

*Devoir de contrôle N° 3*

A . S : 2011-2012

05-05-2012

Durée : 2h

Classe : 3M

**Exercice N° 1:(5points) ( les questions 1, 2 , 3 et 4 sont indépendants)**

1) Montrer, par récurrence , que pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n - 1$  est divisible par 3

2) Déterminer les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $35(a+10) = 27(b+13)$

3) Déterminer l'ensemble de tous les couples  $(a ; b)$  d'entiers naturels solutions du système :

$$\begin{cases} a \cdot b = 1800 \\ a \wedge b = 15 \end{cases}$$

4) Soit  $a = n^2 + 3n + 2$  et  $b = 2n + 3$

a) vérifier que  $2a = (n+1)(2n+3) + n+1$

b) Montrer que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux pour tout entiers naturel  $n$

c) Montrer que pour tout entiers naturel  $n$  on a

$$(2n+3) \wedge (3n+12) = (2n+3) \wedge 15$$

d) En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  vérifiant :

$$(2n+3)n \text{ divise } (3n+12)(n^2 + 3n + 2)$$

0,75

0,75

0,75

0,5

0,75

0,75

0,75

**Exercice N°2 :(5points)**

1) Montrer que  $n(n+1)(2n+1)$  est divisible par 6 pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que si  $n$  est un entier naturel impair alors  $n^2$  est impair

3) Une urne contient 1 boule portant le n°1 ;  $2^2$  boule portant le n°2 ;  $3^2$  boule portant le n°3 ..... et  $n^2$  boule portant le n°  $n$  où  $n \in \mathbb{N}$  . On tire une boule de l'urne et on suppose que tout les tirages sont équiprobables

1

0,5



a) Montrer, par récurrence, que le nombre de boules dans l'urne est égal à  $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  pour tout  $n \geq 1$ .

0,75

b) On suppose que  $n$  est pair. Calculer, en fonction de  $n$ , la probabilité des événements suivants :

2

A : « Obtenir une boule portant un numéro pair »

B : « Obtenir une boule portant un numéro impair »

c) On suppose dans toute la suite que le nombre total des boules est 91. Calculer la probabilité d'obtenir un numéro supérieur ou égal à 5

0,75

### **Exercice N°3 : (5 points)**

Une urne contient 4 boules blanches numérotées 1 ; 1 (-1) ; 4 et deux boules rouges numérotées (-1) ; 4 indiscernables au toucher .

1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne

Calculer la probabilité des événements suivants

A : « tirer deux boules de même couleur »

B : « tirer deux boules dont la somme des numéros inscrits est nulle »

C : « tirer deux boules de même couleur ou dont la somme des numéros inscrits est nulle »

1

1

1

2) On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne, on note par  $a$  le numéro de la première boule tirée et par  $b$  le numéro de la deuxième boule tirée puis on forme l'équation du second degré (E) :  $ax^2 + 2x + b = 0$

Calculer la probabilité des événements suivants :

H : « (E) admet une racine double »

K : « l'ensemble des solutions de (E) est  $\{1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}\}$  »

1

1



### Exercice N° 4 : (5points)

On donne la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a\sin(2x) + b(1 - \cos(2x))$  où  $a, b \in \mathbb{R}$

1) Déterminer  $a$  et  $b$  sachant que  $f$  admet un extrémum au point  $x_0 = \frac{\pi}{6}$   
et  $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3$

2) Montrer alors que  $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

3) a) Montrer que  $f$  est périodique de période  $\pi$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; \pi]$

c) Tracer  $C_f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  pour  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

4) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[-2\pi; 2\pi]$  par  $g(x) = 2\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

a) Vérifier que  $g$  est paire

b) Tracer  $C_g$ , dans le même repère, à partir de  $C_f$ . Justifier

0,5

0,5

0,5

1

1

0,5

1

***BON TRAVAIL***