Mathématiques	*Devoir de Contrôle N° 3 :*	
$3^{ème}$ *Maths : M2* Date : le 02 / 05 / 2010	Durée : 2heures Coefficient : 4	*Enseignant : Ghadhab Lassad*

Exercice N°1 : 1,5 *points*

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit le nombre complexe : $z=2+i(6-6i)$

a) $|z|=10$ b) $\bar{z}=2-i(6-6i)$ c) $z\bar{z}=-100$.

2) L'image dans le plan complexe du nombre $z=(1+i)^{2010}$ appartient à :

a) l'axe des réels. b) l'axe des imaginaires purs c) la droite d'équation $y=x$.

3) Soit le nombre complexe $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$, on donne $Z=\left[4,\dfrac{\pi}{12}\right]$ et $z_1=\left[2,\dfrac{\pi}{3}\right]$ alors :

a) $z_2=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5\pi}{12}\right]$. b) $z_2=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{4}\right]$ c) $z_2=\left[2,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Exercice N° 2: 3 *points*

Un sac contient 9 boules : 4 rouges numérotées : -2 ; 2 ; 2 ; 2 .

5 noires numérotées : -2 ; 0 ; 0 ; 0 ; 2 .

1) On tirer **simultanément** **<u>deux</u>** boules du sac.

On considère les évènements suivants :

A : « les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « le produit de deux numéros obtenus est égal à 4 »

Calculer $card(A)$, $card(B)$ et $card(A\cup B)$

2) On tire maintenant **successivement et sans remise** **<u>trois</u>** boules du sac

On considère les évènements suivants :

C : « la somme de trois numéros obtenus est égale à 0 »

D : « une boule numérotée 0 apparaitre pour la première fois au $2^{ème}$ tirage »

Calculer $card(C)$ et $card(D)$

Exercice N° 3: 6,5 *points*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=(1+i)z+2$.

1) Soit A le point d'affixe $z_A=-2+2i$.
Déterminer les affixes des points A' et B vérifiant respectivement : $A'=f(A)$ et $f(B)=A$.
(on donnera les résultats sous forme algébrique).

2) a – Montrer qu'il existe un unique point invariant I par f dont l'affixe est $2i$.

b – Etablir que, pour tout nombre complexe z distinct de z_I, $\dfrac{z'-z}{z_I-z}=-i$.

c – Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{z'-z}{z_I-z}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MM'}}\right)[2\pi]$.

d – Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{z'-z}{z_I-z}\right|$.

e – Soit M un point distinct de I.
Comparer MM' et MI et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MM'}\right)$

f – Soit E le point d'affixe $z_E=-\sqrt{3}-i$.

- Ecrire z_E sous forme trigonométrique.
- Placer les points A, B, I, A' et E sur la même figure (page 4 annexe).
- Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

3) a – Déterminer l'ensemble $\Gamma=\{M\in P/\ |z+2-2i|=\sqrt{2}\}$.
Vérifier que B est un point de Γ.

b – Démontrer que, pour tout nombre complexe z : $z'+2=(1+i)(z+2-2i)$.

c – En déduire que si M est sur un cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, M' est sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice N° 4: 5 *points*

I – On considère le système suivant $S:\begin{cases}a^2+b^2=4625\\ a\vee b=440\end{cases}$

1) Déterminer D_{4625} et D_{440} .
2) Soit $d=a\wedge b$
   a – Montrer que $d=1$ ou $d=5$.
   b – Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, le système S.

II – Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) a – Montrer par récurrence sur n, que $3^{2n}-1$ est divisible par 8 .

   b – En déduire que $3^{2n+1}-3$ est divisible par 8.

   c – Déterminer alors les restes de la division par 8 des nombres 3^{2n} et 3^{2n+1}.

   d – Déterminer les restes de la division par 8 des nombres 3^{2011} et $5\times 3^{2000}+2$.

2) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par :

$$A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$$

   a – Si $p = 2n$, quel est le reste de la division de A_p par 8.

   b – Démontrer que, si $p = 2n+1$, A_p est divisible par 8.

Exercice N° 5: *4 points*

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2Cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$

et $g(x) = 2Cos^2 x + 2\sqrt{3}Sinx.Cosx$

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentatives respectives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que la droite Δ d'équation : $x = \dfrac{2\pi}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

2) a – Déduire que l'on peut étudier f sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

   b – Dresser le tableau de variation de f sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

   c – Construire la courbe (C') de restriction de f à l'intervalle $\left[-\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right]$. (page 4 annexe)

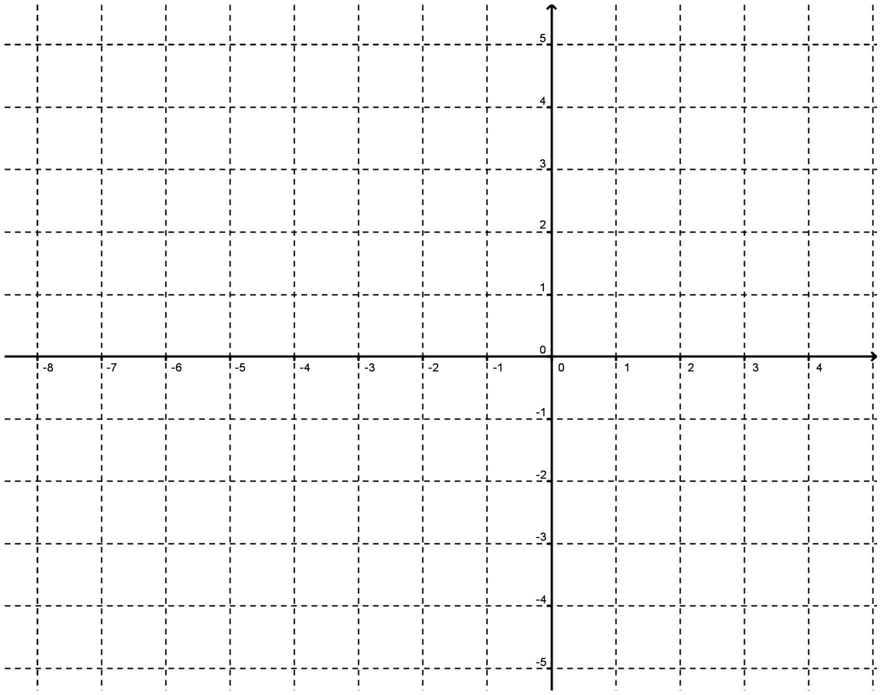
3) a – Montrer qu'il existe un réel k tel que pour tout réel x, $g(x) = f(x) + k$

   b – Construire, à partir de (C'), la courbe (Γ') de la restriction de g à l'intervalle $\left[-\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right]$.

Annexe

Nom : ………………………………….. Prénom :…………………………………………

Exercice N° 3:



Exercice N° 5: