Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 10 /11 / 2014	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (8 pts)

A - Soit h la fonction définie par : $h(x)=\sqrt{x^2-3}-x+1$.

On désigne par C_h sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de h.

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$. Interpréter géométriquement le résultat.

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{h(x)}{x}$.

4) Montrer que la droite $\Delta: y=-2x+1$ est une asymptote de C_h.

B - Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=xE(x)-E(x)$, ($E(x)$ est la partie entière de x).

1) Soit k un entier, déterminer l'expression de $g(x)$ pour $x\in[k\;;\;k+1[$, puis pour $x\in[k-1\;;\;k[$.

2) Déterminer, s'il existe, la valeur de k pour que g soit continue en k.

3) Tracer la représentation graphique de la restriction de g à l'intervalle $[-1\;;\;2[$.

C - Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1} & si\ x\in\,]-\infty\;;-1[\\ xE(x)-E(x) & si\ x\in[-1\;;\;2[\\ \dfrac{\sqrt{x^2-3}-x+1}{x-2} & si\ x\in\,]2\;;+\infty[\\ f(2)=1 & \end{cases}$.

1) Montrer que f est continue en (-1).

2) Etudier la continuité de f en 2.

4) $a/$ Montrer que l'équation : $f(x)=-x$ admet une solution α dans l'intervalle $]-2\;;-1[$.

   $b/$ Montrer que α est solution de l'équation : $x^3+x^2-3x-3=0$.
   En déduire la valeur exacte de α.

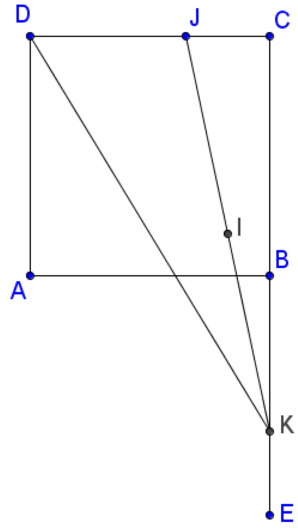
Exercice n°2 : (7 pts)

Soit $ABCD$ un carré tel que $AB=1$. On désigne par E le symétrique de C par rapport à B.

J est un point de $[CD]$, et K est le point de $[BE]$ tels que $DJ=BK=a$, $(0<a<1)$.

1) $a/$ Exprimer en fonction de a les produits scalaires $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{AK}$.

$b/$ En déduire que (AJ) et (AK) sont perpendiculaires.



2) $a/$ Calculer, en fonction de a, les distances KD et KJ.

$b/$ Soit I le milieu de $[JK]$. Montrer que : $DK^2 + DJ^2 = 2DI^2 + \dfrac{KJ^2}{2}$.

$c/$ En déduire que : $DI = \dfrac{(1+a)\sqrt{2}}{2}$.

3) On considère l'ensemble Γ de points M du plan tels que $\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MK} = a$.

Montrer que Γ est le cercle de centre I et passant par D.

4) $a/$ Vérifier que J est le barycentre des point pondérés (C,a) et $(D,1-a)$.

$b/$ Pour tout point M du plan, on pose :

$f(M) = aMC^2 + (1-a)MD^2$ et $g(M) = f(M) - MC^2$, et on désigne par O le milieu de $[DC]$.

Montrer que : $f(M) = MJ^2 + a(1-a)$, et que $g(M) = 2(1-a)\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal de M sur (DC).

5) On considère les ensembles : $\mathscr{C} = \{M \in P \ tel\ que\ f(M) = a\}$ et

$$\Delta = \{M \in P \ tel\ que\ g(M) = 1-a\}.$$

$a/$ Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$.

$b/$ Montrer que Δ est une droite que l'on précisera.

Exercice n°3 : *(5 pts)*

Le plan P orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$, et on désigne par $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. *(Voir feuille annexe)*

1) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$.

2) Déterminer et construire l'ensemble : $\Gamma = \left\{M \in P\ tel\ que\ (\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]\right\}$.

3) $a/$ Construire le point E de Γ tel que le triangle BCE soit isocèle de sommet principal C.

$b/$ Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$.

$c/$ En déduire que les droites (BE) et (AC) sont parallèles.

4) La droite (BE) recoupe $\mathscr{C}$ en F.

Montrer que le quadrilatère $ACEF$ est un parallélogramme.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de contrôle n° 1 *(10 – 11 – 2014)*

Nom et prénom :………………………………………… *Classe : 3 ème Math*