EXERCICE N : 1 (4.5 points)

Soit $f : P \to P$; $M_{(Z)} \mapsto M'_{(Z')}$ avec : $Z' = \frac{1-i}{2} Z - 2 + 2i$.

1) a) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω , le rapport et l'angle .

b) On pose M (x , y) et M' (x' , y') . Exprimer x et y en fonction de x' et y' .

2) On donne la courbe **(Γ)** d'équation : $x y - 2x - 3y - 1 = 0$ et **f (Γ) = Γ'** .

a) Montrer que **(Γ')** a pour équation : $x'^2 - y'^2 - x' + 3y' - 9 = 0$

b) Prouver que **(Γ')** est une hyperbole et donner son centre , ses foyers et ses directrices .

c) En déduire la nature de **(Γ)** et ses caractéristiques .

EXERCICE N : 2 (7 points)

Dans un plan orienté ,on considère le losange ABDC de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ 2 (2π)

où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et BC = 2 unités . **(Pour le traçage de la figure on prend $\alpha = \frac{\pi}{6}$)**

On désigne par K et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC) et par $E = S_K(O)$.

A) 1) Soit **S** la similitude directe qui transforme B en O et C en E .

a) Montrer que S a pour angle α et pour rapport $\cos\alpha$.

b) Prouver que A est le centre de **S** .

2) Soit σ la similitude indirecte telle que σ (B) = O et σ (C) = E .

a) Prouver que σ admet un centre qu'on note Ω .

b) Montrer que σ (O) = K puis déduire que $\overrightarrow{\quad K} = \cos^2\alpha \ \overrightarrow{\quad B}$.

c) Montrer que $\frac{JK}{BD} = \cos^2\alpha$ puis déduire que $\sigma \circ \sigma (D) = J$.

d) Construire Ω et l'axe Δ de σ .

B) Dans cette partie on munit le plan du repère orthonormé direct R (O , $\overrightarrow{OC}$, $\vec{\ }$) .

1) Prouver que : $Z_K = \cos^2\alpha + i \cos\alpha \sin\alpha$.

2) Montrer que : $Z_\Omega = 2 \cot^2\alpha + i \cot\alpha$.

3) On suppose que B et C sont fixes , prouver alors que lorsque α décrit $]0, \frac{\pi}{2}[$ le point Ω varie sur une parabole fixe ($\mathscr{P}$) dont on précisera le sommet , le foyer F et la directrice ($\mathscr{D}$) .

EXERCICE N : 3 (8.5 points)

Pour tout $n \in IN^*$ on note f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

On désigne par (C_n) la courbe de f_n dans le repère **orthogonal** $R(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 10$

A) 1) a) Etudier les variations de f_1 sur $[0, +\infty[$.

b) Pour tout $n \in IN^* \setminus \{1\}$, dresser le tableau de variations de f_n sur $[0, +\infty[$.

2) Pour tout $n \in IN^*$, étudier les positions relatives de (C_{n+1}) et (C_n) .

3) On a tracé dans l'annexe les courbes (C_1) et (C_3) .

a) Sans justification , graduer le repère puis nommer sur l'annexe les deux courbes .

b) Tracer **soigneusement** la courbe (C_2) ainsi que les demi-tangentes à l'origine pour chacune des trois courbes .

B) On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par : $U_n = f_n(n)$.

1) a) En utilisant les résultats de la parie **A)** démontrer que (U_n) est décroissante sur IN^* .

b) (U_n) est-elle convergente ? (Justifier votre réponse) .

2) a) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\dfrac{1}{1+t} \leq 1 - \dfrac{t}{2}$.

b) Déduire que pour tout $x \in [0, 1]$; $\ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{4}$.

c) Prouver alors que pour tout $n \in IN^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}$

3) a) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$.

b) En déduire que pour tout $IN^* \setminus \{1\}$ on a : $U_n \leq e^{-\left(1 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)}$.

4) a) Connaissons que pour tout $k \in IN^*$ et $t \in [k, k+1]$ on a : $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$,

montrer que pour tout $n \in IN^* \setminus \{1\}$ on a : $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN^* \setminus \{1\}$ on a : $U_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4}\ln(n)}$.

c) Déterminer alors la limite de la suite (U_n) .

Bonne chance

Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie