

EXERCICE 1 (3pts):

Cocher la réponse exacte :

Soit ABCDEFGH un parallélépipède et $I = A * B$.

1) Le vecteur $\overline{AB} + \overline{GF} + \overline{DH}$ est égal au vecteur : \overline{AG} \overline{DF} \overline{AF}

2) Dans le repère $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ le point H a pour coordonnées :

$(0;1;1)$ $(1;1;1)$ $(1;1;0)$

3) Les vecteurs \overline{HA} ; \overline{HI} et \overline{HF} sont :

Orthogonaux deux à deux coplanaires ni l'un ni l'autre

4) $\det(\overline{IC}, \overline{ID}, \overline{IF}) \neq 0$ $\det(\overline{AH}, \overline{DH}, \overline{BF}) \neq 0$ $\det(\overline{IG}, \overline{AE}, \overline{IC}) \neq 0$

EXERCICE 2 (4pts):

1) Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $A = n^4 - 3n^2 + 1$. Vérifier que $A = (n^2 - n - 1)(n^2 + n - 1)$ puis déterminer n pour que A soit premier.

2) Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que : $7(a - 3) - 4(b - 11) = 0$.

3) Soit le polynôme $P(x) = x^2 + x + 11$.

a) Vérifier que $P(x+1) = P(x) + 2(x+1)$ puis compléter le tableau ci-dessous.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | | | | | | | | | | |

b) Vérifier que tous les $P(x)$ obtenus sont des nombres premiers.

On dit qu'un entier naturel a est chanceux s'il est supérieur ou égal à 2 et si $x^2 + x + a$ est premier pour tout $x \in \{0, 1, 2, \dots, a - 2\}$.

4) Soit a un entier naturel et $P_a(x) = x^2 + x + a$.

a) Montrer que a divise $P_a(a)$ et divise $P_a(a - 1)$.

b) Montrer que si a est chanceux alors a est premier.

c) Déterminer tous les nombres chanceux inférieurs ou égaux à 10 (expliquer).

EXERCICE 3 (4pts):

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x - 1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = 2 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

b) Montrer que f est périodique et préciser une période de f.

c) Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$ puis tracer la courbe C_f de la restriction de f à $[-\pi; 2\pi]$.

2) a) Montrer que le point I d'abscisse $\frac{7\pi}{12}$ est un point d'inflexion de C_f .

b) Donner une équation de la tangente T à C_f au point I.

3) Soit g la fonction définie sur $[-\pi; \pi]$ par : $g(x) = 2 \cos(2|x| + \frac{\pi}{3})$.

a) Montrer que g est paire puis tracer C_g à partir de C_f dans le même repère (expliquer).



b) Résoudre graphiquement dans $[-\pi; \pi]$, l'inéquation $g(x) \geq 1$.

EXERCICE 4 (4pts):

Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}U_n^2}$.

1) Montrer que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq U_n \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) Montrer que la suite U est croissante.

3) Soit V la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = U_n^2 - \frac{4}{3}$.

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n$.

c) Soit $S_n = \sum_{k=0}^n U_k^2$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer sa limite.

4) Soit T la suite définie sur \mathbb{N} par : $T_0 = 1$ et $T_{n+1} = \frac{1}{4}T_n + V_n$. On pose $H_n = 4^n T_n$.

a) Montrer que H est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{16}{3}$.

b) Exprimer H_n puis T_n en fonction de n .

EXERCICE 5 (5pts):

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 2}$.

b) En déduire que la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe ζ_f au $v(\pm\infty)$.

c) Etudier les variations de f puis tracer ζ_f .

d) Montrer que le point $\Omega(2; 3)$ est un centre de symétrie de ζ_f .

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x^2 - 7x + 14}{2 - x}$. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ .

a) Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son image par S_Δ . Montrer que $x' = 4 - x$ et $y' = y$.

b) Montrer que la courbe ζ_g de g est l'image de ζ_f par S_Δ . Tracer alors ζ_g dans le même repère.

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = 1 + \sin^2(x) + \frac{4}{\sin^2(x) - 2}$.

a) Déterminer le domaine de définition D_h de h et vérifier qu'elle est périodique de période π .

b) Montrer que pour tout $x \in D_h$ on a : $h'(x) = \sin(2x)f'(\sin^2(x))$.

c) Etudier les variations de h sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis tracer la courbe ζ' de la restriction de h à $[-\pi; \pi]$ dans un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

d) Déterminer suivant le paramètre réel m le nombre de solution dans $[-\pi; \pi]$ de l'équation $h(x) = m$.



BON TRAVAIL