Lycée Houmet Souk 1 Jerba **Prof: Loukil Mohamed**	**Devoir de Synthèse N : 2** **Durée : 2 Heures**	**3 Technique 06** **09 Mars 2012**

EXERCICE N : 1 (9 points)

A) *Soit la fonction f définie sur] - 2 ; + ∞ [par :* $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

1) *Etudier les variations de f .*

2) *Tracer dans un repère orthonormé **(Unité : 4 cm)** la courbe de f et la droite* $\Delta : y = x$

B) *Soit la suite réelle* (U_n) *définie sur IN par :* $\begin{cases} U_0 = -\dfrac{3}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) a) *Représenter sur l'axe des abscisses les termes* U_0 , U_1 , U_2 *et* U_3 .

b) *Quelle conjecture peut-on formuler quant au sens de variation de* (U_n) *et sa limite ?*

2) *Montrer que pour tout* $n \in IN$ *on a :* $-1 \leq U_n < 0$.

3) *Montrer que la suite* (U_n) *est croissante sur IN .*

C) *Soit la suite* (V_n) *définie sur IN par :* $V_n = \dfrac{1+U_n}{U_n}$.

1) a) *Montrer que (V) est une suite géométrique de raison 2 .*

b) *Calculer* V_n *puis* U_n *en fonction .*

c) *Retrouver* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

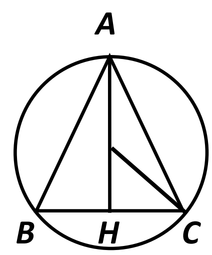
2) *Calculer* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} V_k$ *puis* $S'_n = \sum\limits_{n=0}^{8} \dfrac{1}{U_k}$ *en fonction de n .*

EXERCICE N : 2 (4 points)

*Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A , inscrit dans un cercle de centre O et de **rayon 1** .*

On pose H le projeté orthogonal de A sur [BC] .On désigne par x la mesure en radian de l'angle $\widehat{HOC}$.

On suppose que $x \in I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. *On pose f (x) : **l'aire du triangle ABC** .*



1) a) *Exprimer BC et AH en fonction de x*

b) *Montrer que pour tout* $x \in I$; $f(x) = (1 + \cos x)\sin x$.

2) a) *Montrer que pour tout* $x \in I$; $f'(x) = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$.

b) *Etudier le sens de variation de f .*

c) *Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale .*

3) *On prend* $x = \dfrac{\pi}{3}$. *Montrer que ABC est un triangle équilatéral .*

EXERCICE N : 3 ***(7 points)***

A) *Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct* $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ *,on considère les points*

A , B et C les points d'affixes respectives : $Z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $Z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ *et* $Z_C = -\sqrt{3} + i$.

1) *Déterminer la nature des ensembles suivants :*

$\Delta = \{ M \in P$ *d'affixes Z telles que :* $| Z - \sqrt{2} - i\sqrt{2} | = | Z | \}$;

$\Gamma = \{ M \in P$ *d'affixes Z telles que :* $| i\overline{Z} - 1 + i\sqrt{3} | = 2 \}$

2) a) *Ecrire* Z_A , Z_B *et* Z_C *sous forme trigonométrique .*

b) *Déduire que les points A , B et C appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon 2 .*

c) *Placer les points A , B et C dans le repère R .*

3) *Déterminer l'affixe* Z_D *du point D pour lequel ABCD soit un parallélogramme .*

B) *On donne le nombre complexe* $U = Z_B . Z_C$.

1) *Ecrire U sous la forme cartésienne .*

2) *Ecrire U sous la forme trigonométrique .*

3) a) *Donner alors les valeurs exactes de* $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\sin \frac{7\pi}{12}$

b) *Déduire les valeurs exactes de* $\cos \frac{\pi}{12}$ *et* $\sin \frac{\pi}{12}$.