L.S.M Elmesaadi Elfahs	Devoir de contrôle n°3 Mathématiques	Prof : Ben Hmidene Tarak	
2014-2015		4éme math	Durée 2 H

Exercice n° 1 (4points)

Répondre par vrai ou faux avec justification

1) pour tout $n \in IN$ $n+1$ et n^2+2 sont premiers entre eux

2) pour tout $n \in IN$ $2^n+3^n \equiv 5^n$ (mod6)

3) on pose pour tout $x \geq 1$ $G(x) = \int_0^{\ln x} e^{-t}\sqrt{t}\,dt$ alors $G'(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^2}$

4) La fonction f définie sur IR par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est paire

Exercice n° 2 (6points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A(1,0,0) ; B(0,2,0) ; C(0,0,3) et $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

1)a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

c) Montrer que ΩABC est un tétraèdre et calculer son volume

2) Soit S la sphère de centre Ω et passant par O

a) Déterminer une équation cartésienne de S

b) Vérifier que S passe par A ; B et C .

c) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport -2

a) Déterminer l'expression analytique de h

b) Déterminer une équation cartésienne de S'= h (S) et en déduire $S' \cap (ABC)$

Exercice n° 3 (5points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $44x-5y=2$

1)a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de l'équation 44x−5y=1

c)En déduire une solution particulière de l'équation 44x-5y=2

2) On considère les entiers n, a ,b et c tels que n=4a+2=11b+2=5c+4

a)Montrer qu'il existe un entier p tel que a=11p en déduire que 44p-5c=2

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ *le système* $\begin{cases} n \equiv 2[4\ ] \\ n \equiv 2[11] \\ n \equiv 4[5] \end{cases}$

Exercice n°4(5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{(1-x)}$

Soit (ζ_f) *sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ *puis calculer sa fonction dérivée* $f'(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Tracer (ζ_f)

2/ Soit n un entier naturel non nul on considère l'intégrale I_n *définie par* $I_n = \int_0^1 x^n e^{(1-x)} dx$

a) *A l'aide d'une intégration par partie montre que* $I_1 = e - 2$
b) *Montrer que pour* $n \in \mathbb{N}^* : I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$
c) *Calculer l'aire de la partie du plan limité par* (ζ_f)*, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1*

3/a) Montrer que pour tout nombre réel x de $[0,1]$ *et pour tout n un entier naturel non nul on a* $x^n \le x^n e^{(1-x)} \le e.x^n$

b) En déduire un encadrement de I_n *puis déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice n°4(5 points)

I) Soit g(x)= $e^{x}-x-1$.

Etudier les variations de g et en déduire que $\forall\ x\in IR,\ e^{x}-x-1\geq 0$.

II) On considère la fonction f définie sur IR par: f(x)= $\begin{cases}\dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1} & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un R.O.N $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) Montrer que f est continue en 0.

On admet que f est dérivable en 0 et que f' (0) = $\frac{1}{2}$

3) a) Vérifier que pour tout $x\neq 0$ ***, on a: f '(x)=*** $\dfrac{e^{x}g(x)}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la droite d'équation y=x est une asymptote à (C).

d) Tracer (C).

4) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer la courbe (C') de f^{-1}.

5) Pour tout entier naturel non nul n on pose $U_n=f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Montrer que la suite (U_n) ***est décroissante puis déterminer*** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.