

Exercice n°1 : (5 pts)

1) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \sqrt{1+x^2} + 2x$. On désigne par \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b/ Montrer que la droite d'équation : $y = 3x$ est une asymptote de \mathcal{C}_g au voisinage de $+\infty$.

2) a/ Montrer que, pour tout $x \in]-\infty ; 0[$, $g(x) = x \left(2 - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right)$.

b/ Calculer alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - x)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x-8} & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\\ \frac{\sqrt{x+1} - \left(\frac{1}{2}x+1\right)}{x^2} & \text{si } x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$.

Montrer que f est continue en 0.

Exercice n°2 : (3 pts)

On donne le tableau de variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+\infty$

1) Déterminer : $f\left(\left[-\frac{1}{3}, 1\right]\right)$ et $f(]-\infty ; 1])$.

2) a/ Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [1 ; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b/ Vérifier que : $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - \alpha - 1$.

c/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = (x - \alpha) \left(x^2 + (\alpha - 1)x + \frac{1}{\alpha} \right).$$

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ par : $h(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x - \alpha}$.

Montrer que h est prolongeable par continuité en α et déterminer ce prolongement.

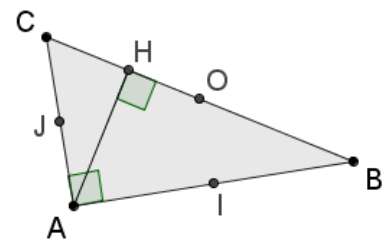


Exercice n°3 : (3 pts)

Soit ABC un triangle rectangle en A , H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

I, J et O sont les milieux respectifs de $[AB], [AC]$ et $[BC]$.

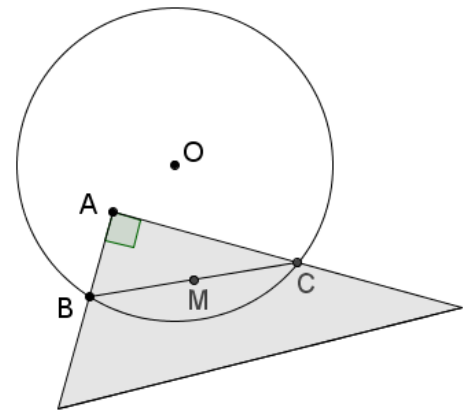
- 1) Montrer que : $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = AH^2$.
- 2) Montrer que : $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = HA^2 - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
- 3) En déduire que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.



Exercice n°4 : (4 pts)

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R . A est un point à l'intérieur de Γ . On fait tourner une équerre autour de A et on note B et C les points d'intersection des cotés de l'équerre avec Γ et soit M le milieu de $[BC]$. (voir figure).

- 1) a/ Montrer que $MB^2 + MO^2 = R^2$.
b/ En déduire que $MA^2 + MO^2 = R^2$.
- 2) Soit I le milieu de $[AO]$.
a/ Montrer que $MA^2 + MO^2 = 2MI^2 + \frac{OA^2}{2}$.
b/ En déduire que M varie sur un cercle que l'on précisera lorsque l'équerre pivote autour de A .



Exercice n°5 : (5 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit OAB un triangle quelconque et soit I le pied de la hauteur issu de O , (C_1) et (C_2) sont les cercles des diamètres respectifs $[OA]$ et $[OB]$. Une droite Δ passant par O recoupe (C_1) en M et (C_2) en N .

- 1) Montrer que $2(\widehat{IM; IN}) \equiv 2(\widehat{OB; OA}) [2\pi]$.
- 2) Soit K le projeté orthogonal de B sur (OA) .
a/ Montrer que $2(\widehat{NB; NK}) \equiv 2(\widehat{OB; OA}) [2\pi]$.
b/ Montrer que $2(\widehat{IA; IK}) \equiv 2(\widehat{OB; OA}) [2\pi]$.
- 3) On désigne par R le point d'intersection de (NK) et (AM) .
a/ Montrer que $2(\widehat{RA; RK}) \equiv 2(\widehat{NB; NK}) [2\pi]$.
b/ En déduire que R appartient au cercle (C_3) circonscrit au triangle AIK .
c/ En écrivant $2(\widehat{IR; IN}) \equiv 2(\widehat{IR; IA}) + 2(\widehat{IA; IN}) [2\pi]$, montrer que les droites (IR) et (IN) sont perpendiculaires.

