Mathématiques

Devoir de Contrôle N° 3 :

3ème Maths : M3 Date : le 6 / 05 / 2011	Durée : 2heures Coefficient : 4	Enseignant : Ghadhab Lassad

Exercice N°1 : 3 points

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé de sens direct $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit $A(1,1,1)$; $B(2,0,-1)$; $C(-1,2,-1)$ et $E(2,-1,3)$ quatre points de ξ.

1) Montrer que A , B et C définissent un plan P.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ? que peut-on déduire pour le point E ?
3) Soit Δ la droite qui passe par E et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1+m\\0\\3m\end{pmatrix}$

Déterminer la valeur de m pour que Δ soit strictement parallèle à P.

Exercice N° 2: 5 points

Une boite contient six jetons indiscernables au toucher et répartis comme suit :

- 2 jetons **blancs** marqués : $-1,\ 0$
- 4 jetons **noirs** marqués : $-1,-1,1,0$

I – On tire simultanément et au hasard **trois jetons** de la boite.
Lors d'un tirage on note les événements :
A : « Obtenir un seul jeton blanc »
B : « Obtenir un seul jeton marqué -1»
Calculer $card(A)$, $card(B)$, $card(A\cap B)$ et $card(A\cup B)$.

II – On effectue maintenant **quatre tirages successifs** d'un jeton **avec remise**
Dénombrer les tirages dans chacun des cas :

F : « Obtenir une seule fois un jeton blanc»
G : « Obtenir un jeton blanc uniquement au quatrième tirage»
H : « Obtenir quatre jetons dont la somme des numéros est nulle»

Exercice N° 3: 6 *points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On note ζ le cercle de centre O et de rayon 2. Soient A et B deux points d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3}+i$ et $z_B = \overline{z_A}$

1) a – Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes z_A et z_B.
   b – Vérifier que A et B appartiennent au cercle ζ.
   c – Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
   d – En déduire que B est l'image de A par une rotation R que l'on caractérisera.

2) Soient C un point d'affixe $z_C = 1-i$ et D un point d'affixe z_D tel que $R(C)=D$
   a – Déterminer le module et un argument de z_D.
   b – Montrer que $\frac{z_D}{z_C} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$
   c – En déduire le forme algébrique de z_D.
   d – Donner alors les valeurs exactes de $Cos\frac{\pi}{12}$ et $Sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice N° 4: 6 *points*

I – Résoudre dans ℕ², le système $S : \begin{cases} a \times b = 12600 \\ a \vee b = 1260 \end{cases}$

II – Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Pour : $1 \le n \le 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.
2) a – Montrer par récurrence sur n, que $5^{4n}-1$ est divisible par 13
   b – En déduire que : $5^{4n+1}-5$, $5^{4n+2}-12$ et $5^{4n+3}-8$ est divisible par 13.
   c – Déterminer alors le reste de la division par 13 du nombre 5^{2011}.
3) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par : $A_p = 5^{2p}+5^{4p}$
   a – Si $p = 2n$, quel est le reste de la division de A_p par 13.
   b – Démontrer que, si $p = 2n+1$, A_p est divisible par 13.
4) On considère la suite $(U_n)_{n\ge 2}$ définie par : $U_n = 1+5+5^2+5^3+...+5^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 5^i$
   a – Montrer que $U_n = \frac{5^n-1}{4}$
   b – Montrer que si U_n est divisible par 13 alors 5^n-1 est divisible par 13.
   c – Réciproquement, montrer que si 5^n-1 est divisible par 13, alors U_n est divisible par 13.
   Indication : $13U_n - 3\times(4U_n) = U_n$
   d – En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 13.