Profs	*Mechmeche Imed*	*Devoir de contrôle N°2*	**Matière**	*Maths*
Lycée	*Nabhani*		**Date**	*07/12/2017*
Niveau	*4ème Maths*		**Durée**	*2 h*

Exercice 1 : (4 pts)

Donner la bonne réponse avec justification.

1) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = n^2\left(1 - cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ alors

   a) $\lim U_n = \pi^2$; b) $\lim U_n = \frac{1}{2}$; c) $\lim U_n = +\infty$

2) f est une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ on pose $U_n = n\, f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$alors

   a) $\lim U_n = 0$; b) $\lim U_n = f'(0)$; c) $\lim U_n = +\infty$

3) f est une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[0,1[$ et U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = f^{-1}\left(n\, sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ alors a) $\lim U_n = 1$; b) $\lim U_n = 0$; c) $\lim U_n = +\infty$

4) (U_n) et (V_n) sont deux suites telles que $(U_n + V_n)$ et $(U_n - V_n)$ convergent alors :

   a) (U_n) et (V_n) convergent b) (U_n) et (V_n) divergent c) on ne peut pas conclure

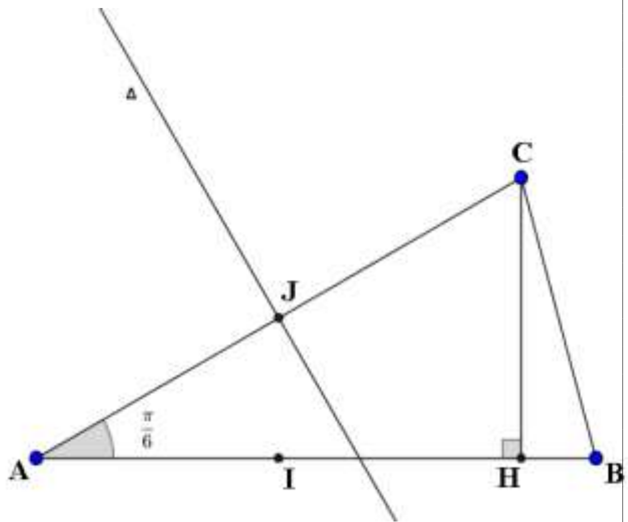
Exercice 2 : (8 pts)

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle isocèle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

I et J les milieux respectifs des segments $[AH]$ et $[AC]$

Δ est la médiatrice de $[AC]$.



1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(C) = A$ et $f(H) = J$

   b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

   c) Soit D le symétrique de H par rapport à J , montrer que $f(J) = D$

   d) Montrer que $f((AB)) = \Delta$

   e) La parallèle à (AC) passant par D coupe Δ en K, montrer que $f(I) = K$

2) Soit $g = S_\Delta \circ f$

   a) Déterminer $g(H)$ et $g(C)$

   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g

   c) Montrer alors que le triangle CIK est équilatéral

   d) on pose $f(B) = P$, montrer que $g(B) = P$ et en déduire que $P \in \Delta \cap \Delta'$ où $\Delta' = med[CB]$

   e) Soit $h = R_{\left(J, \frac{-\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{HJ}}$ montrer que $h = g$

3) Soit $L = A * D$ en utilisant le fait que $f(I) = K$ et que $h = g$ prouver que :

   a) (HJ) est la médiatrice de $[KL]$

   b) Le triangle JLK est équilatéral

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69

4) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

   a) Déterminer l'écriture exponentielle de Z_C affixe du point C

   b) Déterminer l'écriture complexe de g

   c) En déduire les coordonnées du point P

Exercice 3 : (8 pts)

1) Soit la fonction f définie sur $]0,1]$ par $f(x) = \frac{2\sqrt{1-x}}{x}$

   a) Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a dans $]0,1[$ et que $0.8 < a < 1$

   b) Montrer que f est une bijection de $]0,1]$ sur $[0, +\infty[$

   c) prouver que f^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$

   d) tracer les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé.

3) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ $\quad f^{-1}(x) = \frac{2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \begin{cases} f^{-1}(\tan x) & si \quad x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & si \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

   a) Montrer que h est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   b) Vérifier que $h(x) = \frac{2\cos x}{1+\cos x}$ pout tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   c) En déduire que h est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $h'(x)$

   d) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera

5) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$ et expliciter $(h^{-1})'(x)$ en fonction de x

Bon travail

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69