Exercice n°1 : ©

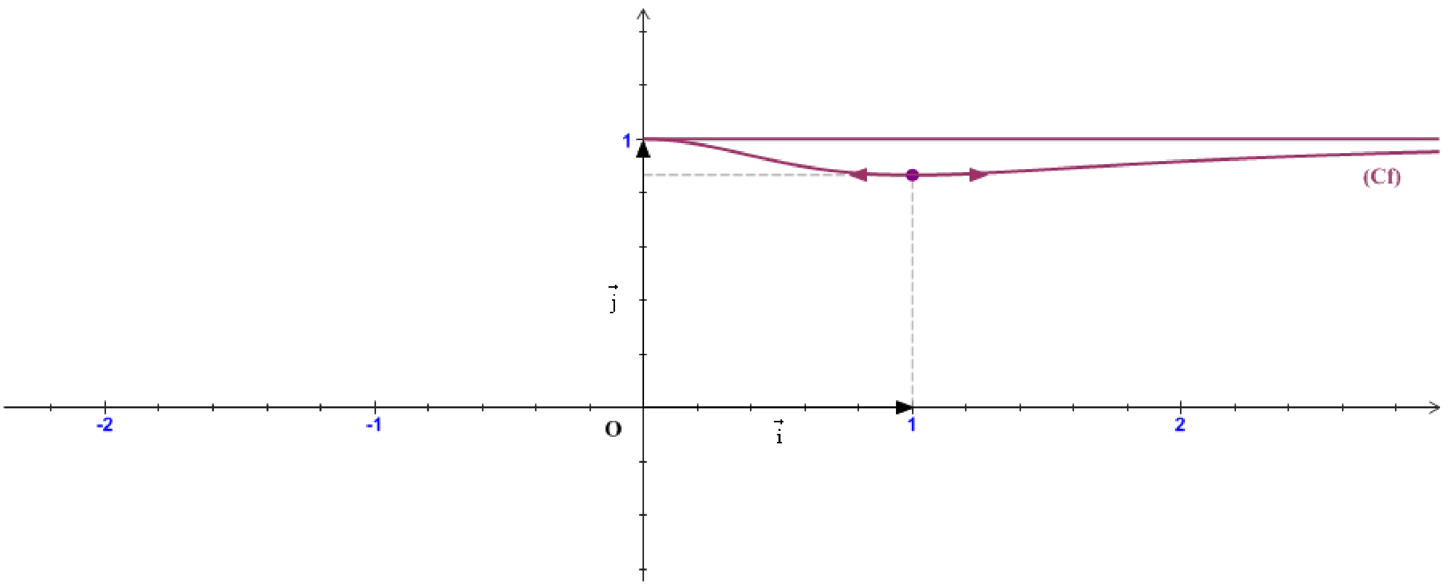
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -2 \\ -x & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :
a) Etudier la continuité de f en -2.
b) f est elle continue en -1 ?
c) Sur quels intervalles f est elle continue ?
d) Déterminer les images par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty,-1]$ et $[-1,+\infty[$.
e) Pour quelles valeurs de k, l'équation $f(x)=k$ admet elle des solutions ?

Exercice n°2 : ©



Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.

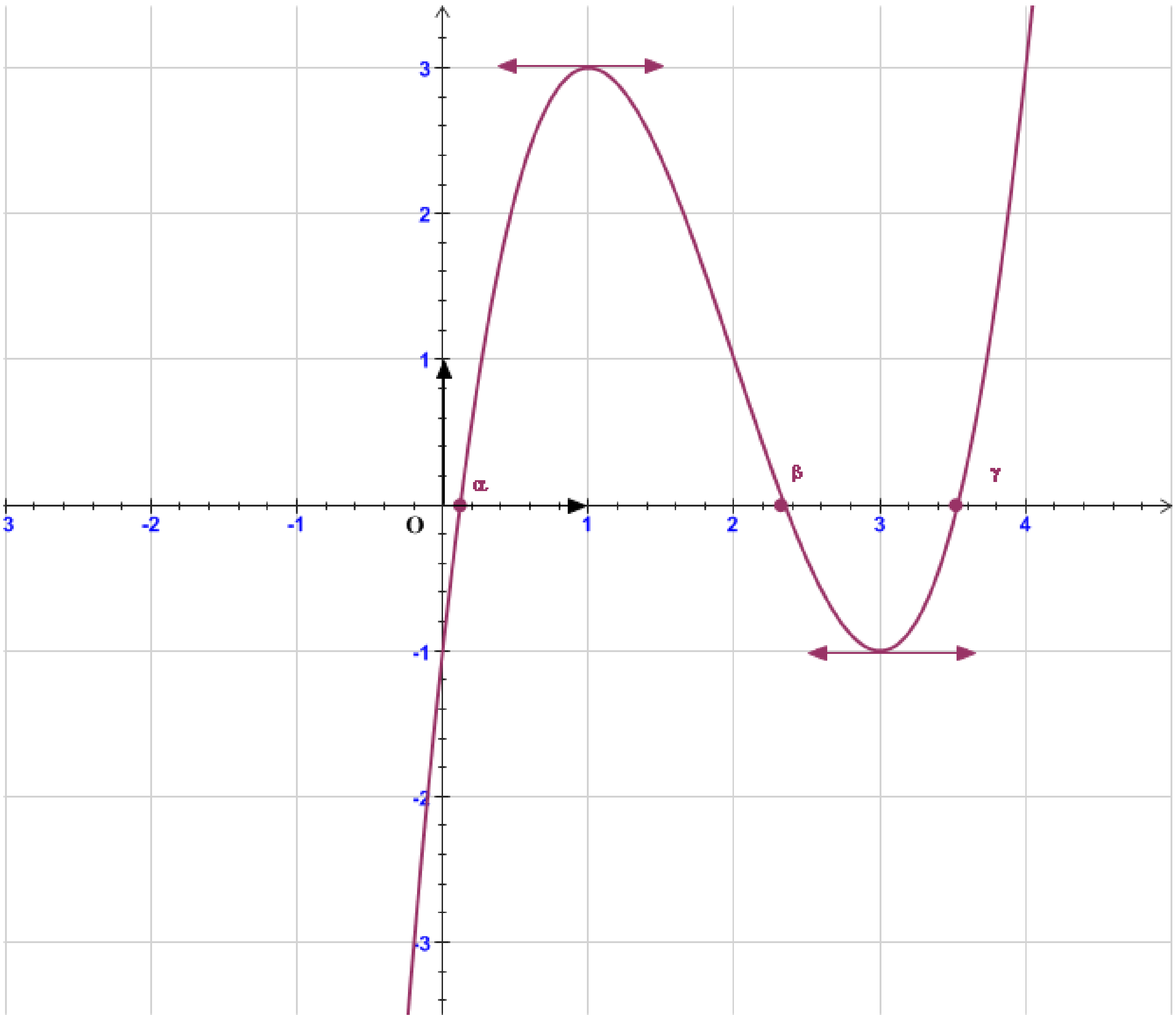
3. Etudier la parité de f ; puis compléter sa courbe représentative dans le repère ci - dessus :

4. a) Montrer que f admet un maximum en 0.

   b) Montrer que f admet un minimum $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

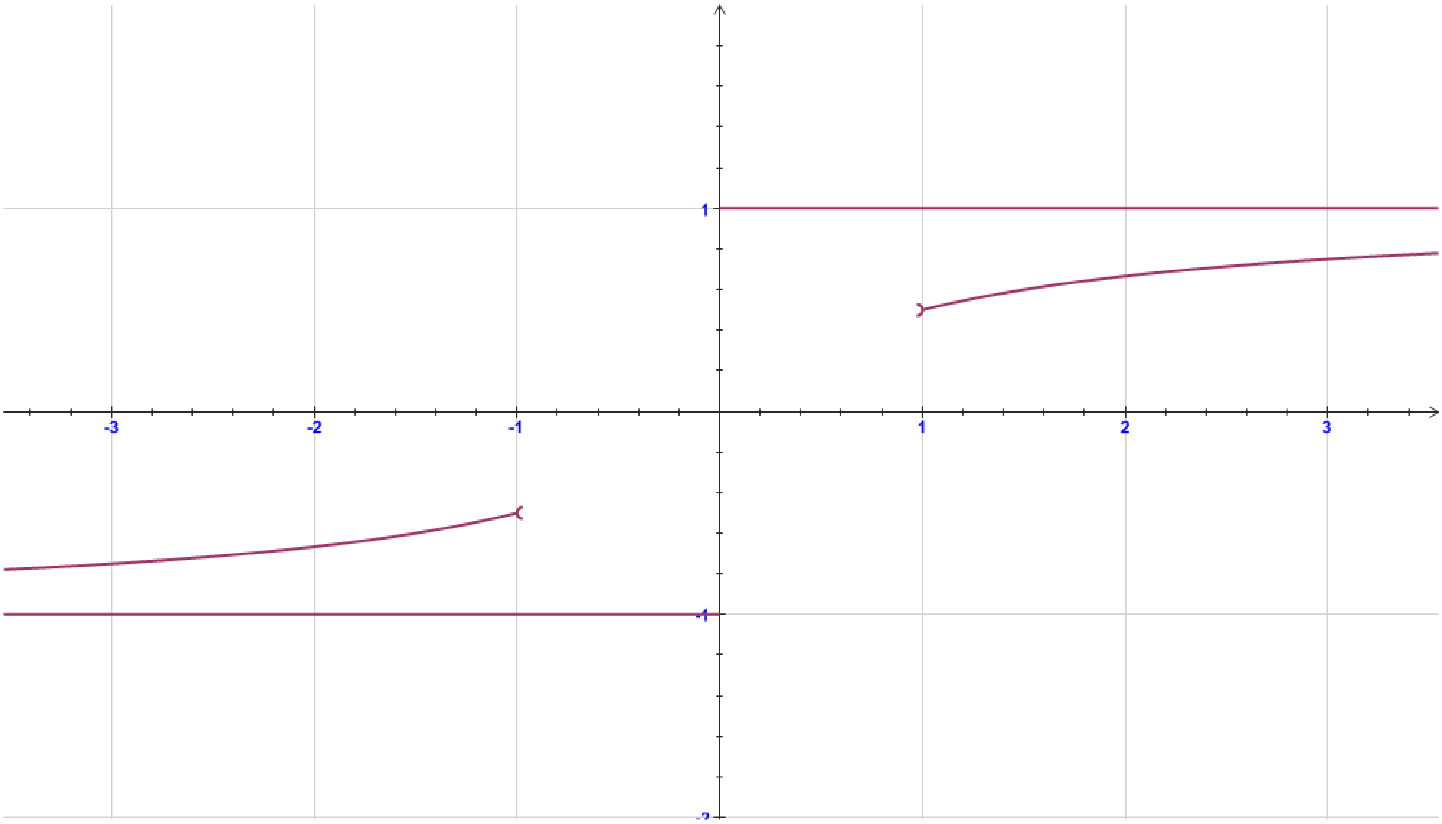
Exercice n°3 :



Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur chacun des intervalles $[0,1]$; $[2,3]$ et $[3,4]$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles distinctes qu'on notera par α, β et γ.
b) Vérifier que $0.1 < \alpha < 0.2$; $2.3 < \beta < 2.4$ et $3.5 < \gamma < 3.6$.
4. Donner à partir du graphique le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
5. Déterminer à partir du graphique les images par f de chacun des intervalles : $]-\infty,0]$ et $[\alpha,\gamma]$.

Exercice n°4 :



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que :

* $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ si $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
* La restriction de f à $[-1,1]$ est une fonction affine.
* f est continue sur $\mathbb{R}$.
* Sa restriction aux intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ est représentée dans le repère ci – dessus.

1. Compléter la représentation graphique de f .
2. Donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x .
3. Etudier la parité de f .
4. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. a) Montrer que pour tout réel x , on a : $-1<f(x)<1$.
   b) Déterminer $f(\mathbb{R})$.

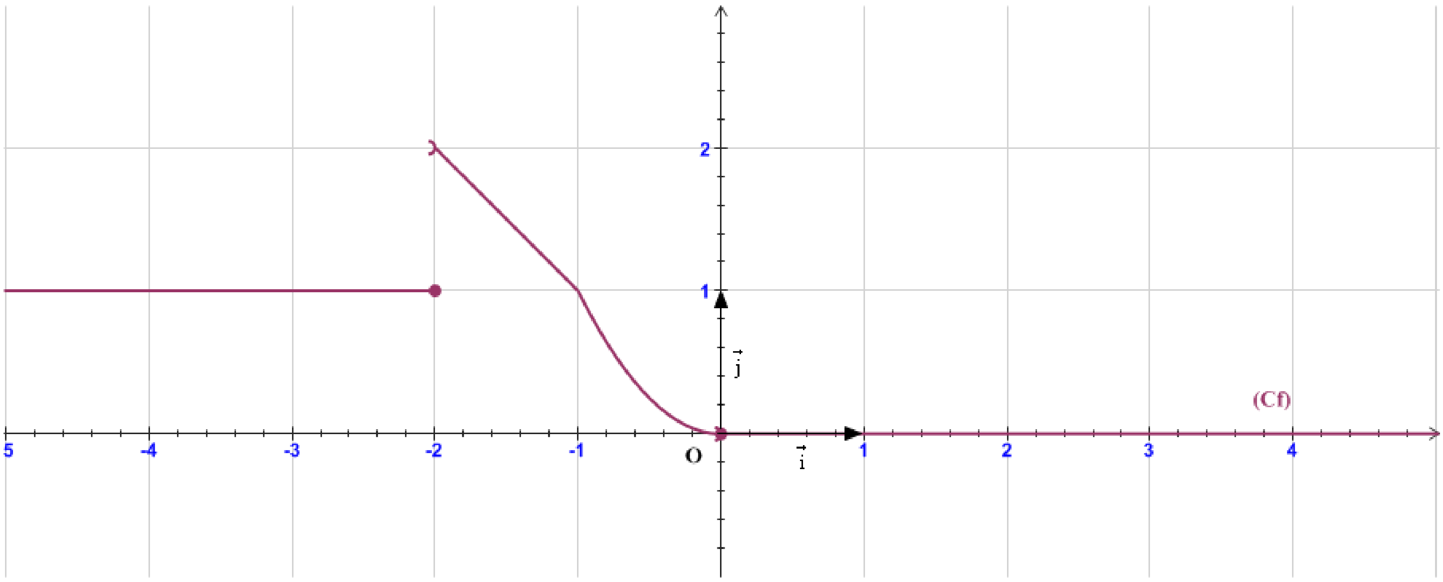
Exercice n°5 : ©

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.
Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution sur $[0,1]$.

Exercice n°1 :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\le -2\\ -x & \text{si } -2<x\le -1\\ x^2 & \text{si } -1<x\le 0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. Représentation graphique :



2. a) Continuité de f en – 2 :

   f est continue à gauche en – 2, mais f est discontinue à droite en – 2 donc f est discontinue en – 2.

   b) f est continue en – 1.
   c) f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$ et $]-2, +\infty[$.
   d) $f(]-\infty, -1]) = [1, 2[$; $f([-1, +\infty[) = [0, 1]$.
   e) L'équation $f(x) = k$ admet des solutions lorsque $k \in [0, 2[$.

Exercice n°2 :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2+1}$$

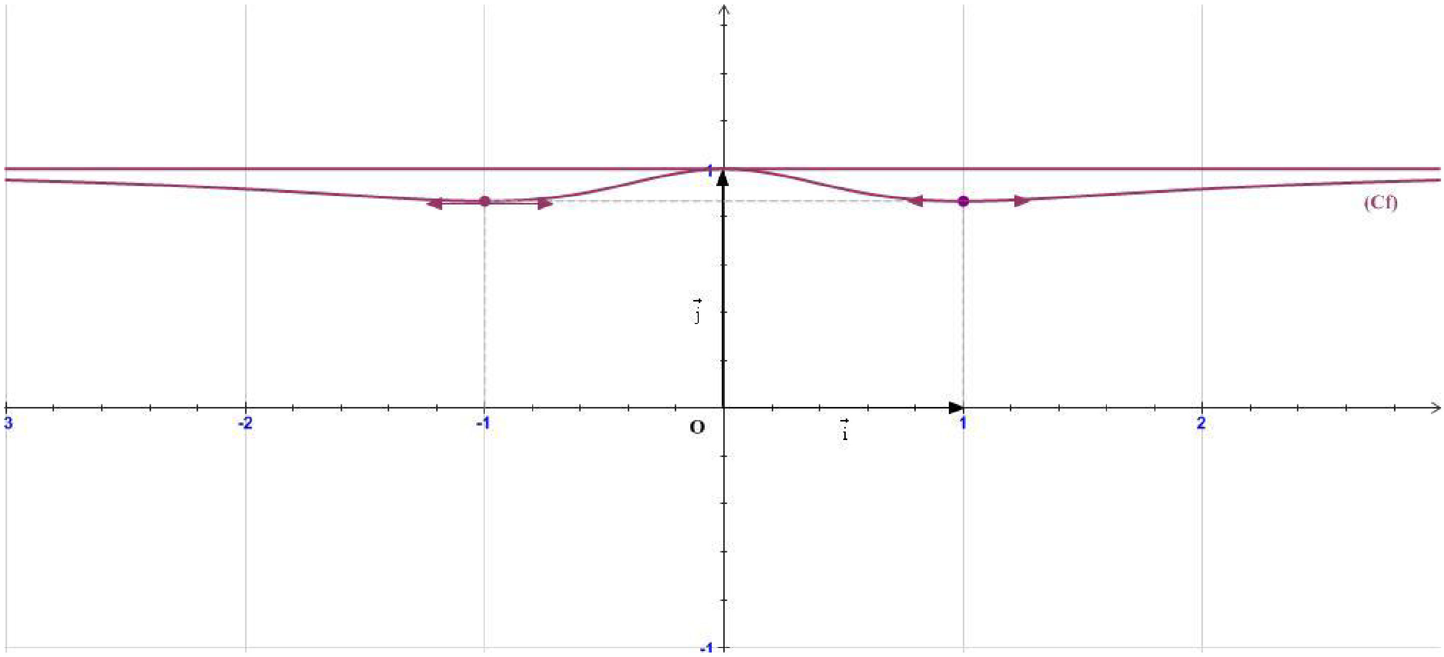
1. $x^4+x^2+1\ge 1>0,\ \forall\ x\in IR$ et $x^2+1\ne 0,\ \forall\ x\in IR \Rightarrow D_f = IR$.
2. Continuité de f sur IR :

   $\left(x\overset{u}{\mapsto} x^4+x^2+1\right)$ est continue et positive sur IR, comme étant une fonction polynôme $\Rightarrow \sqrt{u}$ est continue sur IR.

   $\left(x\overset{v}{\mapsto} x^2+1\right)$ est continue et non nulle sur IR $\Rightarrow f=\dfrac{\sqrt{u}}{v}$ est continue sur IR.

3. Soit $x \in$ IR, - $x \in$ IR et on a : $f(-x) = \dfrac{\sqrt{(-x)^4 + (-x)^2 + 1}}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1} = f(x) \Rightarrow f$ est une fonction paire.

(C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



4. a) Montrons que pour tout réel x, on a : $f(x) \le f(0)$.

Puisque $f(0) = 1$, donc il suffit de montrer que : $\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \le x^2 + 1$

$\left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right)^2 - (x^2 + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 - x^4 - 2x^2 - 1 = -x^2 \le 0, \ \forall \ x \in IR$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right)^2 \le (x^2 + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \le x^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1} \le 1$

Ainsi : 1 est un maximum de f en 0.

b) Montrons que pour tout réel x, on a : $f(x) \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$[f(x)]^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{4x^4 + 4x^2 + 4 - 3x^4 - 6x^2 - 3}{4\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)} = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{4\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)} = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{4(x^2 + 1)^2} \ge 0$

$\Rightarrow f(x) \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \ \forall \ x \in$ IR

Ainsi : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est un minimum de f en 1 et – 1.

5. f(IR) = [min$f$, max$f$] = $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

Exercice n°5 :

f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.

On pose $g(x) = f(x) - x$.

- g est continue sur [0, 1], comme étant somme de deux fonctions continues.
- $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f([0, 1]) = [0, 1]$
  D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a : l'équation $g(x) = 0$ admet aux moins une solution dans [0, 1].
  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.