Exercice n° 1 : Soit a un entier naturel non nul.

1) Rendre entier le dénominateur de l'expression : $A = \frac{1}{(a+1)\sqrt{a}+a\sqrt{a+1}}$

2) Montrer que $A = \frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{\sqrt{a+1}}{a+1}$

Exercice n° 2 :

Soit a et b deux réels tels que $a - b = 1$. Montrer que $2(a^3 - b^3) - 3(a^2 + b^2) + 1 = 0$

Exercice n° 3 :

n désigne un nombre entier non nul. Ecrire la différence $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ sous la forme d'un seul quotient ; puis, calculer la somme $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{1999\times 2000}$

Exercice n° 4 :

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

En déduire la valeur de $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $2\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{n}$;

En déduire que $\frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{15}} > 2$

Exercice n° 5 : Soit x un réel

1) Montrer que $1 - x^5 = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)$

2) En déduire que $1 + x^5 = (1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)$

3) Calculer alors les réels A, B et C tels que :

$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$; $B = 1 - \pi + \pi^2 - \pi^3 + \pi^4$; $C = 1 + \frac{4}{9} + \frac{16}{81} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27}$

Exercice n° 6 : En considère les deux entiers $A = 17^6 - 1$ et $B = 17^6 + 17^4 - 2$

1) Factoriser A puis en déduire une factorisation de B

2) Montrer alors que A et B sont divisibles par 144

Exercice n° 7 : Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$

1) Montrer que $\frac{a}{b} < \frac{a+b^2}{b+a^2}$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{n-1}{n+1} < \frac{n^2+3n}{n^2-n+2}$

Exercice n° 8 :

Soient x et y deux réels positifs. Montrer que si $2x+4y=1$ alors $x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}$

Exercice n° 9 :

Soit n un entier naturel supérieur où égale à 2.
On pose $A=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$; $B=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

1) Calculer A

2) En déduire la valeur de B

Exercice n° 10 :

Déterminer l'arrondi à six décimales du coté d'un triangle équilatéral qui a même aire qu'un carré de coté 2m.

Exercice n° 11 : Soient a , b et c trois réels

1) Factoriser $A=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

2) On suppose que $a+b+c=0$

a) Montrer que $a^3+b^3+c^3=3abc$

b) En déduire les réels x tels que $(-5x+3)^3+(4x-1)^3+(x-2)^3=0$

Exercice n° 12 :

1) Montrer que pour tout réels x et y : $x^2+y^2 \geq 2xy$

2) En déduire que pour tout réels a, b et c :

a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

b) $3\,(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$

c) $(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(a^2+c^2)b \geq 6\,abc$

Exercice n° 13 :

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que : $a+b=1$. Montrer que pour tout réels x et y ; $(ax+by)^2 \leq ax^2+by^2$

Exercice n° 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

Montrer que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et $\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$; En déduire que $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{999^2} \leq 1$