L.Ibn Khaldoun Jammel	Devoir de Contrôle n°2	Mr :Afli Ahmed
$4^{ème}$M	Mathématiques	Le 13/02/2015

❖ Exercice n°1 :

On considère dans un plan orienté un rectangle OABC tel que OA = 2OC et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On pose : I = O * A et J = B * C. La perpendiculaire menée de I à la droite (OB) rencontre (BC) en un point D.

Soit S la similitude directe tel que S(O) = I et S(A) = J.

1. Déterminer le rapport K et l'angle θ de S.
2. Déterminer S(B) en utilisant les images des droites (OB) et (AB) par S.
3. Construire alors le point E = S(C).
4. a. Montrer que S ∘ S(O) = O' où O' est le centre du rectangle OABC .

   b. En déduire que le centre w de S est le point d'intersection des droites (OB) et (ID).
5. Soit σ la similitude indirecte de centre w transformant I en O.

   a. Déterminer le rapport de σ et montrer que σ a pour axe la médiatrice de [IH] ou H = O * w.

   b. Soit f = S ∘ σ. Déterminer la nature de f et la caractériser géométriquement.

❖ Exercice n°2 :

1. Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[$par : g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2}$

   a. Dresser le tableau de variation de g .

   b. Calculer g(1). En déduire le signe de g(x).
2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : f(x) = $\frac{2x-lnx}{2\sqrt{x}}$

   a. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, f '(x) = $\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ puis dresser le tableau de variation de f.

   b. Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (**unité graphique = 2 cm**)

   c. Calculer à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale $J = \int_1^2 f(x)dx$.

   En déduire l'aire ,en cm^2 ,de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations :

   x = 1 , x = 2 et y = 0

3. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

a. Montrer que pour tout entier k tel que : $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{1+k}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

b. Montrer que : $\mathrm{J} + \frac{f(1)}{n} \leq u_n \leq \mathrm{J} + \frac{f(2)}{n}$

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

❖ Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur [0,1] par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

On a représenté, dans l'annexe à rendre avec la copie, la courbe C_f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

(**unité graphique 4cm**)

1. a. Par une lecture graphique, prouver que f est une bijection de [0,1[sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

c. Montrer que pour tout x ∈ J, $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

2. Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \int_0^{\sin^2(x)} f(t)dt$

a. Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{2}[$, $g(x) = x - \frac{1}{2}\sin(2x)$.

c. Calculer, alors, l'intégrale : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$ .En déduire l'aire de la partie hachurée.

d. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt$

Puis montrer que $\mathrm{I} = 1 - \frac{\pi}{4}$

Annexe à rendre avec la copie

Nom et Prénom :………………………………………………………