I. EQUATION DU 1ER DEGRE

a. Définition

Exemple :

Inconnue

$$3x + 1 = 7$$

Membre de gauche — Membre de droite

Une équation est une égalité « presque toujours fausse » quand on remplace l'(les) inconnue(s) par n'importe quelle(s) valeur(s).

Résoudre dans les réels une équation, c'est trouver toutes les valeurs réelles de l'inconnue (s'il en existe) qui rendent l'égalité vraie.

Quand il n'y a qu'une seule inconnue (même si elle a plusieurs occurrences) dont la puissance est 1, on a une **équation du 1er degré à une inconnue**.

b. Propriétés des égalités

Propriété : Quand on ajoute/retranche un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une équation **équivalente** (qui a les mêmes solutions).

Exemple :

$3x + 1 = 7$

$3x + 1 \mathbf{- 1} = 7 \mathbf{- 1}$ **[On retranche 1 aux deux membres]**

$3x = 6$

Propriété : Quand on multiplie/divise les deux membres d'une égalité **par un même nombre non nul**, on obtient une équation équivalente.

Exemples :

$3x = 6$

$\frac{3x}{\mathbf{3}} = \frac{6}{\mathbf{3}}$ **[On divise les deux membres par 3 ≠ 0]**

$x = 2$

c. Résolution d'une équation de type $ax + b = 0$

Toute équation du premier degré peut se ramener à une équation du type « $ax + b = 0$ ». Et dans ce cas, on utilise la propriété suivante pour la résoudre :

Soit a et b deux réels (a non nul) : $\boxed{ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}}$

II. SIGNE DE $ax + b$

a. Inéquation du premier degré

a et b sont deux réels donnés.
Résoudre l'inéquation $ax + b \leq 0$, c'est trouver tous les nombres tels que $ax + b$ soit négatif ou nul.

Exemples :

Résoudre $3x - 2 \leq 0$:

$\Leftrightarrow$ $3x - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $3x \leq 2$

$\Leftrightarrow$ $x \leq \frac{2}{3}$

$S =]-\infty \,;\, \frac{2}{3}]$

Résoudre $-4x - 7 < 0$:

$\Leftrightarrow$ $-4x - 7 < 0$

$\Leftrightarrow$ $-4x < 7$

$\Leftrightarrow$ $x > -\frac{7}{4}$ **(division par un nombre négatif)**

$S =]-\frac{7}{4} \,;\, +\infty[$

b. Signe de $ax + b$

Etudier le signe de $ax + b$, c'est trouver pour quelles valeurs de x on a « $ax + b \geq 0$ » et pour quelles valeurs de « $ax + b \leq 0$ ».

Théorème :
Le signe de $ax + b$ est donné par le tableau de signe suivant :

x		$\frac{-b}{a}$	
$ax + b$	Signe de (-a)	0	Signe de a

Exemples :

Signe de $3x - 2$:

x		$\frac{2}{3}$	
$3x - 2$	$-$	0	$+$

Signe de $-4x - 7$:

x		$-\frac{7}{4}$	
$-4x - 7$	$+$	0	$-$

III. FONCTION AFFINE

a. Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

Exemple : La fonction f définie sur les réels par $f(x) = 3x - 2$ est affine.

Remarques :
Si $b = 0$, on dit que la fonction est **linéaire**. Ce n'est qu'un **cas particulier** de fonction affine.
Si $a = 0$, la fonction est du type $f(x) = b$ où b est un réel fixé, elle est donc **constante**.

b. Représentation graphique :

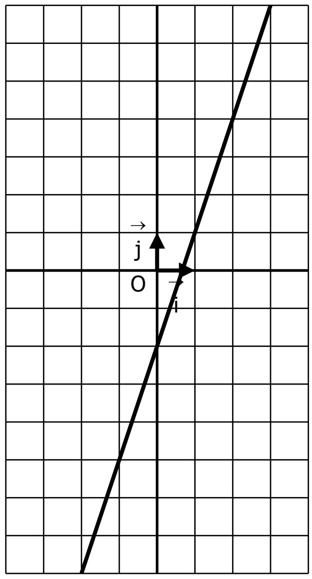
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Et réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Exemple :

La fonction $f(x) = 3x - 2$ admet pour représentation graphique la droite d'équation $y = 3x - 2$.

3 est le **coefficient directeur** de la droite.

-2 est l'**ordonnée à l'origine**.



Remarque :

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut représenter aucune fonction, puisque cela signifierait qu'il existe un nombre qui a une infinité d'images.

c. Taux de variation/d'accroissement d'une fonction affine :

On considère f définie sur les réels par $f(x) = 3x - 2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10

Ce n'est pas un tableau de proportionnalité car le rapport $\frac{f(x)}{x}$ n'est pas constant. La fonction n'est donc pas linéaire. Par contre, si on considère le rapport $\frac{f(u) - f(v)}{u - v}$ pour deux valeurs quelconques u et v, il semble constant. On dit que f est une **fonction à accroissement linéaire**.

Propriété :

Si f est affine, alors l'accroissement de la fonction ($f(u) - f(v)$) est proportionnel à l'accroissement de la variable ($u - v$), c'est-à-dire que pour tous $u \neq v$: $\boxed{\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a}$

d. Sens de variation :

Soit f une fonction affine définie sur les réels par $f(x) = ax + b$

- Si a est **positif**, f est **croissante** sur les réels.
- Si a est **négatif**, f est **décroissante** sur les réels.

e. Caractérisation d'une fonction affine :

Si une fonction f est définie sur les réels a un taux de variation constant égal à a, alors f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ où $b = f(0)$.