Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 07 / 11 / 2016	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : *il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (7 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{2(x+1)} & si\ x<-1 \\ (m-1)x^3+(5-m^2)x+1 & si\ -1\leq x\leq 0 \\ \dfrac{x}{4\left(\sqrt{x+4}-2\right)} & si\ x>0 \end{cases}$; $m\in IR$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que, pour tout $m\in IR$, f est continue en 0.

2) Déterminer les valeurs de m pour que f soit continue en (-1).

Dans la suite de l'exercice, on prend $m=2$.

3) $a/$ Montrer que f est strictement croissante sur $[-1\ ;\ 0]$.

   $b/$ Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet dans $[-1\ ;\ 0]$ une solution unique α.

   $c/$ Donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}5$.

   $d/$ Vérifier que $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha}=-1$.

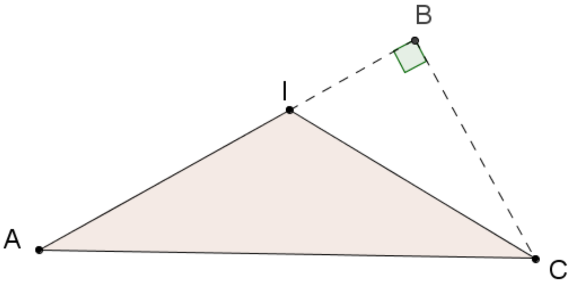
   $e/$ Montrer que, pour tout $x\in[-1\ ;\ 0]$, on a : $f(x)=(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

4) Soit g la fonction définie sur $[-1\ ;\ 0]\setminus\{\alpha\}$ par : $g(x)=\dfrac{x^3+x+1}{x-\alpha}$.

   Montrer que g est prolongeable par continuité en α et déterminer ce prolongement.

Exercice n°2 : (8 pts)

Soit AIC un triangle isocèle en I tel que $IA=a,\ (a>0)$ et $\widehat{AIC}=\dfrac{2\pi}{3}$. B est le projeté orthogonal de C sur (AI).



1) $a/$ Montrer que $AC^2=IA^2+IC^2-2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$.

   $b/$ Calculer alors AC en fonction de a.

   $c/$ Calculer, en fonction de a, les distances BI et BC.

2) Soit D le point tel que $ABCD$ est un rectangle.

$a/$ Montrer que $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CB}=\dfrac{3a^2}{4}$.

$b/$ Montrer que $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CB}$, en déduire que $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD}=\dfrac{3a^2}{4}$.

$c/$ Montrer que les droites (CI) et (BD) sont perpendiculaires.

3) Soit l'ensemble $\Delta=\left\{M\in P \text{ tels que } MA^2-MI^2=2a^2\right\}$.

$a/$ Vérifier que $C\in\Delta$.

$b/$ Soit O le milieu de $[AI]$, montrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2-MI^2=2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AI}.$$

$c/$ Montrer que Δ est une droite que l'on précisera.

4) Soit l'ensemble $\Gamma=\left\{M\in P \text{ tels que } MA^2+2MB^2=\dfrac{9a^2}{2}\right\}$.

$a/$ Vérifier que $C\in\Gamma$.

$b/$ Vérifier que I est le barycentre des points pondérés $(A\,;1)$ et $(B\,;2)$.

$c/$ Montrer que, pour tout point M du plan, on a : $MA^2+2MB^2=3MI^2+\dfrac{3a^2}{2}$.

$d/$ Montrer que Γ est un cercle que l'on précisera.

Exercice n°3 : (5 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct.

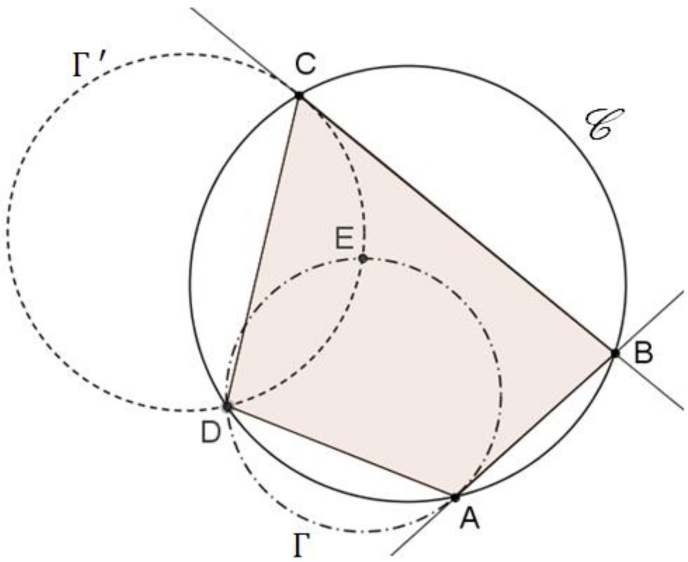
Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$, on désigne par Γ le cercle passant par D et tangent à (AB) en A, et par Γ' le cercle passant par D et tangent à (CB) en C. Γ et Γ' se recoupent en E.

1) Comparer en justifiant $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}})$ puis $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}})$.

2) $a/$ Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}})+(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}})\equiv\pi+(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})\,[2\pi]$.

$b/$ En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CE}})+\pi\,[2\pi]$.

$c/$ En déduire que $E\in[AC]$.



Bonne chance