Exercice n°1 :

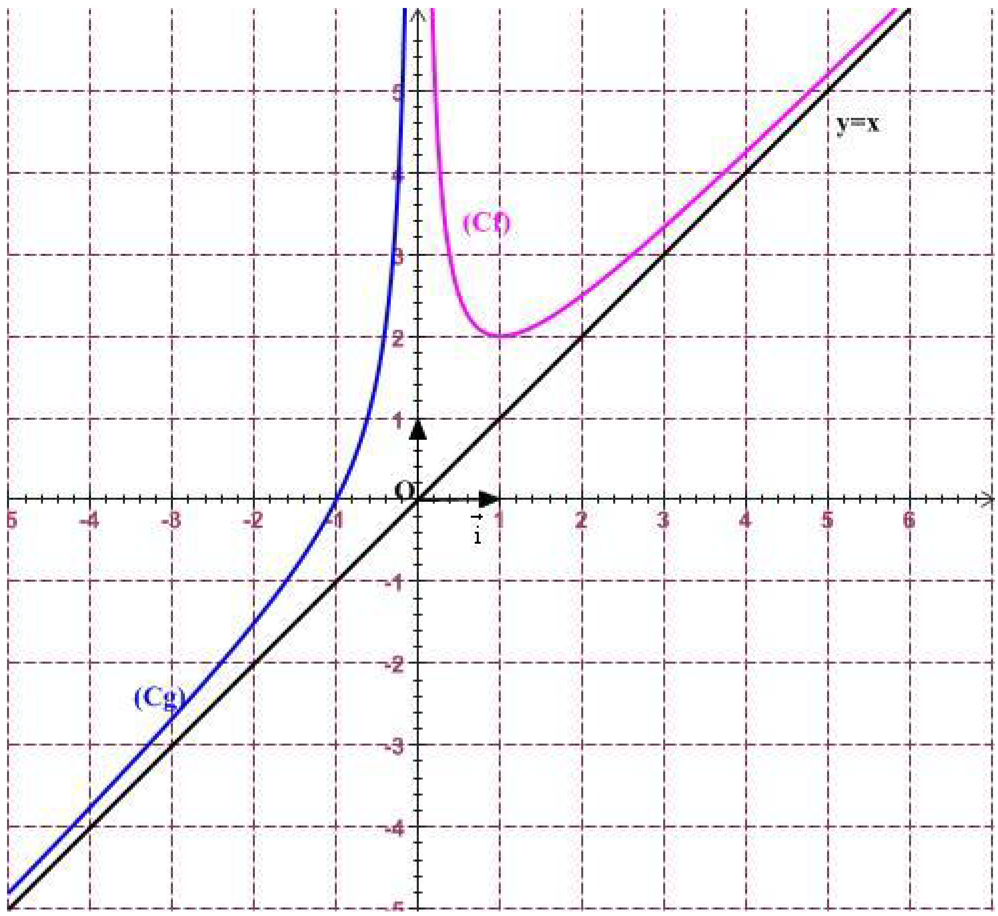
On considère la fonction f définie par $f(x)=x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x=\frac{1}{2}$.
3. Démontrer que $f(x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; puis étudier ses variations sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°2 : ©

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=x-\frac{1}{x}$.

1. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g.
2. Montrer que f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $]0,1]$. Qu'en est il de g ?
3. Compléter les représentations graphiques de f et g dans le repère ci-dessous :

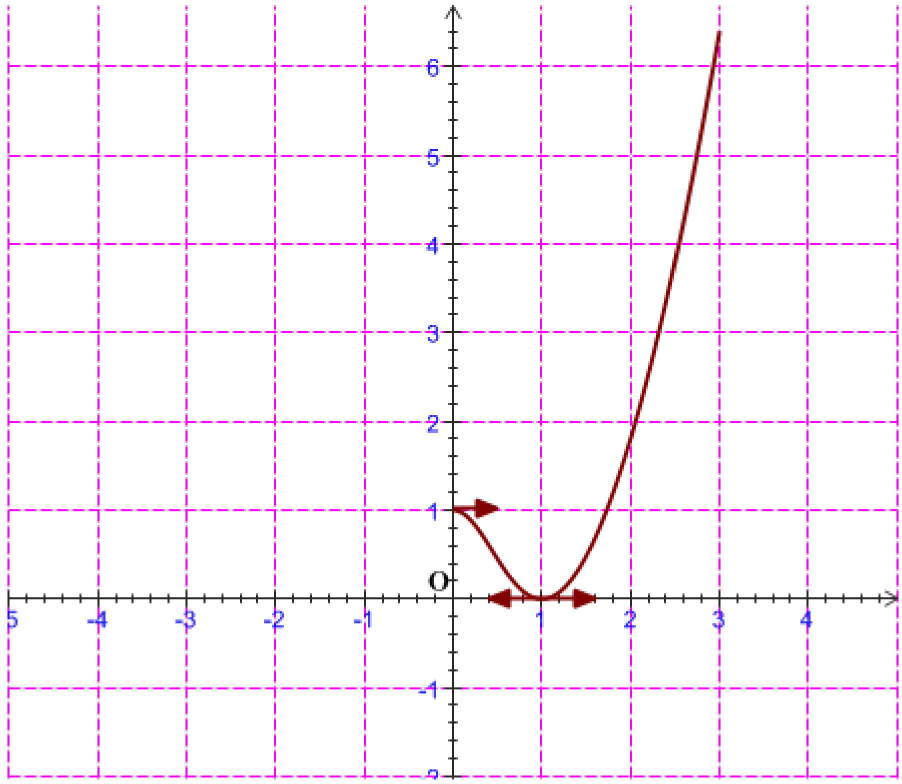


4. Préciser si f est majorée, minorée, bornée ou non sur chacun des intervalles suivants :
$\left[\frac{1}{2},3\right]$; $[1,+\infty[$ et $]0,1]$.

Exercice n°3 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\left(1-x^2\right)^2}{1+x^2}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Minorer f sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier la parité de la fonction f.
4. Compléter la représentation graphique C_f de f sur l'intervalle $[-3,3]$.



5. Donner par lecture graphique la valeur du maximum de la fonction f sur :
   a) l'intervalle $[-1,1]$.
   b) l'intervalle $[-2,1]$.
6. Résoudre l'inéquation $f(x)\leq 1$.

Exercice n°2 :

1. Parité de f : $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in IR^*$

   Soit $x \in IR^*$, $-x \in IR^*$ et on a : $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$

   $\Rightarrow f$ est une fonction impaire.

   Parité de g : $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \in IR^*$

   Soit $x \in IR^*$, $-x \in IR^*$ et on a : $g(-x) = -x - \frac{1}{-x} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -g(x)$

   $\Rightarrow$ g est une fonction impaire.

2. Soient a et b deux réels non nuls tels que $a <$ b.

   $$f(b) - f(a) = b + \frac{1}{b} - a - \frac{1}{a} = b - a + \frac{a-b}{ab} = \underbrace{(b-a)}_{>0}\left(1 - \frac{1}{ab}\right)$$

   - Si a et b $\in [1, +\infty[$ alors $ab > 1 \Rightarrow \frac{1}{ab} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{ab} > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$

     $\Rightarrow f(b) > f(a) \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

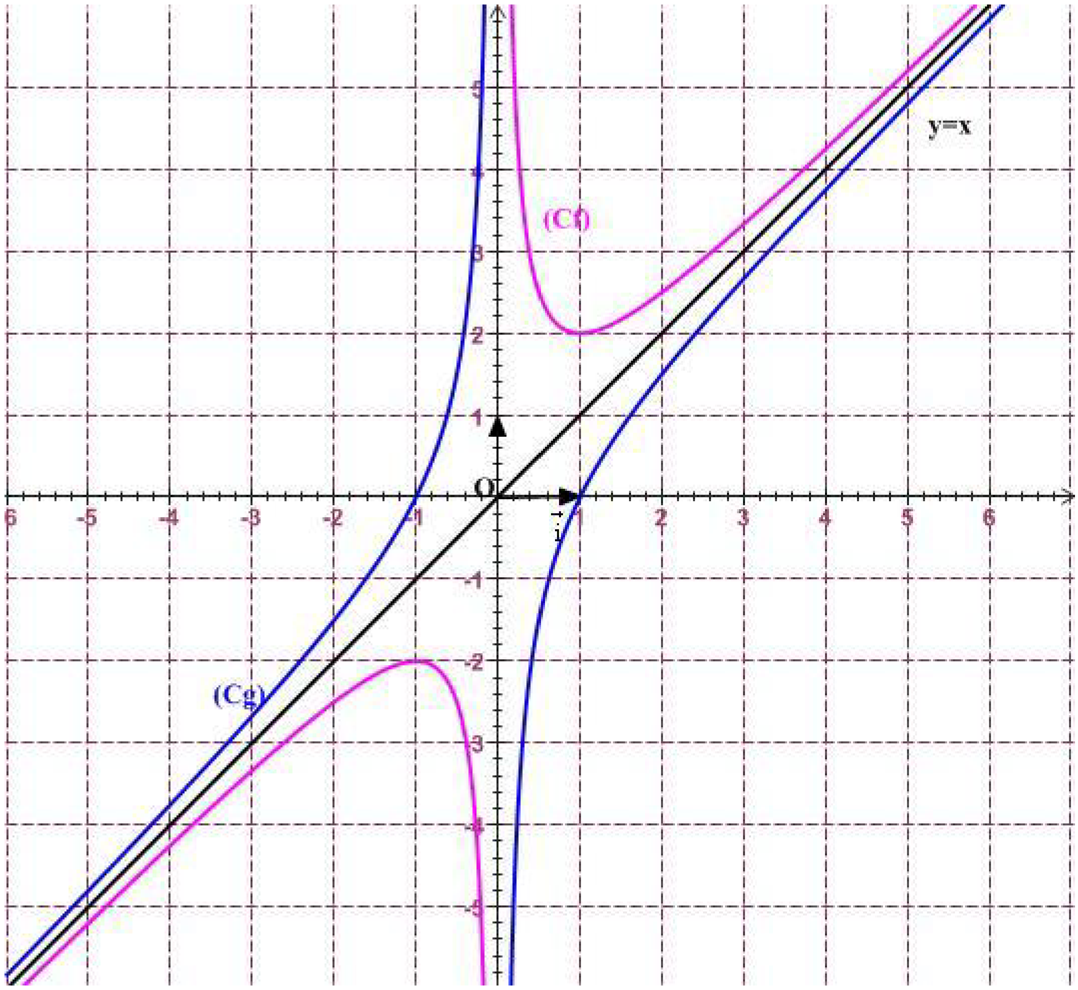
   - Si a et b $\in]0, 1]$ alors $ab < 1 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{ab} < 0 \Rightarrow f(b) - f(a) < 0$

     $\Rightarrow \Rightarrow f(b) < f(a) \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

   Pour la fonction g, le cas est beaucoup plus simple.

   En effet : $g(x) = x - \frac{1}{x}$ c'est la somme de deux fonctions croissantes sur IR* donc g est une fonction croissante sur IR*.

3. f et g sont deux fonctions impaires sur IR* donc leurs courbes sont symétriques par rapport à l'origine du repère.



4. $f\left(\left[\frac{1}{2},3\right]\right)=\left[2,\frac{10}{3}\right]$; $f\left(\left[1,+\infty\right[\right)=\left[2,+\infty\right[$; $f\left(\left]0,1\right]\right)=\left[2,+\infty\right[$.