



Contrôle N°1
MATHEMATIQUES

3^{ème} M₃
12 Novembre 2011
Durée = 2h

Exercice N°1 (3 points) QCM

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Avec justification.

- Si ABCD est un carré de coté $a > 0$ alors $\overline{DC} \cdot \overline{BD} =$
a) $-a^2$ b) $a\sqrt{2}$ c) $-a\sqrt{2}$
- Si \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs colinéaires, de sens contraire, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 1$, alors $(\vec{u} + 3\vec{v})^2 =$
a) 25 b) 13 c) 1
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} =$
a) 6 b) 0 c) 1
- Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$, on a :
a) 0 est un minimum. b) 1 est un maximum. c) f est bornée

Exercice N°2 (7 points)

I). Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x^2 - 2x}$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
b) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.
- Montrer que f est prolongeable par continuité en 2 et donner son prolongement.

II). Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(\sqrt{x-1} + 1)} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{2-x} - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

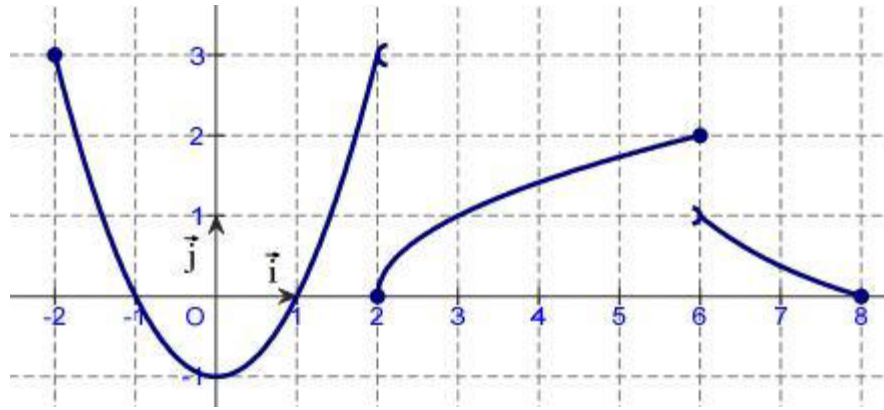
- Justifier la continuité de g en $a = 2$, en $b = 0$, sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
- a) Montrer que g est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.
b) Dédire que g est majorée sur $]1; +\infty[$.
- Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$.
- On admet que g est continue sur $[0, 1]$.
a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0; 1]$.
b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5.
c) Donner le signe de g sur \mathbb{R} .
d) Vérifier que α vérifie l'équation $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 8\alpha - 3 = 0$

T.S.V.P \longrightarrow



Exercice N°3 (4 points)

La courbe (C_f) ci-contre représente une fonction f définie sur $[-2,8]$.



1. En utilisant le graphique :
 - a) Déterminer $f(3)$ et $f(6)$
 - b) Déterminer les intervalles de \mathbb{R} où f est continue.
 - c) Déterminer $f([-2,2[)$, $f([2,6])$ et $f([6,8])$
 - d) Résoudre dans $[-2,8]$: $f(x) = 0$ et $f(x) \geq 0$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Montrer que $\frac{g(x)-1}{f(x)-1} = \frac{-g(x)}{\sqrt{f(x)+1}}$.

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-1}{f(x)-1}$.

Exercice N°4 (6 points)

On considère un triangle ABC tel que $AB = a > 0$, $AC = 2a$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

- 1) Montrer que $BC = a\sqrt{7}$
- 2) Soit G le projeté orthogonal de C sur (AB) .
 - a. Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$. En déduire AG .
 - b. Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,-1)$.
- 3) Déterminer l'ensemble C des points M tels que $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$.
- 4) Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que $2\|2\overline{MA} - \overline{MB}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB}\|$.
- 5) Déterminer l'ensemble D des points M tels que $\overline{MA} \cdot \overline{AB} = -\frac{a^2}{2}$.

