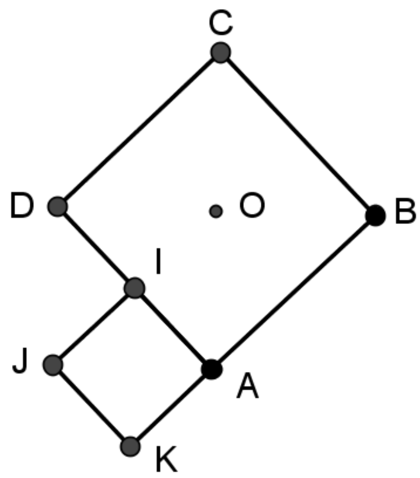
LYCEE IBN-ALHAITHEM BEN GARDENE		PROF : NOBBIGH Dhaou
	DEVOIR DE CONTROLE N°02	
MATHEMATIQUES	$4^{ème}$ MATHS 1	A S : 2015-2016 *** DUREE : 2heures

Le sujet comporte 2 pages

EXERCICE 1 **7 points**

Soient ABCD et AIJK deux carrés directs tels que $I = A * D$.

Soit O le centre de ABCD.



1) Soit f la similitude directe de centre A telle que : $f(D) = C$.
   a) Préciser le rapport et l'angle de f.
   b) Déterminer $f(K)$ et $f(J)$.
2) Soit g la similitude directe telle que : $g(K) = D$ et $g(J) = C$.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de g.
   b) Montrer que $f \circ f = g$.
   c) En déduire que A est le centre de g.
3) Soit R la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   a) Montrer que $h = g \circ R$ est une homothétie dont-on précisera le rapport.
   b) On note Ω le centre de h. Montrer que $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega C} = \vec{0}$.
4) Soit σ la similitude indirecte telle que : $\sigma(I) = D$ et $\sigma(J) = C$. On pose $\varphi = h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)} \circ \sigma$.
   a) Donner le rapport de σ.
   b) Préciser $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$ puis caracteriser φ.
   c) Donner alors le centre et l'axe de σ.

EXERCICE 2 **8 points**

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + \ln(x^2 - 2x + 2)$. On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I) 1) a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   b) Montrer que la droite $D : x = 1$ est un axe de symétrie pour ζ.
   c) Montrer que ζ admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$ au voisinage de $(+\infty)$.

2) a) Etudier les variations de la fonction h définie sur IR par $h(x) = f(x) - x$.
   b) En déduire que $A(1; 1)$ est l'unique point d'intersection de ζ et la droite $\Delta : y = x$.

3) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On désigne par ζ' la courbe de g.

4) Tracer dans le même repère D, Δ, ζ et ζ'.

II) Soit F la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x)=\int_1^{1+\tan(x)}\frac{1}{t^2-2t+2}dt$.

1) a) Montrer que F et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $F'(x)=1$.

b) Déterminer alors l'expression de $F(x)$.

c) En déduire que $\int_1^2\frac{1}{t^2-2t+2}dt=\frac{\pi}{4}$.

d) Calculer alors $I=\int_1^2\frac{t^2-t}{t^2-2t+2}dt$. (En remarquant que $\frac{t^2-t}{t^2-2t+2}=1+\frac{t-1}{t^2-2t+2}-\frac{1}{t^2-2t+2}$)

2) On note D la partie du plan limitée par ζ , ζ' et les droites d'équations respectives $x=2$ et $y=2$.

a) Hachurer D.

b) Par une intégration par parties, montrer que $\int_1^2 f(t)dt=1+2\ln(2)-2\times I$.

c) Calculer alors l'aire $\mathcal{A}$ de la partie D.

EXERCICE 3 **5 points**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, On pose $I_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_1^e(\ln x)^n dx$.

1) a) Montrer que $0\le\int_1^e(\ln x)^n dx\le e-1$ et que $|I_n|\le\frac{e-1}{n!}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

2) a) Montrer que $I_1=-1$.

b) Par une intégration par parties, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1}=I_n+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\times e$.

3) Dans la figure ci-contre le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe d'équation $y=1+(\ln x)^2, x\in[1,e]$ autour de l'axe (Ox).

a) Calculer I_2 , I_3 et I_4.

b) Calculer alors le volume $\mathcal{V}$ du solide (S).