

Exercice 01 : (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la courbe \mathcal{H} d'équation $9x^2 - 16y^2 = 144$

- 1) Montrer que \mathcal{H} est une hyperbole dont on déterminera l'excentricité e , les foyers et les directrices associées et une équation de chacune de ses asymptotes Δ et Δ'
- 2) Soit M_0 le point de \mathcal{H} d'abscisse $4\sqrt{2}$ et d'ordonnée y_0 positive
 - a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à \mathcal{H} en M_0
 - b) (T) rencontre Δ en I et Δ' en J. Montrer que M_0 est le milieu de $[IJ]$

Exercice 02 : (8 points)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $AC = 1$

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$ et par J le milieu de $[AC]$

- 1) Soit f la similitude directe qui envoie C en A et B en C
 - a) Déterminer l'angle de f
 - b) Soit O le centre de f . Montrer que O est le projeté orthogonal de C sur (AB)
 - c) Déterminer le rapport de f
- 2) Déterminer $f(I)$
- 3) Soit φ la similitude indirecte de centre A et qui transforme C en B
 - a) Déterminer le rapport de φ
 - b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\psi = \varphi \circ f$
- 4) On pose $\sigma = f \circ S_{(CO)}$ où $S_{(CO)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (CO)
 - a) Préciser la nature de σ et donner son rapport
 - b) Soit Δ l'axe de σ et C' le point tel que $\overline{OC'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{OC}$
Prouver que Δ est la médiatrice du segment $[C'A]$
- 5) Soit E l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 - a) Montrer que $R = (C, \overline{CA}, \overline{CE})$ est un repère orthonormé direct du plan
 - b) Déterminer l'affixe de B dans le repère R
 - c) Déterminer l'écriture complexe de f
 - d) En déduire l'affixe de O centre de f

Exercice 03 : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = x^2 \sqrt{4-x^2}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0;2[$ et que $f'(x) = \frac{x(8-3x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$ pour tout x de $[0;2[$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Construire la courbe représentative \mathcal{C} de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

2) Calculer le volume v du solide obtenu par rotation de \mathcal{C} autour de l'axe $(O; \vec{i})$

3) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{4-t^2}} dt$

4) Soit F la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \int_0^{2\sin x} \frac{t^4}{\sqrt{4-t^2}} dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et que $F'(x) = 16\sin^4 x$, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

b) Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$

c) En déduire que $F(x) = 6x - 4\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x$, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

d) Détermine alors la valeur de $\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{4-t^2}} dt$ puis déterminer \mathcal{A}