

# Devoir de Synthèse N2

## Exercice1 : ( 2 points)

Cocher les bonnes réponses

1) $e^{-2 \ln(\frac{1}{2})+1} =$	a) $\frac{-1}{4} e$	b) $4e$	c) $e$
2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-5x} =$	a) $+\infty$	b) $-\infty$	c) $0$
3) la fonction dérivée de $x \rightarrow x^2 e^x$ sur IR est	a) $x \rightarrow 2xe^x$	b) $x \rightarrow x^2 e^x$	c) $x \rightarrow (x^2 + 2x)e^x$
4) soit $I = \int_{-1}^1 \sin x (\ln x  + 1) dx$	a) $I=0$	b) $I>0$	c) $I<0$

## Exercice 2 :(4points)

Soit ABCDEFGH un cube tel que  $AB = 1$ , R le symétrique de B par rapport à A et

$$S = \{M \in \mathcal{E} \text{ tel que } \|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}\}$$

1)a) Montrer que  $\overrightarrow{DR} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

b) Montrer que S est une sphère de centre D et de rayon  $\sqrt{2}$

c) Déterminer l'intersection de S et le plan (EBG)

2) Dans la suite soit le repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

a) Déterminer les composantes de  $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}$

b) Déterminer l'aire du triangle BCE

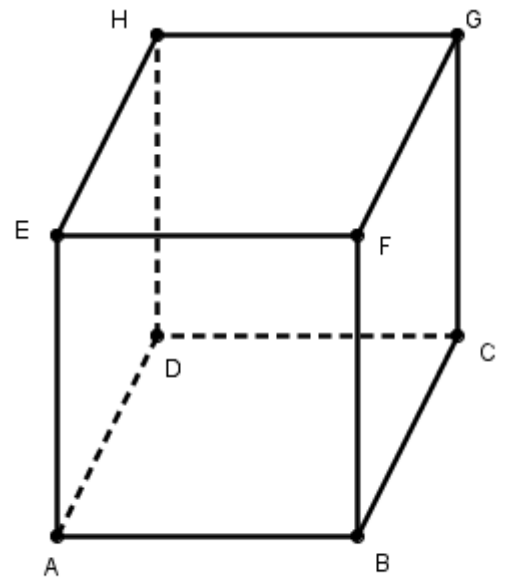
c) Déterminer le volume du tétraèdre BCEG

3)a) Ecrire une équation du plan (BCE)

b) Soit  $\Delta$  la perpendiculaire à (BCE) en E. Montrer que  $\Delta$  coupe (BCA) en R

c) Calculer la distance de D à  $\Delta$ . Que peut-on déduire pour S et  $\Delta$  ?

c) Montrer que S coupe (BCE) suivant un cercle dont on précisera les coordonnées de son centre et son rayon



### Exercice 3 : (4 points)

Dans le plan orienté, soit  $ABCD$  un rectangle de sens direct tel que  $AB = 2AD = 2$

On désigne par  $I$  et  $J$  les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[CD]$  et par  $H$  le projeté orthogonal de  $I$  sur  $(AC)$ . La droite  $(IH)$  coupe  $(CD)$  en  $E$

Soit  $S$  la similitude directe telle que  $S(A) = I$  et  $S(B) = J$

1) Déterminer le rapport et l'angle de  $S$

2) a) Déterminer  $S((AC))$  et  $S((BC))$ . En déduire que  $S(C) = E$

b) Construire le point  $D' = S(D)$

3) Soit  $\Omega$  le centre de  $S$

a) Montrer que  $\Omega$  appartient au cercle de diamètre  $[AI]$

b) Caractériser  $SoS$

c) Déterminer le point  $I' = S(I)$  et montrer que  $I'$  est le milieu de  $[AC]$

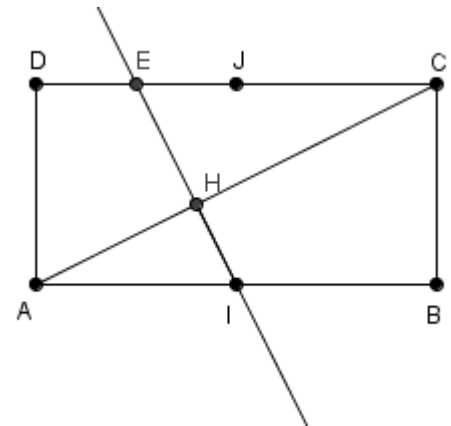
d) Montrer que  $\Omega \in (AC)$ . En déduire que  $\Omega = H$

4) Soit  $K$  le milieu de  $[CI]$  et  $\sigma$  la similitude indirecte transformant  $D$  en  $B$  et  $I$  en  $K$

Le plan est rapporté au repère  $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$

a) Déterminer la forme complexe de  $\sigma$

b) Montrer que  $C$  est le centre de  $\sigma$  et  $(IC)$  son axe



### Exercice 4 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit  $E = \{ M(x, y) \text{ tel que } x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \}$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $E$  puis tracer  $E$

2) Soit pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $F(x) = \int_0^{2\sin x} \sqrt{4-t^2} dt$

a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et calculer  $F'(x)$

b) Montrer que  $F(x) = 2x + \sin(2x)$  pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et déduire que  $\int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt = \pi$

d) Calculer l'aire de la région de du plan limitée par  $E$

e) Soit  $S$  le solide engendré par la rotation de l'arc  $\widehat{ABA'}$  de  $E$  autour de  $(o, \vec{i})$  avec  $A(2,0)$ ,  $B(0,1)$  et  $A'(-2,0)$

Déterminer le volume de  $S$

3) Soit  $E' = \{ M(x,y) \text{ tel que } 13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy - 16 = 0 \}$  et soit  $f$  l'application du plan dans lui-même qui à tout  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = (1 + i\sqrt{3})z$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$

b) Montrer que  $f(E) = E'$

c) Tracer  $E'$  dans le même repère

### Exercice 5 :(5 points)

A tout entier naturel non nul  $n$ , on associe la fonction  $f_n$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2}$

1) a) Étudier les variations de  $f_1$

b) Tracer sa courbe  $C_1$

2) a) Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et que  $(f_n)'(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^{n-1} (n - 2\ln x)}{x^3}$

b) Dresser le tableau de variation de  $f_n$  et vérifier que son maximum est  $y_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3) a) Calculer pour tout  $x > 1$ ,  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b) Montrer que  $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$  et que  $y_n \leq \frac{1}{2} y_n$

c) En déduire que  $y_{n+1} \leq \frac{1}{e^{2^n}}$  déduire la limite de  $(y_n)$

4) Soit  $I_n = \int_1^e f_n(t) dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

a) Calculer  $I_1$  à l'aide d'une intégration par parties

b) Montrer que  $0 \leq I_n \leq (e-1) y_n$  et déduire la limite de  $(I_n)$

c) Montrer que pour tout  $n > 0$ ,  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)! e}$

d) Montrer que  $I_n = I_1 + \frac{2}{e} - S_n$  et déduire la limite de  $(S_n)$

## Correction

Exercice 1 : 1)b) 2)c) 3)c) 4)a)

Exercice 2 :

1) a)  $\overrightarrow{DR} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BR} + 2\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$  ( $\overrightarrow{BR} = 2\overrightarrow{BA}$  car  $A = B^*R$ )

b)  $M \in S$  eq  $\|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}$  eq  $\|2\overrightarrow{MD}\| = 2\sqrt{2}$  eq  $MD = \sqrt{2}$  eq  $M \in S(D, \sqrt{2})$

c)  $DB = DG = DE = \sqrt{2}$  donc  $S$  coupe  $(EBG)$  suivant le cercle circonscrit au triangle  $EBG$

2) a)  $B(1,0,0), C(1,1,0), E(0,0,1), \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Aire  $(BCE) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1+0+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Volume  $(BCEG) = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}) \cdot \overrightarrow{BG}| = \frac{1}{6} (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \frac{1}{6}$  car  $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) a)  $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $(BCE)$  donc  $(BCE): x + z + d = 0$  comme  $B \in (BCE)$  donc  $d = -1$  Donc  $(BCE): x + z - 1 = 0$

b) On a  $R(-1,0,0)$  et  $\Delta$  passe par  $E$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}$  donc  $\Delta \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha + 1 \end{cases}$  et  $M(x,y,z) \in \Delta \cap (BCE)$  eq  $M(-1,0,0) = R$

c)  $d(D, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$  donc  $S$  et  $\Delta$  sont sécants

d)  $d(D, (BCE)) = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$  donc  $(BCE)$  coupe suivant un cercle de rayon  $r = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$  et de centre  $H$  le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(BCE)$

On pose  $H(x,y,z)$  on a  $H \in (BCE)$  et  $\overrightarrow{DH}$  colinéaire à  $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  on trouve  $H(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$

Exercice 3 :

1) le rapport de  $S$  est  $\frac{IJ}{AB} = \frac{1}{2}$ , son angle est  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

2) a)  $S((AC))$  passe par  $s(A) = I$  et perpendiculaire à  $(AC)$  donc  $S((AC)) = (IH)$

$S((BC))$  passe par  $s(B) = J$  et perpendiculaire à  $(BC)$  donc  $S((BC)) = (JC)$

$C \in (AC) \cap (BC)$  donc  $s(C) \in S((AC)) \cap S((BC))$  donc  $s(C) \in (IH) \cap (JC)$  donc  $s(C) = E$

b)  $D \in (AD)$  donc  $D' \in$  à la perpendiculaire à  $(AD)$  passant par  $I$  donc  $S(D) \in (AB)$

et  $D \in (CD)$  donc  $D' \in$  à la perpendiculaire à  $(CD)$  passant par  $E$  d'où la construction de  $D'$

3) a)  $S$  similitude directe d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $S(\Omega) = \Omega$  et  $S(A) = I$  donc  $(\Omega A) \perp (\Omega I)$  donc  $\Omega \in$  au cercle de diamètre  $[AI]$

b) So  $S$  est une similitude directe de centre  $\Omega$  de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$  donc  $SoS$  est une homothétie de rapport  $\frac{1}{4}$  et de centre  $\Omega$

c)  $I$  est le milieu de  $[AB]$  donc  $S(I) = I'$  est le milieu de  $[IJ]$  or  $JCIA$  est un parallélogramme donc  $I' = I^*J = A^*C$

d)  $SoS(A) = I'$  et  $SoS = h(\Omega, \frac{1}{4})$  donc  $\Omega \in (AI')$  et  $(AI') = (AC)$  donc  $\Omega \in (AC)$

On a  $\Omega \in \mathcal{C}[AI] \cap (AC)$  donc  $\Omega = A$  ou  $H$  comme  $S(A) = I$  donc  $\Omega = H$

4) Soit  $M$  d'affixe  $z$  et  $M'$  d'affixe  $z'$  image de  $M$  par  $\sigma$  donc  $z' = a\bar{z} + b$ .  $\sigma(D) = B$ ,  $\sigma(I) = K$ ,  $z_D = i$ ,  $z_B = 2$ ,  $z_I = 1$  et  $z_K = \frac{3+i}{2}$

On trouve  $a = \frac{i}{2}$  et  $b = \frac{3}{2}$

b) Le centre de  $\sigma$  a pour affixe  $\frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2} = \frac{\frac{i}{2}\bar{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = 2+i$  l'axe de  $\sigma$  port la bissectrice intérieure de  $(CB, CD)$  c'est donc  $(AC)$

#### Exercice 4 :

1)  $M(x,y) \in E$  eq  $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$  Donc  $E$  est une ellipse de sommets principaux  $A(2,0), A'(-2,0)$ ,

de sommets secondaires  $B(0,1), B'(0,-1)$  de foyers  $F(\sqrt{3}, 0), F'(-\sqrt{3}, 0)$

de directrices  $D : x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ,  $D' : x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$  et d'excentricité  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) a) Soit  $u(x) = 2\sin x$  et  $f(t) = \sqrt{4-t^2}$

$U$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $f$  est continue sur  $[-2, 2]$

donc  $F$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $F'(x) = u'(x) f(u(x)) = 4(\cos x)^2 = 2(1 + \cos 2x)$

b)  $F(x) = 2x + \sin(2x) + k$  or  $F(0) = 0$  donc  $F(x) = 2x + \sin 2x$  et

en particulier  $F(\frac{\pi}{2}) = \pi$  Donc  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-t^2} dt = \pi$

d) Soit  $A$  l'aire de la région du plan limitée par  $E$  et  $A'$  l'aire de la région limitée par  $\widehat{AB}$  de  $E$

, l'axe des abscisses et  $x=0$  or  $\widehat{AB} = Cg$  où  $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$  donc  $A = 2 \int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt = 2\pi$

e) Volume  $(S) = \pi \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \frac{\pi}{4} \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{16\pi}{12}$

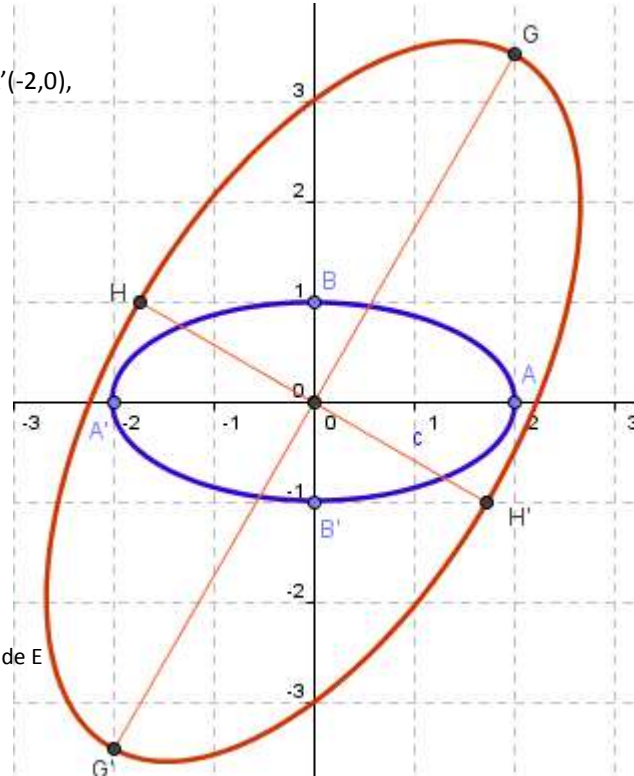
3) a)  $a = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  donc  $f$  est une similitude directe de rapport 2 d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et de centre  $O$

b) Soit  $M(x,y)$  et  $M'(x',y') = f(M)$  donc  $x' = x - \sqrt{3}y$  et  $y' = \sqrt{3}x + y$  pour montrer que  $f(E) = E'$  on peut montrer que  $f^{-1}(E') = E$

donc  $M'(x',y') \in E'$  eq  $13x'^2 + 7y'^2 - 6\sqrt{3}x'y' - 16 = 0$  eq  $13(x - \sqrt{3}y)^2 + 7(\sqrt{3}x + y)^2 - 6\sqrt{3}(x - \sqrt{3}y)(\sqrt{3}x + y) - 16 = 0$  eq

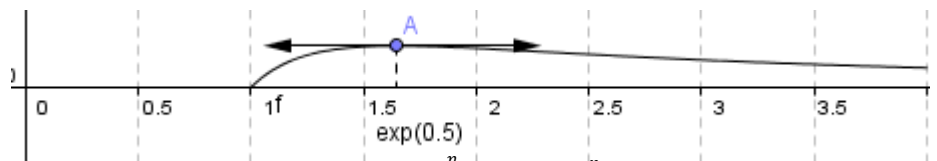
$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$  eq  $16x^2 + 64y^2 - 16 = 0$  eq  $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

c)  $E'$  est une ellipse de sommet  $G=f(A)$ ,  $G'=f(A')$ ,  $H=f(B)$  et  $H'=f(B')$



#### Exercice 5 :

1) a)  $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ,  $(f_1)'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$  b)



2)  $f_n$  atteint son maximum en  $e^{\frac{n}{2}}$  et ce maximum est égal à  $y_n = f_n(e^{\frac{n}{2}}) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln e^{\frac{n}{2}})^n}{(e^{\frac{n}{2}})^2} = \frac{1}{n!} \frac{(\frac{n}{2})^n}{e^n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3) a)  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\ln x}{n+1}$  b) pour  $x = e^{\frac{n+1}{2}}$ ,  $\frac{f_{n+1}(e^{\frac{n+1}{2}})}{f_n(e^{\frac{n+1}{2}})} = \frac{\ln(e^{\frac{n+1}{2}})}{n+1} = \frac{1}{2}$  eq  $\frac{y_{n+1}}{f_n(e^{\frac{n+1}{2}})} = \frac{1}{2}$  eq  $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$  on a  $f_n(e^{\frac{n+1}{2}}) \leq y_n$  d'où

$y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$  c) En écrivant l'inégalité précédente successivement pour  $1, 2, 3, \dots, n-1$  et en prenant le produit terme à terme on

obtient le résultat  $0 \leq y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$  et  $y_1 = \frac{1}{2e}$

4) a)  $I_1 = \frac{-2}{e} + 1$  b)  $0 \leq f_n(x) \leq y_n$  donc  $0 \leq \int_1^e f_n(x) dx \leq \int_1^e y_n dx$  donc  $0 \leq I_n \leq (e-1)y_n$ ,  $\lim I_n = 0$  car  $\lim y_n = 0$