :

$$T^0 h = h, \quad \text{et pour tout entier } n, \quad T^{n+1}\, h = T(T^n\, h).$$

a. Montrer que pour toute application h de B, la série de fonctions ($\mathrm{T}^n\, h$) converge normalement sur I.

b. Soit $h \in B$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\, h$ est l'unique élément f de B vérifiant :

$$f - Tf = h.$$

indications et solutions

7.1

indications

*1. Appliquer les théorèmes **1** et **2**.*
Pour cela, poser :
$I = [0\,;1]$, $E = J = \mathbb{R}$ *et* $f(t, x) = e^{-xt^2}$.
2. Intégrer $\phi'(x)$ *par parties.*

solution

1. Posons $I = [0\,;1]$, $E = J = \mathbb{R}$ et $f(t, x) = e^{-xt^2}$.

• La fonction f est continue sur $I \times E$.

D'après le théorème **1** :

$$\boldsymbol{\phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

• Pour tout $(t, x) \in I \times E$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ existe.

De plus $(t, x) \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue sur $I \times E$.

D'après le théorème **2** :

$$\boldsymbol{\phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. On a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \phi'(x) = -\displaystyle\int_0^1 t^2\, e^{-xt^2}\, \mathrm{d}t.$

Soit $x \neq 0$.

Une intégration par parties donne :

$$\boldsymbol{\forall\, x \neq 0,\quad \phi'(x) = \frac{-1}{2x}\,(\phi(x) - e^{-x}).}$$

7.2

indications

• *Vérifier que :* $|x| \leqslant a \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$ *existe.*

• *Appliquer le théorème **2**.*

solution

• Soit x un réel tel que : $|x| \leqslant a$.

La fonction $t \mapsto \ln(1 + x\sin^2 t)$ est continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'où

$$f \text{ est définie sur } I.$$

• Considérons la fonction :

$$g : \left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right]\times[-a\ ;a] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, x) \mapsto \ln(1 + x \sin^2 t).$$

Les hypothèses du théorème **2** sont vérifiées.
On en déduit :

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I.$$

7.3

indication

Raisonner comme pour l'exercice 7.2.

solution

1. Considérons la fonction g définie sur $[0\ ;1]\times\mathbb{R}$ par :

$$g(t, x) = e^{-t^2} \cos(tx).$$

g vérifie les hypothèses du théorème **2**.
Il s'ensuit :

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

2. Une intégration par parties fournit :

$$f \text{ est solution de l'équation différentielle : } \quad y' + \frac{x}{2}y = \frac{\sin x}{2e}.$$

7.4

indications

• *Établir que :* $\forall\, n \geqslant 1,\ \ \phi_n$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
• *Écrire* $\phi_n'(x)$.
• *Déterminer une relation de récurrence entre* ϕ_n *et* ϕ_{n+1}.

solution

D'après le théorème **2**, pour tout $n \geqslant 1$, ϕ_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus :

(1) $\quad \forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \phi_n'(x) = -ne^x\,\phi_{n+1}(x).$

Considérons :

$$\phi_n(x) = \int_0^1 (e^x + t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties donne :

$$(2) \qquad \forall\, n \geqslant 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \phi_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\, e^{-x}\,(e^x + 1)^{-n} + \frac{2n-1}{2n}\, e^{-x}\, \phi_n(x).$$

La combinaison de (1) et (2) fournit :

$$\boldsymbol{\forall\, n \geqslant 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \phi_n'(x) + \frac{2n-1}{2}\, \phi_n(x) = -\frac{1}{2}\,(e^x + 1)^{-n}.}$$

7.5

indications

- *Considérer :* $0 \leqslant a < b$.
- *Poser :* $\forall\, (t, x) \in [1\,;+\infty[\, \times [a\,;b],\quad f(t,x) = \dfrac{\ln t}{x^2 + t^2}$.
- *Appliquer le théorème* **5**.

solution

Soient a et b deux réels vérifiant : $0 \leqslant a < b$.
Montrons que ϕ est de classe C^1 sur $I = [a\,;b]$.
Pour cela, posons :

$$\forall\, (t, x) \in [1\,;+\infty[\, \times [a\,;b],\ \ f(t,x) = \frac{\ln t}{x^2 + t^2}.$$

- La fonction $(t,x) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue sur $[1\,;+\infty[\,\times I$.
- Soit $x \in I$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + x^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

- $\forall\, (t,x) \in [1\,;+\infty[\,\times I,\quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \dfrac{2b \ln t}{(t^2 + a^2)^2}$.

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{(t^2 + a^2)^2} \text{ converge, car } \lim_{t \to +\infty} t^2\, \frac{\ln t}{(t^2 + a^2)^2} = 0.$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t$ converge normalement (par suite uniformément) sur I.

D'après le théorème **5**, ϕ est de classe C^1 sur I.
Conclusion :

ϕ est de classe C^1 sur tout compact inclus dans $[0\,;+\infty[$.

7.6

indication

1. Montrer que f est de classe C^1 sur tout compact inclus dans $]0\,;+\infty[$.

solution

1. Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.
Montrons que f est de classe C^1 sur $I = [a\,;b]$.
Considérons la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[\,\times I$ par :

$$g(t,x) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

• La fonction $(t,x) \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x)$ est continue sur $[0\,;+\infty[\,\times I$.

• Soit $x \in I$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t,x)\,\mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\,g(t,x) = 0$.

• $\forall\,(t,x) \in [0\,;+\infty[\,\times I$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant e^{-at^2}$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ converge,
donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t \quad \text{converge normalement sur } I.$$

Il résulte du théorème **5** que f est de classe C^1 sur I.
D'où

$$\boldsymbol{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0\,;+\infty[.}$$

2. On obtient : $\displaystyle\forall\,x > 0,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2\,e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

On en déduit :

$$\forall\,x > 0,\ f'(x) = f(x) - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t.$$

On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Par suite :

$$\boldsymbol{\forall\,x > 0,\ f'(x) - f(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$$

7.7

indication

Il s'agit de déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale converge simplement.

solution

• La fonction f est définie pour $x = 0$.

• Soit $x \neq 0$.

Étudions la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2}\,dt$.

Considérons : $\alpha > 0$.

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^{\alpha} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{x}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cos(\alpha x) + \frac{1}{x}\int_0^{\alpha} \frac{(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\cos(xt)\,dt.$$

Par ailleurs, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\cos(xt)\,dt$ converge absolument.

De plus $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cos(\alpha x) = 0$.

On en déduit :

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\alpha} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2}\,dt \quad \text{est finie,}$$

ce qui montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2}\,dt$ converge simplement.

En résumé :

f est définie sur $\mathbb{R}$.

7.8

indications

Montrer d'abord que f vérifie une équation différentielle.
Pour cela, procéder comme pour l'exercice 7.6.

solution

• La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,dt$.

Considérons la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[\,\times\mathbb{R}$ par :

$$g(t, x) = e^{-t^2}\cos(tx).$$

g vérifie toutes les hypothèses du théorème **5**.

Par conséquent, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

• On a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(tx)\, \mathrm{d}t.$

Une intégration par parties fournit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{x}{2} f(x).$$

Or $f(0) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$

Donc f est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{x}{2} y \quad \text{et} \quad y(0) = \sqrt{\pi}.$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{x^2}{4}}.}$$

7.9

indications

1. Montrer que φ *est continue sur tout compact inclus dans* $]0\,;+\infty[$.
Pour cela, appliquer le théorème **4**.
2. Déterminer une fonction ψ *telle que :*

$$\forall\, t > 0,\quad |\varphi(t)| \leqslant \psi(t).$$

solution

1. Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$.
Considérons la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[\, \times [a\,;b]$ par :

$$g(x, t) = \frac{e^{-t(x+\alpha)}}{x+\alpha} \sin x.$$

$$\forall\, (x, t) \in [0\,;+\infty[\, \times [a\,;b],\quad |g(x, t)| \leqslant \frac{e^{-a(x+\alpha)}}{x+\alpha}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a(x+\alpha)}}{x+\alpha}\, \mathrm{d}x$ converge.
Donc :

$$\int_0^{+\infty} g(x, t)\, \mathrm{d}x \text{ converge normalement, et par suite uniformément, sur } [a\,;b].$$

On en déduit, d'après le théorème **4** :

$$\varphi \text{ est continue sur } [a\,;b].$$

D'où

$$\boldsymbol{\varphi \textbf{ est continue sur }]0\,;+\infty[.}$$

2. On obtient : $\forall\ t > 0,\ |\varphi(t)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\alpha}\,\mathrm{d}x.$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}.$

Donc

$$\forall\ t > 0,\ |\varphi(t)| \leqslant \frac{1}{\alpha t}.$$

D'où

$$\boldsymbol{\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0.}$$

7.10

indications

- *Montrer d'abord que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
- *Calculer $\varphi'(x)$.*
- *En déduire le développement en série entière de φ.*

solution

Considérons la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[\ \times \mathbb{R}$ par :

$$f(t, x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}\sin(xt)}{t} & \text{si } (t, x) \in\ ]0\ ;\ +\infty[\ \times \mathbb{R}\ ; \\ x & \text{si } (t, x) \in \{0\} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

- L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t, x)\,\mathrm{d}t$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $(t, x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = e^{-t}\cos(xt)$ est continue sur $[0\ ;\ +\infty[\ \times \mathbb{R}$.
- $\forall\ (t, x) \in [0\ ;\ +\infty[\ \times \mathbb{R},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leqslant e^{-t},$

ce qui assure la convergence normale de $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème **5** :

$$\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

De plus : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$

- Deux intégrations par parties successives donnent :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Or $\varphi(0) = 0,$

donc $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \operatorname{Arctg} x.$

Conclusion :

$$\boldsymbol{|x| \leqslant 1 \ \Rightarrow\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.}$$

7.11

indications

1. a. Montrer que : $\exists\, \alpha \geqslant 0 \,/\, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha\, |x - y|.$

Pour cela, noter que : $\cos p - \cos q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{q-p}{2}.$

solution

1. ***a.*** On a : $\quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x) - f(y) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,(\cos tx - \cos ty)\,\mathrm{d}t.$

Or $\quad \forall\, (p, q) \in \mathbb{R}^2,\ \ \cos p - \cos q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{q-p}{2}.$

Donc $\quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)| \left|\sin \frac{t(x-y)}{2}\right| \mathrm{d}t.$

De plus : $\quad \forall\, a \in \mathbb{R},\ \ |\sin a| \leqslant |a|.$

On en déduit :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y| \int_0^1 t\,|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\exists\, \alpha \geqslant 0 \,/\, \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha\, |x - y|.$$

Par conséquent :

f est une fonction lipschitzienne.

b. D'après l'exercice 1.13 :

f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Considérons la fonction g définie sur $[0\,;\,1] \times \mathbb{R}$ par :

$$g(t, x) = \varphi(t)\cos(tx).$$

g vérifie toutes les hypothèses du théorème **2**.

Par conséquent :

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

7.12

indications

- *Étudier la convergence absolue de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} p(t)\, e^{-t} \sqrt{t + x}\, \mathrm{d}t.$
- *Appliquer le théorème* ***5****.*
- *Noter que :* $\forall\, \alpha \geqslant 0,\ \ \displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha}\, p(t)\, e^{-t} = 0.$

solution

Considérons la fonction g définie sur $E = [0\ ;+\infty[\times]0\ ;+\infty[$ par :

$$g(t, x) = p(t)\, e^{-t} \sqrt{t + x}.$$

• L'application $(t, x) \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(t, x)$ est continue sur E.

• Pour tout $x > 0$, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} t^2\, |g(t, x)| = 0,$$

puisque pour tout $\alpha \geqslant 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha e^{-t} = 0$, et que p est un polynôme.

Il s'ensuit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t, x)\, \mathrm{d}t$ converge absolument, par suite simplement, sur $]0, +\infty[$.

• $\forall\ (t, x) \in E$, $\quad \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(t, x)\right| \leqslant \dfrac{|p(t)|e^{-t}}{2\sqrt{t}}.$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\,p(t)|\; e^{-t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ converge.

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(t, x)\, \mathrm{d}t \quad \text{converge normalement sur }]0\ ;+\infty[.$$

On en déduit, d'après le théorème **5** :

f est de classe C^1 sur $]0\ ;+\infty[$.

7.13

indications

1. Appliquer le théorème 1.
2. • Montrer que l'application $f \mapsto F$ est linéaire.
• Établir que : $\exists\ M \geqslant 0 \,/\, \forall\, f \in E,\ \ \|F\| \leqslant M\,\|f\|$.

solution

1. La fonction $(t, x) \mapsto k(x, t)\, f(t)$ est continue sur $I \times I$.
D'après le théorème **1**, F est continue sur I.
Ainsi

$$\boldsymbol{\forall\, f \in E,\quad F \in E.}$$

2. • Remarquons que l'application $f \mapsto F$ est un endomorphisme de E.
• On a : $\forall\ t \in I,\ \ |f(t)| \leqslant \|\,f\,\|.$

On en déduit : $\forall\, x \in I,\ \ |F(x)| \leqslant \|f\| \displaystyle\int_0^1 |k(x, t)|\, \mathrm{d}t.$

D'après le théorème **1**,

la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 |k(x, t)|\, \mathrm{d}t$ est continue sur I.

Posons : $M = \sup\limits_{x \in I} \displaystyle\int_0^1 |k(x, t)|\, \mathrm{d}t.$

On obtient :

$$\forall\, f \in E,\ \ \|F\| \leqslant M \|f\|.$$

Il résulte de l'exercice 1.11 :

l'application $f \mapsto F$ est un endomorphisme continu.

7.14

indications

1. Noter que : $(x, t) \mapsto \dfrac{K(x, t)}{t^2}$ *est continue sur D.*

2. • Vérifier que : $h \mapsto Th$ *est linéaire.*

• Montrer que :

(1) $\exists\, M \in [0\,;1[\,/\,\forall\, h \in B,\ \ \|Th\| \leqslant M \|h\|.$

3. a. Se servir de (1).

b. Prouver à l'aide de (1) que :

$$\forall\, f \in B,\ \ Tf = f \ \Rightarrow\ f = 0.$$

solution

1. L'application $(x, t) \mapsto \dfrac{K(x, t)}{t^2}$ est continue sur D.

Il s'ensuit que Th est bornée sur I.

Conclusion :

$$\boldsymbol{\forall\, h \in B,\ \ Th \in B.}$$

2. • L'application T est linéaire.

• On a :

$$\forall\, (x, t) \in D,\ \ \left|\frac{K(x, t)\, h(t)}{t^2}\right| \leqslant A\, \frac{\|h\|}{t^2},$$

où $A = \sup\,\{|K(x, t)|, (x, t) \in D\}$.

On en déduit :

$$\forall\, x \in I,\ \ |Th(x)| \leqslant A\, \|h\| \int_x^b \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Or $\forall\, x \in I,\ \displaystyle\int_x^b \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{b} + \frac{1}{x}.$

indications et solutions

De plus : $\forall\, x \in I, \quad -\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{a}.$

Donc : $\forall\, x \in I, \ \ |Th(x)| \leqslant \dfrac{A}{a}\,\|h\|.$

Posons : $M = \dfrac{A}{a}.$

On obtient :

(1) $\quad M \in [0\,;1[\ \text{ et } \ \forall\, h \in B, \quad \|Th\| \leqslant M\,\|h\|.$

Le résultat de l'exercice 1.11 indique :

T est continue sur B.

3. *a.* On déduit de (1) :

$$\forall\, n \geqslant 0, \ \ \|T^n\, h\| \leqslant M^n\,\|h\|.$$

Par hypothèse, $A < a$. Il en résulte :

la série de terme général $T^n\,h$ converge normalement sur I.

b. • Montrons que :

$$\forall\, f \in B, \ \ Tf = f \ \Rightarrow \ f = 0.$$

On a, d'après (1) :

$$Tf = f \ \Rightarrow \ \|f\| \leqslant M\,\|f\|.$$

On en déduit : $Tf = f \ \Rightarrow \ (1-M)\,\|f\| \leqslant 0.$

Or $1 - M > 0$, donc $\|f\| = 0.$

Ainsi

$$\forall\, f \in B, \ \ Tf = f \ \Rightarrow \ f = 0.$$

On en déduit que, pour tout $h \in B$, l'équation $f - Tf = h$ admet au plus une solution dans B.

• D'après le résultat de l'exercice 5.12 (étendu aux séries) :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\,h \in B.$

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\,h$ est solution de : $f - Tf = h$

car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\,h - \sum_{n=0}^{+\infty} T^{n+1}\,h = h$ et T est continue sur B.

Conclusion :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\,h$ est l'unique élément f de B vérifiant $f - Tf = h$.

Achevé d'imprimer