Lycée rue : Fattouma Bourguiba	Devoir de contrôle n° : 2 — 4 M_{1-2}
Monastir	MATHEMATIQUES
Proposé par : Zemni - Abbes	Le 3/2/2010 — DUREE : 2heures

Exercice 1 : (3 points)
Dans chacun des questions suivantes une seule des trois proposition est correcte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre la réponse choisie .

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{2}{x}) =$

a) 0 b) 1 c) 2 .

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\ln(\frac{x}{3})} =$

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) 3.

3) Soit f l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = 2\bar{z} - 1 + 3i$.

a. f est une homothétie de rapport 2 et de centre $I(1+i)$.
b. f est similitude indirecte de rapport 2, de centre $I(1+i)$ et d'axe $\Delta : x+y-1=0$
c. f est similitude indirecte de rapport 2, de centre $I(1+i)$ et d'axe $\Delta : y = 1$.

4) Si f est une similitude directe de centre I de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et g est une similitude indirecte de centre I , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'axe Δ alors fog est :

a. Un déplacement . b. Une symétrie orthogonale . c. Une symétrie glissante.

Exercice 2 :(6 points)
On considère un carré ABCD de centre I et de sens direct. On pose $J = A*D$, $K = C*D$ et $C' = S_D(C)$. On désigne par R_B et R_D les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs B et D et par S_I la symétrie centrale de centre I et S_K la symétrie centrale de centre K.

1) On pose $f = R_D o S_I o R_B$.

a) Déterminer f(B).

b) Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.

2) On pose $g = f o S_{(IJ)}$.

a) Déterminer g(C) et g(D).

b) En déduire que g est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

3) a) Montrer que $S_{(AD)} o S_{(CD)} o S_{(IK)} o S_{(IJ)} = f$.

b) En déduire que $S_K o S_{(IJ)} = S_{(AD)} o f$.

c) Montrer que $S_{(AD)} o f$ est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 3 : (5 points)

Soit G la fonction définie sur $[0\ ,\ \frac{\pi}{2}]$ par $G(x) = \int_{1}^{1+\sin x} \sqrt{2t - t^2}dt$.

1) Montrer que G est dérivable sur $[0\ ,\ \frac{\pi}{2}]$ et déterminer $G'(x)$.

2) En déduire que pour tout $x \in [0\ ,\ \frac{\pi}{2}]$ on a : $G(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)$. (On rappelle que $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$)

3) Calculer alors $\int_{1}^{2} \sqrt{2t - t^2}dt$.

4) En effectuant une intégration par partie calculer $\int_{1}^{2} \frac{t(1-t)}{\sqrt{2t-t^2}}dt$

Exercice 4 :(6 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \tan x$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0\ ,\ \frac{\pi}{4}]$ sur $[0\ ,\ 1]$.

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0\ ,\ 1]$ et que pour tout $x \in [0\ ,\ 1]$ $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3) En déduire que : $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}$.

B/ On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0 = \int_{0}^{1} (1-t)\, dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_{0}^{1} t^{2n}\ (1-t)\, dt$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{(2n+1)\,(2n+2)}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, I_k$. Montrer que $S_n = \int_{0}^{1} \frac{1-t}{1+t^2}\left(1 - (-1)^n\, t^{2n}\right) dt$.

3) a) On pose $I = \int_{0}^{1} \frac{1-t}{1+t^2}\, dt$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I - S_n = (-1)^n \int_{0}^{1} \frac{t^{2n}\ (1-t)}{1+t^2}\, dt$.

b) Montrer que $\left|I - S_n\right| \leq I_n$.

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

BONNE CHANCE