Lycée Thelepte *A.S :2009-2010*	***Devoir de contrôle n°3*** *Epreuve : Mathématiques* *Durée : 3 heures*	*Section : 3ème math* *Enseg : H.Salem*

Exercice1 : (3points)

Donner la réponse correcte.

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} =$: ***a)*** 0 ; ***b)*** 1 ; ***c)*** 2

2) 703 *est un nombre :* ***a)*** *composé* ; ***b)*** *premier*

3) *Soit n un entier naturel alors le nombre $n + 2$ est premier avec :*

a) $2n + n^2$; ***b)*** $n + 3$; ***c)*** $2n + 4$

Exercice2: (5points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = cos^2x - cosx$

1) ***a)*** *Vérifier que f est périodique de période 2π*

b) *Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$.*

c) *Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.*

2) ***a)*** *Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.*

b) *Tracer (C_f) courbe représentative de la restriction de f sur $[-\pi, \pi]$.*

3) *Soit g la fonction définie par $g(x) = sin^2x - sinx$*

En utilisant la courbe de f, tracer la courbe de g (expliquer).

Exercice3: (4points)

Soit n un entier naturel

1) ***a)*** *Vérifier que $(n - 1)(1 + n + n^2 + n^3) = n^4 - 1$*

b) *En déduire que $2^{12} - 1$ est divisible par 7.*

2) ***a)*** *Montrer que pour tout entier naturel non nul n ; $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.*

b) *En déduire $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont divisibles par 7.*

c) *Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 des nombres suivants.*

2^{3000}; 2^{4015}; 2^{10250}

Exercice4: ***(3points)***

On lance un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Soient les deux événements suivants :

A : « Obtenir un multiple de 3 » ; B : « Obtenir un nombre supérieure ou égale à 3 »

Soit p_i est la probabilité d'apparition de la face i

On suppose que $p_3 = 3p_6$, $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = a$ *et* $p(A) = b$.

1) *Déterminer a et b sachant que* $p(B) = \frac{3}{4}$.

2) *En déduire la probabilité d'avoir un nombre impair.*

Exercice5: (5points)

Une urne contient **5** *boules blanches et* **4** *rouges indiscernables au toucher.*

I) *On tire au hasard et successivement* **3** *boules de l'urne en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :*

A « Obtenir exactement deux boules blanches »

B « Obtenir trois boules de même couleur »

D « Obtenir au moins une boule rouge »

II) *L'épreuve consiste maintenant à effectuer* $\boldsymbol{n}$ *tirages successifs en remettant la boule tirée dans l'urne si elle est rouge, on le remettant pas si elle est blanche.*

1) *Dans cette question on prend* $\boldsymbol{n} = 3$.

Soit E_k *l'événement" seule la k ème boule tirée est blanche"*

a) *Montrer que* $p(E_1) = \frac{5}{36}$ *et calculer* $p(E_2)$ *et* $p(E_3)$.

b) *Qu'elle est la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.*

2) *Déterminer en fonction de n, la probabilité* $\boldsymbol{p_n}$ *de tirer au moins une boule blanche en* $\boldsymbol{n}$ *tirages.*

BON TRAVAIL

Correction

Exercice1

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$ *est la dérivée de la fonction* $x :\to \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ en $\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{6}} = 2\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

2) *703 est un nombre composé car* $703 = 19 \times 37$.
3) *Si n est un entier naturel alors le nombre* $n+2$ *est premier avec n+3.*

Exercice2

1) **a)** $\forall\, x \in IR ; x+2\pi \in IR$ *et* $f(x+2\pi) = \cos^2(x+2\pi) - \cos(x+2\pi) = \cos^2 x - \cos x = f(x)$.

b) *f est paire, en effet ;* $\forall\, x \in IR ; -x \in IR$ *et* $f(-x) = \cos^2(-x) - \cos(-x) = \cos^2 x - \cos x = f(x)$*, et comme f est périodique de période* 2π *donc il suffit d'étudier f sur* $[0, \pi]$.

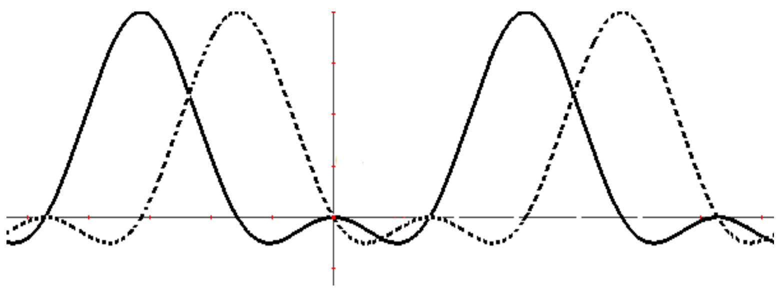
c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ *ou* $\cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ *ou* $x = \pi \Leftrightarrow S_{[0,\pi]} = \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

2) **a)** *f est dérivable sur IR et* $\forall x \in IR ; f'(x) = -2\sin x\cos x + \sin x = \sin x(1-2\cos x)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ *ou* $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = \pi$ *ou* $x = \frac{\pi}{3}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin x$		+		+	
$2\cos x - 1$		--	0	+	
$f'(x)$		--	0	+	
f		↘	$-\frac{1}{4}$	↗	



c) *On a :* $\forall\, x \in IR ; \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

et, donc $g(x) = \cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Ainsi la courbe représentative de g est déduite à partir de celle de f par une translation du vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Exercice3

1) **a)** $(n-1)(1+n+n^2+n^3) = \cancel{n}+\cancel{n^2}+\cancel{n^3}+n^4-1-\cancel{n}-\cancel{n^2}-\cancel{n^3} = n^4-1$.

b) *On prend* $n = 2^3$*, on obtient :*

$(2^3-1)(1+2+2^2+2^3) = (2^3)^4 - 1 \Leftrightarrow 7\times(1+2+2^2+2^3) = 2^{12}-1$.

D'où $2^{12}-1$ *est divisible par 7.*

2) ***a)*** *Montrons par récurrence que* $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $2^{3n}-1$ *est divisible par 7.*

Pour n =1 : $2^{3\times 1}-1=7$*: Divisible par 7.*

Supposons que $2^{3n}-1$ *est divisible par 7 et montrons que* $2^{3(n+1)}-1$ *est divisible par 7.*

$$2^{3(n+1)}-1=2^{3n}+2^{3}-1=2^{3n}\times 8-1=2^{3n}(7+1)-1=\underbrace{7\times 2^{3n}}_{\text{divisible par 7}}+\underbrace{2^{3n}-1}_{\text{divisible par 7}}$$

b) $2^{3n+1}-2=2^{3n}\times 2-2=2(2^{3n}-1)$ *qui est divisible par 7.*

$2^{3n+2}-4=2^{3n}\times 4-4=4(2^{3n}-1)$ *qui est divisible par 7.*

c) $2^{3000}=2^{3\times 1000}=(\underbrace{2^{3\times 1000}-1}_{\text{Divisible par 7}})+1$ *d'où le reste de la division euclidienne de* 2^{3000} *par 7 est 1.*

$$2^{4015}=2^{4014+1}=2^{3\times 1338+1}-2+2=(\underbrace{2^{3\times 1338+1}-2}_{\text{Divisible par 7}})+2\,.$$

d'où le reste de la division euclidienne de 2^{3000} *par 7 est 2.*

$$2^{10250}=2^{3\times 3416+2}-4+4=(\underbrace{2^{3\times 3416+2}-4}_{\text{Divisible par 7}})+4$$

d'où le reste de la division euclidienne de 2^{3000} *par 7 est 4.*

Exercice4

1) *On a* :

$\sum_{i=1}^{6} p_i=1 \Rightarrow p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1 \Rightarrow a+3p_6+a+a+a+p_6=1 \Rightarrow\ 4a+4p_6$ **(1)**

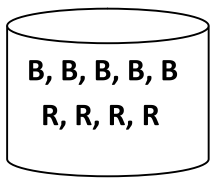
$p(A)=b \Rightarrow p_3+p_6=b$ or $p_3=3p_6 \Rightarrow\ 4p_6=b$ donc **(1)** $\Rightarrow 4a+b=1$ **(2)**

$p(B)=1-\frac{3}{4} \Rightarrow p_1+p_2=\frac{1}{4} \Rightarrow 2a=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{8}$ donc **(2)** $\Rightarrow\ b=1-4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

D'où $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{1}{2}$ et $p_6=\frac{1}{8}$

2) soit q la probabilité d'obtenir un nombre impaire. On $q=p_1+p_3+p_5=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

Exercice5



I) $\bullet\ p(A)=\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\times \underbrace{C_3^2}_{\text{rang des deux boules blanches}}=\frac{300}{729}$

$\bullet$ **(** *B « 3 B ou 3R »* **)** $p(B)=\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{189}{729}$

● *Soit l'événement* $\overline{D}$ *« n'obtenir aucune boule rouge »*

On a $p(\overline{D}) = \frac{5^3}{9^3} = \frac{125}{729} \Rightarrow p(D) = 1 - \frac{125}{729} = \frac{604}{729}$.

II) **1) a)** $\boldsymbol{E_1}$ *« seule la première boule est blanche ».* $p(E_1) = p(BRR) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{36}$

$\boldsymbol{E_2}$ *« seule la 2ème boule est blanche.* $p(E_2) = p(RBR) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{10}{81}$

$\boldsymbol{E_3}$ *« seule la 3ème boule est blanche.* $p(E_3) = p(RRB) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{80}{729}$

b) *La probabilité d'obtenir une seule boule blanche est* $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

Or les évènements E_1, E_2 *et* E_3 *sont incompatibles,*

donc $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{5}{9\times4} + \frac{5\times2}{9^2} + \frac{4^2\times5}{9^3}$

$= \frac{5\times9^2}{9^3\times4} + \frac{5\times2\times4\times9}{9^3\times4} + \frac{4^2\times5\times4}{9^3\times4} = \frac{1085}{2916} \cong 0{,}37$

1) *Soit* q_n *la probabilité de ne tirer aucune boule blanche en n tirage c'est-à-dire toutes les boules tirées sont rouges.*

D'où $q_n = \underbrace{\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \dots \times \frac{4}{9}}_{n\ fois} = \left(\frac{4}{9}\right)^n$ *d'où* $p_n = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Fin