Exercice n°1 :(3 points)

1) Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste modulo 7 de 2^k

2) Déterminer le reste modulo 7 de 2011^{2015}

3) Déterminer le reste modulo 7 de $S_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$

Exercice n°2 :(4 points)

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier non nul n par :

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\ln(n+1) + \ln(n+2) + \ln(n+3) + \ldots + \ln(2n)\right] - \ln(n)$$

1)a)Calculer S_1 et S_2

b) Montrer que pour tout entier non nul n : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

2)a)Soit $n \in \mathbb{N}^*$;montrer que : $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{1+k}{n}} \ln(x)\,dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ où $0 \le k \le n-1$

b)En déduire que pour tout entier non nul n : $S_n - \frac{1}{n}\ln 2 \le \int_1^2 \ln(x)\,dx \le S_n$

3)Montrer que la suite (S_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°3 :(6 points)

Dans le plan orienté on considère un losange ABCD tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$

On désigne par E le symétrique de A par rapport à C et par F le symétrique de A par rapport à B.

Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\pi/3$

Soit S la similitude directe qui transforme D en E et C en F.

1) On pose $h = S \circ R^{-1}$

.a) Déterminé h(C) et h(B).

b) En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

2) Soit σ la similitude indirecte telle que σ(E) = C et σ(F) = B.

a) Déterminer le rapport de σ. En déduire que σ admet un centre qu'on notera Ω.

b) On désigne par Δ l'axe de σ et G le point d'intersection des droites Δ et (CE).

On pose G′ = σ(G). Montrer que $\overrightarrow{\Omega G} = 2\,\overrightarrow{\Omega G'}$

.

3) Montrer que (EF) // Δ. (Indication : si D // Δ alors S_Δ(D) // Δ)

4) Soit E′ = S_Δ(E).

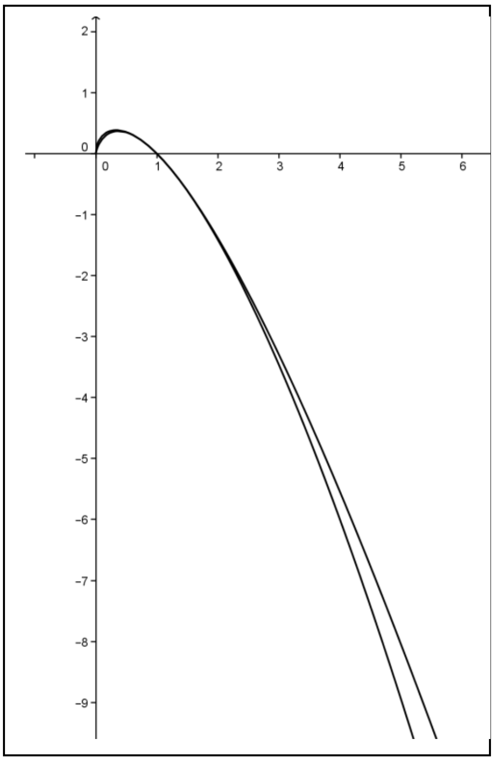
a) Montrer que G est le centre de gravit´e du triangle ΩEE′ .En d´déduire que $\overrightarrow{GE} = -2\,\overrightarrow{GC}$

b) Construire le point G, l'axe Δ et le centre Ω de σ.

<u>Exercice n°4</u> :(7 points)

On donne les fonctions f et g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{x} \quad \text{et} \quad : \quad \begin{cases} g(x) = -x\ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$



les courbes C_f et C_g sont données dans le graphique suivant :

1)a)Etudier la dérivabilité de f et g à droite en 0

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Dresser le tableau de variations de g

2) On s'intéresse dans la suite à la différence f(x) - g(x) et on se propose d'en étudier le signe. À cet effet, on pose,

pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - g(x)}{x}$.

a) Vérifier que : $\varphi(x) = \ln x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

b)Montrer que pour tout x strictement positif $\varphi'(x) = -\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2x\sqrt{x}}$.

c) Dresser le tableau de variation de φ .En déduire le signe de φ . Conclure

3) Est-ce que les courbes C_f et C_g ont même tangente au point de contact d'abscisse 1?

4) Pour tout réel a de l'intervalle$]0\,;1]$ on pose :

$$I(a) = \int_a^1 f(x)dx \quad \text{et} \quad J(a) = \int_a^1 g(x)dx.$$

a)Calculer l'intégrale I(a) en fonction de a

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer J(a) en fonction de a.

c) Calculer : $\lim\limits_{a\to 0}(I(a) - J(a))$. Donner une interprétation géométrique de cette limite.