

EXERCICE N: 1 (4 points)

A) Soit x et y deux réels strictement positifs tels que : $x \geq y$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $x^n \geq y^n$.

B) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur \mathbb{N}^* par : $U_n = n + \frac{1}{n}$ et $V_n = (U_n)^n$.

1) a) Montrer que la suite (U_n) est croissante sur \mathbb{N}^* .

b) En déduire que la suite (V_n) est croissante sur \mathbb{N}^* .

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n \geq 2$.

b) Déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

EXERCICE N: 2 (4.5 points)

I) Une classe est composée de 9 élèves, 5 filles et 4 garçons, on veut former une équipe constituée de 3 joueurs. Les choix des joueurs sont équiprobables .

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « L'équipe obtenue est formée de 3 joueurs de même sexe »

B : « L'équipe obtenue comprend au moins une fille »

C : « L'équipe obtenue comprend au plus un garçons » et $D = B \cup C$.

II) Un élève **E** de cette classe effectue au maximum 5 essais successifs pour marquer un panier ,

Il s'arrête dès qu'il marque le panier . La probabilité de réussir le premier essai est $P_1 = \frac{1}{2}$.

S'il rate un essai, la probabilité de réussir le suivant est de $\frac{2}{5}$.

Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; on considère l'évènement R_k : « Réussir le panier au $k^{\text{ième}}$ essai » et on note : $P_k = P(R_k)$.

1) Justifier que : $P_2 = \frac{1}{5}$.

2) Calculer P_k pour tout $k \in \{3, 4, 5\}$.

3) En déduire la probabilité pour que l'élève **E** n'arrive pas à marquer le panier après les 5 essais .



EXERCICE N: 3 (5 points) (Les parties A, B et C sont indépendantes)

A) 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $(9^n - 1)$ est divisible par 8 .

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $(3^{2n+1} - 3)$ est divisible par 8 .

3) Déterminer alors le reste de la division euclidienne de 3^{2011} et par 8 .

B) Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels, solutions du système $(S) \begin{cases} a+b=144 \\ a \wedge b=12 \end{cases}$

C) 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; les entiers $(n+1)$ et $(n^2 + 3n + 3)$ sont premiers entre eux .

2) En déduire les entiers naturels n tels que $(n+1)$ divise $(n+17)(n^2 + 3n + 3)$.

EXERCICE N: 4 (6.5 points)

Soit ABJ un triangle rectangle et isocèle en A avec $AB = 3$ et $(\overline{AJ}; \overline{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Soit $C = S_J(B)$ et R la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ tel que : $R(C) = B$.

1) Déterminer et construire le point O centre de la rotation R .

2) a) Montrer que $(\overline{BA}; \overline{BO}) \equiv 0 (2\pi)$.

b) Montrer que A est le milieu de $[OB]$.

3) a) Montrer qu'il existe une unique rotation R' telle que $R'(O) = C$ et $R'(B) = O$.

b) Montrer que $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation R' .

c) Déterminer $R' \circ R'(B)$ puis la nature de l'application $R' \circ R'$.

d) Déduire que le point J est le centre de R' .

4) Soit E un point de $[OJ]$ et K un point de $[JC]$ tel que : $OE = CK$.

a) Montrer que $R'((BE)) = (OK)$.

b) En déduire l'orthocentre du triangle OBK .

5) Soit (\mathcal{C}) le cercle de diamètre $[OB]$. Déterminer et construire $(\mathcal{C}') = R'(\mathcal{C})$.

6) Soit Δ une droite passant par J distincte de (BC) et recoupe (\mathcal{C}) en D et (\mathcal{C}') en D' .

Montrer que les droites (OD) et (OD') sont perpendiculaires .