Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** *Mathématiques*	*Niveau : 3 ème Math*
Date : 06 / 11 / 2018	*Prof : MEDDEB Tarek*	*Durée : 2 heures*

Exercice n°1 : (5 pts)

1) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=\sqrt{1+x^2}+2x$. On désigne par $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$a/$ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$b/$ Montrer que la droite d'équation : $y=3x$ est une asymptote de $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $+\infty$.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in\left]-\infty\,;0\right[$, $g(x)=x\left(2-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right)$.

$b/$ Calculer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-x\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

3) Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x-8} & si\ x\in\left]-\infty\,;0\right]\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-\left(\frac{1}{2}x+1\right)}{x^2} & si\ x\in\left]0\,;+\infty\right[\end{cases}$.

Montrer que f est continue en 0.

Exercice n°2 : (3 pts)

On donne le tableau de variations de la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x^3-x^2-x-1$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $-\frac{22}{27}$	↘ -2	↗ $+\infty$

1) Déterminer : $f\left(\left[-\dfrac{1}{3}\,,1\right]\right)$ et $f\left(\left]-\infty\,;1\right]\right)$.

2) $a/$ Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in[1\,;2]$ tel que $f(\alpha)=0$.

$b/$ Vérifier que : $\dfrac{1}{\alpha}=\alpha^2-\alpha-1$.

$c/$ Montrer que, pour tout $x\in IR$, on a :

$$f(x)=(x-\alpha)\left(x^2+(\alpha-1)x+\frac{1}{\alpha}\right).$$

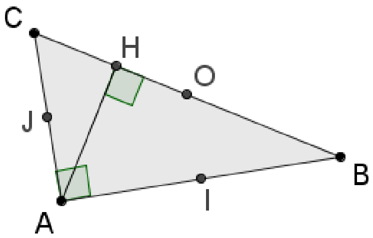
3) Soit h la fonction définie sur $IR\setminus\{\alpha\}$ par : $h(x)=\dfrac{x^3-x^2-x-1}{x-\alpha}$.

Montrer que h est prolongeable par continuité en α et déterminer ce prolongement.

Exercice n°3 : *(3 pts)*

Soit ABC un triangle rectangle en A, H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

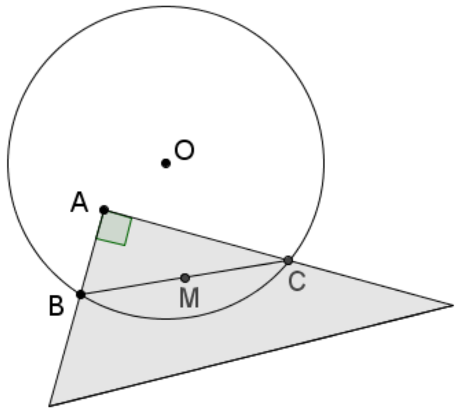
I, J et O sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.



1) Montrer que : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = AH^2$.
2) Montrer que : $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HJ} = HA^2 - \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AJ}$.
3) En déduire que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

Exercice n°4 : *(4 pts)*

Soit Γ un cercle de centre O er de rayon R. A est un point à l'intérieur de Γ. On fait tourner une équerre autour de A et on note B et C les points d'intersection des cotés de l'équerre avec Γ et soit M le milieu de $[BC]$. *(voir figure)*.



1) $a/$ Montrer que $MB^2 + MO^2 = R^2$.

   $b/$ En déduire que $MA^2 + MO^2 = R^2$.
2) Soit I le milieu de $[AO]$.

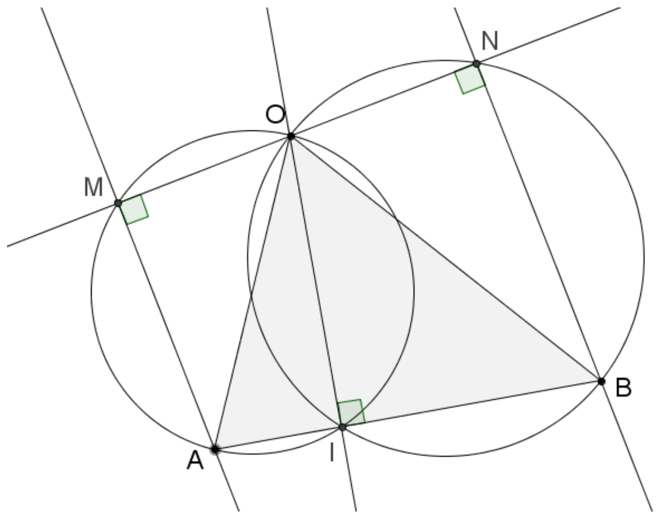
   $a/$ Montrer que $MA^2 + MO^2 = 2MI^2 + \dfrac{OA^2}{2}$.

   $b/$ En déduire que M varie sur un cercle que l'on précisera lorsque l'équerre pivote autour de A.

Exercice n°5 : *(5 pts)*

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit OAB un triangle quelconque et soit I le pied de la hauteur issus de O, (C_1) et (C_2) sont les cercles des diamètres respectifs $[OA]$ et $[OB]$. Une droite Δ passant par O recoupe (C_1) en M et (C_2) en N.



1) Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IN}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right)\ [2\pi]$.
2) Soit K le projeté orthogonal de B sur (OA).

   $a/$ Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NK}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right)\ [2\pi]$.

   $b/$ Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IK}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right)\ [2\pi]$.
3) On désigne par R le point d'intersection de (NK) et (AM).

   $a/$ Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{RA};\overrightarrow{RK}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NK}}\right)\ [2\pi]$.

   $b/$ En déduire que R appartient au cercle (C_3) circonscrit au triangle AIK.

   $c/$ En écrivant $2\left(\widehat{\overrightarrow{IR};\overrightarrow{IN}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{IR};\overrightarrow{IA}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IN}}\right)\ [2\pi]$, montrer que les droites (IR) et (IN) sont perpendiculaires.