

L'épreuve comporte deux pages.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Le barème est approximatif.

Exercice 1 (4,25 points)

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$

- 1) Donner l'ensemble de définition de f noté D_f .
- 2) Étudier la parité de f sur D_f .
- 3) Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.
 - a- Montrer que $f(b) - f(a)$ a le même signe que $1 - ab$.
 - b- En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; 1]$ et $[1 ; +\infty[$.
 - c- Déterminer alors la valeur maximale de f sur $[0 ; +\infty[$.
 - d- En déduire la valeur minimale de f sur $]-\infty ; 0]$.

Exercice 2 (5,75 points)

1) Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x}$

Montrer que pour tout $x > 1$; $0 < f(x) < \frac{1}{2}$.

2) Majorer et minorer sur \mathbb{R} la fonction $h : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

3)

- a- Étudier les variations sur \mathbb{R} des fonctions : $k : x \mapsto 1 + |x| + 2x^2$ et $g : x \mapsto |x + 2| - 3$
- b- En déduire le minimum sur \mathbb{R} des fonctions k et g .

Exercice 3 (7 points)

I- Soit ABCD un carré de centre I tel que : $AB=5$.

- 1) Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ et $\overline{AB} \cdot \overline{DC}$.
- 2) Soit B' le symétrique par rapport à A.

Calculer $\overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{B'D}$; $\overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{B'C}$ et $\overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{B'I}$.

3) Montrer que : $B'I^2 - BI^2 = \overrightarrow{B'D} \cdot \overrightarrow{B'B}$.

II- Soit $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$.

1) Calculer $\|\vec{u}\|$.

2) On pose $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a- Montrer que si $(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow (3a + 4b = 0)$.

b- Donner un exemple de couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

c- Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\|\vec{v}\| = 1$.

III- Soit $E(-1,1)$; $F(\frac{5}{2}, 8)$; $G(2,0)$; $H(3,13)$.

1) Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GH}$.

2) Montrer que $\overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{EH}$.

3) Calculer $\cos(\widehat{EG;GF})$.

Exercice 4 (3 points)

Soit A et B deux points du plan tel que $AB = 5$.

1) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

2) Déterminer et construire l'ensemble \mathcal{E} des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{39}{4}$.

FIN DE L'ÉPREUVE ./..