

Exercice n°1) (4 points)

Dans l'annexe ci-jointe figure 1 on a représenté la courbe de la fonction réciproque d'une fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , la tangente à $\zeta_{f^{-1}}$ au point d'abscisse 0 et l'asymptote de $\zeta_{f^{-1}}$ la droite d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$. La courbe de f^{-1} admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$. Par une lecture graphique répondre aux questions suivantes :

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f^{-1} et préciser $f(1)$
- 2) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- 4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{x - \frac{\pi}{2}}$
- 5) Tracer la courbe de f dans le même repère que $\zeta_{f^{-1}}$

Exercice n°2) (6 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct on considère un triangle ABC rectangle en C et tel que $(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AC = 2BC$. On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit $E = r^{-1}(B)$ et $D = r(C)$.

On note I le milieu de [CD] et J le milieu de [AC] voire figure 2.

- 1) a-Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A)=D$ et $f(C)=A$.
b-Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .
- 2) Soit $g = f \circ r$
a-Montrer que g est une translation dont on précisera le vecteur.
b-Soit $F=g(E)$. Montrer que $f(B)=F$ et placer le point F sur la figure 2 et déduire la nature du triangle BIF.
c-Montrer que les points C, A et F sont alignés.

3) On numérote le plan d'un repère orthonormé direct (C, \vec{CJ}, \vec{CB}) .

Soit $h = S_{(BC)} \circ R_{(I, \frac{\pi}{2})}$

a-Montrer que h est une symétrie glissante.

b-Soit M un point du plan et z son affixe et M' l'image de M par h et soit z' l'affixe de M' . On pose $M_1 = R_{(I, \frac{\pi}{2})}(M)$ et $M' = S_{(BC)}(M_1)$ et soit z_1 l'affixe de M_1 . Montrer que $z_1 = iz - 2i$ et $z' = -\bar{z}_1$.

En déduire que $z' = i\bar{z} - 2i$

c-Soit $M'' = (h \circ h)(M)$ et z'' l'affixe de M'' et z l'affixe de M

Montrer que $z'' = z - 2 - 2i$. En déduire que $h \circ h$ est une translation et préciser son vecteur \vec{w} .

d- Soit $S = h \circ t$ où t est la translation de vecteur \vec{u} d'affixe $1+i$.

Montrer que S est une symétrie orthogonale et préciser son axe Δ

e- En déduire la forme réduite de h

4) Pour tout entier naturel n on définit une suite des points par $M_0 = C$ et $M_{n+1} = h(M_n)$ et on désigne par z_n l'affixe de M_n .

a- Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} on a : $z_{2n} = -2n - 2ni$

b- Calculer z_{2n+1}

c- En déduire que pour tout entier naturel n la droite $(M_{2n}M_{2n+1})$ admet une direction fixe.

Exercice n°2) (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt[3]{4 + 4\sin x}$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé

(O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\|\vec{i}\| = 4\text{cm}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en $-\frac{\pi}{2}$ et interpréter le résultat graphiquement.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 2]$

4) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{3x}{\sqrt{8x-x^4}}$

5) Tracer les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$

Exercice n°3) (6 points)

1) Soit u la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $u(x) = 2\cos x - 1$.

Dresser le tableau de variation de u .

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -3, 1[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{-t^2 - 2t + 3}}$.

Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1[$.

Montrer que g est une bijection de $[-1, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera et calculer $g^{-1}(x)$.

4) Soit F la primitive de f sur $] -3, 1[$ qui s'annule en 0 et G la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $G(x) = (F \circ u)(x)$.

a- Montrer que G est dérivable sur $]0, \pi[$ et calculer $G'(x)$.

b- Calculer $G\left(\frac{\pi}{3}\right)$; en déduire que pour tout x de $]0, \pi[$, $G(x) = \frac{\pi}{3} - x$.

c- Calculer $F(-1)$ et $F(\sqrt{2} - 1)$.



Feuille à rendre avec la copie

Mom :

Prénom :

Classe :

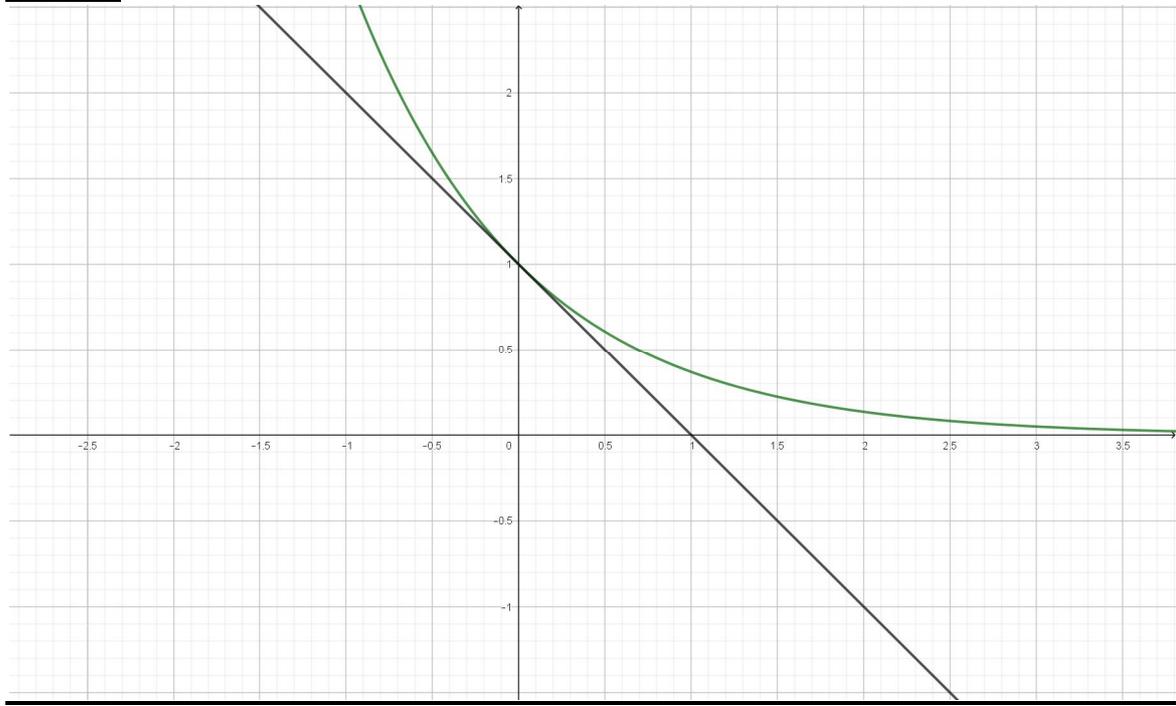


Figure 1

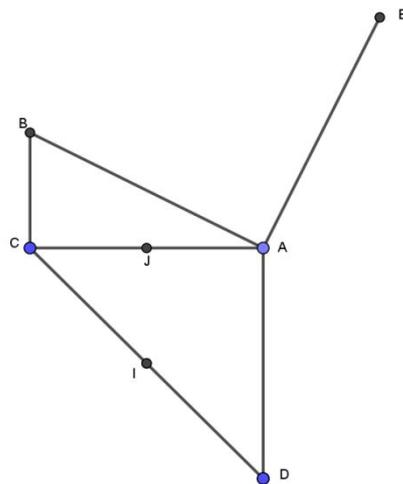


Figure 2

