

Série N 2

Produit scalaire

Exercice n1 :

On considère le triangle ABC tel que $AB = a$, $AC = 3a$ (où a est un réel strictement positif)

et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$, H le projeté orthogonale de C sur (AB) et le point O est le milieu de [BC]

- 1) Faire une figure
- 2)
 - a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
 - b) En déduire AH et CB puis CH en fonction de a
- 3)
 - a) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
 - b) En déduire AO en fonction de a
- 4)
 - a) Soit le point I est le milieu de [AO] ; montrer que pour tout point M de P on a : $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 2 (MI^2 - IA^2)$
 - b) Déterminer l'ensemble des points M de p tel que $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{a^2}{4}$

Exercice n2 :

On considère ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $AB = 2\sqrt{2}$, $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$

et le point I est le milieu de [AB]

- 1) Calculer BC , CI , et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- 2)
 - a) Montrer que l'ensemble E des point M du plan M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$ est un cercle de centre I dont on déterminera son rayon
 - b) Vérifier que C est un point de E
- 3) Montrer que l'ensemble D des points M du plan P tels que $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = -12$ est une droite
- 4) Le plan P rapporté à un repère orthonormé (O , \vec{i} , \vec{j}) ; les points A(0,1) et B(2,3)
 - a) Vérifier que $AB = 2\sqrt{2}$
 - b) Déterminer une équation cartésienne de D
 - c) Vérifier que les droites D et (AB) sont perpendiculaire
 - d) Calculer d (I,D) . en déduire la position relative de la droite D et le cercle E

Exercice n 3 :

Soit ABC un triangle rectangle en A . G son centre de gravité de I le milieu de [BC]

- 1) Montrer que $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{-2}{9} BC^2$
- 2) On considère l'application f : P \longrightarrow R

M \longrightarrow	$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{MG}$
---------------------	---

- a) Calculer $f(A)$ et $f(G)$ en fonction de BC
- b) Montrer que pour tout point M de P on a $f(M) = MG^2 - \frac{2}{9} BC^2$
- c) En déduire l'ensemble (C) des points M de P vérifiant $f(M) = -\frac{1}{9} BC^2$
- 3) Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $A(1,1)$, $B(2, -1)$ et $C(3, 2)$
 - a) Vérifier que le triangle ABC rectangle
 - b) Déterminer les coordonnées de G puis donner une équation de (C)

Exercice n4 :

Dans le plan P on considère un triangle rectangl et isocèle en A tel que $AB = a$, soit E un point de $[AB]$ distinct de A et B et $F \in [AC]$ tel que $AE = AF$, on pose $I = A * C$ et $O = B * F$

- 1) Calculer en fonction de a , $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IB}$
- 2)
 - a) Montrer que (AO) et (CE) sont perpendiculaires
 - b) Déterminer l'ensemble E_1 des points M de P tel que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
- 3) Soit $E_2 = \left\{ M \in P \text{ tel que } MA^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} \right\}$. Montrer que $MA^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$, déduire l'ensemble E_2
- 4) Soit G le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$, on pose $f(M) = MA^2 + 2MB^2$
 - a) Montrer que pour tout M de P , $f(M) = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$
 - b) Déterminer l'ensemble E_3 des points M tel que $f(M) = a^2$
- 5) Déterminer l'ensemble $\Delta = \left\{ M \in P \text{ tel que } MB^2 + MF^2 - 2MA^2 = \frac{BF^2}{2} \right\}$

Exercice n5 :

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 8$, on désigne par I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$
- 2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis déduire $\cos \widehat{BAC}$
- 3) Soit H le projeté de B sur (AC) , calculer AH
- 4) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, en déduire BJ
- 5)
 - a) Montrer que pour tout point M du plan on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$
 - b) Calculer CI
 - c) Déterminer l'ensemble $E = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = 100\}$
- 6) Montrer que pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MJ^2 - 9$
- 7) Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$. déduire l'ensemble $E' = \{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 7\}$
- 8) Soit O le milieu de $[IJ]$
 - a) Montrer que $MI^2 - MJ^2 = 2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM}$
 - b) Déterminer l'ensemble $E'' = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = -6\}$