Lycée IBN KHALDOUN Radès Mr ABIDI Farid	Devoir de contrôle n°1 $2^{ème}$ S_2	Durée : 1 heure 22 octobre 2010

Exercice 1 : (5 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » pour chacune des cinq questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. Si $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CB}$.
2. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
3. La forme canonique de $3x^2 - 6x + 2$ est : $3(x-1)^2 + 1$.
4. L'ensemble de solutions de l'inéquation $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$ est vide.
5. L'équation $\sqrt{x-1} = 2 - 2x$ admet une seule racine.

Exercice 2 : (7 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} a+b=7 \\ a.b=-30 \end{cases}$

   b) Déterminer les racines de l'équation : $9x^2 + 5x - 4 = 0$.

   c) En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation $(x^2 - 7x - 30)(9x^2 + 5x - 4) \leq 0$.

2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + X - 6 = 0$.

   b) En déduire les solutions de chacune des équations $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ et $-6x^2 + x + 1 = 0$.

Exercice 3: (8 points)

ABCD est un carré d'arête 1. On considère les points E et F définis par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Les droites (AC) et (DE) se coupent en R et les droites (DF) et (BC) se coupent en S. On choisit comme repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. Soit (x, y) les coordonnées de R.

1. Quelles sont les coordonnées des points A, B , C , D , E et F ?
2. a) Montrer que x = y.

   b) Vérifier que $\overrightarrow{ER}\begin{pmatrix}x-\frac{1}{3}\\x\end{pmatrix}$.

   c) En appliquant la condition de colinéarité aux vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{ER}$, déterminer les coordonnées de R.
3. a) Justifier que l'abscisse du point S est égale à 1.

   b) Calculer l'ordonnée du point S en traduisant l'alignement des points F, D et S.
4. Démontrer que les droites (RS) et (AD) sont perpendiculaires.

Corrigé

Exercice 1 :

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Vrai.

Exercice 2 :

1. a) Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} a+b=7 \\ a.b=-30 \end{cases}$, il suffit de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2-7x-30=0$.

Son discriminant est $\Delta=(-7)^2-4\times1\times(-30)=169=13^2$.

Ses racines sont : $x_1=\dfrac{7-13}{2}=-3$ et $x_2=\dfrac{7+13}{2}=10$.

Donc l'ensemble de solutions du système proposé est $\{(-3,10),(10,-3)\}$.

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $9x^2+5x-4=0$:
On pose a = 9 , b = 5 et c = - 4 , on obtient a – b + c = 0 donc les racines de cette équation sont -1 et $-\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{9}$ d'où l'ensemble de solutions est $\left\{-1,\dfrac{4}{9}\right\}$.

d) Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{4}{9}$		10		$+\infty$
$x^2-7x-30$		+	0	-		-		-	0	+	
$9x^2+5x-4$		+		+	0	-	0	+		+	
Produit		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Donc l'ensemble de solutions de $(x^2-7x-30)(9x^2+5x-4)\leq0$ est $[-3,-1]\cup\left[\dfrac{4}{9},10\right]$.

2 . a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2+X-6=0$:

Son discriminant est $\Delta=1-4\times1\times(-6)=25$.

Ses racines sont : $X_1=\dfrac{-1-5}{2}=-3$ et $X_2=\dfrac{-1+5}{2}=2$.

Donc l'ensemble de solutions est $\{-3,2\}$.

b) On considère l'équation : $x+\sqrt{x}-6=0$:
on pose pour tout x positif , X = $\sqrt{x}$, on obtient : $X^2+X-6=0$.
D'où X = -3 (à rejeter) ou X = 2 . Or X = 2 équivaut à x= 4.
Donc S_1 = {4}.
On considère l'équation : $-6x^2+x+1=0$:
Comme 0 n'est pas solution , alors $x\neq0$. Divisons les deux membres de l'équation précédente par x^2 , nous obtenons : $\dfrac{-6x^2+x+1}{x^2}=0$ d'où $-6\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}$ équivaut $-6+\left(\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=0$.

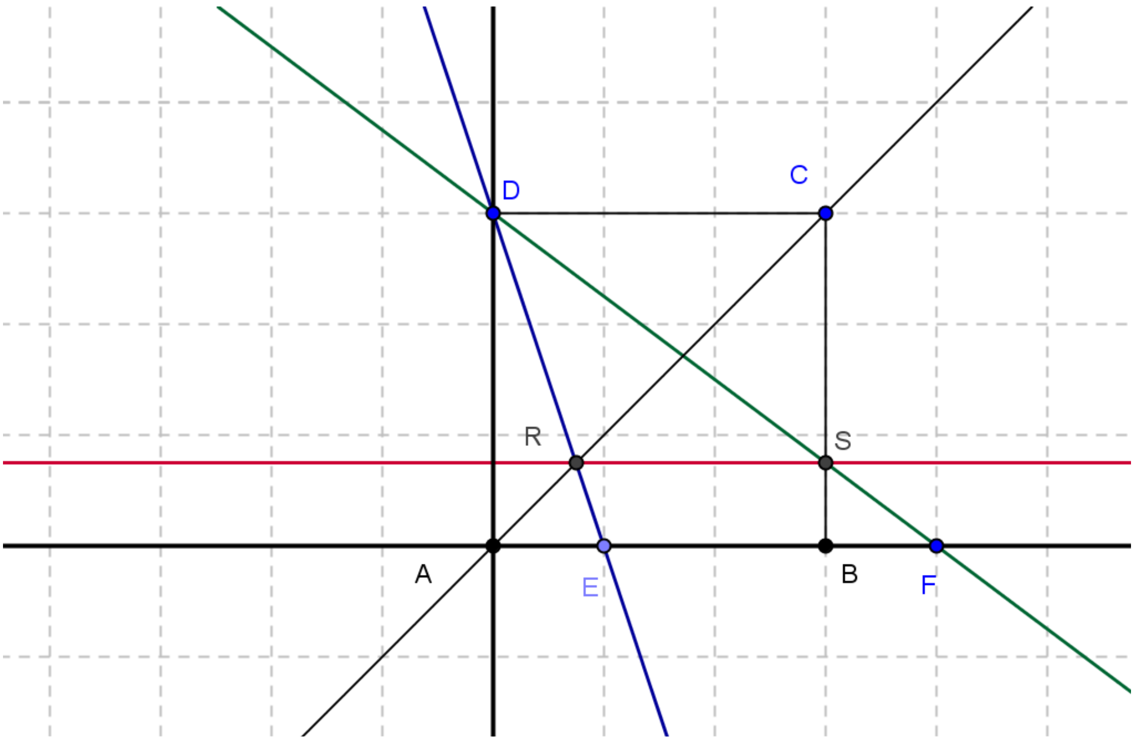
Ou encore $\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)-6=0$.

on pose pour tout x réel non nul , $X=\frac{1}{x}$, on obtient : $X^2+X-6=0$.

D'où $X=-3$ ou $X=2$ d'où $\frac{1}{x}=-3$ ou $\frac{1}{x}=2$ équivaut à $x=-\frac{1}{3}$ ou $x=\frac{1}{2}$.

Donc $S_2=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 3 :



1. $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$, $E\left(\frac{1}{3},0\right)$ et $F\left(\frac{4}{3},0\right)$.

2. a) $R\in(AC)$ équivaut à $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut à $\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}=0$

équivaut à $x-y=0$ équivaut à $x=y$.

b) La première composante du vecteur $\overrightarrow{ER}$ est $x_R-x_E=x-\frac{1}{3}$.

La deuxième composante du vecteur $\overrightarrow{ER}$ est $y_R-y_E=y-0=x$.

Donc $\overrightarrow{ER}\begin{pmatrix} x-\frac{1}{3} \\ x \end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{ER}$ sont colinéaires équivaut à $\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & x-\frac{1}{3} \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $-\frac{1}{3}x - \left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$

équivaut à $-\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ équivaut à $\frac{4}{3}x = \frac{1}{3}$ équivaut à $x = \frac{1}{4}$.

Donc $R\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

3. a) B, S et C sont alignés et la droite (BC) est parallèle à la droite de ordonnées donc B et S ont la même abscisse. D'où l'abscisse de S est 1.

   b) F, D et S sont alignés équivaut à $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont colinéaires équivaut à $\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ -1 & y_S - 1 \end{vmatrix} = 0$

   équivaut à $\frac{4}{3}(y_S - 1) + 1 = 0$ équivaut à $\frac{4}{3}y_S - \frac{1}{3} = 0$ équivaut à $y = \frac{1}{4}$

4. On a d'une part : $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'autre part : $\frac{2}{3} \times 0 + 0 \times 1 = 0$.

   Donc les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux, d'où les droites (RS) et (AD) sont perpendiculaires.