

**Exercice n° 1: (7 points)**

Soit  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 < 2$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$f$  est une fonction définie sur  $]2, +\infty[$  et représentée par la courbe  $(C_f)$  dans l'annexe.

1) On suppose que  $u_0 = \frac{1}{2}$ .

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq u_n \leq 1$ . Etudier la monotonie de  $u$ .

b) Représenter les quatre premiers termes de  $u$  et conjecturer sa limite.

c) On admet que  $f(x) = \frac{a+bx}{ax+b}$  avec  $a$  et  $b$  deux réels. Utiliser le graphique pour déterminer  $a$  et  $b$ .

d) i) Montrer que la suite  $v$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_n = \frac{1+u_n}{1-u_n}$  est géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ .

ii) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$  et déduire sa limite.

iii) Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$  et déduire  $S'_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1-u_k}$ . Déterminer  $n$  pour que  $S_n = \frac{211}{54}$ .

2) Discuter graphiquement suivant les valeurs de  $u_0$ , la monotonie et la convergence de  $u$ .

**Exercice n° 2: (13 points)**

Soit  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 2x - 2} - 1$ . On note  $D_f$  son domaine de définition et  $(C_f)$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Montrer que  $\Delta : x = \frac{1}{4}$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$ . Déduire un domaine d'étude de  $f$ .

2) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b) Montrer que  $\mathcal{D} : y = 2x - \frac{5}{4}$  est une asymptote à  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$ . Construire  $(C_f)$ .

4) Soit la fonction  $g$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} g(x) = |f(x)| & \text{si } x \in D_f \\ g(x) = 1 - \sqrt{2 + 2x - 4x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $(C_g)$  sa courbe dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Montrer que  $\Delta : x = \frac{1}{4}$  est un axe de symétrie de  $(C_g)$  et interpréter graphiquement le résultat.

b) Etudier la dérivabilité de  $g$  à gauche en 1.

c) Dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $[-\frac{1}{2}, 1]$ . Construire  $(C_g)$ .

5) Soit  $h(x) = \frac{x \sin x - x}{(f(\sin x) + 1)^2}$  avec  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .  $(\Gamma)$  est sa courbe dans un repère orthogonal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

a) Déterminer le domaine de définition  $D_h$  de  $h$ . Montrer que  $\forall x \in D_h$  :  $h(x) = \frac{x}{4 \sin x + 2}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $u(x) = 2 \sin x - 2x \cos x + 1$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Déduire que  $u(x) = 0$  admet une solution  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$ . Déduire le signe de  $u(x)$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $h$ . Construire  $(\Gamma)$ .



