Lycée de Tabarka	**Devoir de contrôle N°2**	Classe : $4^{ème}$ Maths
Porf: Mersani Imed	Le 02/02/2012	Durée: 2 heures

Exercice1 :(3points)

Répondre par « vrai » ou « faux » en justifiant la réponse.

1. Soit x un entier relatif. Si $x \equiv 1(\text{mod}4)$ alors $x^2 \equiv 1(\text{mod}8)$.
2. Le reste modulo 17 de 2012^{32} est égale à 1.
3. Pour tout entier naturel n, $7^{3n} - 1$ est divisible par 9.
4. $2 \times 35^{2006} - 3 \times 84^{2007} \equiv 6(\text{mod}17)$

Exercice3 :(6points)

On considère un carré ABCD de centre I et de sens direct.

On pose J = A * D, K = C * D et $C' = S_D(C)$.

On désigne par R_B et R_D les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre respectifs B et D.

1.a. Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A) = C$ et $\varphi(B) = D$.

b. Caractériser φ.

2. Soit l'application $f = R_D \circ \varphi \circ R_B$.

a. Déterminer f(B).

b. Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.

3. On pose $g = f \circ S_{(IJ)}$.

a. Déterminer g(C) et g(D).

b. En déduire que g est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

4.a. Montrer que $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = f$.

b. En déduire que $S_K \circ S_{(IJ)} = S_{(AD)} \circ f$, où S_K est la symétrie centrale de centre K.

c. Déterminer alors la forme réduite de $S_{(AD)} \circ f$.

Exercice3 :(5points)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

On a représenté dans la feuille annexe (page2 sur 2) la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a. **Par une lecture graphique,** Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Déterminer $f^{-1}(1)$.

c. Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de f^{-1} dans le même repère.

d. Expliciter $f^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$.

2. Soit F la primitive de f sur $[0, 1[$ qui s'annule en 0.

On considère la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = F(\sin^2 x)$.

a. Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$, pour tout $x \in J$.

b. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

c. Calculer alors $F(\frac{1}{2})$.

Exercice4 :(6points)

Soit f la fonction définie sur] - $\frac{\pi}{4}$, 0] par : $f(x)=\frac{1}{1+\tan(x)}$.

1.a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que f réalise une bijection de]- $\frac{\pi}{4}$, 0] sur [1, +∞[.

2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur [1, +∞[et que pour tout x ∈[1, +∞[, $(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{2x^2-2x+1}$.

3. Soit φ la fonction définie sur]-∞, 0] par : $\begin{cases}\varphi(x)=f^{-1}(\frac{x-1}{x}) \text{ si } x<0\\ \varphi(0)=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

a. Montrer que φ est continue à gauche en 0.

b. Montrer que φ est dérivable sur]-∞, 0[et que pour tout x ∈]-∞, 0[, $\varphi'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2+1}$.

b. Soit x un réel de l'intervalle]-∞, 0[.

Montrer qu'il existe un réel c de]x, 0[tel que $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\frac{-1}{(c-1)^2+1}$

En déduire que φ est dérivable à gauche en 0 et déterminer $\varphi'_g(0)$.

4. Dresser le tableau de variation de φ et tracer sa courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(On précisera la demi tangente à (Γ) au point d'abscisse 0).

……

Exercice3:

Non : **Prénom :** **N° :**