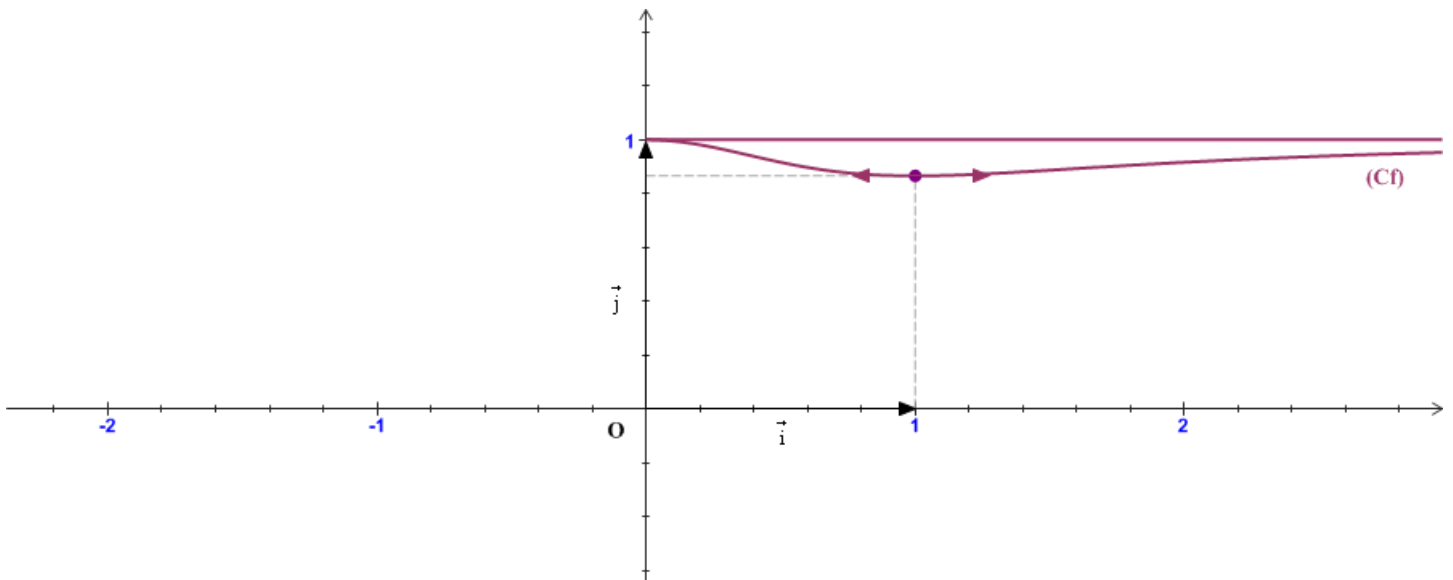


Exercice n°1 : ©

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} de la façon suivante :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -2 \\ -x & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :
 - a) Etudier la continuité de f en -2.
 - b) f est elle continue en -1 ?
 - c) Sur quels intervalles f est elle continue ?
 - d) Déterminer les images par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty, -1]$ et $[-1, +\infty[$.
 - e) Pour quelles valeurs de k , l'équation $f(x) = k$ admet elle des solutions ?

Exercice n°2 : ©

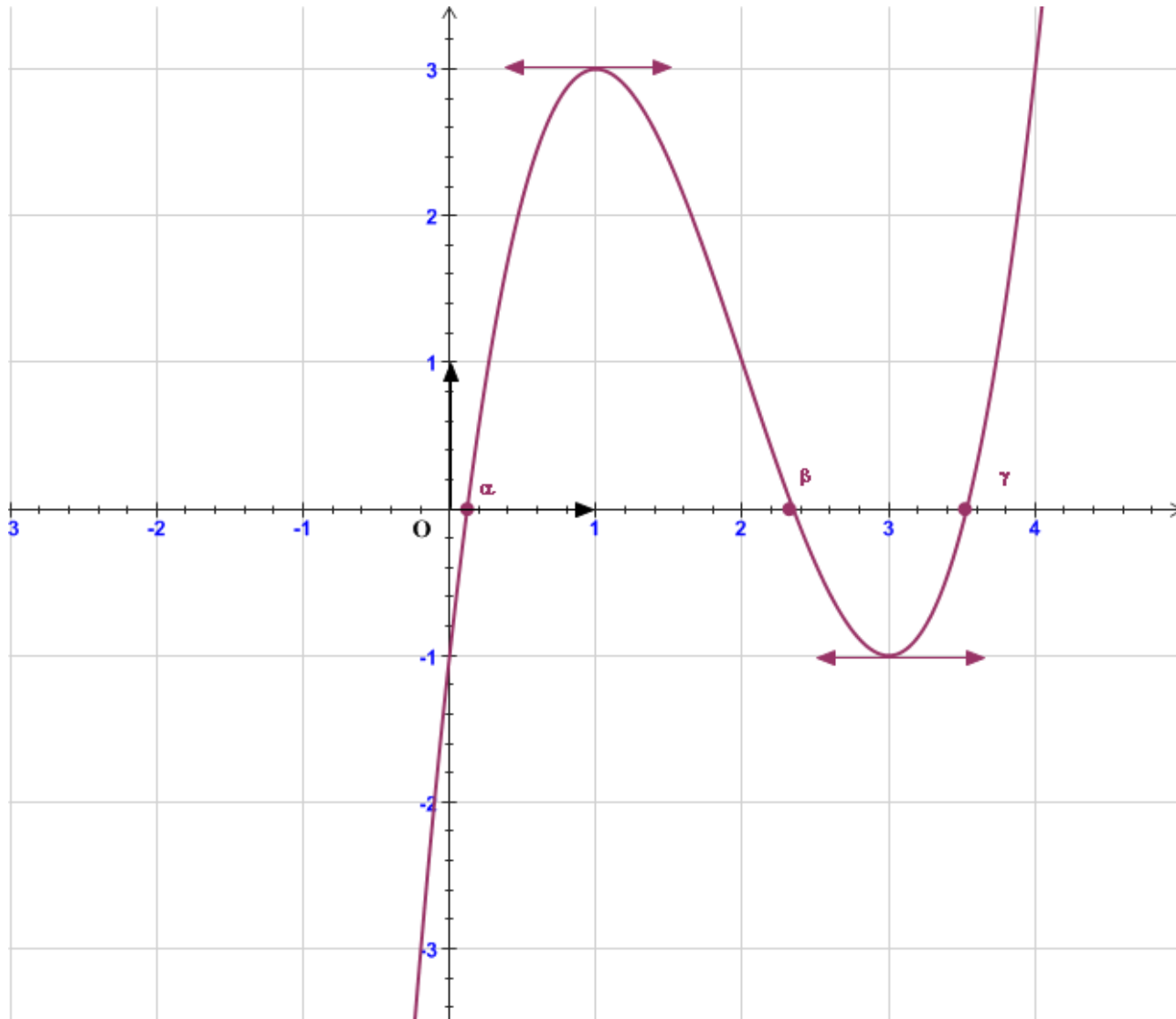
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.
3. Etudier la parité de f ; puis compléter sa courbe représentative dans le repère ci - dessus :



4. a) Montrer que f admet un maximum en 0.
 - b) Montrer que f admet un minimum $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

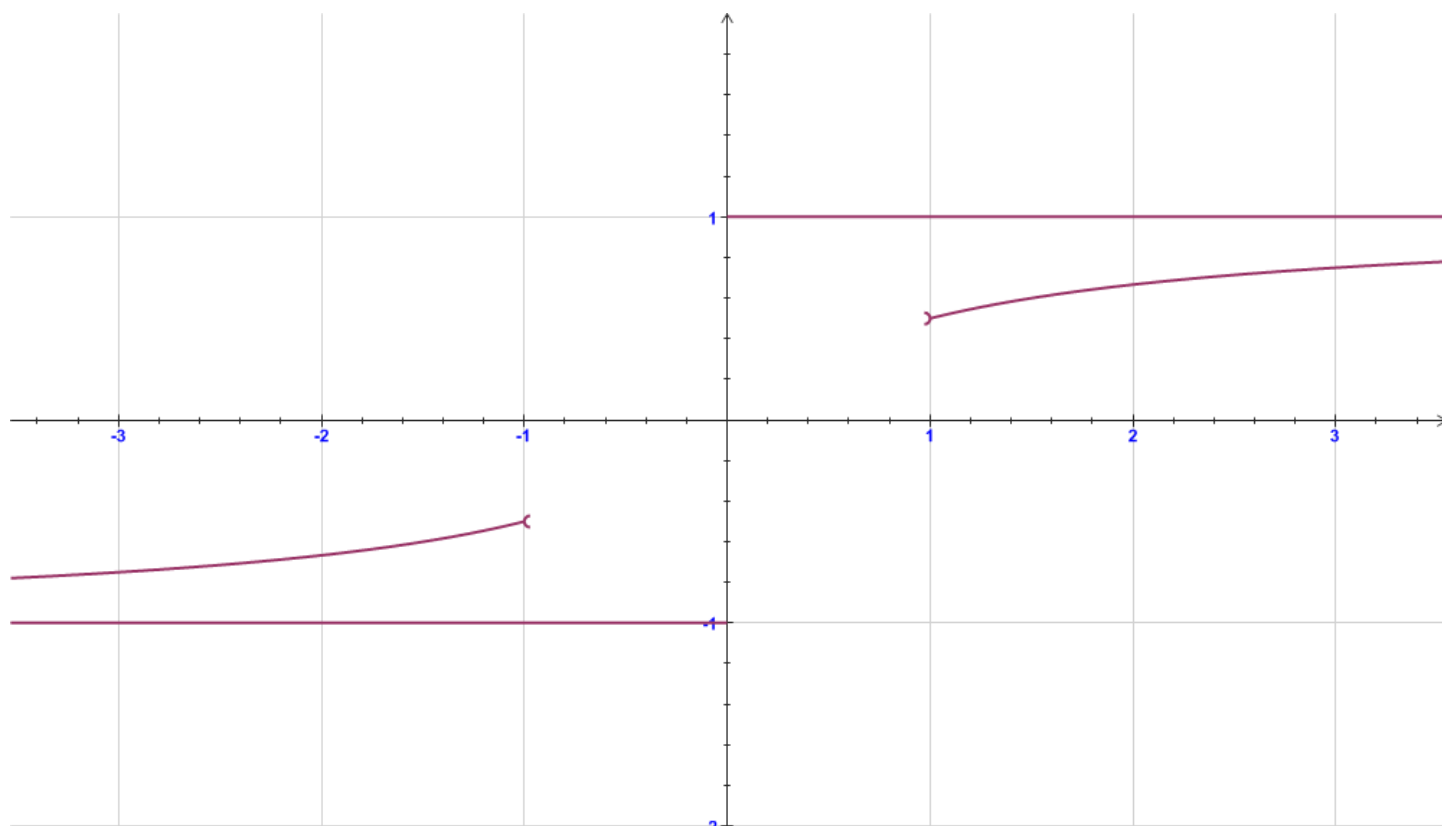
Exercice n°3 :



Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

1. Justifier la continuité de f sur \mathbb{R} .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur chacun des intervalles $[0,1]$; $[2,3]$ et $[3,4]$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles distinctes qu'on notera par α , β et γ .
- b) Vérifier que $0.1 < \alpha < 0.2$; $2.3 < \beta < 2.4$ et $3.5 < \gamma < 3.6$.
4. Donner à partir du graphique le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
5. Déterminer à partir du graphique les images par f de chacun des intervalles : $]-\infty, 0]$ et $[\alpha, \gamma]$.

Exercice n°4 :



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , telle que :

* $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

* La restriction de f à $[-1, 1]$ est une fonction affine.

* f est continue sur \mathbb{R} .

* Sa restriction aux intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ est représentée dans le repère ci – dessus.

1. Compléter la représentation graphique de f .
2. Donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x .
3. Etudier la parité de f .
4. Montrer que f est croissante sur \mathbb{R} .
5. a) Montrer que pour tout réel x , on a : $-1 < f(x) < 1$.
b) Déterminer $f(\mathbb{R})$.

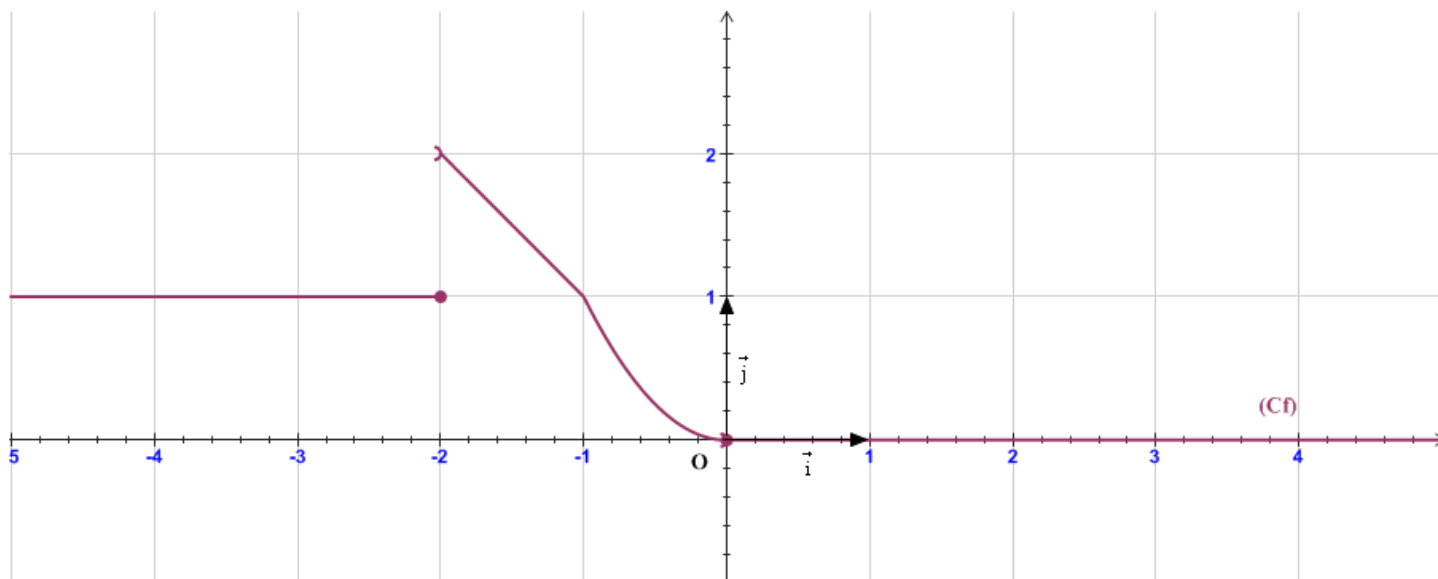
Exercice n°5 : ©

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Exercice n°1 :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -2 \\ -x & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Représentation graphique :

2. a) Continuité de f en -2 :

f est continue à gauche en -2 , mais f est discontinue à droite en -2 donc f est discontinue en -2 .

b) f est continue en -1 .c) f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$ et $]-2, +\infty[$.d) $f(]-\infty, -1]) = [1, 2[$; $f(]-1, +\infty[) = [0, 1]$.e) L'équation $f(x) = k$ admet des solutions lorsque $k \in [0, 2[$.**Exercice n°2 :**

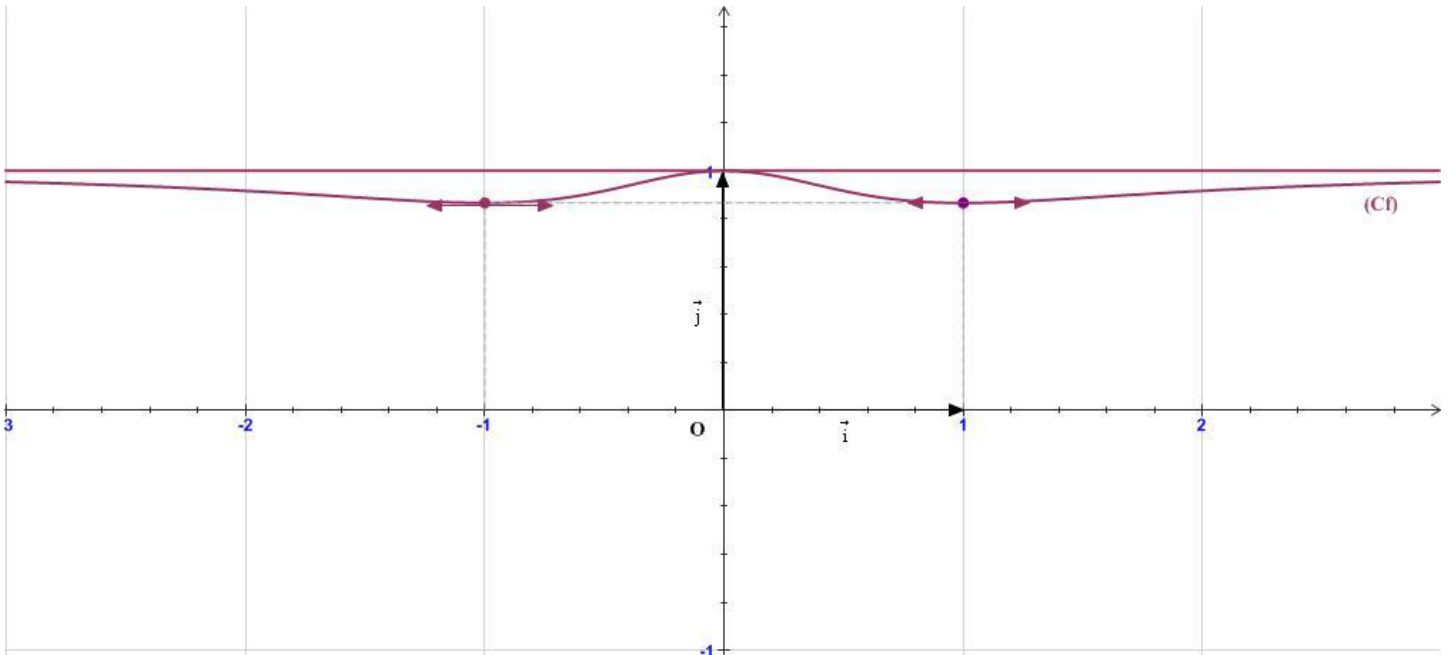
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1}$$

1. $x^4 + x^2 + 1 \geq 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$.2. Continuité de f sur \mathbb{R} :

$\left(x \mapsto x^4 + x^2 + 1\right)$ est continue et positive sur \mathbb{R} , comme étant une fonction polynôme $\Rightarrow \sqrt{u}$ est continue sur \mathbb{R} .

$\left(x \mapsto x^2 + 1\right)$ est continue et non nulle sur $\mathbb{R} \Rightarrow f = \frac{\sqrt{u}}{v}$ est continue sur \mathbb{R} .

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et on a : $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^4 + (-x)^2 + 1}}{(-x)^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1} = f(x) \Rightarrow f$ est une fonction paire.
 (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



4. a) Montrons que pour tout réel x , on a : $f(x) \leq f(0)$.

Puisque $f(0) = 1$, donc il suffit de montrer que : $\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \leq x^2 + 1$

$$\left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right)^2 - (x^2 + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 - x^4 - 2x^2 - 1 = -x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right)^2 \leq (x^2 + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \leq x^2 + 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1} \leq 1$$

Ainsi : 1 est un maximum de f en 0.

- b) Montrons que pour tout réel x , on a : $f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\left[f(x)\right]^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{3}{4} = \frac{4x^4 + 4x^2 + 4 - 3x^4 - 6x^2 - 3}{4(x^4 + 2x^2 + 1)} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4(x^4 + 2x^2 + 1)} = \frac{(x^2 - 1)^2}{4(x^2 + 1)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est un minimum de f en 1 et -1.

5. $f(\mathbb{R}) = [\min f, \max f] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

Exercice n°5 :

f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.

On pose $g(x) = f(x) - x$.

- g est continue sur $[0, 1]$, comme étant somme de deux fonctions continues.
- $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f([0, 1]) = [0, 1]$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a : l'équation $g(x) = 0$ admet aux moins une solution dans $[0, 1]$.
 $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

