

Exercice 1 : (5 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux » pour chacune des cinq questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. Si $\vec{AP} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}$ et $\vec{AQ} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ alors $\vec{PQ} = \vec{CB}$.
2. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
3. La forme canonique de $3x^2 - 6x + 2$ est : $3(x-1)^2 + 1$.
4. L'ensemble de solutions de l'inéquation $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$ est vide.
5. L'équation $\sqrt{x-1} = 2 - 2x$ admet une seule racine.

Exercice 2 : (7 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système $\begin{cases} a + b = 7 \\ a \cdot b = -30 \end{cases}$
 b) Déterminer les racines de l'équation : $9x^2 + 5x - 4 = 0$.
 c) En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation $(x^2 - 7x - 30)(9x^2 + 5x - 4) \leq 0$.
2. a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $X^2 + X - 6 = 0$.
 b) En déduire les solutions de chacune des équations $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ et $-6x^2 + x + 1 = 0$.

Exercice 3: (8 points)

ABCD est un carré d'arête 1. On considère les points E et F définis par $\vec{AE} = \vec{BF} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. Les droites (AC)

et (DE) se coupent en R et les droites (DF) et (BC) se coupent en S. On choisit comme repère $\left(\begin{matrix} \vec{A}, \vec{AB}, \vec{AD} \end{matrix} \right)$

. Soit (x, y) les coordonnées de R.

1. Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D, E et F ?
2. a) Montrer que $x = y$.
 b) Vérifier que $\vec{ER} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3} \\ x \end{pmatrix}$.
 c) En appliquant la condition de colinéarité aux vecteurs \vec{ED} et \vec{ER} , déterminer les coordonnées de R.
3. a) Justifier que l'abscisse du point S est égale à 1.
 b) Calculer l'ordonnée du point S en traduisant l'alignement des points F, D et S.
4. Démontrer que les droites (RS) et (AD) sont perpendiculaires.

Corrigé

Exercice 1 :

- 1.
- Vrai**
- ; 2.
- Vrai**
- ; 3.
- Faux**
- ; 4.
- Faux**
- ; 5.
- Vrai**
- .

Exercice 2 :

1. a) Pour résoudre dans
- \mathbb{R}^2
- le système
- $\begin{cases} a+b=7 \\ a.b=-30 \end{cases}$
- , il suffit de résoudre dans
- \mathbb{R}
- l'équation

$$x^2 - 7x - 30 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-30) = 169 = 13^2$.Ses racines sont : $x_1 = \frac{7-13}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{7+13}{2} = 10$.Donc l'ensemble de solutions du système proposé est $\{(-3, 10), (10, -3)\}$.b) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $9x^2 + 5x - 4 = 0$:On pose $a = 9$, $b = 5$ et $c = -4$, on obtient $a - b + c = 0$ donc les racines de cette équation sont -1 et $-\frac{c}{a} = \frac{4}{9}$ d'où l'ensemble de solutions est $\left\{-1, \frac{4}{9}\right\}$.

d) Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$	-3	-1	$\frac{4}{9}$	10	$+\infty$	
$x^2 - 7x - 30$	+	0	-	-	-	0	+
$9x^2 + 5x - 4$	+	+	0	-	0	+	+
Produit	+	0	-	0	+	0	+

Donc l'ensemble de solutions de $(x^2 - 7x - 30)(9x^2 + 5x - 4) \leq 0$ est $[-3, -1] \cup \left[\frac{4}{9}, 10\right]$.

2. a) Résolvons dans
- \mathbb{R}
- l'équation
- $X^2 + X - 6 = 0$
- :

Son discriminant est $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.Ses racines sont : $X_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $X_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$.Donc l'ensemble de solutions est $\{-3, 2\}$.b) On considère l'équation : $x + \sqrt{x} - 6 = 0$:on pose pour tout x positif, $X = \sqrt{x}$, on obtient : $X^2 + X - 6 = 0$.D'où $X = -3$ (à rejeter) ou $X = 2$. Or $X = 2$ équivaut à $x = 4$.Donc $S_1 = \{4\}$.On considère l'équation : $-6x^2 + x + 1 = 0$:Comme 0 n'est pas solution, alors $x \neq 0$. Divisons les deux membres de l'équation précédente par x^2 , nous obtenons : $\frac{-6x^2 + x + 1}{x^2} = 0$ d'où $-6\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$ équivaut $-6 + \left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$.

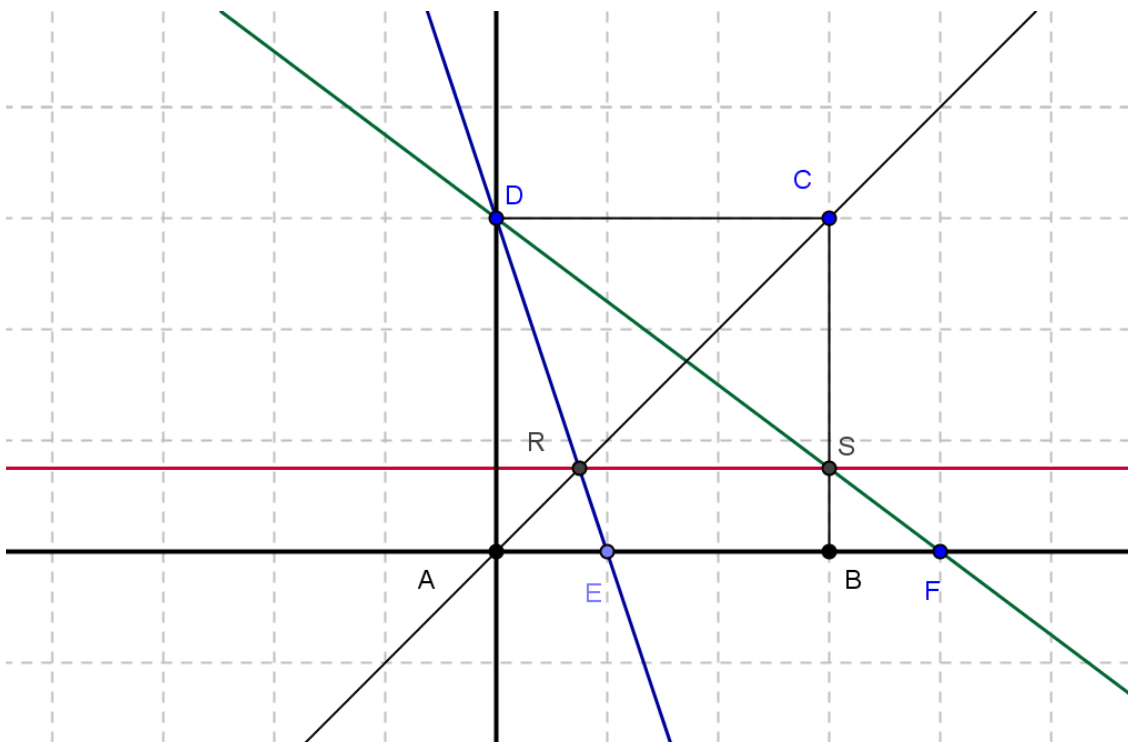
Ou encore $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right) - 6 = 0$.

on pose pour tout x réel non nul, $X = \frac{1}{x}$, on obtient : $X^2 + X - 6 = 0$.

D'où $X = -3$ ou $X = 2$ d'où $\frac{1}{x} = -3$ ou $\frac{1}{x} = 2$ équivaut à $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Donc $S_2 = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 3 :



1. $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$, $E\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ et $F\left(\frac{4}{3}, 0\right)$.

2. a) $R \in (AC)$ équivaut à \vec{AR} et \vec{AC} sont colinéaires équivaut à $\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$

équivaut à $x - y = 0$ équivaut à $x = y$.

b) La première composante du vecteur \vec{ER} est $x_R - x_E = x - \frac{1}{3}$.

La deuxième composante du vecteur \vec{ER} est $y_R - y_E = y - 0 = x$.

Donc $\vec{ER} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3} \\ x \end{pmatrix}$.

$$\text{c) } \vec{ED} \text{ et } \vec{ER} \text{ sont colinéaires équivaut à } \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & x - \frac{1}{3} \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \text{ équivaut à } -\frac{1}{3}x - \left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\text{équivaut à } -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \text{ équivaut à } \frac{4}{3}x = \frac{1}{3} \text{ équivaut à } x = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Donc } R\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

3. a) B, S et C sont alignés et la droite (BC) est parallèle à la droite de ordonnées donc B et S ont la même abscisse. D'où l'abscisse de S est 1.

$$\text{b) F, D et S sont alignés équivaut à } \vec{DF} \text{ et } \vec{DS} \text{ sont colinéaires équivaut à } \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ -1 & y_S - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{équivaut à } \frac{4}{3}(y_S - 1) + 1 = 0 \text{ équivaut à } \frac{4}{3}y_S - \frac{1}{3} = 0 \text{ équivaut à } y = \frac{1}{4}$$

4. On a d'une part : $\vec{RS}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'autre part : $\frac{2}{3} \times 0 + 0 \times 1 = 0$.

Donc les vecteurs \vec{RS} et \vec{AD} sont orthogonaux, d'où les droites (RS) et (AD) sont perpendiculaires.