


Lycée secondaire Bennane-Bodheur	 4 ^{ème} Math	Durée: 2 heures
Mr : Bouhouch Ameur		Coefficient : 4

N.B : La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements ontrent pour une part importante lors de l'appréciation des copies...

Exercice n°1: (6 pts)

A) Pour tout entier naturel non nul n , soit $I_n = \int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x^2} dx$

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{ne}$ puis calculer la limite de la suite (I_n)

3) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

b) Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

B) Dans cette partie, on va démontrer que e est irrationnel.

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $V_n = U_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

1) a) Montrer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = e$.

c) En déduire que $U_n < e < V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) On suppose que $e = \frac{p}{q}$ tels que p et q sont des entiers naturels.

En utilisant l'inégalité de la question B)1)c) ; Montrer que $p \times q! - q \times q \times U_q$ est un entier appartenant à $]0;1[$ puis conclure.

Exercice n°2: (7 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la page annexe (figure n°1), on donne un losange

AOBC de centre I tel que $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et D le point tel que $D = S_O(C)$.

Soient J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BD]$.

1) Montrer que le triangle ABD est équilatéral.

2) Montrer que le point O est le centre de gravité de chacun des triangles ABD et IJK .

3) a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui transforme A en O et C en D .

b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4) Soit g la similitude indirecte tels que $g(A)=K$ et $g(B)=I$.

- a) Montrer que le rapport de g est égal à $\frac{1}{2}$.
- b) Déterminer l'image du triangle ABD par g et déduire que O est le centre de g .
- c) Déterminer et construire l'axe Δ de g .
- 5) Soit la transformation $S = \text{gof}$.
- a) Déterminer $S(A)$ et $S(C)$.
- b) Montrer que S est une homothétie et préciser son rapport.
- c) Construire le centre Ω de S .

Exercice n°3: (7pts)

A) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(0) = 0$ et $g(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ si $x > 0$

On désigne par sa courbe représentative **(C)** dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Montrer que g est continue à droite en 0 .
- 2) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 . Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

B) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f_k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_k(0) = 0$ et $f_k(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{x+k}\right)$ si $x > 0$.

On désigne par sa courbe représentative **(C_k)** dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Montrer que **(C_k)** est l'image de **(C)** par l'homothétie h de centre O et de rapport k .
- 2) Déduire, alors (sans utiliser l'expression de f_k) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = -k$ et donne une interprétation Graphique de ce résultat.
- 3) On a tracé dans la page annexe (figure n°2) la courbe représentative **(C_{k₀)}** d'une fonction f_{k_0} .
 - a) Par une lecture graphique, déterminer la valeur de k_0 .
 - b) Tracer alors la courbe **(C)** à partir de **(C_{k₀)}**.
- 4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe **(C)**, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e-1}$ et $x = 1$.

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A = 1 - \frac{1}{2} \cdot \ln(e-1) - \frac{e}{2(e-1)^2}$ (u.a)

- 5) **Facultatif** : Soit (Γ) la courbe de fonction réciproque g^{-1} de g . Montrer que **(C_k)** est l'image de (Γ) par une similitude qu'on caractérisera.

BON TRAVAIL

Nom et Prénom :

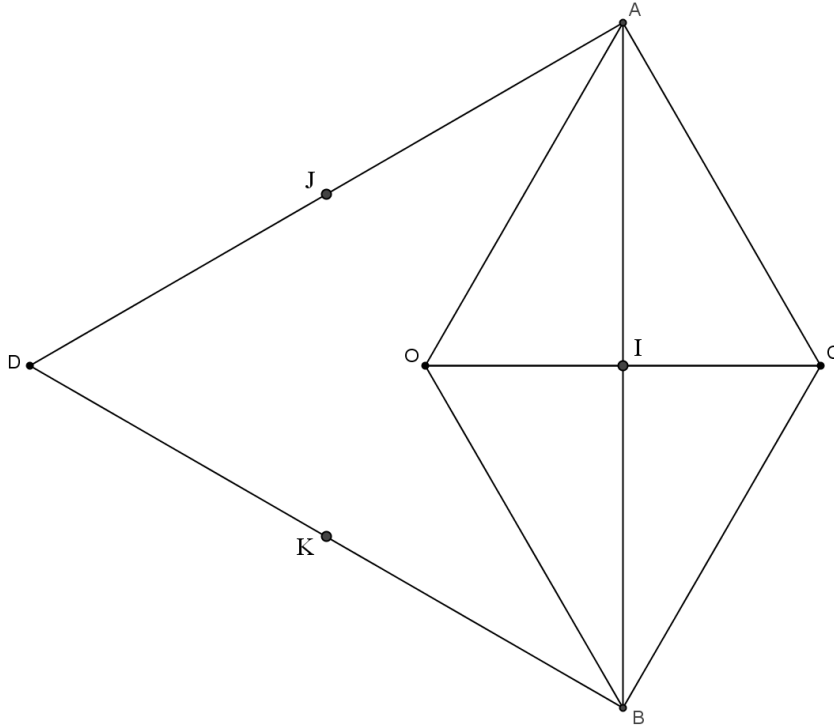


Figure n°1

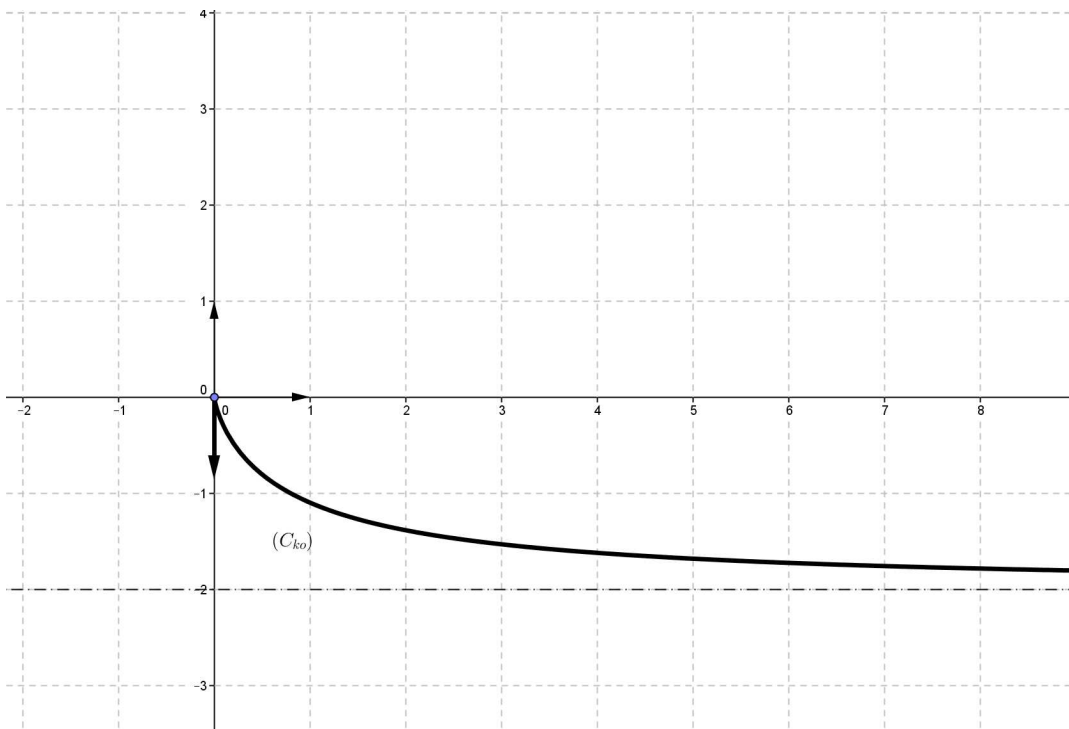


Figure n°2