I. Fonctions polynômes

1. Définitions

- Une fonction polynôme est une fonction P : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par une expression du type :
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
- Les nombres $a_0,\ldots,a_n$ sont appelés les coefficients de P.
- Si $a_n \neq 0$, n est appelé le degré de P.

2. Opérations sur les degrés

Soit P et Q deux fonctions polynômes non nulles. Alors :
deg (PQ) = deg P + deg Q
et deg (P + Q) $\leqslant$ sup(deg P, deg Q)

Remarque : l'inégalité stricte est possible, les termes de plus haut degré pouvant s'annuler.

3. Egalité de deux fonctions polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes
Théorème 1

P = Q signifie que $\begin{cases} \text{deg P = deg Q et} \\ \text{les coefficients des termes de même degré de P et Q sont égaux} \end{cases}$

Cas particulier : P = 0 signifie que tous les coefficients de P sont nuls.

4. Racine d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme de degré n, $n \geqslant 1$.

Définition :
- Une racine (ou zéro) de P est un nombre a tel que P(a) = 0.
- Déterminer les racines de P, c'est résoudre l'équation P(x) = 0.

Théorème 2 :
a est une racine de P si et seulement s'il existe une fonction polynôme Q telle que pour tout réel x, P(x) = (x - a) Q(x).

Remarque :
- on a alors deg Q = n - 1 ;
- ce théorème permet de réduire le degré d'une équation.

5. Une formule utile

Quels que soient les réels x et a, $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^k x^{n-k-1} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.

II. TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

1. Définitions

- Un trinôme du second degré est un polynôme de la forme :
$P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
- Résoudre l'équation du second degré P(x) = 0, c'est chercher l'ensemble S des racines de P.

2. Méthode générale

Définition : On appelle discriminant de P le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 3 :
- - Si $\Delta < 0$, S = Ø

- Si $\Delta = 0$, $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

- Si $\Delta > 0$, $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

3. Somme et produit des racines

Théorème 4 :

Si le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, admet deux racines x_1 et x_2 alors :

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Remarque : ces formules restent valables si les racines sont confondues.

Théorème 5 :

Les solutions du système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$ sont les couples (u, v) tels que

u et v soient les solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$.

Remarque : quand on connaît une solution (u, v) du système on a entièrement résolu celui-ci, car l'autre solution est (v, u).

4. Factorisation du trinôme

Théorème 6 :

Si le trinôme P(x) admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement confondues), alors pour tout réel x, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

5. Signe du trinôme

Théorème 7 :

- Si $\Delta < 0$, P(x) a le signe de a pour tout x.
- Si $\Delta = 0$, P(x) a le signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, P(x) a le signe de a à l'extérieur des racines et le signe de (- a) entre les racines.

Remarque : un élève de première S doit connaître parfaitement ce résultat, mais peut, au début, faire rapidement un tableau de signes.

6. Second degré et paraboles

De nombreux résultats de ce chapitre se traduisent graphiquement à l'aide de la parabole P d'équation : $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

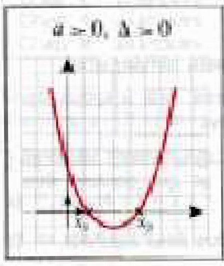

Fig.1

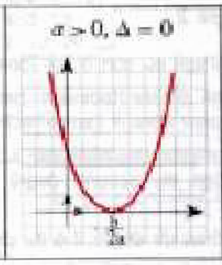

Fig.2

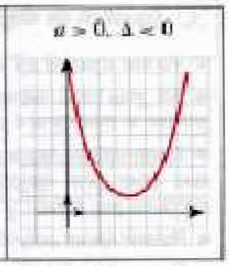

Fig.3

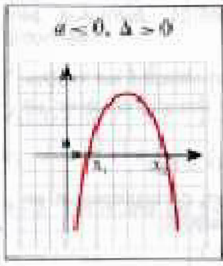

Fig.4

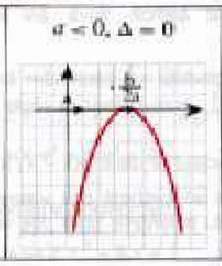

Fig.5

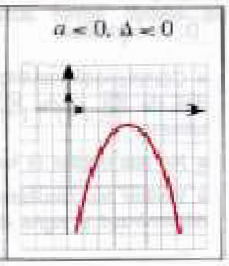

Fig.6