

Exercice n°1 :

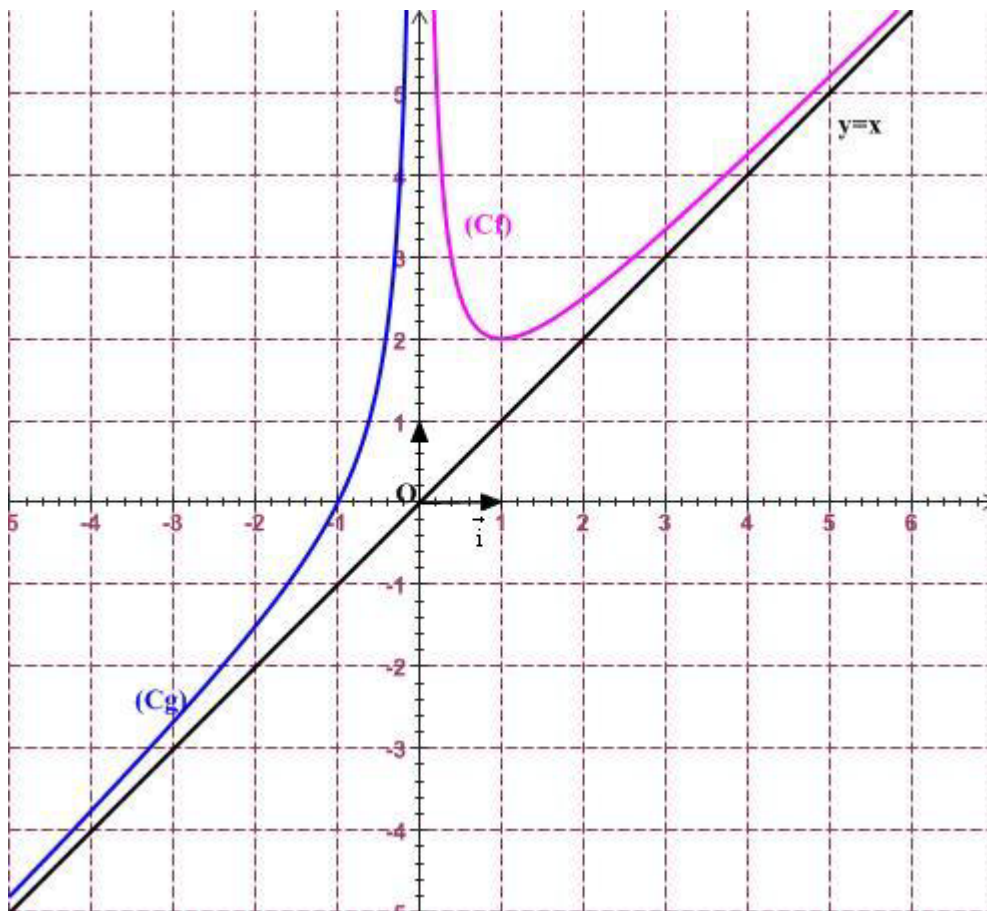
On considère la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$ sur \mathbb{R} .

1. Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{4}$ sur \mathbb{R} .
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$.
3. Démontrer que $f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$; puis étudier ses variations sur \mathbb{R} .

Exercice n°2 : ©

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = x - \frac{1}{x}$.

1. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g .
2. Montrer que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$. Qu'en est-il de g ?
3. Compléter les représentations graphiques de f et g dans le repère ci-dessous :



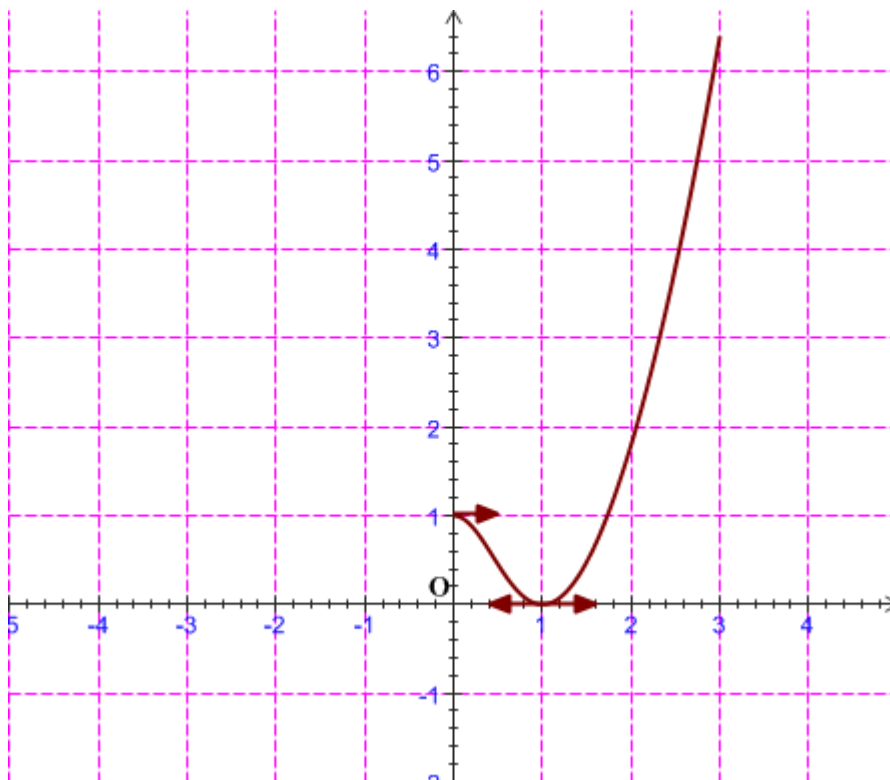
4. Préciser si f est majorée, minorée, bornée ou non sur chacun des intervalles suivants :

$$\left[\frac{1}{2}, 3\right]; [1, +\infty[\text{ et }]0, 1].$$

Exercice n°3 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Minorer f sur \mathbb{R} .
3. Etudier la parité de la fonction f .
4. Compléter la représentation graphique C_f de f sur l'intervalle $[-3,3]$.



5. Donner par lecture graphique la valeur du maximum de la fonction f sur :
 - a) l'intervalle $[-1,1]$.
 - b) l'intervalle $[-2,1]$.
6. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$.



Exercice n°2 :

1. Parité de f : $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et on a : $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$

 $\Rightarrow f$ est une fonction impaire.

Parité de g : $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

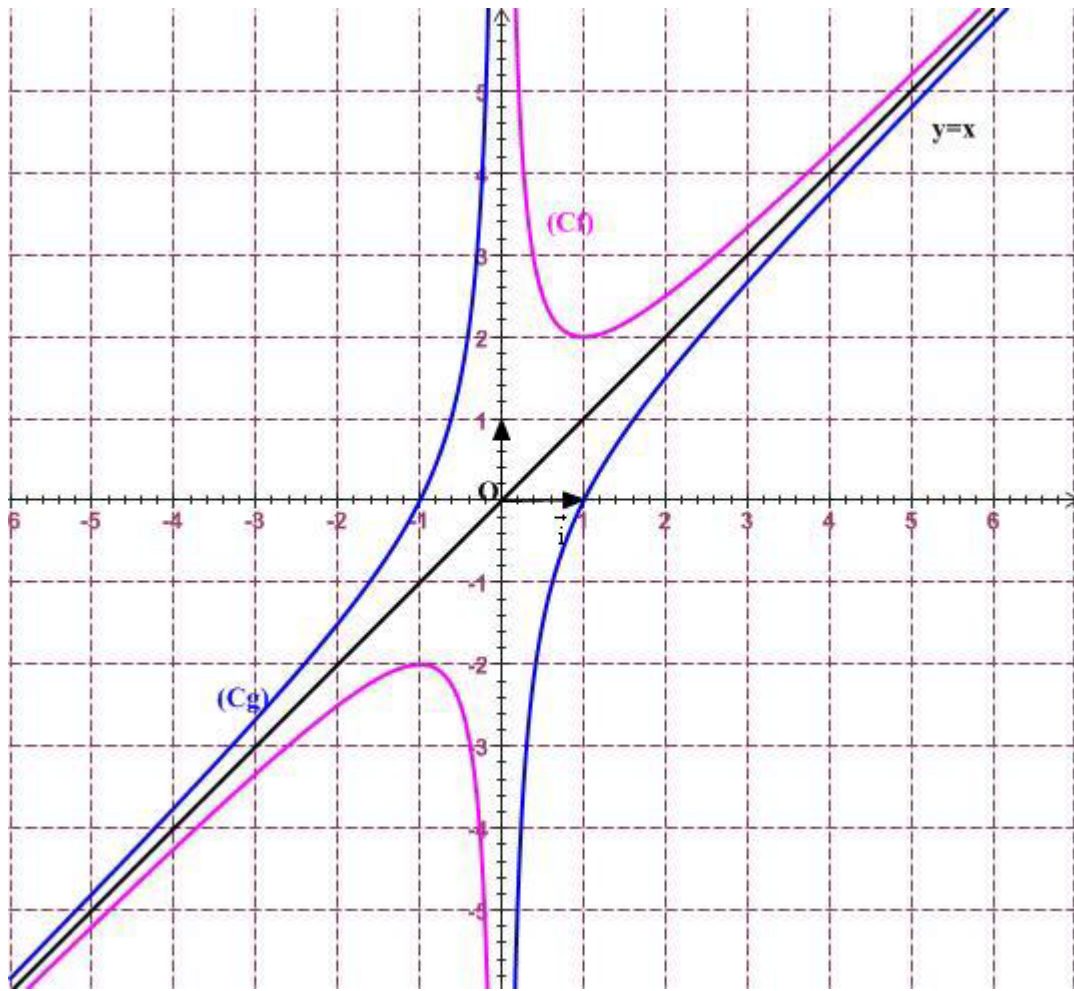
Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et on a : $g(-x) = -x - \frac{1}{-x} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -g(x)$

 $\Rightarrow g$ est une fonction impaire.2. Soient a et b deux réels non nuls tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = b + \frac{1}{b} - a - \frac{1}{a} = b - a + \frac{a-b}{ab} = \underbrace{(b-a)}_{>0} \left(1 - \frac{1}{ab}\right)$$

- Si a et $b \in [1, +\infty[$ alors $ab > 1 \Rightarrow \frac{1}{ab} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{ab} > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$
 $\Rightarrow f(b) > f(a) \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- Si a et $b \in]0, 1]$ alors $ab < 1 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{ab} < 0 \Rightarrow f(b) - f(a) < 0$
 $\Rightarrow f(b) < f(a) \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

Pour la fonction g , le cas est beaucoup plus simple.En effet : $g(x) = x - \frac{1}{x}$ c'est la somme de deux fonctions croissantes sur \mathbb{R}^* donc g est une fonction croissante sur \mathbb{R}^* .3. f et g sont deux fonctions impaires sur \mathbb{R}^* donc leurs courbes sont symétriques par rapport à l'origine du repère.



4. $f\left(\left[\frac{1}{2}, 3\right]\right) = \left[2, \frac{10}{3}\right]$; $f([1, +\infty[) = [2, +\infty[$; $f(]0, 1]) = [2, +\infty[$.