Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date :17 /11 / 2015	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (7 pts)

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2+8x+4}{3x^2-12} & si\ x<-2 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & si\ -2\le x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+2}+mx & si\ x\ge 1 \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est définie sur IR.
2) Etudier la continuité de f en (-2).
3) Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 1.
4) On prend dans la suite $m=\dfrac{-7}{4}$.

   $a/$ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   $b/$ Montrer que la droite Δ d'équation : $y=\dfrac{-3}{4}x+\dfrac{1}{2}$ est une asymptote de C_f.

5) $a/$ Montrer que l'équation : $f(x)=\dfrac{-1}{4}x$ admet une solution α dans l'intervalle $]1\,;\,2[$.

   $b/$ Vérifier que α est solution de l'équation : $5x^2-4x-8=0$.

   En déduire la valeur exacte de α.

Exercice n°2 : (4 pts)

Soit $ABCD$ un losange de centre O tel que le triangle ABC est équilatéral, et G est le point défini par $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BO}$. On pose $AB=a$.

1) Montrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=MB^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BD}+\dfrac{a^2}{2}$.
2) On considère les ensembles :

$$E_1=\left\{M\in P\ tq\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\frac{a^2}{2}\right\} \text{ et } E_2=\left\{M\in P\ tq\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=MB^2\right\}.$$

$a/$ Déterminer l'ensemble E_1.

$b/$ Montrer que E_2 est la droite perpendiculaire à (BD) en G.

Exercice n°3 : *(4 pts)*

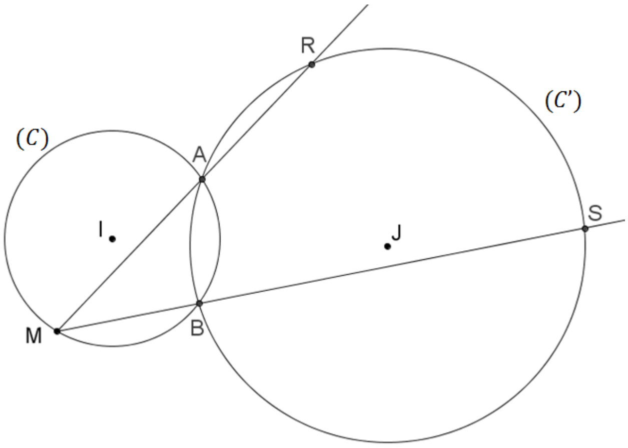
Partie A : Questions préliminaires :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. M est un point du plan n'appartenant pas à $\mathscr{C}$. Une droite passant par M coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B, soit A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$.

1) Montrer que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$.
2) En déduire que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.

Partie B

Le plan est orienté dans le sens direct.

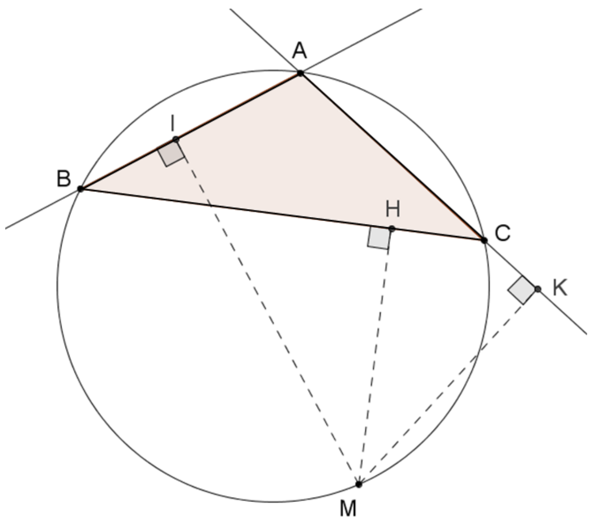


Soient (C) et (C') deux cercles de centres respectifs I et J et sécants en A et B.
M est un point de (C) distinct de A et B situé à l'extérieur de (C').
Les droites (MA) et (MB) recoupent (C') respectivement en R et S. ***(voir figure).***

1) Montrer que : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MR}$, et que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MS}$. (on pourra introduire le point N symétrique de M par rapport à I).
2) En déduire, en utilisant le résultat de la ***partie A***, que les droites (MI) et (RS) sont perpendiculaires.

Exercice n°4 : *(5 pts)*

Le plan est orienté dans le sens direct.



Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle de sommet principale A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit.

1) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
2) Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de A, B et C.

Soient I, H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB), (BC) et (AC).

$a/$ Montrer que les points H, K, C et M appartiennent à un même cercle Γ que l'on précisera.

$b/$ Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{KH}, \overrightarrow{KM}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}\right)\,[2\pi]$.

$c/$ Après avoir démontré que les points K, I, A et M sont sur un même cercle Γ', montrer que
$$2\left(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KI}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}}\right)\,[2\pi].$$

$d/$ En déduire que les points I, H et K sont alignés.

Bonne chance