Lycée Cité Nozha Zaghouan Année Scolaire 2013/2014	Devoir De Contrôle N°3 Durée : deux heures	Prof : Mr KHEMIRI Fawzi Classe : 3ième Maths

Exercice 1(3.5 pts)

Répondre par vrai ou faux sans justification

1. Dans un repère de l'espace, les points $A(2,2,2);B(0,0,6);C(1,0,5)$ et $D(-1,6,1)$ sont coplanaires.
2. A et B étant deux points distincts. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ est la droite (AB).
3. Soit $\alpha\in[0,\pi]$. La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=(\cos\alpha)^n$ est convergente.
4. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a>b$. On a $pgc(a,b)=p\text{gcd}(a,a-b)$.

Exercice 2 (3.5 pts)

Les quatre questions 1., 2., 3. et 4. sont indépendantes

1. Trouver les entiers naturels a et b tels que $a+b=1170$ et $a\wedge b=65$.
2. **a)** Vérifier que 130 et 231 sont premiers entre eux.
   b) Trouver les solutions dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de l'équation $130x=231y$.
3. **a)** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $3^{2n}-1$ est divisible par 4.
   b) En déduire le reste de la division euclidienne de $3^{40}+5$ par 4.
4. Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors $(3a+4b)\wedge(4a+5b)=1$.

Exercice 3 (3pts)

On utilise un dé pipé, à 6 faces numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on le lance :

- les faces portant un chiffre pair ont la même probabilité d'apparition.
- les faces portant un chiffre impair ont la même probabilité d'apparition.
- la probabilité d'apparition d'un chiffre impair est le double de la probabilité d'apparition d'un chiffre pair.

1. Calculer la probabilité de voir apparaître chaque face.
2. Calculer la probabilité de voir apparaître un chiffre pair, un chiffre impair.
3. On lance ce même dé trois fois de suite. Calculer la probabilité des événements :
   E : « Avoir une somme paire de numéros »
   F : « Avoir un numéro impair au moins une fois »

Exercice 4 (5pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient les points $A(3,0,0)$; $B(0,4,0)$ et $C(0,0,2)$.

1. **a)** Calculer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan P.
   c) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   d) En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Soit Δ la droite passant par le point $S(1,1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.
   a) Montrer que Δ est strictement parallèle au plan P.

b) Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.

c) En déduire que la distance du point S au plan P est $\frac{7}{\sqrt{61}}$.

d) Calculer la distance du point S à la droite (AB).

Exercice 5(5pts)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$.Dans la feuille à rendre, on a représenté la courbe C de f ainsi que la droite $\Delta : y = x$ dans un repère orthonormé.

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=4$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

1. **a)** Placer les trois premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses.

   b) Quelles sont les conjectures que l'on peut émettre quant à la monotonie et à la convergence de (U_n).
2. Montrer, par le calcul, que pour tout réel $x \geq 1$, on a $f(x) \leq x$.
3. **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.

   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
4. **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1}-1 \leq \frac{1}{2}(U_n-1)$.

   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n - 1 \leq 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   c) En déduire que la suite (U_n) converge vers 1.
5. Soit la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n < S_n \leq n+3.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Feuille à rendre

Nom et Prénom……………………………………………………………