| Lycée Tahar Sfar Mahdia | **Devoir de contrôle n° 2** <br> Mathématiques | Niveau : 4 ème Math |
|---|---|---|
| Date : 18 / 02 / 2017 | Profs : SAIDI . A & MEDDEB . T | Durée : 2 heures |

## Exercice n°1 : (8 pts )

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\ ;\ 1[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par $C$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Montrer que $f$ est dérivable sur $[0\ ;\ 1[$ et que $f'(x)=\dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

$b/$ Montrer que $f$ est une bijection de $[0\ ;\ 1[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.

On désigne par $C'$ la courbe représentative de $f^{-1}$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$c/$ Tracer $C$ et $C'$. On précisera $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2) Soit $F$ la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$a/$ Montrer que $F$ est dérivable sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer $F'(x)$.

$b/$ En déduire que $F(x)=x$, pour tout $x\in\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

3) Soit $(I_n)$ la suite définie sur $IN$ par : $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$a/$ Calculer $I_0$.

$b/$ Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)$.

$c/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, on a : $0\le I_n\le\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) $a/$ Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout $n\in IN$, on a :

$$I_{n+1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+(2n+1)\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

$b/$ En déduire que : $(2n+2)I_{n+1}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+(2n+1)I_n$, pour tout $n\in IN$.

$c/$ Calculer $I_1$.

5) $a/$ Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par les courbes $C$, $C'$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$b/$ En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f^{-1}(x)\,dx$.

## Exercice n°2 : (6 pts )

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $(\mathcal{P})$ l'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ du plan tel que : $y^2+4x=0$.

1) $a/$ Montrer que $(\mathcal{P})$ est une parabole et préciser ses éléments caractéristiques.

$b/$ Tracer $(\mathcal{P})$.

2) Pour tout réel $\theta\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on considère le point $M_\theta\left(-1-\tan^2\theta\,;\frac{2}{\cos\theta}\right)$.

$a/$ Vérifier que $M_\theta\in(\mathcal{P})$.

$b/$ Soit $T$ la tangente à $(\mathcal{P})$ en $M_\theta$. Montrer que $T$ a pour équation : $y=-x\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta}$.

$c/$ La droite $T$ coupe les axes $\left(O,\vec{i}\right)$ et $\left(O,\vec{j}\right)$ respectivement en $P$ et $N$.

Déterminer en fonction de $\theta$ les coordonnées de $P$ et $N$.

$d/$ Déterminer en fonction de $\theta$ l'aire $\mathcal{A}_\theta$ du triangle $FPN$, où $F$ désigne le foyer de $(\mathcal{P})$.

$e/$ Pour quelles valeurs de $\theta$ l'aire $\mathcal{A}_\theta$ est-elle minimale ?

3) On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit $V$ le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\widehat{OM_0}$ de la courbe $(\mathcal{P})$ autour de l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$. Calculer $V$.

## Exercice n°3 : (6 pts )

Dans le plan orienté dans le sens direct, On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB=2AD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs de $[AB]$, $[ID]$ et $[AD]$.

1) Soit $S$ la similitude directe qui transforme $B$ en $I$ et $I$ en $D$.

$a/$ Déterminer l'angle $\theta$ et le rapport $k$ de $S$.

$b/$ Soit $\Omega$ le centre de $S$, montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega D}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que $\Omega D=2\Omega B$. Préciser alors $\Omega$.

2) Soit $S'$ la similitude directe de centre $I$ qui transforme $D$ en $A$.

$a/$ Déterminer la forme réduite de $S'$.

$b/$ Déterminer $S'\circ S(B)$ et caractériser $S'\circ S$.

3) Soit $\psi$ la similitude indirecte qui transforme $A$ en $I$ et $K$ en $J$.

$a/$ Montrer que $D$ est le centre de $\psi$.

$b/$ Déterminer le rapport de $\psi$ et construire son axe Δ.

$c/$ Soit $\varphi = S^{-1}\circ\psi$, montrer que $\varphi$ est un antidéplacement que l'on caractérisera.

*Bonne chance*