

Lycée Tahar Sfar Mahdia	Devoir de contrôle n° 3 Mathématiques	Niveau : 3 ^{ème} Math
Date : 30 / 04 / 2016	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (8 pts)

A. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$.

1) a/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}$.

b/ Etablir le tableau de variation de f .

2) a/ Montrer que : si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

b/ Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

B. Soit U la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

1) a/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq U_n \leq 1$.

b/ Etudier la monotonie de la suite U .

2) a/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.

b/ Montrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \frac{1}{n}$.

c/ Calculer alors la limite de la suite U .

3) a/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = 1 + U_n$.

b/ En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{U_n} = n + \sum_{k=1}^{n-1} U_k$.

c/ Montrer alors que, pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{U_n} \geq n$.

d/ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{U_n}$ puis retrouver la limite de la suite U .

Exercice n°2 : (6 pts)

Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que :

$$(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n \sqrt{6}.$$

1) Calculer a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3 .

2) a/ Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

b/ Montrer que : 5 divise $a_n + b_n$ si, et seulement si, 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$.

c/ En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

3) On pose $d_n = a_n \wedge b_n$.

a/ Montrer que d_{n+1} divise $5b_n$ et que d_{n+1} divise $5a_n$.

b/ En déduire que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

c/ Déduire de ce qui précède que, pour tout entier $n \geq 1$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice n°3 : (6 pts)

Dans la figure ci-contre, $ABCEFGH$ est un cube d'arête 1.

Soient I et J les points définis par : $\overline{AI} = \overline{EJ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AD}$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J .

2) Soit α un réel et M est le point de coordonnées

$$\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \alpha \right).$$

a/ Vérifier que $M \in (IJ)$.

b/ Déterminer les composantes de chacun des

vecteurs $\overline{AF} \wedge \overline{AM}$ et $\overline{BC} \wedge \overline{BM}$.

c/ En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

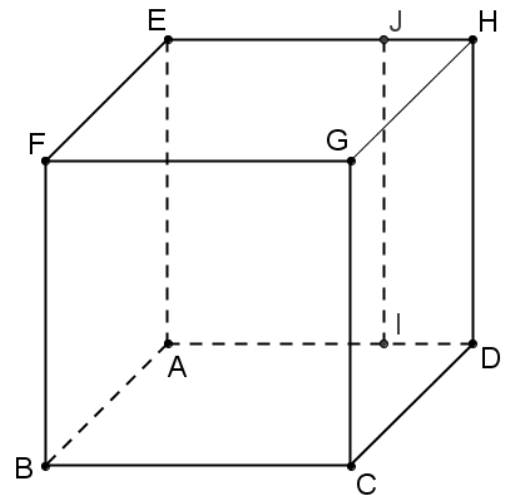
3) a/ Montrer que : $(A, F, M$ et G sont coplanaires) si, et seulement si $(M$ et I sont confondus).

b/ Pour M distinct de I , calculer en fonction de α , le volume du tétraèdre $AFMG$.

c/ Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels les tétraèdres $AFMG$ et $BCMG$ ont le même volume.

4) Soit K le projeté orthogonal de G sur le plan (AFJ) et K' le projeté orthogonal de G sur le plan (BCJ) .

Montrer que le triangle GKK' est isocèle.



Bonne chance

