Série d'exercice n°1(Calcul dans $\mathbb{R}$)

Exercice n°1 : Questions indépendants

1) Soit $A=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ .calculer A^2 puis déduire la valeur de A.

2) Soit $x\in\mathbb{R}^*$ tel que $x+\frac{1}{x}=2$.monter que $x^2+\frac{1}{x^2}=2$

3) Soit a,b et c trois réels.montrer que $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$

4) Montrer que $\sqrt{2020^2+2021^2-2022^2+2023^2-2024^2+2026^2-2025^2}=2019$

5) Soit $F=(x+1)(x+3)-x(x+2)$ où $x\in\mathbb{R}$

a) Developper puis réduire F

b) Déduire la valeur de $1001\times1003-1002\times10^3$

6) Soit $A=|5-4x|-|5-6x|$ où $|x|\leq1$

a) Ecrire A sans valeur absolue

b) Déduire un encadrement de A.

7) Soit x et y deux réels tel que x+y=1.montrer que $-2(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)=1$

8) Factoriser les expressions suivantes : $A=5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x$;$B=x^3-8-x+2$;$C=9x^2+2(1-3x)(x-2)-1$;$D=x^2+2x-3$;$E=x^3+x^2+4$

9) Soient $x=12^6$, $y=6^8$ et $z=2^{11}.3^7$ .montrer que $x^x.y^y=z^z$

Exercice n°2 :

Soient $a=\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ et $b=\frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

1) Calculer $(\sqrt{5}-3)^2$,puis simplifier a .

2) Ecrire b avec un dénominateur entier .

3) Vérifier que a et b sont deux inverses puis déduire une comparaison entre $\frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

4) Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$

5) Calculer $\frac{(a^5.b^{-7})^{-2}.b^8}{(a^{-4}.b^3)^4.a^{-2}}$

Exercice n°3:

Soient $x=\sqrt{8-3\sqrt{7}}$ et $y=\sqrt{8+3\sqrt{7}}$

1) Montrer que x et y sont deux inverses .

2) On posent a=x+y et b=x-y

a) Calculer $(x+y)^2$ et $(x-y)^2$ *b) Déduire les valeurs de a et b* *c) Simplifier alors x et y .*

Exercice n°4 :

Soit a et b deux réels tels que $-1 \leq a \leq 2$ *et* $-4 \leq b \leq 3$

1) a) Encadrer a^2+1 *et* b^2-1 .

b) Déduire un encadrement de a^2+b^2 , $\frac{-1}{a^2+1}$ *et* $\frac{2}{1-b^2}$

2) a) Ecrire sans valeur absolue $|7a-9|-|13-5b|+|b-a+6|$

b) Résoudre alors A=0 ,puis encadrer A .

Exercice n°5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}$; b) $(x^2-9)=(x-3)(3x+1)$; c) $x^2-4x=5$; d) $|3x-1|=|-2x+1|$

e) $|7-5x|=7-5\sqrt{2}$ *;f)* $x^2+2=-x^2+2\sqrt{2}x$;g) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$ *h)* $-\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}<\frac{4}{3}$ *;i)* $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{3}{2}$ *;j)* $\left|x-\frac{3}{2}\right|\geq\frac{1}{2}$ *;j)* $|\pi-x|\geq\frac{-1}{\pi}$ *;k)* $\sqrt{4x^2+1-8x}>\pi$ *; l)* $\sqrt{x^2-2x+1}<3$ *; m)* $\sqrt{1+x^2}\leq x+1$

n) $\frac{1}{|x-3|-2}<0$ *;o)* $6x^2=x^4+9$ *;p)* $x^3+8-(x+3)(5x-7)=-19$ *; q)* $x^2=2|x|-1$

Exercice n°6 :

Soit x , y et z trois réels strictement positifs

1) a) Montrer que $\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}$

b) Déduire que si x+y=2 alors xy ≤ 1

2) a) Montrer que $\frac{8}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\leq\frac{2}{\sqrt{xy}}$

b) Déduire que $\frac{8}{(\sqrt{3}+2)^2}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$

3) Montrer que : $\frac{2xy}{x^2+y^2}\leq 1$

4) a) Monrer que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{2(x+y)}{x^2+y^2}$

b) Déduire que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{x+y}{x^2+y^2}+\frac{x+z}{x^2+z^2}+\frac{y+z}{y^2+z^2}$

5) a) Montrer que $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

b) Déduire que $(x+y).(x+z).(y+z)\geq x.y.z$

6) a) Montrer que $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leq\frac{x+y+z}{3}$

b) Déduire que $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

Exercice n°7 :

Soit a,b∈ $\mathbb{R}$.montrer que :

- *Si* $0<a<1$ *alors* $a^2<a<\sqrt{a}<\frac{1}{a}$
- *Si* $a>1$ *alors* $\frac{1}{a}<\sqrt{a}<a<\sqrt{a}$
- *Si* $0<a<b$ *alors* $a^2<b^2$
- *Si* $0<a<b$ *alors* $\sqrt{a}<\sqrt{b}$
- *Si* $a<b<0$ *alors* $a^2>b^2$
- *Si a,b* $\in\mathbb{R}_+$ *alors* $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{a+b}$
- *Si a,b* $\in\mathbb{R}_+$ *alors* $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a.b}$
- *Si* $b<1<a$ *alors* $a+b>1+ab$
- $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$
- *Si a,b* $\in\mathbb{R}_+$ *alors* $(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$