

**Exercice 1 :** ( 4 points ) Répondre par vrai ou faux

1/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit  $f$  la transformation qui à  $M(z)$  associe  $M'(z')$  telle que  $z' = (1+i)\bar{z} + i$  et  $\Omega(-1)$

$f$  est la composée de l'homothétie  $h(\Omega, \sqrt{2})$  et de la symétrie  $S$  d'axe  $(O\Omega)$

2/ Toute similitude directe admet un seul point invariant

3/  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+2) - x\sqrt{x}) = -\infty$

4/  $f: x \rightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$  admet un maximum en  $e^2$  sur  $]0, +\infty[$

**Exercice 2 :** ( 8 points )

On donne dans le plan orienté un triangle IFJ tel que  $FJ = 2FI$  et  $(\vec{FI}, \vec{FJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

Soit  $A$  le milieu de segment  $[IJ]$ , la perpendiculaire à  $(AF)$  en  $F$  coupe les médiatrices de  $[IF]$  et  $[FJ]$  respectivement en  $B$  et  $C$ , on pose  $H = J * C$

1) Soit  $S$  la similitude directe qui transforme  $B$  en  $A$  et  $I$  en  $J$ .

a) Vérifier que  $IBA$  est rectangle en  $I$  et déduire l'angle de  $S$ .

b) Montrer que  $\text{tg}(\widehat{IJF}) = \frac{IB}{IA}$  en déduire que  $S$  a pour rapport  $2$ .

c) Montrer que  $F$  est le centre de  $S$

d) Déterminer  $S((AB))$  et déduire que  $S(A) = J$

2/ a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $f$  qui transforme  $J$  en  $I$  et  $C$  en  $J$ .

b) Montrer que  $f$  est une symétrie glissante que l'on caractérisera

c) Vérifier que  $f(H) = A$

3/ a) Déterminer la nature de  $g = S \circ f$

b) Montrer que  $g$  admet un centre que l'on Déterminera.

c) Préciser alors la forme réduite de  $g$

**Exercice N 3:** ( 3 points )

1/ Etudier et tracer dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  la fonction  $f: x \rightarrow x \ln(x+1)$  sur  $[0, +\infty[$

2/ Montrer que  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = -\frac{1}{2} + \text{Log } 2$ .

3/ En déduire l'aire de la partie du plan limitée par  $C_f$  et la droite des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$

**Exercice N 4:** ( 5 points )

Soient  $U_n = \int_0^1 x^n \text{Log}(1+x) dx$  et  $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$

1/ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq U_n \leq \frac{\text{Log } 2}{n+1}$  puis déterminer  $\lim U_n$

2/ On pose  $S_n(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$  avec  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a/ Montrer que  $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$  et que  $V_n = \text{Log } 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

b/ En déduire  $|V_n - \text{Log } 2| \leq \frac{1}{n+2}$ , puis déterminer  $\lim V_n$

3/ a/ En utilisant une intégration par parties montrer que :  $U_n = \frac{\text{Log } 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\text{Log } 2 - V_n)$ .

b/ En déduire que la suite  $((n+1)U_n)$  est convergente et calculer sa limite.