

Devoir de contrôle N° 3

A . S : 2011-2012

05-05-2012

Durée : 2h

Classe : 3M

Exercice N° 1:(5points) (les questions 1, 2 , 3 et 4 sont indépendants)

1) Montrer, par récurrence , que pour tout entier naturel n , $4^n - 1$ est divisible par 3

0,75

2) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $35(a+10) = 27(b+13)$

0,75

3) Déterminer l'ensemble de tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels solutions du système :

$$\begin{cases} a \cdot b = 1800 \\ a \wedge b = 15 \end{cases}$$

0,75

4) Soit $a = n^2 + 3n + 2$ et $b = 2n + 3$

a) vérifier que $2a = (n+1)(2n+3) + n+1$

0,5

b) Montrer que a et b sont premiers entre eux pour tout entiers naturel n

0,75

c) Montrer que pour tout entiers naturel n on a

$$(2n+3) \wedge (3n+12) = (2n+3) \wedge 15$$

0,75

d) En déduire l'ensemble des entiers naturels n vérifiant :

0,75

$$(2n+3)n \text{ divise } (3n+12)(n^2 + 3n + 2)$$

Exercice N°2 :(5points)

1) Montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

1

2) Montrer que si n est un entier naturel impair alors n^2 est impair

0,5

3) Une urne contient 1 boule portant le n°1 ; 2² boule portant le n°2 ; 3² boule portant le n°3 et n² boule portant le n° n où $n \in \mathbb{N}$.On tire une boule de l'urne et on suppose que tout les tirages sont équiprobables



a) Montrer, par récurrence, que le nombre de boules dans l'urne est égal à $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ pour tout $n \geq 1$.

0,75

b) On suppose que n est pair. Calculer, en fonction de n , la probabilité des événements suivants :

2

A : « Obtenir une boule portant un numéro pair »

B : « Obtenir une boule portant un numéro impair »

c) On suppose dans toute la suite que le nombre total des boules est 91. Calculer la probabilité d'obtenir un numéro supérieur ou égal à 5

0,75

Exercice N°3 : (5 points)

Une urne contient 4 boules blanches numérotées 1 ; 1 (-1) ; 4 et deux boules rouges numérotées (-1) ; 4 indiscernables au toucher .

1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne

Calculer la probabilité des événements suivants

A : « tirer deux boules de même couleur »

B : « tirer deux boules dont la somme des numéros inscrits est nulle »

C : « tirer deux boules de même couleur ou dont la somme des numéros inscrits est nulle »

1

1

1

2) On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne, on note par a le numéro de la première boule tirée et par b le numéro de la deuxième boule tirée puis on forme l'équation du second degré (E) : $ax^2 + 2x + b = 0$

Calculer la probabilité des événements suivants :

H : « (E) admet une racine double »

K : « l'ensemble des solutions de (E) est $\{1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}\}$ »

1

1



Exercice N° 4 : (5points)

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a\sin(2x) + b(1 - \cos(2x))$ où $a, b \in \mathbb{R}$

1) Déterminer a et b sachant que f admet un extrémum au point $x_0 = \frac{\pi}{6}$
et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3$

2) Montrer alors que $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) a) Montrer que f est périodique de période π

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$

c) Tracer C_f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

4) Soit g la fonction définie sur $[-2\pi; 2\pi]$ par $g(x) = 2\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

a) Vérifier que g est paire

b) Tracer C_g , dans le même repère, à partir de C_f . Justifier

0,5

0,5

0,5

1

1

0,5

1

BON TRAVAIL