

Lycée Secondaire SBH Akouda	Devoir de Contrôle	Prof: Mr BEN SAAD Mohamed Ali
2009 - 2010	N°: 2	4 ^{eme} maths Durée: 2H

Exercice 1: (8 points)

I-1) Etudier le sens de variation de la fonction φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = t(1-t)$

2) En déduire que pour tout réel $t \in [0,1]$ $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{4}$

II- On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$

et la fonction G définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = F\left(\frac{1 - \tan x}{2}\right)$

1) Vérifier que la fonction F est bien définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} , et déterminer sa fonction dérivée.

2) Vérifier que $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F(1)$

3) Calculer $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$

4) a- Déterminer $G'(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

b- Démontrer que pour tout réel $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $G(x) = -x + F(1) - \frac{\pi}{4}$

5) Démontrer que : $\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{\pi}{2}$

III- On considère la suite (I_n) définie par : $I_0 = 1$ et

pour tout n entier naturel non nul $I_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$

1°) Calculer I_1

2°) a- Démontrer que pour tout entier naturel n $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$

b- En déduire que la suite (I_n) est convergente et déduire sa limite.

3°) On considère la suite (U_n) définie par : pour tout entier naturel non nul n

$$U_n = \sum_{k=1}^n 2^k I_k$$

a- Démontrer que pour tout réel $t \in [0,1]$ et tout entier naturel n non nul

$$2t(1-t) + 2^2 t^2 (1-t)^2 + \dots + 2^n t^n (1-t)^n = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}$$

b- En déduire :

$$\text{Pour tout entier non nul } n \quad \left| U_n - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

4°) Démontrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 2: (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit (\mathcal{P}) La parabole de foyer O et de directrice D d'équation $x = -2$

1) a) Montrer qu'une équation cartésienne de (\mathcal{P}) est $y^2 = 4x + 4$

b) Tracer la parabole (\mathcal{P}) , on désignera par S son sommet.

2) Soit le point A $(-2, \frac{3}{2})$

a) Déterminer, par leurs équations, les tangentes à (\mathcal{P}) issues de A. On notera T_1 et T_2 ces tangentes, M_1 et M_2 leurs points de contact respectifs avec (\mathcal{P}) .

b) Tracer T_1 et T_2 , montrer qu'elles sont perpendiculaires et que les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

3) Soit M un point de (\mathcal{P}) d'affixe $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$

a) Prouver que : $\theta \notin 0[2\pi]$

b) Montrer que : $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$

Exercice 3: (6 points)

Soit ABCD un parallélogramme de centre I tel que : $CB = 2CD$.

1°) Soit f la similitude indirecte qui transforme D en C et C en B.

a- Montrer que f admet un seul point invariant Ω .

b- Vérifier que fof est une homothétie que l'on caractérisera.

c- Dédurre que $\overrightarrow{D\Omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

d- Soit O le centre de gravité du triangle ACD. Montrer que $D = \Omega * O$. Construire Ω .

e) Prouver que l'axe Δ de f est la médiatrice de $[OC]$.

2°) Soit $g = f \circ S_{(OC)}$

a) Montrer que g est une homothétie dont on déterminera le rapport.

b) déterminer l'image de Δ par g.

c) Montrer que le centre de g est le point d'intersection de Δ et de (BC)